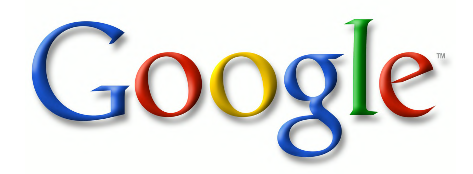
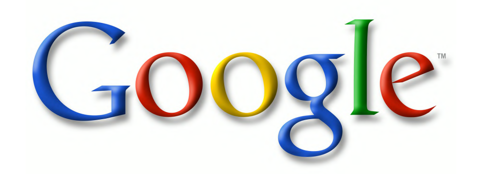
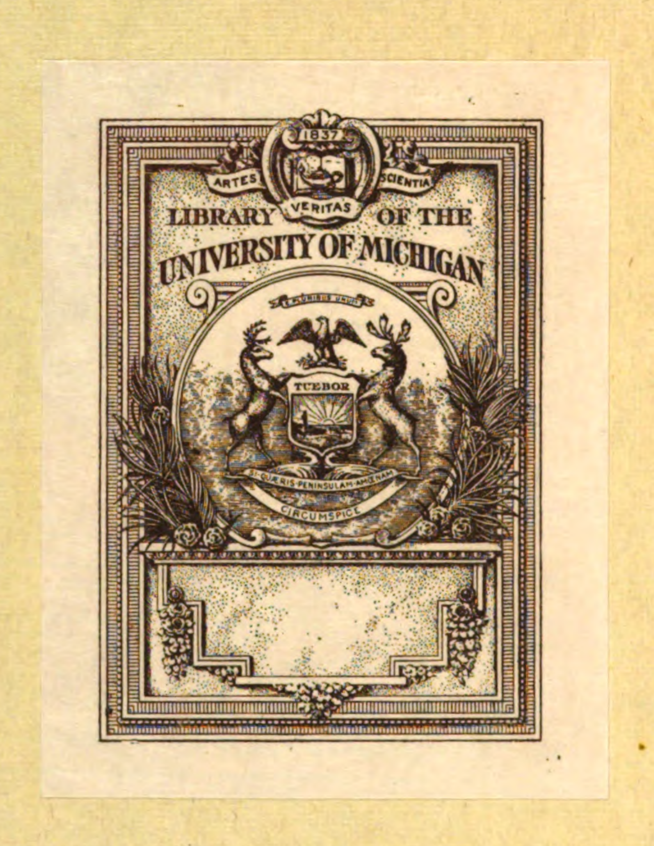
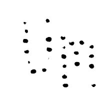



Google


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Physikalische Zeitschrift

Herausgegeben von



Dr. H. TH. SIMON und Dr. P. DEBYE

o. ö. Professor an der Universität Göttingen. o. ö. Professor an der Universität Göttingen.

Schriftleitung:

H. TH. SIMON

SIEBZEHNTER JAHRGANG

1916

Mit zwölf Tafeln

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1916

Harr v. 17 # 1-4

Vol. 17 complete, T+I.

Physikalische Zeitschrift
1916
volume 17.

17.

Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (T.) = Tagesereignisse, (Z. B.) = Zusammenfassende Bearbeitung.



M.

N.

O.

S.

T.

U.

V.



W.

Z.

Namensverzeichnis der „Personalien".

(Fettdruck = Kriegsbeteiligung.)

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. 1. Januar 1916. Redaktionsschluß für No. 2 am 8. Januar 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

An unsere Leser!

Die Schriftleitung der Zeitschrift ist wieder dauernd von Professor H. Th. Simon übernommen worden. Herr Dr. Hans Busch, der sie vom 1. Juli 1913 ab bis zum Kriegsausbruch besorgt, und Herr Prof. Dr. Max Born, der ihm vom 1. Mai 1914 ab zur Seite gestanden, ihn dann vom Kriegsausbruch bis Juni 1915 vertreten hat, stehen im Felde. Sie sehen sich aber auch im kommenden Frieden durch äußere Verhältnisse gezwungen, ihre Tätigkeit in der Leitung der Zeitschrift einzustellen. Es ist uns ein Bedürfnis auch an dieser Stelle den Dank zu herzlichem Ausdruck zu bringen, den die Zeitschrift der aufopfernden und so wirksamen Tätigkeit der beiden ausscheidenden Kollegen und Freunde schuldet. Wir freuen uns, daß wir uns auch nach der äußeren Trennung innerlich immer eng mit ihnen verbunden fühlen dürfen.

Herausgeber und Verlag der Physikalischen Zeitschrift

H. Th. Simon. P. Debye. S. Hirzel.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Frage der isotopen Elemente. II.

(Antwort auf die Erwiderung von G. v. Hevesy und F. Paneth.)

Von K. Fajans.

Der letzte Beitrag[1]) von v. Hevesy und Paneth zur obengenannten Frage veranlaßt mich zu folgenden Bemerkungen.

1. Ich bin mit v. Hevesy und Paneth einverstanden, daß die in meiner vorigen Arbeit[2]) vertretene Auffassung, eine definierte Potentialdifferenz stelle sich beim Eintauchen eines Metalles in die Lösung seines Isotopen erst nach der erfolgten gleichmäßigen Verteilung der beiden Elemente zwischen der äußeren Metallschicht und der Lösung ein — unberechtigt war. Wie die genannten Autoren mit Recht betonen, wird wegen der Gleichheit der Normalpotentiale der Isotopen die Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichtes beim konstanten Potentialsprung vor sich gehen.

Dieser in der Betrachtung einer elektrochemischen Spezialfrage mir unterlaufene Irrtum ändert aber nicht das Geringste an der Berechtigung meiner Kritik der von v. Hevesy und Paneth in ihrer ersten Arbeit[1]) vertretenen

1) Diese Zeitschr. **16**, 45—51, 1915. Im folgenden bezeichnet mit Ph. II.
2) Diese Zeitschr. **15**, 935, 1914.

1) Diese Zeitschr. **15**, 797—805, 1914. Im folgenden bezeichnet mit Ph. I. Ber. d. D. chem. Ges. **47**, 2784 bis 2786, 1914. Im folgenden bezeichnet mit B.

allgemeinen Auffassung der Isotopen. Zur völligen Klarlegung der Frage möchte ich hier auf einige Punkte kurz eingehen.

2. Der Hauptgrund zu meiner Kritik bildete der von v. Hevesy und Paneth erhobene Anspruch, durch ihre Versuche den neuen Beweis erbracht zu haben, daß isotope Elemente chemisch nicht nur außerordentlich ähnlich sind — das konnte man schon auf Grund früherer Beobachtungen schließen —, sondern identisch, oder wie sie es auch nennen chemisch völlig vertretbar[1]). In diesem Anspruch mußte befremden, daß es für möglich gehalten wird, auf experimentellem Wege eine Entscheidung zwischen außerordentlicher Ähnlichkeit und Identität zweier Stoffe in bezug auf irgendeine Eigenschaft zugunsten der letzteren Alternative zu treffen. Denn wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler kann man ja auf experimentellem Wege nicht mehr feststellen, als daß ein zwischen den zwei Stoffen etwa bestehender Unterschied kleiner als der Beobachtungsfehler ist.

Dessen ungeachtet haben v. Hevesy und Paneth geglaubt, eine solche Entscheidung auf Grund folgender Überlegungen und Versuche getroffen zu haben. Sie heben hervor, daß nach der Nernstschen Formel der Potentialsprung an einer Elektrode abhängig ist von der Konzentration der betreffenden Ionen und daß er nur durch Zusatz von diesen Ionen, nicht von anderen geändert werden kann[2]). Sie fanden nun experimentell, daß der Zusatz von Bleiionen auf den Potentialsprung einer $RaDO_2$-Elektrode denselben Einfluß ausübt, als der Zusatz von *RaD*-Ionen hervorrufen würde, und daß die Zersetzungsspannung einer *RaE*-Lösung durch Wismut-Ionen ebenso beeinflußt wird, wie durch eine entsprechende Änderung der Konzentration der *RaE*-Ionen. Daraus folgern sie, daß die isotopen Elemente chemisch als derselbe Stoff angesehen werden müssen[3]), und daß es erforderlich ist, den Begriff der chemischen Individualität anders als bis jetzt zu definieren, um bei der Betrachtung zweier Elemente von verschiedenem Atomgewicht als chemisch völlig vertretbar nicht in Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu geraten[4]).

3. In dieser Überlegung war vor allem unrichtig die Voraussetzung, daß nach der Nernstschen Formel allgemein nur durch Zusatz desselben Ions eine Änderung des Potentialsprunges erfolgen kann. Dies gilt nur in den Fällen, wo durch den Zusatz die Zusammensetzung des Metalls der Elektrode nicht geändert wird. Es genügt aber das Ion eines Metalles zuzufügen, das mit dem Metall der ursprünglichen Elektrode feste Lösungen geben kann, um eine völlig andere Zersetzungsspannung zu bekommen. Ich konnte denn auch in der Tat zeigen, daß man einen Teil der Versuche von v. Hevesy und Paneth erklären kann, wenn man analog, wie bei der Deutung der Untrennbarkeit der Isotopen bei Fällungsversuchen, die naheliegenden Annahmen macht, daß die isotopen Metalle (oder ihre Superoxyde) im festen Zustande ineinander löslich sind und daß ihre Normalpotentiale innerhalb der Versuchsfehler gleich sind[1]).

Es erschien mir umso notwendiger auf diese Verhältnisse hinzuweisen, als v. Hevesy und Paneth die Neuheit des von ihnen erstrebten Beweises auf folgende Weise zu begründen suchten. Sie behaupteten, daß die vergeblichen Trennungsversuche durch Fällungen für die „Vertretbarbeit" nicht beweisend wären, weil sie sich durch Gleichheit der Löslichkeit der Verbindungen der Isotopen und Bildung fester Lösungen erklären lassen[2]). Da nun ihre elektrochemischen Versuche für die Vertretbarkeit beweisend sein sollen, so mußte man per Analogie schließen, daß sie nach Meinung von v. Hevesy und Paneth auf die Gleichheit der Normalpotentiale und Bildung fester Lösungen nicht zurückführbar seien. In Anbetracht dieser Äußerungen konnte man auch den von v. Hevesy und Paneth soviel gebrauchten Ausdruck „Vertretbarkeit" nicht anders auffassen, als gleichbedeutend mit völliger chemischer Identität, wenn er nicht ganz unklar sein sollte. Es war deshalb wohl kaum unberechtigt, wenn ich in meiner Arbeit der Befürchtung Ausdruck gab, der Begriff der „Vertretbarkeit" könnte zu irrtümlichen Vorstellungen Veranlassung geben.

Nicht minder irreführend war es, daß v. Hevesy und Paneth, wie oben erwähnt wurde, es u. a. deshalb für notwendig gehalten haben, den Begriff der chemischen Individualität neu zu definieren, um thermodynamischen Widersprüchen zu entgehen. Ich diskutierte aus diesem Grunde die bei ihren Versuchen obwaltenden thermodynamischen Verhältnisse, und es dürfte wohl aus meiner Arbeit klar hervorgehen, daß man bei diesen Versuchen in thermodynamischer Hinsicht zwei Fälle unter-

1) Ph. I 799, 2. Spalte; 804, 1. Spalte.
2) Ph. I 804, 1. Spalte.
3) B. 2786.
4) Ph. I 804, 2. Spalte.

1) Daß auch die Definiertheit des Potentialsprunges einer Elektrode: Metall *A*/Ionen *B* im Falle der isotopen Elemente *A* und *B* auch eine Konsequenz dieser Annahmen ist, haben v. Hevesy und Paneth in ihrer zweiten Arbeit gezeigt.
2) Ph. I 799, 2. Spalte.

scheiden muß: 1. wenn zwischen der äußeren Schicht der Metallelektrode und der Lösung Gleichgewicht besteht, was mit der Bedingung gleichbedeutend ist, daß die Konzentrationen der Isotopen in diesen beiden Phasen im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Dann darf man ein Gemisch der Isotopen ohne Bedenken als ein Element betrachten und die beim Elektrodenvorgang geleistete oder gewonnene Arbeit ist die gleiche, wie wenn reine Isotopen vorliegen; 2. wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. In diesem Falle ist das System thermodynamisch undefiniert, und man wird deshalb bei der thermodynamischen Betrachtung eines Gemisches von Isotopen als ein Element auf Widersprüche mit dem zweiten Hauptsatz stoßen müssen, wie man auch den Begriff der chemischen Individualität definieren mag. Thermodynamische Gründe liegen also, wie ich am Schlusse meiner Arbeit erwähnte, für eine Änderung des Begriffes der chemischen Individualität nicht vor.

4. Ihre Erwiderung fangen v. Hevesy und Paneth mit folgendem Passus an: „Wir haben vor einiger Zeit durch elektrochemische Versuche gezeigt, daß man ebenso wie die Fällungsreaktionen auch das elektrochemische Verhalten der Isotopen am einfachsten so darstellen kann, daß man sie trotz ihrer thermodynamischen Verschiedenheit chemisch als ein und denselben Stoff betrachtet. Die hierdurch vorgeschlagene Erweiterung des Begriffes der chemischen Individualität ist zunächst bloß die einfachste Methode der Darstellung dieser neuen Erscheinungen usw." Es verschwindet hier also vollkommen der früher betonte Gegensatz zwischen Fällungsreaktionen und elektrochemischen Versuchen; die Betrachtung eines Gemisches der Isotopen als ein Element und die Erweiterung des Begriffes der chemischen Individualität werden nicht mehr als durch die elektrochemischen Versuche zum erstenmal bewiesene Notwendigkeiten, sondern als die einfachste Darstellungsmethode erklärt.

Gegen diese neue Auffassung der Versuchsergebnisse von v. Hevesy und Paneth habe ich nichts einzuwenden, doch dürfte es aus dem Obigen klar hervorgehen, daß sie in ihrer ersten Arbeit etwas ganz anderes gezeigt zu haben glaubten. Ich sehe mich aus dem Grunde genötigt, auf diese Änderung der Auffassung von v. Hevesy und Paneth, die sie selbst mit keinem Worte erwähnen, hinzuweisen, weil diese Autoren meine dem früheren Anspruch geltende Kritik, wie es scheint, auf die neue Fassung übertragen und folgenden Gegensatz konstruieren. Auf der einen Seite wird die von mir gegebene Betrachtung eines Gemisches von Isotopen als verschiedener im festen Zustande mischbarer Elemente mit den gleichen Eigenschaften so hingestellt, als ob ich sie für die einzig mögliche erklärt hätte; auf der anderen Seite stellen sie „ihre neue" Betrachtungsweise eines Gemisches der Isotopen als ein Element hin[1]). Sie kommen weiter zu dem Resultat, daß die zwei Betrachtungsweisen sich nur im Ausdruck unterscheiden und geben deshalb der „ihrigen" als der einfacheren den Vorzug. Mit dieser Darstellung kann ich mich weder in historischer noch in sachlicher Hinsicht einverstanden erklären.

Die Betrachtung eines Gemisches der Isotopen als ein Element ist so alt, wie die Feststellung der Existenz chemisch untrennbarer Elemente[2]), aus der sie sich ja von selbst ergab, und sie wurde für die Darstellung der Fällungsversuche wiederholt angewandt[3]). Eine besonders große Rolle spielte diese Betrachtung einer Gruppe von Elementen als ein Element von mittlerem Atomgewicht bei der von Soddy[4]) und mir[5]) durchgeführten Einreihung der Radioelemente in das periodische System. Es ist mir deshalb nicht verständlich, weshalb von v. Hevesy und Paneth diese Betrachtungsweise als die ihrige und als neu bezeichnen und dies um so weniger, als sie doch selbst an anderer Stelle[6]) ihrer letzten Arbeit nur beanspruchen, diese für Fällungsreaktionen schon üblich gewesene Betrachtungsweise auf das elektrochemische Verhalten der Isotopen übertragen zu haben. Ich erkenne aber gern an, daß v. Hevesy und Paneth sich insofern ein Verdienst um diese Betrachtungsweise erworben haben, als sie ihr eine präzisere Fassung gegeben haben durch die Feststellung, in welcher Weise dabei die Nernstsche Formel usw. anzuwenden sind (vgl. auch 5).

Weiterhin darf auch nicht vergessen werden, daß die Feststellung, zwei Elemente seien chemisch untrennbar, oder das Gemisch zweier Elemente verhält sich bei einem Vorgang wie ein Element, unbefriedigend ist, solange man nicht angibt, welche Eigenschaften zwei Elemente besitzen müssen, um ein derartiges Verhalten aufzuweisen. Die Absicht, diese vorher nicht diskutierte Frage zu beantworten und die in 3. genannten Gründe führten naturgemäß zu der von mir gewählten Darstellungsweise. Es dürfte wohl klar sein, daß eine solche Unter-

1) Ph. II 49, Spalte 1 und 50.
2) Die Geschichte der Erforschung dieser Erscheinung ist in einem in dieser Zeitschrift 16, 461, 1915 erschienenen zusammenfassenden Bericht geschildert.
3) Vgl. z. B. K. Fajans und P. Beer, Ber. d. D. chem. Ges. 46, 3494, 1913.
4) Chem. News 107, 97, 1913.
5) Diese Zeitschr. 14, 136, 1913.
6) Ph. II 45.

suchung, weshalb sich zwei Elemente wie eines verhalten, mit der Feststellung, daß es so ist, sich nicht deckt, wie v. Hevesy und Paneth meinen, sondern sie ergänzt. Es ist also ebenso unangebracht die Frage zu stellen, welche von den zwei Darstellungsweisen einfacher ist, wie unberechtigt, zwischen ihnen eine Wahl zu treffen.

5. In einer Hinsicht gehen v. Hevesy und Paneth in der Betrachtung eines Gemisches von Isotopen als ein Element weiter als es bis jetzt üblich war. Bei den negativen Trennungsversuchen durch Fällungen, Verdampfung, Elektrolyse war das Verhältnis der Konzentration der Isotopen in den sich berührenden Phasen immer gleich, so daß in der Tat in jeder Hinsicht das System wie ein Element sich verhielt. v. Hevesy und Paneth wenden aber diese Betrachtungsweise z. B. auf den Fall an, daß ein Metall in die Lösung seines Isotopen eingetaucht wird, wobei in der ersten Zeit, in der der Austausch der zwei Elemente zwischen den sich berührenden Phasen stattfindet, kein Gleichgewicht herrscht. Wie v. Hevesy und Paneth zeigten, läßt sich zwar der Potentialsprung in einem solchen System aus der Nernstschen Formel ableiten, wenn man als Ionenkonzentration die Summe der Konzentrationen der isotopen Ionen einsetzt. Damit ist aber auch die Leistungsfähigkeit dieser Betrachtungsweise erschöpft, denn thermodynamisch ist ja ein solches System undefiniert, und solange an der Grenzfläche Metall/Lösung der mit Abnahme der freien Energie vor sich gehende Austausch stattfindet, würde man z. B. zu ganz falschen Resultaten gelangen, wenn man für die Berechnung der freien Energie der Überführung des Metalls in den Ionenzustand die im Falle eines einheitlichen Elementes geltende Methode anwenden würde, und den Potentialsprung mit der Coulombzahl multiplizieren würde. Der thermodynamische Sinn der Nernstschen Formel geht also dabei verloren. Es versteht sich auch von selbst, daß man bei dieser Betrachtungsweise auf die Kenntnis der Verteilung der Isotopen zwischen die angrenzenden Phasen verzichtet. Man wird also diese vereinfachte Betrachtungsweise in einem System, wo der Austausch der Isotopen zwischen zwei Phasen noch zu keinem Gleichgewichtszustand geführt hat, nur mit Vorsicht anwenden dürfen.

6. Was schließlich die Frage anbelangt, ob die chemischen Eigenschaften der Isotopen vollkommen identisch oder nur außerordentlich ähnlich sind, so sei auf eine kürzlich erschienene Arbeit[1]) hingewiesen, in der ich diese Frage einer theoretischen Diskussion unterzogen habe, und zwar auf Grund des Rutherford-Bohrschen Atommodells und der modernen Theorie fester Körper. Als Hauptresultat ergab sich dabei, daß im allgemeinen zwischen den Isotopen auch in den chemischen Eigenschaften gewisse, wenn auch sehr kleine Unterschiede anzunehmen sind.

Trotz diesem Resultat bin ich aber mit v. Hevesy und Paneth völlig einverstanden, daß, solange diese Unterschiede außerhalb der Nachweisbarkeit liegen, es am einfachsten ist, für alle praktischen Zwecke, wie es ja bis jetzt immer üblich war, die chemischen Eigenschaften der Isotopen als gleich zu betrachten und ein Gemisch der Isotopen als ein Element. Es dürfte aber, um Mißverständnissen vorzubeugen, angebracht sein, die Eigenschaften der Isotopen nicht als identisch, sondern als gleich zu bezeichnen. Der experimentellen Forschung erwächst die wichtige Aufgabe, die Grenzen, innerhalb welcher diese Gleichheit besteht, festzulegen.

(Eingegangen 6. Oktober 1915.)

1) K. Fajans, Elster-Geitel-Festschrift, S. 622, 1915.

Zur Frage der isotopen Elemente. III.

(Erwiderung auf den vorstehenden Artikel von K. Fajans.)

Von G. v. Hevesy und F. Paneth.

Mit Freude entnehmen wir der vorstehenden Mitteilung von K. Fajans, daß er seine Ansicht über die Definiertheit des von uns gemessenen Elektrodenpotentials geändert hat; damit verschwindet, wie wir in unserer ersten Entgegnung ausführlich gezeigt haben, der einzige sachliche Gegensatz zwischen unseren Anschauungen.

Mit geringerer Freude sehen wir, daß Dr. Fajans dieses Problem jetzt nur mehr für eine „elektrochemische Spezialfrage" hält. Wir meinen, daß jeder Leser seiner ersten Kritik den Eindruck gewonnen hat, daß auch Fajans damals, als er uns im Unrecht glaubte, dieser Frage — der Natur der Sache entsprechend — entscheidende Bedeutung beimaß; hat er doch fast den ganzen Inhalt seiner Beweisführung, vom Diffusionsversuch angefangen, ihr gewidmet und war es doch der einzige Punkt, wo er uns eine tatsächliche Unrichtigkeit nachweisen zu können glaubte. Wir haben keinen Anlaß, unsere Ansicht über die Bedeutung dieses Problems zu ändern, halten also seine erste Kritik damit im wesentlichen für erledigt und sind, was die zweite Kritik betrifft, vor allem nicht mit der Teilung des Stoffes einverstanden; daß Fajans

die „eine Hinsicht, in der wir weiter gehen, als es bis jetzt üblich war" nur knapp vor Schluß seines obigen Artikels erwähnt, um vorher erklären zu können, daß wir gar nichts Neues gebracht haben. Erst wenn bewiesen ist, daß man bei der Benützung der Nernstschen Formel auch dann zu richtigen Resultaten kommt, wenn die beiden Isotope nicht gleichmäßig gemischt sind, darf man behaupten, daß sie einander bei allen chemischen und elektrochemischen Reaktionen vertreten können; erst dann darf man den Vorschlag machen, sie chemisch als dasselbe Element anzusehen. Der Punkt ist also nicht so unwichtig, daß sich diese Anordnung des Stoffes durch Fajans rechtfertigen ließe.

Soddy hat sich die Frage nicht gestellt, wie sich ein System verhält, in dem die Isotope nicht gemischt, sondern nach Phasen getrennt vorliegen, und erst nachdem es uns gelungen war Radium D in sichtbaren Mengen zu gewinnen, konnte der erste Fall dieser Art experimentell studiert werden. Wir hielten diese Ergänzung für ebenso notwendig, wie die Präzisierung, in welcher Weise die Formeln der Chemie und Elektrochemie auf Isotope anzuwenden sind, hoffen aber, daß außer Fajans niemand den Eindruck gewonnen hat, daß wir den Grundgedanken der Isotopie uns zuschreiben. Hier ist selbstverständlich einzig und allein Frederick Soddy zu nennen und es ist wohl kaum möglich das noch deutlicher hervorzuheben, als wir es in sämtlichen Arbeiten über dieses Gebiet getan haben. Wenn wir an einzelnen Stellen von „unserer Darstellung" im Gegensatz zu der von Fajans sprechen, so ist das darauf zurückzuführen, daß Fajans nicht Soddy, sondern uns angegriffen hat, und schließlich geht sie auch in der oben erwähnten Beziehung über das hinaus, was Soddy ausgesprochen hat. Daß sie auch die Bezeichnung „neu" darum in einem gewissen Sinne verdient, ergibt sich wohl am deutlichsten aus dem Angriff, den Dr. Fajans ihr gewidmet hat; wäre es so selbstverständlich gewesen, daß das Potential von Isotopen definiert ist, so hätte er es wohl kaum bestritten.

Wir haben nicht die Absicht auf alle neuen Erörterungen von Dr. Fajans einzugehen, da sich die Antwort oft von selbst versteht; nur einige Mißverständnisse möchten wir noch aufklären.

Die Entscheidung, ob zwei Stoffe identisch sind, ist natürlich auch nach unserer Ansicht nur außerhalb der Fehlergrenzen möglich; trotzdem nennt jeder Chemiker unbedenklich zwei Stoffe identisch, die bei seinen Reaktionen keinen Unterschied erkennen lassen. Wir haben nun eine Versuchsanordnung — Messung des Elektrodenpotentials zwischen reinen Isotopen — angewendet, die die Betätigung der chemischen Individualität viel übersichtlicher erkennen läßt, als die dem Verdacht von Adsorptionsvorgängen ausgesetzten Fällungen von Isotopen gemengen, und nach ihrem Ausfall erschlossen, daß Radium D und Blei tatsächlich — nach Soddys, nicht unserm — Ausdruck „chemisch praktisch identisch" sind. Als Beweis dafür haben wir angesehen, daß bei Zusatz von Pb-Ionen das Potential sich in der durch die Nernstsche Formel bestimmten Weise ändert, nicht, wie Dr. Fajans meint, daß überhaupt eine Änderung des Potentials eintrat.

Wenn Dr. Fajans statt des Soddyschen Ausdrucks „chemisch identisch" lieber „chemisch gleich" sagen will, ist gewiß nicht viel dagegen einzuwenden, nur scheint uns der Vorteil gering, da man bei Isotopen kaum besser von Grenzen der Gleichheit, als von Grenzen der Identität sprechen kann. Wenn zwei Dinge verschieden sind, so sind sie auch nicht innerhalb noch so enger Grenzen gleich, man kann sie nur wie gleich betrachten; man tut der deutschen Sprache Gewalt an, wenn man von Grenzen spricht, „innerhalb welcher eine Gleichheit besteht". Wenn zwei Dinge aber als „vertretbar" bezeichnet werden, so geht aus dem deutschen Sprachgebrauch klar hervor, daß sie dann niemals gleich sind, sondern einander nur in bestimmten Wirkungen, in einem bestimmten Geltungsbereich ersetzen können[1]). „Isotope Atome sind chemisch und elektrochemisch vertretbar" heißt also: Innerhalb der verlangten Versuchsgenauigkeit bringen n Atome der einen Art dieselbe Wirkung auf Potentialsprung, Löslichkeit usw. hervor, wie n Atome der andern Art. Die Grenzen ihrer Vertretbarkeit sind so eng, daß bisher — auch bei unsern letzten Versuchen mit Radium G und Blei[2]) — keine Unterschiede zu beobachten waren, aber auch wenn einmal bei sehr verfeinerten Versuchsanordnungen solche erkennbar sein werden, wird man innerhalb der Genauigkeit, die bei der überwiegenden Mehrzahl der chemischen Versuche erreicht werden kann, Isotope als chemisch und elektrochemisch völlig vertretbar bezeichnen können. Daß Dr. Fajans diesen Ausdruck immer noch für irreführend hält, bedauern wir um so mehr, als die einzige „irrtümliche Vorstellung", die unseres Wissens bisher bei der Diskussion dieser Verhältnisse

1) Man denke z. B., um sich den Gebrauch des Wortes in Erinnerung zu rufen, an die „Vertretung" des Professors durch seinen Assistenten.

2) „Über galvanische Ketten aus Blei-Isotopen", Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **124**, 381, 1915.

vorgekommen ist, gerade aus seiner Ablehnung des Begriffs der Vertretbarkeit im Fall unvollständiger Mischungen entstanden zu sein scheint.

Wir sind vollkommen zufrieden, wenn Dr. Fajans uns jetzt zugibt, daß man zu richtigen Resultaten kommt, indem man das Massenwirkungsgesetz und die Nernstsche Formel bei vollständiger und unvollständiger Mischung der Isotopen in der von uns vorgeschlagenen einfachen Weise schreibt. Einen Zwang, sie so zu schreiben, wollten wir natürlich auch in unserer ersten Arbeit nicht auf ihn ausüben, ebensowenig wie einen Zwang, den Begriff der chemischen Individualität auf Isotope auszudehnen. Beweisen läßt sich natürlich nur, daß eine solche Vorstellungsweise richtig und zweckmäßig ist, ihre Annahme oder Ablehnung steht jedem frei. In diesen Blättern haben wir uns im wesentlichen darauf beschränkt, experimentell und theoretisch die Zulässigkeit dieser Schreibweise zu zeigen; die Frage nach der zweckmäßigsten Definition des Elementbegriffs, die damit zusammenhängt, haben wir nur kurz berührt. Die zahlreichen Gründe, die für den Chemiker dafür sprechen, das „chemische Element" so zu definieren, daß Isotope als Arten desselben Elementes, nicht als verschiedene Elemente erscheinen, werden von dem einen von uns demnächst in einer chemischen Zeitschrift näher ausgeführt werden; für den Physiker, speziell den Radiologen, hat diese Frage nicht viel Bedeutung, da ihn die Unterschiede der Isotopen meist mehr interessieren, als die große Ähnlichkeit ihrer chemischen Eigenschaften, und auch der Theoretiker wird es gewiß in der Regel vorziehen, Isotope als verschiedene Stoffe in seine Rechnungen einzusetzen, da für ihn auch Unterschiede, die gegenwärtig unter der Grenze der Nachweisbarkeit liegen, von Wichtigkeit sind[1]). Die Elementdefinition des Chemikers aber war stets eine empirische, auf Unzerlegbarkeit durch die jeweiligen experimentellen Mittel gegründete; es empfiehlt sich durchaus, dieselbe Definition beizubehalten, den Elementbegriff also auf Isotope auszudehnen; für den Physiker und Theoretiker erwächst dadurch keine weitere Unbequemlichkeit, als daß er sie nicht mehr als verschiedene „chemische Elemente" bezeichnen darf. Von Widersprüchen gegen den zweiten Hauptsatz kann natürlich nicht die Rede sein, sowie der Begriff des chemischen Elements auf seine analytisch-chemische Bedeutung beschränkt und ausdrücklich von der Thermodynamik losgelöst wird, wie wir dies vorgeschlagen haben.

Wir wollen es vermeiden, uns weiter auf das Gebiet dieser Definitionsfrage zu begeben, da die Gefahr naheliegt, daß trotz der Wichtigkeit, die die Auswahl zweckmäßiger Definitionen für die Wissenschaft hat, diese Polemik dadurch das Aussehen eines bloßen Wortstreites bekommt. Wir wollen uns völlig damit zufrieden geben, daß in der mit ja oder nein zu entscheidenden „elektrochemischen Spezialfrage", die den Inhalt von Fajans' erster Kritik bildete, unser Standpunkt sich als der richtige herausgestellt hat.

1) Wenn man aber der Einfachheit wegen, wie dies ja auch Dr. Fajans tut, Isotopen gleiche Normalpotentiale usw. zuschreibt, ist auch vom Standpunkt des Theoretikers nichts mehr dagegen einzuwenden, die Nernstsche Formel auch bei unvollständiger Mischung in der von uns vorgeschlagenen einfachen Form zu schreiben. Es ist unberechtigt, dann zu klagen, daß „ihr thermodynamischer Sinn dabei verloren geht", es ist vielmehr als Erweiterung zu betrachten, daß sie auch in einem der thermodynamischen Behandlung schwerer zugänglichen Fall ihre Gültigkeit behält. Bei kinetischer Ableitung und Interpretation bleibt ihr Sinn vollkommen unverändert erhalten, sie ist nur von universellerer Gültigkeit, als man nach der üblichen thermodynamischen Ableitung erwarten konnte.

(Eingegangen 9. November 1915.)

Über die Verzweigungsstelle der *Th*-Reihe.

Von Stanislaw Loria.

Das interessante Problem der Verzweigung radioaktiver Umwandlungsreihen bildet seit längerer Zeit ein Thema lebhafter Diskussion und kann noch nicht als endgültig gelöst betrachtet werden.

Auf Grund der Versuche über die Reichweite der vom ThC ausgesandten α-Teilchen haben Marsden und Barratt[1]) erkannt, daß im Zerfallsschema der *Th*-Reihe hinter der *Th*-Emanation eine Verzweigung eintritt und schlugen zuerst das Schema:

$$ThEm \xrightarrow{\alpha} ThA \xrightarrow{\alpha} ThB \begin{array}{l} \xrightarrow{\beta} ThC_1 \xrightarrow{\alpha\,(4{,}8\,\mathrm{cm})} \\ \xrightarrow[\beta]{} ThC' \xrightarrow[\beta]{} ThC_2 \xrightarrow{\alpha\,(8{,}6\,\mathrm{cm})} \end{array} ThD \xrightarrow[\beta]{} \qquad (1)$$

vor.

Spätere Versuche von Marsden und Darwin[2]) führten jedoch zum Schluß, daß die Verzweigungsstelle erst beim ThC anzunehmen ist.

Der kleinere Teil der ThC-Atome (35 Proz.) soll nämlich unter Aussendung der α-Strahlen von der Reichweite 4,8 cm in ThD, der größere

1) E. Marsden und T. Barratt, Proc. Phys. Soc. London, 24. Nov. 1911; diese Zeitschr. 13, 193, 1912.

2) E. Marsden u. C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A 87, 17, 1912.

Teil (65 Proz.) unter Aussendung der β-Strahlen in ThC_2 umgewandelt werden. Das den Tatsachen am besten entsprechende Schema wäre demnach folgendermaßen zu konstruieren:

$$ThEm \xrightarrow{\alpha} ThA \xrightarrow{\alpha} ThB \xrightarrow{\beta} ThC \begin{cases} \xrightarrow[35\ \text{Proz.}]{\alpha} ThD \xrightarrow{\beta\gamma} ? \\ \xrightarrow[65\ \text{Proz.}]{\beta} ThC_2 \rightarrow ? \end{cases} \qquad (2)$$

Fajans[1]) zeigte, daß dieses Zerfallsschema auch auf die *Ra*-Reihe angewendet werden kann, wenn man nur annimmt, daß anstatt des Verhältnisses 35 : 65 das Verhältnis 3 : 10000 für die auf doppeltem Wege zerfallenden *C*-Atome maßgebend ist. Der entsprechende Teil der *Ra*-Reihe soll nämlich nach Fajans von der Form:

$$RaEm \xrightarrow{\alpha} RaA \xrightarrow{\alpha} RaB \xrightarrow{\beta} RaC \begin{cases} \xrightarrow[0{,}03\ \text{Proz.}]{\alpha} RaC_2 \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow[99{,}97\ \text{Proz.}]{\beta} RaC' \xrightarrow{\alpha} RaD \rightarrow \end{cases} \qquad (2')$$

sein.

Ungefähr zu derselben Zeit teilte Frl. L. Meitner[2]) die Resultate einiger Versuche mit, aus denen hervorzugehen schien, daß die Produkte ThC_1 und ThC' auf chemischem Wege getrennt werden können. Sie schlug also eine Modifikation der Reihe (1) in der Gestalt

$$ThB \begin{cases} \xrightarrow{\beta} ThC_1 \xrightarrow{\alpha} ThD \xrightarrow{\beta\gamma} \\ \xrightarrow{\beta} ThC' \xrightarrow[\beta]{} ThC_2 \xrightarrow[\alpha]{} \end{cases} \qquad (3)$$

vor.

Später, nachdem durch die Fortschritte der Isotopentheorie der Überblick über den Zusammenhang der Radioelemente wesentlich erleichtert worden war, konnten Marsden und Wilson[3]) und unabhängig von ihnen auch Beer und Fajans[4]) nachweisen, daß der Versuch von Frl. L. Meitner sich in einfacher Weise auch anders deuten läßt. Es ist nämlich auf Grund der Wiederholung und Analyse des genannten Versuchs gezeigt worden, daß die vermeintliche Trennung des ThC_1 und ThC' nur scheinbar war und auf Störungen sekundärer Natur zurückzuführen ist.

Damit war die aus theoretischen Gründen willkommene Analogie beider Umwandlungsreihen aufrecht erhalten. Ihre theoretische Bedeutung tritt besonders klar zutage, wenn man mit Hilfe der Soddy-Russell-Fajansschen Verschiebungsregeln die einzelnen Glieder beider Reihen dem periodischen System zuzuordnen sucht. Man bekommt nämlich:

$$\underset{IV}{ThB} \rightarrow \underset{V}{ThC} \begin{cases} \rightarrow \underset{III}{ThD} \\ \rightarrow \underset{VI}{ThC_2} \end{cases}$$

$$\underset{IV}{RaB} \rightarrow \underset{V}{RaC} \begin{cases} \rightarrow \underset{III}{RaC_2} \\ \rightarrow \underset{VI}{RaC'} \xrightarrow{\alpha} \underset{IV}{RaD} \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Folgerungen wird durch die Erfahrung in vier Punkten bestätigt.

Es ist wirklich:

ThC und *RaC* vom *Bi* untrennbar;

ThD (und vermutlich auch RaC_2) vom *Tl* untrennbar;

ThB und *RaD* weder chemisch noch elektrochemisch vom *Pb* zu trennen.

Mit anderen Worten: Die oben dargelegten Anschauungen über das Zerfallsschema der *Th*- und *Ra*-Reihen hinter der Emanation stimmen mit den Forderungen der Isotopentheorie gut überein.

In einer Arbeit „Über die Verflüchtigung des aktiven Niederschlags des Thoriums" haben Barratt und Wood[1]) diesen Tatbestand neuerdings in Frage gestellt. Sie bestimmten (in Prozenten) die vom Platin in Luft bei verschie-

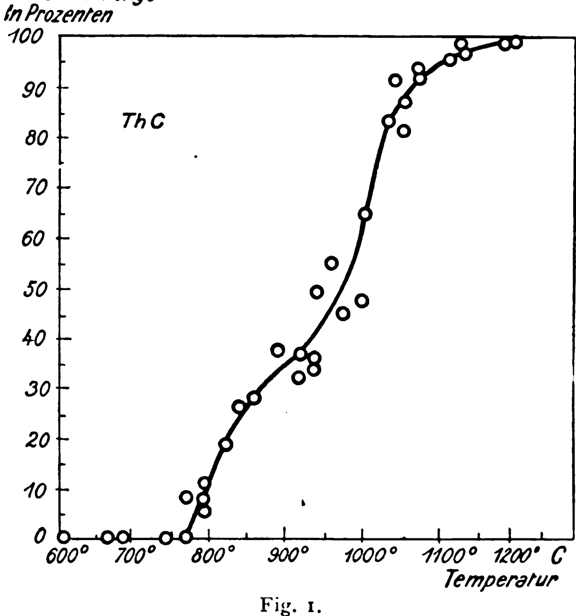


Fig. 1.

1) K. Fajans, diese Zeitschr. **13**, 699, 1912.

2) L. Meitner, diese Zeitschr. **13**, 623, 1912.

3) E. Marsden u. R. H. Wilson, Phil. Mag. **26**, 354, 1913.

4) P. Beer u. K. Fajans, diese Zeitschr. **14**, 947, 1913.

1) T. Barratt und A. B. Wood, Proc. Phys. Soc. London, April 21, 1914.

denen Temperaturen verflüchtigten Mengen des ThB und ThC. Die auf das ThC sich beziehenden Werte sind in Fig. 1 als Ordinaten aufgetragen. Zieht man mitten durch diese Schar von Punkten eine Kurve durch, so läßt sich eine Tendenz zur Umbiegung bei den Koordinaten (920; 35) erkennen. Die Kurve zerfällt somit in zwei Teile, die der Form nach der Verflüchtigungskurve des ThB ähnlich sind. Barratt und Wood schließen daraus, daß sie mit zwei Produkten zu tun haben, deren erstes ein α-Strahler ist und bei 750° C zu verdampfen beginnt, während das zweite einen β-Strahler darstellt, welcher sich erst bei 900° C verflüchtigt. Dafür spricht ihrer Ansicht nach auch der Umstand, daß die Periode der β-Aktivität nach der Erhitzung bis auf etwas über eine Stunde herunterfällt. Barratt und Wood schlagen daher vor, den Zerfall des aktiven Niederschlags des Thoriums in folgender Weise zu schematisieren:

$ThA \xrightarrow{\alpha} ThB \xrightarrow{\beta} ThC_\beta$ (0,14 Sek. — 10,6 St. — 60,3 Min.)

$ThC_\beta \xrightarrow[\text{35 Proz.}]{\beta} ThC_\alpha \xrightarrow{\alpha} ThD \xrightarrow{\beta\gamma} ?$ (Periode? — 3,07 Min.)

$ThC_\beta \xrightarrow[\text{65 Proz.}]{\beta} ThC_2 \xrightarrow{\alpha} ?$ (10^{-11} Sek.)

Es soll demnach ThC_β ein β-Strahler sein, der zum Teil (35 Proz.) in ein α-strahlendes Produkt ThC_α, zum Teil in ein anderes ebenso α-Teilchen aussendendes Produkt ThC_2 sich umwandelt.

ThC_α verflüchtigt sich schon bei 750° C, während ThC_β erst bei 900° C flüchtig wird.

In meiner Abhandlung „Über die Verdampfung von ThB und ThC"[1]) habe ich gezeigt, daß die Verflüchtigungskurve des ThC sich noch genauer bestimmen läßt, als es Barratt und Wood getan haben. Die Resultate meiner Messungen sind weiter unten auf Fig. 3 gegeben. Die Kurve weist in der Tat an der genannten Stelle einen deutlichen Knick auf. Das Hauptergebnis der Barratt-Woodschen Arbeit — sofern die α-Aktivität in Betracht kommt — wurde somit vollauf bestätigt. Nichtdestoweniger hielt ich die daraus gefolgerten Schlüsse für unberechtigt. Abgesehen von dem Versuch mit der β-Aktivität — der wohl nachgeprüft werden muß — sprechen mehrere theoretische Gründe gegen die Barratt-Woodsche Hypothese.

Wenden wir zunächst einmal auf das neue Schema die Verschiebungsregeln an, so ergibt sich:

1) St. Loria, Wien. Ber. (IIa), 124. Mitt. a. d. I. f. Radiumforschung, Nr. 81, 1915.

$ThB \xrightarrow{\beta} ThC \xrightarrow{\beta} ThC_\alpha \xrightarrow{\alpha} ThD$
(IV — V — VI — IV)

$ThC \xrightarrow{\beta} ThC_2$
(V — VI)

Folglich müßte das ThD der IV. Gruppe angehören, d. h. nicht mit Tl, sondern mit Pb isotop sein — was der Erfahrung direkt widerspricht.

Zweitens müßte wohl erwartet werden, daß auch beim RaC eine ähnliche Änderung des Zerfallsschemas wird vorgenommen werden müssen. In Anbetracht des Verhältnisses 0,03 : 99,97 dürfte dann aber der Knick der in ähnlicher Weise gemessenen Verflüchtigungskurve praktisch unauffindbar sein. Demgegenüber habe ich jetzt[1]) nachweisen können, daß die RaC-Kurve (Fig. 2) auf derselben Stelle in

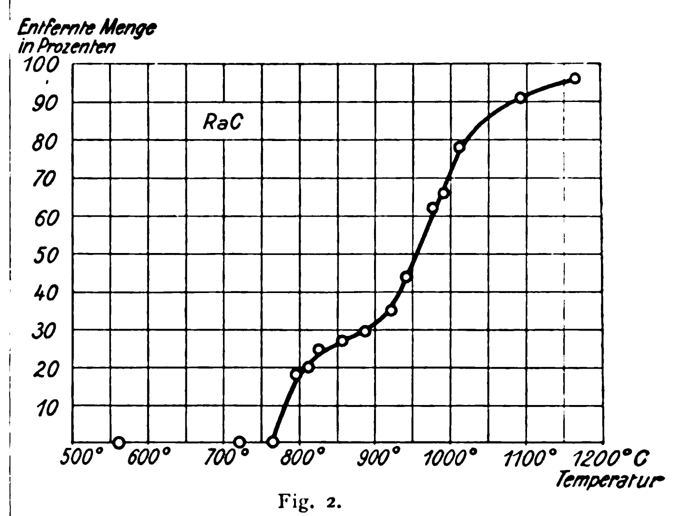


Fig. 2.

derselben Weise umgebogen ist, ja daß sogar, abgesehen von einer kleinen Differenz am Anfang, beide Verdampfungskurven (für ThC und für RaC) innerhalb der Versuchsgenauigkeit zusammenfallen (Fig. 3, Kurve A). Diese Identität im Verlaufe beider Kurven kommt bei elektrolytisch abgeschiedenen ThC und RaC wieder mit überzeugender Deutlichkeit zum Vorschein.

Ich habe schon in meiner ersten Abhandlung angedeutet, daß die eigentümliche Biegung der Verflüchtigungskurve des ThC eher auf chemische als auf radioaktive Ursachen zurückzuführen ist. Anzeichen chemischer Reaktionen kurzlebiger radioaktiver Produkte sind schon von einigen Beobachtern festgestellt worden (vgl. H. Schrader[2]), A. S. Russell[3]), L. Meit-

1) St. Loria, Wien. Ber. (IIa). Mitt. a. d. I. f. Rad., Nr. 83, 1915.
2) H. Schrader, Phil. Mag. 24, 125, 1912.
3) A. S. Russell, Proc. Roy. Soc. A 86, 240, 1912; Phil. Mag. 24, 134, 1912.

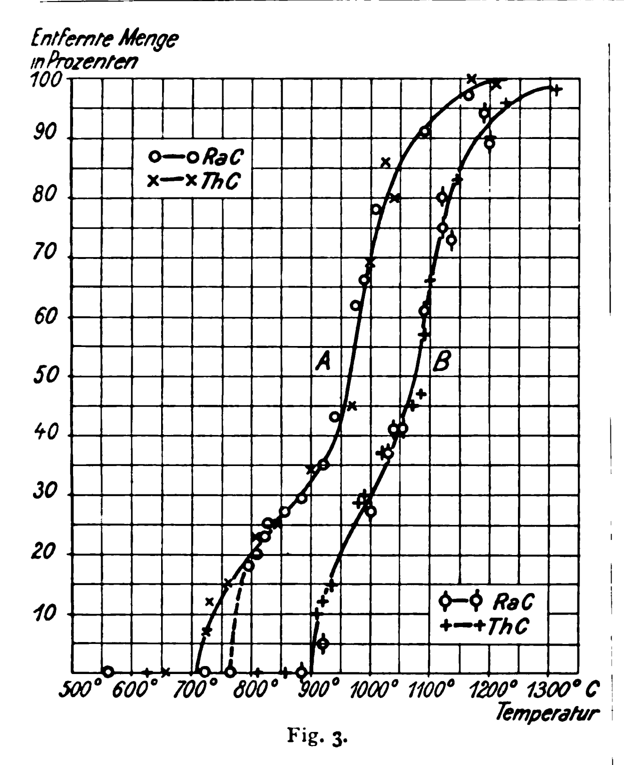


Fig. 3.

ner[1]), K. Fajans[2]), Marsden und Wilson[3]), R. W. Lawson[4]). Bekanntlich bildet das mit *ThC* isotope *Bi* mehrere Oxyde, deren manche in gewöhnlicher Temperatur überhaupt nicht hergestellt werden können, und (z. B. eine der Modifikationen des Bi_2O_3) nur in gewissen Temperaturbereichen (oberhalb 700° C) beständig sind[5]).

Das Verhalten des mit *Bi* und *ThC* isotopen *RaC* in höheren Temperaturen spricht nicht nur gegen die Barratt-Woodsche Interpretation, sondern bekräftigt auch gleichzeitig die von uns aufgestellte Hypothese.

Die Verschiedenheit der Verflüchtigungskurven des direkt durch Zerfall erzeugten und des elektrolytisch abgeschiedenen *C*-Produktes wird wahrscheinlich auch physikalisch-chemischen Ursprungs (Legierungsbildung) sein. Bemerkenswert ist, daß sie in gleicher Weise bei *ThC* und *RaC* auftritt. Wie aus Fig. 3 (Kurve B) zu ersehen ist, fallen wieder beide Kurven innerhalb der Versuchsgenauigkeit zusammen. Ob die Hypothese der Legierungsbildung zutreffend ist, soll durch weitere Versuche geprüft werden.

1) L. Meitner, l. c.
2) K. Fajans, l. c.
3) Marsden-Wilson, l. c.
4) R. W. Lawson, Wien. Ber. (IIa), **124**. Mitt. a. d. I. f. Radiumforsch., Nr. 80, 1915.
5) Abeggs Handbuch der anorg. Chemie III 3, 658, 1907.

Wien, Institut für Radiumforschung. 20. November 1915.

(Eingegangen 1. Dezember 1915.)

Das Reflexionsvermögen eines isotropen Körpers in Abhängigkeit von den Wellenkonstanten.

Von Karl Uller.

Ein elektromagnetischer einfarbiger Strahl erfährt auf seinem Wege durch einen Körper unter dessen Mitwirkung eine Absorption und Zerstreuung, also eine Schwächung, für welche die zweite elektrische Wellenkonstante a_e'' maßgebend ist; aus diesem Grunde heiße sie die Schwächungs- oder Extinktionskonstante des Körpers.

Die Undurchlässigkeit eines Körpers gegenüber einem solchen Strahl wird, soviel ich sehe, ausschließlich auf jene Extinktionsfähigkeit zurückgeführt, sei es, daß sie beim Fortschreiten der Welle im Innern des Körpers einen Abfall der Wellenamplituden bewirkt, sei es, daß sie die Eindringungsmöglichkeit des einfallenden Strahles herabsetzt, was sich in einem starken Reflexionsvermögen der Oberfläche des Körpers geltend macht.

Die Undurchlässigkeit kann aber noch einen ganz anderen Grund haben, nämlich hohes Abwehrvermögen infolge eines negativen Wertes seiner ersten elektrischen Wellenkonstante a_e' neben einer geringen Extinktionsfähigkeit. Bei konservativen Körpern erreicht dann die Abwehr eine völlige Absperrung. In Natrium und Kalium sehen wir ein hohes Abwehrvermögen genannter Art verwirklicht. Bei diesen ist a_e'', also auch die Extinktionsfähigkeit verhältnismäßig sehr klein, andererseits ergeben sich ihre ersten elektrischen Wellenkonstanten a_e' negativ. Daraus berechnet sich ihr Reflexionsvermögen zu über 99 Proz., was der Erfahrung nahe kommt. Die übliche Formel für das Reflexionsvermögen

$$R = \frac{n^2(1+\varkappa^2)+1-2n}{n^2(1+\varkappa^2)+1+2n} \qquad (1)$$

oder auch

$$= \frac{(n-1)^2+\varkappa^2 n^2}{(n+1)^2+\varkappa^2 n^2}$$

als Funktion des Brechungs- und Absorptionsindex n bzw. $\varkappa$ läßt den Einfluß des Vorzeichens der ersten Wellenkonstante und insbesondere diese Art von Abwehrvermögen nur auf Umwegen erkennen. Es sei mir daher gestattet, das Reflexionsvermögen als Funktion der beiden Wellenkonstanten direkt zu entwickeln und zu besprechen, was meines Wissens bisher auch noch nicht geschehen ist.

Es gibt übrigens noch eine andere Größe, die sowohl das Schwächungs- als auch das Abwehrvermögen eines Körpers stark beeinflussen kann: der Spreizwinkel eines Wellennormalen-

paares. Hier soll indessen nur das Reflexionsvermögen eines isotropen Körpers bei senkrechtem Einfall eines einfachen Strahles dargestellt werden.

Mit Benutzung der in einer vorangehenden Veröffentlichung[1]) in dieser Zeitschrift niedergelegten Bezeichnungsweise erhält man bei nahezu elliptischer Schwingungsform einer einfarbigen elektromagnetischen Planwelle $(\mathfrak{w}; \mathfrak{e})$ in einem homogen isotropen und nichtdrehenden Körper für die Strahlung den Ausdruck[2])

$$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{V}{4} e^{i(\nu-\nu^*)t} \cdot e^{i(\mathfrak{w}-\mathfrak{w}^*, \mathfrak{r})} \left\{(\mathfrak{e}\mathfrak{e}^*)\left\{\frac{\mathfrak{w}}{a_m}+\frac{\mathfrak{w}^*}{a_m^*}\right\} - \left[\frac{\mathfrak{w}}{a_m}-\frac{\mathfrak{w}^*}{a_m^*}, [\mathfrak{e}\mathfrak{e}^*]\right]\right\}. \qquad (2)$$

Will man das magnetische Feld $(\mathfrak{w}; \mathfrak{m})$ bevorzugen, so hat man nur den elektrischen Wellenvektor $\mathfrak{e}$ mit dem magnetischen $\mathfrak{m}$ zu vertauschen und $a_m = \mu\nu/V$ durch $a_e = \varepsilon\nu/V$ zu ersetzen.

Es falle eine seitlich begrenzte Planwelle, ein Elementarstrahl, mit gestrecktem Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}_i$ nahezu normal zur Treffebene eines Körpers ein. In bezug auf das Flächenlot $\mathfrak{f}$ haben wir also in diesem einfachen Strahl

$$[\mathfrak{w}_i\mathfrak{f}] = 0 \qquad (3)$$

und infolgedessen aus den Divergenzbedingungen

$$(\mathfrak{e}_i\mathfrak{f}) = 0 = (\mathfrak{m}_i\mathfrak{f}). \qquad (4)$$

Ferner fließt aus dem Koexistenzgesetz der Wellennormalenpaare[3])

$$(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f})^2 = a_1; \quad (\mathfrak{w}_d\mathfrak{f})^2 = a_2. \qquad (5)$$

Für die gebrochene elektrische Welle haben wir sonach[4])

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{w}_d = (\mathfrak{w}_d\mathfrak{f})\,\mathfrak{f} \\ &\mathfrak{e}_d = A_{ed}\,\mathfrak{e}_i; \quad A_{ed} = \frac{2\,a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f})}{a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f}) + a_{m1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{f})}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

und hieraus für die gebrochene Strahlung

$$\overline{\mathfrak{R}}_d = \frac{V}{4} e^{-2\nu''t} \cdot e^{+2(\mathfrak{w}_d''\mathfrak{f})(\mathfrak{f}\mathfrak{r})} \times A_{ed}A^*_{ed}(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_i^*)\left\{\frac{(\mathfrak{w}_d\mathfrak{f})}{a_{m2}}+\frac{(\mathfrak{w}_d^*\mathfrak{f})}{a^*_{m2}}\right\}\mathfrak{f}. \qquad (7)$$

Für die zurückgeworfene Welle kommt

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{w}_r = -(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f})\,\mathfrak{f} \\ &\mathfrak{e}_r = A_{er}\,\mathfrak{e}_i; \quad A_{er} = \frac{a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f}) - a_{m1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{f})}{a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f}) + a_{m1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{f})} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

und somit für die reflektierte Strahlung

$$\overline{\mathfrak{R}}_r = -\frac{V}{4} e^{-2\nu''t} \cdot e^{-2(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{f})(\mathfrak{f}\mathfrak{r})} \times A_{er}A^*_{er}(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_i^*)\left\{\frac{(\mathfrak{w}_i\mathfrak{f})}{a_{m1}}+\frac{(\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{f})}{a^*_{m1}}\right\}\mathfrak{f}. \qquad (9)$$

Der Helmholtzsche Reziprozitätssatz ist hier natürlich erfüllt[1]). Da ferner hier die Strahlungsformeln unabhängig sind vom Polarisationszustand der Welle, so gelten sie auch für ein natürliches einfarbiges Strahlbündel, dessen Gesamtintensität, gewonnen durch Summierung der Elementarstrahlen, sie angeben.

Legen wir die Richtung des Flächenlots $\mathfrak{f}$ in die des einfallenden Strahles, so ist nach (4) unter Berücksichtigung, daß a'' negativ ist,

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{w}_i'\mathfrak{f}) &= +\sqrt{\tfrac{1}{2}\{|a_1|+a_1'\}} \\ (\mathfrak{w}_i''\mathfrak{f}) &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}\{|a_1|-a_1'\}}; \\ (\mathfrak{w}_d''\mathfrak{f}) &= +\sqrt{\tfrac{1}{2}\{|a_2|+a_2'\}} \\ (\mathfrak{w}_d'\mathfrak{f}) &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}\{|a_2|-a_2'\}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Für das Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten ω und der Wellenlängen λ bekommen wir damit[2])

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|\mathfrak{w}_d'|}{|\mathfrak{w}_i'|} = \sqrt{\frac{|a_2| + a_2'}{|a_1| + a_1'}}, \qquad (11)$$

ein Verhältnis, das bei schrägem Einfall seine Bedeutung verliert, es sei denn, daß gewisse vier Bedingungen[3]) erfüllt sind. Es hat daher im allgemeinen keinen Sinn, dies Verhältnis den „Brechungsexponenten n_{12} des Körpersystems" zu nennen. Für den Fall, daß einer der beiden Körper konservativ ist und negative erste Wellenkonstante aufweist, ist in ihm für eine einfache Welle Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge unendlich groß, d. h. die elektromagnetische Welle ist entartet und eine Strahlung kommt nicht zustande.

Ein Gegenstück zum konservativen Körper ist der von sehr hoher Extinktionsfähigkeit: der dissipative Körper. Während im ersteren die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge durch die Mitschwingungskonstante bestimmt ist, bestimmt sie im letzteren die hohe Extinktionsfähigkeit.

Es sei nun das Medium, in dem die einfache Welle einfällt, konservativ und mit positiver erster Wellenkonstante a' behaftet. Ein solches ist z. B. das Vakuum oder die Luft. Wir bezeichnen seine Wellenkonstante mit $a_0 = \nu^2 \varepsilon_0 \mu_0 / V^2$, also für ungedämpfte Wellen gleich $\nu^2/9 \cdot 10^{20} = 4\pi^2/\lambda_0^2$. Die Konstanten des zweiten Mediums, des reflektierenden Körpers, lassen wir ohne Zeiger. Dann ist das

1) K. Uller, Die elektrische Energiedichte usw. (Diese Zeitschr. 16, 409, 1915).
2) K. Uller, Eine Wellenstudie (Elster-Geitel-Festschrift 1915, S. 511).
3) Ebenda § 2.
4) K. Uller, Brechung und Zurückwerfung elm. Wellen (Verhdlg. d. Deutsch. Phys. Ges. 1914, S. 875).

1) K. Uller, Eine Wellenstudie, § 8.
2) K. Uller, Eine Wellenstudie, § 4.
3) K. Uller, Eine Wellenstudie, § 5.

Reflexionsvermögen unseres Körpers gegen das erstgenannte Medium bei senkrechtem Einfall eines natürlichen einfarbigen Strahles gemäß (9) offenbar

$$|\mathfrak{R}_r|/|\mathfrak{R}_i| = A_{er}A_{er}^* = (1-g)/(1+g),$$

mit

$$g = \frac{2\sqrt{a_0}(\mathfrak{w}_d' \mathfrak{t})}{a_0+\sqrt{a a^*}}$$
$$= \frac{2\sqrt{{}^1/_2\{\sqrt{(a'/a_0)^2+(a''/a_0)^2}+a'/a_0\}}}{1+\sqrt{(a'/a_0)^2+(a''/a_0)^2}}, \qquad (12)$$

wenn wir $a_m = a_{m0}$ setzen.

Daraus lassen sich unmittelbar folgende allgemeine Schlüsse ziehen:

1. Ein reflektierender Körper mit negativer erster Wellenkonstante hat stets ein größeres Reflexionsvermögen als ein solcher, für den bei denselben Beträgen der Wellenkonstanten die erste positiv ist. Beispielsweise hat Gold für $\lambda = 589$ fast dieselben Beträge der Wellenkonstanten wie Selen bei $\lambda = 668$, die Reflexionsvermögen sind indessen 84,5 Proz. bzw. 23,3 Proz., indem bei Gold die Mitschwingungskonstante negativ ist im Gegensatz zu Selen.

Wir können — wie bewiesen werden kann — den Satz (1) auch so aussprechen:

1a. Ein reflektierender Körper, in welchem die elektrische Feldstärke der elektrischen Erregung in der Phase um mehr als $\pi/2$ vorauseilt, hat ein größeres Reflexionsvermögen als ein solcher, in welchem die Phasenvoreilung kleiner als $\pi/2$ ist.

2. Ein konservativer Körper mit negativer erster Wellenkonstante läßt die einfallende Welle nicht eintreten, hat daher das größtmögliche Reflexionsvermögen. Kalium und Natrium kommen im sichtbaren Spektrum diesem Körper nahe.

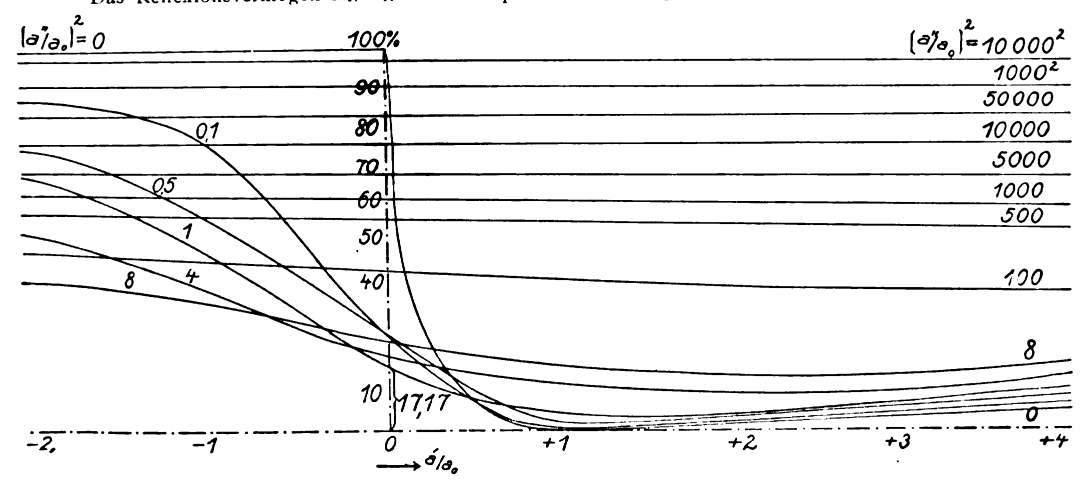
3. Ist $|a|$ sehr groß gegen a' und a_0, dann ist $g \sim \sqrt{2}/\sqrt{|a|/a_0}$ klein und $A_{er}A_{er}^* \simeq 1-2g$ nicht weit von eins. Hierbei sind zwei Unterfälle zu unterscheiden:

α) Überwiegt die Schwächungskonstante a'' stark gegenüber der Mitschwingungskonstante a' und der Konstante des ersten Mediums, so kommen wir auf die Hagen- und Rubenssche Regel, die sich als gültig im Ultraroten erwiesen hat;

β) überwiegt a' stark gegen a'' und a_0, so entsteht ebenfalls hohes Reflexionsvermögen. Bei Silber z. B. haben wir für $\lambda = 750$ die Werte $a'/a_0 = -20{,}2$ und $a''/a_0 = -1{,}5$, woraus $A_{er}A_{er}^*$ sich zu 0,972 berechnet.

Um noch weitere Aussagen machen zu können, ist die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von den beiden Wellenkonstanten in untenstehenden Schaukurven niedergelegt. Als Kurvenparameter ist die Schwächungskonstante gewählt. Das Bild beschränkt sich auf den wichtigsten Teil der Funktionsebene, auf das Gebiet relativ kleiner Beträge der Mitschwingungskonstante. Vom Höchstwert 100 Proz. bei der Abszisse $-\infty$ fallen alle Kurven ganz allmählich, senken sich bei positiven Werten der Mitschwingungskonstante zu einem Minimum herab und steigen allmählich wieder zu dem Höchstwerte an, den sie für die Abszisse $+\infty$ erreichen. Die Minima können nur jenseits von $a' = a_0$ liegen; mit wachsenden Parameterwerten rücken sie ständig zu höheren Werten der Mitschwingungskonstante fort, dabei sich erhebend, aber auch verflachend. Damit hängt zusammen, daß für jedes positive a', das größer ist als a_0, die Ordinaten mit wachsendem Parameter ständig steigen. Anders hin-

Das Reflexionsvermögen $A_{er}A_{er}^*$ eines Körpers in Abhängigkeit von seinen Wellenkonstanten.



gegen im Gebiete ($a' < a_0$). Hier sinken zunächst die Ordinatenwerte, um dann wieder zu steigen. So wird z. B. für $a' = 0$ der kleinste Ordinatenwert, nämlich

$$A_{cr} A^*_{cr} = (1 - \sqrt{1/2})/(1 + \sqrt{1/2}) = 0{,}1717,$$

von der Kurve $(a''/a_0)^2 = 1$ geliefert; für $a' = -a_0$ gehört die Umkehrkurve dem Parameter $(a''/a_0)^2 = 8$ zu. Mit anderen Worten: im Gegensatz zu dem Gebiete ($a' > a_0$) wird im Gebiete ($a' < a_0$) bei demselben Werte der Mitschwingungskonstante jedes Reflexionsvermögen von zwei Werten der Schwächungskonstante erzielt.

4. Daraus folgt für das Gebiet negativer Mitschwingungskonstanten a': Geringe Extinktionsfähigkeit des Körpers hat hinsichtlich eines hohen Reflexionsvermögens denselben Effekt wie hohe. In beiden Fällen beruht das hohe Reflexionsvermögen, also die geringe Durchlässigkeit, auf dem Abwehrvermögen, das aber ganz verschieden begründet ist. Im ersten Falle liegt ein fast konservativer Körper vor, in dem die elektrische Feldstärke gegen die elektrische Erregung in der Phase um fast π vorauseilt. Dabei hat die noch eingelassene schwache Welle verhältnismäßig geringen Amplitudenabfall, dringt daher verhältnismäßig tief ein. Im zweiten Falle liegt ein dissipativer Körper vor, in dem die Feldstärke gegen die Erregung um etwas weniger als $\pi/2$ in der Phase vorauseilt. Dabei hat die noch eingelassene schwache Welle einen sehr starken Amplitudenabfall, zeigt daher den bekannten Hauteffekt.

Aus dem Kurvenbilde ergibt sich weiter noch

5. Zeigt ein Körper ein Reflexionsvermögen von weniger als 17,17 Proz., so ist seine Mitschwingungskonstante sicher positiv. Das gilt z. B. für Schwefel, das nach den Untersuchungen von Frl. Schubert[1]) im Spektralgebiete (1 bis 18 μ) ein Reflexionsvermögen zeigt, das von 10 Proz. bis 11,2 Proz. ansteigt. Andererseits hat metallisches Jod im Violetten ein Reflexionsvermögen von etwa 25 Proz. Daraus ist aber das Vorzeichen seiner Mitschwingungskonstante nicht bestimmbar. Es ist entgegen der Vermutung positiv, wie die Polarisationsmessungen ergeben.

Von hohen Werten des Parameters aufwärts sind die Kurven fast Geraden mit sehr schwacher Neigung, d. h. die Mitwirkung der ersten Wellenkonstante ist ganz in den Hintergrund gedrängt (Fall 3 α). —

1) Martha Schubert, Reflexionsmessungen im Ultraroten (Diss. Breslau 1915).

Gegen die übliche Reflexionsformel (1) ist, da es sich um senkrechten Einfall eines einfachen Strahles handelt, vom mathematischen Standpunkte nichts einzuwenden, wohl aber vom physikalischen. Sie ist nämlich auf dem Brechungs- und Absorptionsindex aufgebaut, herkömmliche Begriffe, die indessen zur Kennzeichnung des allgemeinen Verhaltens eines wellenschwächenden Körpers gegenüber jeder Planwelle keineswegs zweckdienlich sind. Zudem führen sie die wahren Charakteristiken des Körpers eingekapselt mit sich, nämlich die Wellenkonstanten, welche das Verhalten seiner Erregung gegen das erregende Feld in jeder wie immer beschaffenen Planwelle rein und vollständig zum Ausdruck bringen. Man könnte natürlich n und $\varkappa$ als Hilfsgrößen ansehen und aus ihnen die Wellenkonstanten berechnen. Das aber bedeutet, bei Benutzung von n und $\varkappa$ aus Polarisationsmessungen nicht nur einen Umweg, unter Umständen auch wegen Einführung von Vernachlässigungen in den verwickelten Formeln, eine nicht immer unbeträchtliche Ungenauigkeit, wohingegen die Wellenkonstanten (wie an einem anderen Orte gezeigt werden soll), aus einfachen Formeln genau und leicht berechnet werden können. Nicht allein das. Auch alle sonstigen Formeln der engeren und weiteren Optik sind in n und $\varkappa$ dargestellt. Sie erschweren dadurch nicht nur die theoretische Ausbeute, sondern lenken auch die Forschung mitunter ab. So besaß man seit mehreren Jahrzehnten aus Polarisationsmessungen die Kenntnis negativer erster Erregungskoeffizienten ε' bei Metallen, und doch war meines Wissens der einzige Anreiz, der bisher von dieser wichtigen Feststellung ausging, die Schaffung der Dispersionstheorie der Metalle, welche vom Widerspruch der Maxwellschen sich als frei erwies. Der historisch überkommene und übernommene Begriff des Brechungsexponenten, der für ein System konservativer Körper praktisch am Platz ist, obgleich er als solcher schon da im Gebiete der Strahlumbiegung versagt, stellt eben die Gedanken auf n und $\varkappa$ ein und ist bestrebt die Formeln als Erweiterungen der in konservativen Körpern gültigen erscheinen zu lassen. Die Größen ε' und ε'', in denen sich die Mitwirkung der Materie am Wellenbau rein ausspricht, werden dadurch ganz in den Hintergrund des physikalischen Bewußtseins gedrängt. So ist es gekommen, daß ich, auf anderen Gedankenwegen als den üblichen zur Kenntnis negativer ε' gelangend, diese als neu empfand, obgleich sie es nicht ist. Die bekannte Feststellung negativer Werte von $n^2(1 - \varkappa^2)$ hatte eben seiner Zeit keinen besonderen Eindruck auf mich hinterlassen, ebensowenig wie auf die

Fachwelt, was man daraus schließen kann, daß bisher keine weiteren Folgerungen daraus gezogen worden sind.

(Eingegangen 7. Dezember 1915.)

Die Gültigkeitsbedingungen des Brewsterschen Gesetzes.

Von Karl Uller.

Fällt eine einfarbige elektromagnetische Planwelle, die im Körper (1) verläuft, auf einen Körper (2), so schwingt in der zurückgeworfenen Welle das elektrische Feld parallel der Treffebene, wenn

$$A_{mr} = \frac{a_{e2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}) - a_{e1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{k})}{a_{e2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}) + a_{e1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{k})} = 0 \qquad (1)$$

ist; wegen der Bezeichnungsweise muß ich mich auf frühere Veröffentlichungen[1]) beziehen. Voraussetzung ist, daß beide Körper homogen, isotrop und nicht drehend sind. Die Bedingung (1) ist unabhängig vom Polarisationszustand der einfallenden Welle, gilt also auch für ein natürliches einfarbiges Strahlbündel.

Ist der einfallende Strahl ein einfacher, also in ihm

$$[\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_i^*] = 0, \qquad (2)$$

so ist auch

$$[\mathfrak{w}_r\mathfrak{w}_r^*] = 0,$$

somit auch der reflektierte ein einfacher Strahl, in welchem die Rotationsachsen des elektrischen sowie des magnetischen Feldes mit dem Wellennormalenpaar zusammenfallen. Infolgedessen kann dann das Verschwinden von A_{mr} nur bedeuten: das reflektierte elektrische Feld $\mathfrak{E}_r$ schwingt senkrecht zur Einfallsebene geradlinig. Dies Ergebnis bleibt auch für ein einfallendes Strahlbündel bestehen. (Eine entsprechende Aussage kann man für das reflektierte magnetische Feld $\mathfrak{M}_r$ machen, wenn $A_{er} =$

$$\{a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}) - a_{m1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{k})\}/\{a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}) + a_{m1}(\mathfrak{w}_d\mathfrak{k})\}$$

verschwindet.) Um den die Bedingungen (1) und (2) erfüllenden Einfallswinkel i_B aufzufinden, bedenken wir, daß wegen (2)

$$(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})^2 = a_1 \cos^2 i, \qquad (3)$$

also nach dem Koexistenzgesetz der Wellennormalenpaare

$$(\mathfrak{w}_d\mathfrak{k})^2 = a_2 - a_1 + a_1 \cos^2 i \qquad (4)$$

ist. Die Bedingung (1) verlangt damit

$$\cos^2 i_B = \frac{a_{e1}^2}{a_{e2}^2 - a_{e1}^2} \cdot \frac{a_2 - a_1}{a_1}, \qquad (5)$$

ein Ausdruck, der reell und positiv sein muß. Man sieht, daß nur bei gewissen Verhältnissen der Wellenkonstanten beider Körper die angeführte Strichpolarisation zu erzielen ist.

Sind die magnetischen Wellenkonstanten a_{m1} und a_{m2} gleich, was meist merklich zutrifft, dann geht (5) über in

$$\cos^2 i_B = a_1/(a_1 + a_2)$$

oder

$$\operatorname{tang}^2 i_B = a_2/a_1 = a_{e2}/a_{e1}. \qquad (6)$$

Die Reellität und Positivität verlangt

$$a_{e2}\, a_{e1}^* - a_{e2}^*\, a_{e1} = 0,$$

also

$$a_{e2}'/a_{e1}' = a_{e2}''/a_{e1}'' = |a_{e2}|/|a_{e1}| \qquad (7)$$

oder auch

$$a_2'/a_1' = a_2''/a_1'' = |a_2|/|a_1|. \qquad (7a)$$

Da somit $\sin^2 i_B$ stets kleiner als $|a_2|/|a_1|$ ist, so ist die Bedingung (28) im § 2 meiner wiederholt angezogenen Wellenstudie stets erfüllt. Der Polarisationswinkel i_B liegt also stets im Snelliusschen Brechungsgebiete, wo alle drei Strahlen, — der einfallende, der gebrochene und der zurückgeworfene — einfache Strahlen sind, und niemals im Gebiet der Strahlumbiegung. Wir können daher die Beziehung (6) auch schreiben[1])

$$\operatorname{tang} i_B = \sqrt{|a_2|/|a_1|} = n_{12}, \qquad (8)$$

dem absoluten Brechungsindex für das System der beiden Körper. In dieser Form haben wir das Brewstersche Gesetz in seinem wahren, bisher unbekannten, Gültigkeitsbezirke voraus. Wir sehen eben jetzt, daß es an die Bedingung (2) sowie an die zwei Bedingungen (7) oder auch (7a) gebunden ist, wonach die Verhältnisse der entsprechenden Wellenkonstanten sowohl gleich als auch positiv sein müssen. Bei der Beziehung (8) stehen der gebrochene und der zurückgeworfene einfache Strahl zueinander senkrecht.

Die Bedingungen (7) sind erfüllt, wenn beide Körper konservativ sind und außerdem ihre Wellenkonstanten gleiches Vorzeichen haben.

Zeigt ein Körper gegen Vakuum oder — was praktisch gleichwertig ist — gegen Luft, für welche Körper a_1' positiv ist und a_1'' verschwindet, Strichpolarisation beim Polarisationswinkel i_B, so ist nach (7) seine zweite elektrische Wellenkonstante a_e'' verschwindend klein und seine erste elektrische Wellenkonstante a_e' positiv. Zeigt er sie nicht, so hat der Körper entweder eine merkliche Wellenkonstante a_e''

1) K. Uller, Zurückwerfung und Brechung elm. Wellen (Verhandlungen der D. Phys. Ges. **16**, 875, 1914). —, Die Spannungen im elm. Felde; sowie —, Die elektrische Energiedichte usw. (Diese Zeitschr. **16**, 376 bzw. 409, 1915).

1) K. Uller, Wellenstudie, § 5 (Elster-Geitel-Festschrift 1915).

oder er ist konservativ mit negativer erster Wellenkonstante a_e'; im letzteren Falle stellt sich auch dann nicht ein Polarisationswinkel ein, wenn man den Körper an ein konservatives Medium mit negativer erster Wellenkonstante anstoßen läßt, denn dann läßt sich überhaupt kein einfallender Strahl zustande bringen.

Glas und Natrium haben im mittleren sichtbaren Spektrum beide recht kleine Schwächungskonstanten a_r'', dennoch zeigt Natrium, im Gegensatz zu Glas, keinen Polarisationswinkel. Der Grund liegt eben darin, daß es, wie ebenso Kalium, im Gegensatz zu Glas, eine negative Mitschwingungskonstante a_r' in diesem Spektralgebiet hat.

Folgende Metalle haben im Ultravioletten nur eine kleine Schwächungskonstante a_r'': Zink, Silber, Gold, Quecksilber, Nickel, Kupfer, Woodlegierung. Dennoch ist gegen Luft auch nicht eine angenäherte Strichpolarisation zu erwarten, und zwar aus dem einfachen Grunde nicht, weil ihre erste Wellenkonstante, die Mitschwingungskonstante a_r', in diesem Gebiete negativ ist.

Anders liegt die Sache beim Selen. Aus Polarisationsmessungen ergibt sich im Ultraroten eine umso kleinere Schwächungskonstante a_r'', je mehr man zu größeren Wellenlängen vorrückt. Ferner hat in diesem Gebiet Selen eine positive Mitschwingungskonstante a_r'. Infolgedessen muß gegen Luft ein Polarisationswinkel bestehen. In der Tat hat Herr A. H. Pfund[1]) an Selen die reflektierte Wärmestrahlung in sehr weitgehendem Maße strichpolarisiert befunden.

1) A. H. Pfund, Phys. Rev. **22**, 362, 1906.

Gießen, November 1915.

(Eingegangen 7. Dezember 1915.)

Über E. C. Balys experimentelle Grundlagen der Kraftfelder-Theorie.

Von A. Hantzsch.

Vor einiger Zeit hat Herr E. C. Baly in dieser Zeitschrift **14**, 893, 1913 seine Theorie, nach der sich die Anziehung bzw. Verbindung der Atome im Molekül ähnlich den elektromagnetischen Kraftfeldern äußern soll, durch zahlreiche Versuche stützen zu können geglaubt, nach denen gewisse optische Veränderungen der Lichtabsorption (und Farbe) angeblich nur mit Hilfe dieser Auffassung erklärt werden können.

Herr Baly hat auch in Zusammenhang mit diesen seinen früheren Versuchen, namentlich aber in späteren, an anderen Stellen veröffentlichten Mitteilungen die Unhaltbarkeit meiner rein chemischen Erklärung derartiger Phänomene behaupten zu können geglaubt. Nach meiner Auffassung beruht jede wesentliche (mit Hilfe der Absorptionsmethode wahrnehmbare) Veränderung der Lichtabsorption in Lösung auf einer chemischen Veränderung der Konstitution; und zwar entweder auf dem primären Vorgang der Anlagerung des Lösungsmittels an den gelösten Stoff oder auf dem sekundären Vorgang seiner Umlagerung durch das Lösungsmittel — nicht aber auf der Veränderung oder Öffnung von Kraftfeldern. In den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft[1]) habe ich bereits kürzlich alle Versuche Balys, seine Theorie gegenüber der meinigen, die von ihm einseitig als Umlagerungstheorie bezeichnet wird, experimentell zu stützen, ausführlich widerlegt. Da jedoch zahlreiche Leser dieser Zeitschrift von der eben erwähnten Arbeit vermutlich nicht Kenntnis genommen haben dürften, halte ich es für angebracht, ihre wesentlichsten Ergebnisse hier nochmals kurz zusammenzufassen.

Diese Versuche von Herrn Baly lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Die der ersten Gruppe sind richtig, aber ihre Deutung ist unrichtig; die der zweiten Gruppe sind an sich unrichtig, und zwar meist infolge der Verwendung unreiner Ausgangsmaterialien.

Zu der ersten Gruppe gehören

1. Die Angaben über die optische Veränderlichkeit der Absorption des Azetessigesters in alkalischer Lösung. Dieselbe sollte nach Baly auf sogenannter Isorrhopesis, d. i. auf Veränderung des Schwingungszustandes seines Natriumsalzes beruhen, beruht aber tatsächlich chemisch auf Hydrolyse, d. i. auf unvollständiger Salzbildung.

2. Die Angaben über die Farbveränderungen gewisser Nitrokörper durch Alkalien, wobei nach Baly die Kraftfelder geöffnet werden sollen, während tatsächlich durch Anlagerung der Alkalien unter Umlagerung anders konstituierte Salze gebildet werden.

3. Die Angaben über das optische Verhalten gewisser Benzolderivate in konzentrierter Schwefelsäure. Dasselbe soll nach Baly dadurch bedingt sein, daß die betreffenden Stoffe vor ihrem Übergang in Sulfonsäuren durch Lockerung der Kraftfelder in einen zweiten Zustand übergehen; tatsächlich werden sie hierbei aber in einen zweiten Stoff, nämlich in Oxoniumsulfate, verwandelt.

1) Ber. d. D. chem. Ges. **48**, 1327, 1915.



4. Die Ansicht, wonach die Farbänderungen gewisser Farbstoffe, nämlich der Aminoazobenzole und ihrer Salze dadurch hervorgebracht werden, daß jedes Absorptionsband eine besondere Auflockerungsstufe der betreffenden Verbindung anzeigen soll. Demgegenüber ist festgestellt worden, daß diese Verschiedenfarbigkeit auf die von mir nachgewiesene Existenz verschiedenfarbiger oranger, dunkelroter und fast schwarzer Salze, also wieder auf eine rein chemische Ursache zurückzuführen ist.

Zur zweiten Gruppe gehörig, also unrichtig sind die folgenden Behauptungen Balys:

5. Die angebliche optische Veränderlichkeit der Pikratlösungen durch konzentriertes Alkali, aus der unter anderem auch die Unhaltbarkeit meiner Umlagerungstheorie abgeleitet worden war. Tatsächlich sind reine Pikratlösungen gegenüber Alkali optisch indifferent, Herrn Balys Schlußfolgerungen also unzutreffend.

6. Die Angaben von der optischen Veränderlichkeit des *p*-Aminobenzaldehyds und verwandter Stoffe gegenüber Salzsäure von verschiedener Konzentration — wonach vor der Salzbildung durch Öffnung der Kraftfelder eine Übergangsphase durchlaufen werde. Tatsächlich wird aber der Aminobenzaldehyd durch Salzsäure chemisch verändert, nämlich in Kondensationsprodukte übergeführt. Unhaltbar sind danach auch die von Baly auf diesen Beobachtungen basierten Erörterungen über das photochemische Äquivalent.

7. Die ähnlichen Angaben über das Verhalten von Azobenzol-Trimethylammoniumjodid gegen Salzsäure, das auch ähnlich gedeutet worden ist, aber dem reinen Salz überhaupt nicht zukommt.

8. Die Angaben über die abnorme Veränderlichkeit wäßriger Azetessigester-Lösungen beim starken Verdünnen; auch diese „interessante Bestätigung der Kraftfelder-Theorie" durch derartige Abweichungen von Beers Gesetz ist durch Anwendung von reinem Wasser nicht bestätigt worden; der Irrtum ist also wohl durch die Unreinheit des Wassers hervorgerufen worden.

Nach alledem besteht also keine einzige experimentelle Stütze für die Auffassung Balys, daß gewisse optische Veränderungen durch Veränderungen (Öffnung) von Kraftfeldern hervorgebracht werden; die fraglichen Tatsachen sind entweder auf Unreinheit der Versuchsobjekte oder auf chemische Veränderungen, d. i. Bildung neuer Stoffe, zurückgeführt worden.

Schließlich sei zur Vermeidung von Mißverständnissen noch erwähnt, daß hiermit nicht die eingangs erwähnte Vorstellung von der gegenseitigen Bindungsweise der Atome, die in ähnlicher Weise auch noch von anderen Autoren vertreten wird, als unrichtig bezeichnet werden soll, sondern nur die ausschließlich von Baly vertretene Ansicht, daß derartige Veränderungen experimentell nachgewiesen sein sollten.

Chemisches Laboratorium der Universität Leipzig.

(Eingegangen 16. Dezember 1915.)

Räumliche Darstellung von Röntgenstrahlen. II.

Von Béla Alexander.

(Mit Tafel I.)

Aus der an meine erste Notiz[1]) angeschlossenen Bemerkung des Herrn Knipping[2]) ersehe ich, daß meine Ausführungen offenbar mißverstanden werden können.

Daß auch durch eine gewöhnliche, von einer ausgedehnten Lichtquelle geliefere Lichtstrahlung in der von Herrn Knipping demonstrierten Weise räumliche photographische Darstellung erzielt werden kann, und daß auch bei meinen mit Röntgenstrahlen gewonnenen Aufnahmen eine solche einfache Entstehungsweise der räumlichen Wirkung mit im Spiele ist, wollte und will ich in keiner Weise in Abrede stellen. Worauf ich aber darüber hinaus hinweisen wollte, war die Tatsache, daß im Falle der Röntgenstrahlen starke Unterstrahlung der abgebildeten Objekte mit in Betracht zu ziehen ist, die offenbar durch eine von der Glaswand der Röntgenröhre bewirkte sekundäre Strahlung verursacht wird. Es ist also bei der Beurteilung von Röntgenbildern auf diese sekundäre Strahlenquelle wohl zu achten, wenn man vor Täuschungen behütet sein will; die Bilder bestehen infolge dieser sekundären Quelle häufig geradezu aus mehreren übereinandergelagerten Bildern.

Um das des Genaueren zu beweisen, ist das beigefügte Röntgenbild (siehe Tafel I) besonders geeignet.

Eine zusammengedrehte feinmaschige Metallnetzrolle liegt auf der lichtdicht eingehüllten Platte; Abstand zwischen Antikathode und Platte 35 cm, Funkenstrecke 3—4 cm. Die Iridiumantikathode des Entladungsrohres ist viereckig, 1 cm lang und 6 mm breit (Rosenthalsche Röhre). Genau der Antikathode gegenüber, direkt an der Glaswand, ist eine 2 mm dicke kreisrunde Bleiplatte von 2,8 cm Durchmesser befestigt, so daß die Antikathode ganz verdeckt

1) Diese Zeitschr. 16, 141, 1915.
2) Diese Zeitschr. 16, 280, 1915.

wird (das Resultat wird auch bei 3 oder 4 mm dicker Bleiplatte dasselbe sein). Die von der Antikathode kommenden Röntgenstrahlen werden der Bleiplatte entsprechend ausgeschaltet, absorbiert. Die Einstellung war derartig, daß das Bild der 10 cm von der kleinen Iridiumantikathode und 25 cm von der Platte an der Glaswand befindlichen Bleiplatte in die Mitte der halbzusammengerollten Netzrolle fiel.

Auf der einen Seite des Bildes sind die Fäden des unmittelbar auf der Platte liegenden Netzteiles sichtbar, ein kleiner Teil desselben zeigt moiréeartige Zeichnung, welche durch die verschieden getonten aufeinanderfallenden Bilder der Netzfäden bedingt ist. Auf der anderen Seite, wo die Wölbung der Netzhälfte entfernt von der Platte liegt, sind die Fäden nur einem kleinen Zipfel entsprechend scharf gezeichnet (er liegt auf der Platte), die Wölbung selbst ist richtig als solche, aber ohne Zeichnung der Fäden sichtbar, weil diese von den X-Strahlen unterstrahlt werden, die durch die Maschen auf die lichtempfindliche Schichte wirken. — In der Mitte des ganzen Bildes ist das große fast kreisrunde, von weither, also unscharf gezeichnete Bild (Ausfallbild) der Bleiplatte vorhanden, welche die X-Strahlen vollständig absorbiert. In diesem Bilde finden wir das zusammengedrehte Mittelstück der Netzrolle, dem betrachtenden Auge verständlich, in verschiedenen Tonungen gezeichnet, aber ganz ohne Netzbild. D. h. die von der Glaswand des Entladungsrohres — aus der Nachbarschaft der Bleiplatte und von weiterher — stammenden X-Strahlen, die in jeder Richtung gehen, haben die Bleiplatte unterstrahlt, weshalb auch deren Bild nicht völlig weiß ist. Sie zeichnen aber auch das Netz nicht, weil sie, aus jeder Richtung kommend, durch die Lücken desselben auf die lichtempfindliche Schicht wirken.

Dieses eine Bild enthält also eigentlich vier Bilder: 1. das klare Bild des nach unten gewölbten Metallnetzes, 2. das durch die feinen Maschen unterstrahlte fadenlose Bild dieses Netzteiles, dessen Wölbung nach oben geht, 3. in der Mitte das von weither gezeichnete Ausfallbild der Bleiplatte und 4. in das Ausfallbild hineingezeichnet das Unterstrahlungsbild des mittleren Netzteiles (der der Platte näherliegende Teil wird auch entsprechend lichter gezeichnet, als der entfernt liegende Teil). —

Jeder Teil des Röntgenbildes muß für sich allein beobachtet werden und die gegebene Erklärung beweist genügend, daß wir es nicht mit einem gewöhnlichen Absorptionsbilde zu tun haben.

Diese Ausführungen werden hoffentlich überzeugen, daß bei den von mir veröffentlichten Aufnahmen dennoch spezifische Eigentümlichkeiten der von den Röntgenröhren ausgesandten Röntgenstrahlung eine Rolle spielen. — Um übrigens, in Beziehung zu der Bemerkung des Herrn Knipping, jedes Mißverständnis auszuschließen, bemerke ich noch, daß bei meinen Aufnahmen die Platten stets in doppelt genommenem schwarzen Papier lichtdicht verpackt waren.

(Eingegangen 5. Dezember 1915.)

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Dr. **H. Zahn**, Privatdozent in Kiel, ist als Kriegsfreiwilliger bei der Feldartillerie eingezogen.

Dr. **K. Hiemenz**, Assistent am physikalischen Institute der Technischen Hochschule in Darmstadt ist seit Februar 1915 eingezogen, hat in Rußland gekämpft und ist jetzt als Unteroffizier zum Offizier-Anwärter-Ausbildungskursus in das Warthe-Lager abkommandiert.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Walther Schreller für Chemie.

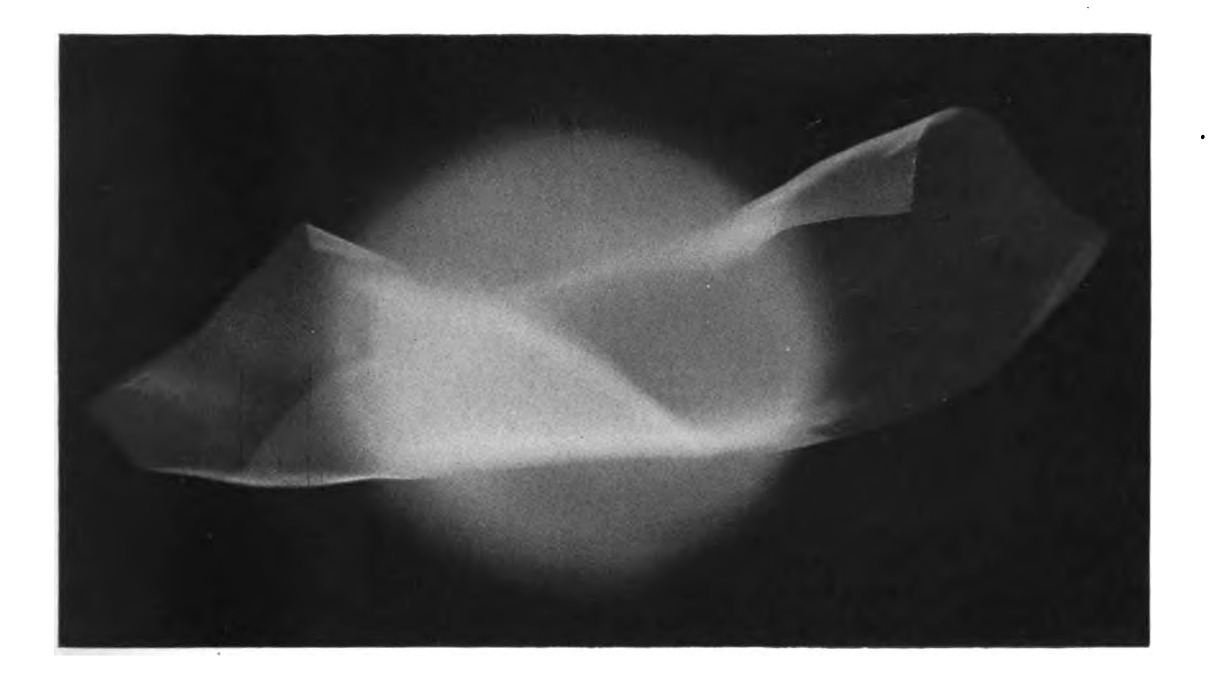
Ernannt: Dr. Charles Warren Hill und Professor Merritt R. Grose zu Associate Professoren der Chemie an der Universität Syracuse (New York) als Nachfolger der zurücktretenden Dr. Eben H. Archibald und Dr. C. R. Hoover, der Assistant Professor für Chemie an der School of Mining der Queens University in Kingston Dr. Walter D. Bonner zum ord. Professor der Chemie an der Universität von Utah in Salt Lake City, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Karl Jellinek zum Dozenten der analytischen Chemie an derselben Hochschule, der Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Insterburg Dr. Willy Zielstorff zum ord. Professor der Agrikulturchemie an der Universität Königsberg.

Verliehen: Dem ord. Professor der Astronomie an der Universität Göttingen Dr. Johannes Hartmann sowie den ord. Professoren an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Eugen Meyer (Mechanik) und Dr. Karl Hofmann (Anorganische Chemie) der Titel Geheimer Regierungsrat, dem Chemiker Dr. Paul Klemm in Leipzig-Gautzsch der Titel Professor, dem Privatdozenten der Physik und Dozent für Radiologie an der Universität Heidelberg Dr. Karl Ramsauer der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere Professor für Chemie am Massachusetts Institute of Technology in Boston Charles Hallet Wing (am 13. Sept.), der frühere Professor der Chemie an der Universität Manchester Sir Henry Roscoe.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



B. Alexander, Räumliche Darstellung von Röntgenstrahlen. II.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. 15. Januar 1916. 17. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 5. Februar 1916.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Hochfrequenzspektra der Elemente Gold bis Uran.

Von Manne Siegbahn und Einar Friman.

1. In den Hochfrequenzspektren der Elemente besitzen wir bekanntlich eine zuverlässige Methode zur Bestimmung der Ordnungszahl des betreffenden Elementes bzw. eine Methode, fehlende Elemente zu entdecken. So hat z. B. Moseley[1]) gezeigt, daß zwischen Aluminium und Gold nur drei bisher unentdeckte Elemente zu erwarten sind.

Die vorliegende Untersuchung bezweckt eine Bestimmung der zwischen Gold und Uran liegenden Elemente. Von de Broglie[2]) sind schon einige provisorische Messungen auf diesem Gebiete nach der Sekundärstrahlungsmethode ausgeführt. Da aber eben hier eine verhältnismäßig große Lücke (von 6 Elementen) zu überbrücken ist, sind weit genauere Messungen nötig. Unsere Aufnahmen der Hochfrequenzspektra sind daher nach der Primärstrahlungsmethode ausgeführt, d. h. das betreffende Element wurde als Antikathode in einer Röntgenröhre angebracht. Da ferner das zu untersuchende Wellenlängengebiet, die α-Linien der L-Serie, aus leicht absorbierbaren Strahlen besteht, wurde das Rohr mit einem Fenster aus 0,05 mm dickem Aluminiumblech versehen.

Bei dieser ersten Untersuchung haben wir nur eine einzige Linie bei jedem Elemente bestimmt und zwar die stärkste der zwei α-Linien der L-Serie. Diese Reihe ist auch die bekannteste von den vier L-Serien. Die vorigen Bestimmungen (von Moseley) gehen von Zirkon bis Gold. Durch die jetzige Untersuchung erstrecken sich somit die Messungen bei dieser Reihe über mehr als 50 Elemente.

1) H. G. J. Moseley, Phil. Mag. (6) **27**, 703, 1914.
2) M. de Broglie, C. R. **158**, 1785, 1914.

2. Die spektroskopischen Aufnahmen geschahen mit einem rotierenden Steinsalzkristall, dessen Drehungsgeschwindigkeit etwa 1^0 in 4 Minuten betrug. Dabei wurde jedes Gebiet mehrmals überfahren (zwischen 4 und 16 Mal), je nach der Intensität der Strahlen. Als Blenden (Kollimator) dienten zwei Bleispalte, der erste mit einer Weite von 0,1 oder 0,2 mm, der zweite von 1 bis 2 mm. Die Abstände, erster Spalt-Kristall und Kristall-Platte, waren beide gleich und zwar etwa 13 cm.

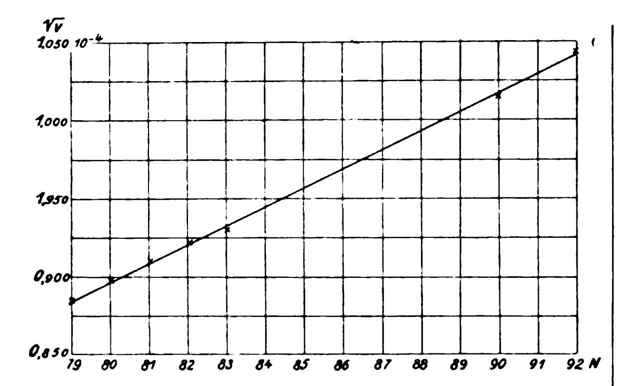
Von den untersuchten Elementen wurde Gold als Blech auf der kupfernen Antikathode angelötet, Blei, Wismut und Thallium an der verzinnten Kupferplatte geschmolzen, Quecksilber (als Zinnober), Thor (als Thoroxyd) und Uran (als Metallpulver) an der mit einer groben Feile geritzten Kupferplatte angerieben.

Zum Evakuieren des Rohres diente eine Molekularluftpumpe.

3. Die Messungsresultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Element	Ordnungszahl N	Wellenlänge $\lambda\alpha \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4} = \sqrt{\nu} \cdot 10^{-4}$	$Q_L = \sqrt{\frac{\nu}{\frac{5}{36}\nu_0}}$	$N - Q_L$
Au	79	1,280	0,884	71,6	7.4
Hg	80	1,243	0,897	72,7	7.3
Tl	81	1,209	0,909	73.7	7.3
Pb	82	1,179	0,921	74 6	7.4
Bi	83	1,157	0,930	75.3	7.7
....	...	—	—	—	—
Th	90	0,971	1,015	82,2	7,8
....	...	—	—	—	—
U	92	0,919	1,043	84,5	7.5

Wie die graphische Darstellung der Werte $\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\nu}$ (Figur) zeigt, erhält man mit *Th* als 90 und *U* als 92 einen linearen Zusammenhang von $\sqrt{\nu}$ und N. Diese Ordnung der



höchsten Elemente stimmt auch völlig mit dem System von J. R. Rydberg[1]). Eine numerische Vergleichung der Werte nach der von Moseley angegebenen Relation

$$N - \sqrt{\frac{\nu}{\frac{5}{36}\nu_0}} = b \qquad (1)$$

zeigt ferner, daß unsere Werte mit den von ihm für die anderen Elemente gefundenen (wo b im Mittel 7,4 war) sehr gut übereinstimmen. Auch lassen die Resultate keinen Zweifel betreffs des Platzes der verschiedenen Elemente übrig.

Eine Durchrechnung der ganzen bis jetzt bekannten L_α-Reihe zeigt übrigens, daß die von Moseley theoretisch begründete Formel 1 nicht die beste Darstellung der experimentellen Werte ist. Schreibt man 1 in der Form

$$\sqrt{\nu} = a[N - b], \qquad (2)$$

so ergibt die Berechnung für b den Wert 7,12 ($a = 122{,}8$ statt 123,4 bei M). Eine Abweichung von der in (2) gegebenen linearen Relation zwischen $\sqrt{\nu}$ und N scheint allerdings innerhalb des untersuchten Gebietes von 52 Elementen nicht stattzufinden.

Vorläufig sei bemerkt, daß der zweiten Linie des Dupletts (α_2) z. B. bei Tl eine Wellenlänge $\lambda_{\alpha_2} = 1{,}220$ zukommt ($\lambda_{\alpha_1} = 1{,}209$).

1) J. R. Rydberg, Untersuchungen über das System der Grundstoffe. Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Afd. 2, Bd. 9, Nr. 18, 1913.

Lund, Physikalisches Institut der Universität, 16. Dezember 1915.

(Eingegangen 21. Dezember 1915.)

Die Rotationsdispersion des Wasserstoffs.

(Ein Beitrag zur Kenntnis der Konstitution des Wasserstoffmoleküls.)

Von Paul Scherrer[1]).

§ 1. Ziel.

Herr Debye[2]) hat kürzlich ein besonders einfaches Modell für das Wasserstoffmolekül vorgeschlagen und auf Grund der Gesetze der Mechanik, des Coulombschen Gesetzes und der Quantenhypothese die Dispersion des Wasserstoffs berechnen können. Die Übereinstimmung der berechneten Formel mit der Erfahrung ist vorzüglich. Das Hauptgewicht ist hier nicht etwa auf den Bau der Dispersionsformel zu legen, die ja große Ähnlichkeit mit der Drudeschen hat und überdies im ganzen experimentell erreichbaren Gebiet durch eine frühzeitig abgebrochene Reihenentwicklung ersetzt werden kann. Vielmehr hat man den wesentlichen Fortschritt darin zu erblicken, daß während in der Drudeschen Darstellung Elektronenzahlen und Eigenfrequenzen eine Rolle spielen, über deren Größe man von vorneherein nicht im mindesten unterrichtet ist, bei der Debyeschen Formel keine einzige Konstante aus Dispersionsexperimenten abgeleitet wird, und alles von vorneherein ausdrückbar ist in universellen Konstanten.[3])

Es ist wohl sicher, daß wir im Zusammenhange mit dem Planckschen Wirkungsquantum von den althergebrachten Prinzipien eines oder mehrere aufzugeben haben werden. Leider ist eine genaue Formulierung eines neuen allumfassenden Prinzips noch nicht gelungen. Deshalb sind wir wenigstens vorläufig noch ganz und gar darauf angewiesen, in langsamem Fortschreiten Gesetz nach Gesetz zu prüfen. In diesem Sinne können wir die bisher ausgeführte Dispersionsrechnung als Bestätigung dafür ansehen, daß die klassischen Gesetze der Mechanik für die Berechnung der Störungen im Innern des Atoms aufrecht erhalten werden können.

Bei der großen Unklarheit, die der Formulierung der Wirkung eines Magnetfeldes anhaftet, schien es von besonderem Interesse, das Verhalten eines H_2-Modells unter Einwirkung eines Magnetfeldes zu untersuchen. Als Effekt wählen wir den Faradayeffekt (magnetische Drehung der Polarisationsebene) und berechnen versuchsweise, unter vollständiger Anlehnung an die alt-

1) Diese Notiz wurde am 1. Juni 1915 der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vorgelegt.

2) P. Debye, Sitzungsber. d. königl. Bayr. Akad. 1915. 1.

3) In dem erwähnten Drudeschen Sinne wurde die Rotationsdispersion des H_2 berechnet durch A. Heydweiller. Verh. Deutsch. phys. Gesellsch. 1915, S. 179.

hergebrachten Prinzipien die Größe jenes Effektes. Das heißt also, wir versuchen den Effekt nach Größe und Dispersion vollständig vorherzusagen unter alleiniger Benutzung universeller Konstanten. Als Resultat finden wir: Auch die klassischen Gesetze für die Wirkung eines Magnetfeldes sind im Atommodell anwendbar.

§ 2. Methode.

Die Berechnung zerlegen wir in verschiedene Schritte:

Der erste Schritt besteht darin, daß wir die veränderte Bewegung der Elektronen berechnen bei einem H_2-Modell, dessen Konstitution durch vorläufige Weglassung einer Quantenhypothese noch nicht vollständig festgelegt ist. Als störende Kräfte kommen in Betracht:

1. die bekannten der Geschwindigkeit proportionalen Kräfte des Magnetfeldes,
2. die elektrischen Kräfte einer beliebig polarisierten auffallenden Lichtwelle.

Die allgemeinen Gleichungen werden im Sinne der Störungsrechnung durch sukzessive Näherung gelöst, und zwar wird als Ausgangspunkt der Näherung eine „ungestörte" Bewegung gewählt, bei der die beiden Elektronen auf einem Kreise vom Radius a mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Die hier angedeutete Rechnung ist nur insofern von der Debyeschen verschieden, als durch Anwesenheit des Magnetfeldes die störenden Kräfte etwas komplizierter sind. Bei der ungestörten Bewegung, von der wir ausgehen, sind die Ausgangswerte von a und ω in gewohnter Weise dadurch miteinander verknüpft, daß sich die anziehende Kraft der Kerne, die gegenseitige Abstoßung der Elektronen, Zentrifugalkraft und Wirkung der magnetischen Komponente in Richtung der Verbindungslinie der Kerne des H_2-Moleküls das Gleichgewicht halten mußten. Es sind also zunächst noch sehr viele verschiedene Modelle möglich, z. B. je nach Wahl von ω.

Die Störungsrechnung sei erledigt. Dann tritt die Frage an uns heran: Welche Werte von a und ω im Magnetfelde entsprechen den durch die h-Hypothese bestimmten Werten a_0 und ω_0 im unbeeinflußten H_2-Modell? Auf jeden Fall sind die Änderungen, die a_0 und ω_0 erfahren haben, kleine Größen. Wir setzen deshalb $a = a_0 + \delta a$, $\omega = \omega_0 + \delta\omega$. Die eine Gleichgewichtsbedingung, von der oben die Rede war, ist dann als lineare Gleichung in δa und $\delta\omega$ zu schreiben. Es handelt sich darum, eine zweite Gleichung zwischen diesen Größen zu bestimmen. Zu dieser verhilft uns die Bemerkung, daß während des Entstehens des Magnetfeldes im Raume elektrische Kräfte vorhanden waren, die eine Arbeit an den Elektronen des Modells leisteten. Die Gesamtarbeit berechnet sich nach dem Faradayschen Induktionsgesetz. Andererseits müssen wir dieselbe wiederfinden in der kinetischen und potentiellen Energie des Modells, die natürlich ebenfalls in $\delta\omega$ und δa linear ausgedrückt werden kann. So haben wir die gesuchte zweite Gleichung erhalten und können nun schließen (in der bekannten, bei der Erklärung des Diamagnetismus ebenfalls benutzten Art und Weise), daß δa verschwindet und nur $\delta\omega$ einen der Feldstärke proportionalen Wert hat. Damit sind nun auch die Ausgangswerte $a = a_0$ und $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ genau so wie beim unbeeinflußten Molekül auf universelle Größen zurückgeführt. Das Endresultat läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Das ganze Gas besteht nach Anlegen des Magnetfeldes aus Molekülen, deren Elektronen pendeln um mittlere Bewegungen, die an sich abhängig sind von der Orientierung des Moleküls in Bezug auf das äußere Magnetfeld.

Der zweite Schritt besteht in der Verwendung der nunmehr bekannten innern Bewegungen zur Berechnung des elektrischen Momentes eines cm^3 des Gases. Diese Berechnung wird so ausgeführt, daß für ein H_2-Molekül das elektrische Moment ausgedrückt wird in den verschiedenen Koordinaten und nachträglich gemittelt wird über alle möglichen Orientierungen. Durch Multiplikation mit der Zahl N der Moleküle pro cm^3 folgt dann das gesuchte Moment. Der Unterschied gegenüber dem Fall der reinen Dispersion besteht darin, daß dieses mittlere Moment nun infolge der Anwesenheit des Magnetfeldes nicht mehr parallel der erzeugten elektrischen Kraft liegt. Es ist jetzt, allgemein gesprochen, das Moment eine lineare Vektorfunktion der elektrischen Kraftkomponenten. Mit andern Worten, das Wasserstoffgas ist kristallinisch geworden.

Der dritte Schritt würde nun darin bestehen, die soeben als Funktion der elektrischen Kraftkomponenten berechnete Polarisation $\mathfrak{P}$ in die Maxwellschen Gleichungen einzuführen und die möglichen Wellen zu untersuchen. Dieses aber ist schon geschehen, denn unsere lineare Vektorfunktion unterscheidet sich in ihrer allgemeinen Form nicht von der von Drude bei der Erklärung des Faradayeffekts benutzten. Im speziellen besteht natürlich ein wesentlicher Unterschied darin, daß die Koeffizienten der Funktion bei uns durch universelle Größen vollständig bestimmt sind. Wir können die Resultate der Drudeschen Rechnung einfach übernehmen und z. B. behaupten:

In Richtung der magnetischen Feldstärke pflanzen sich eine rechts- und eine links-zirku-



lar polarisierte Welle mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Der Geschwindigkeitsunterschied ist der Feldstärke in erster Näherung proportional. Bekanntlich ist diese zirkulare Doppelbrechung identisch mit dem Vorhandensein der Drehung der Polarisationsebene, und wir können also schließlich diese Drehung ϑ darstellen in der bekannten Form

$$\vartheta = V \cdot l \cdot H$$

(H = magnetische Feldstärke in Gauß),
(l = vom Lichtstrahl im Körper zurückgelegter Weg in cm),
(V = Verdetsche Konstante).

Die Verdetsche Konstante V erscheint auf Grund unserer Theorie als ganz bestimmte Funktion der Schwingungszahl s des einfallenden Lichtes, in der nur N, ε, μ und h als Konstanten vorkommen. Damit ist unsere Aufgabe erledigt.

§ 3. Formeln.

Das Magnetfeld H sei parallel zur z-Achse unseres Koordinatensystems. Dann sind die Komponenten der Polarisation $\mathfrak{P}$, die durch die elektrische Kraft $\mathfrak{E} = Ee^{ist}$ einer einfallenden Lichtwelle hervorgerufen wird:

$$\mathfrak{P}_x = -\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left(\frac{2}{3}(a+b+c)\mathfrak{E}_x - \frac{i}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{H}{2v\omega_0}\frac{\delta(a+b)}{\delta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\mathfrak{E}_y\right),$$

$$\mathfrak{P}_y = -\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left(\frac{2}{3}(a+b+c)\mathfrak{E}_y + \frac{i}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{H}{2v\omega_0}\frac{\delta(a+b)}{\delta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\mathfrak{E}_x\right),$$

$$\mathfrak{P}_z = -\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\frac{2}{3}(a+b+c)\mathfrak{E}_z.$$

Dabei bedeutet ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der Elektronen im Modell, wenn kein Magnetfeld vorhanden ist. Unter Zugrundelegung der Quantenhypothese: Impulsmoment jedes Elektrons $= \frac{h}{2\pi}$, erhält ω_0 den Wert

$$\omega_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 (2\pi)^3 \frac{\varepsilon^4\mu}{h^3}.$$

a, b und c sind Funktionen von $\frac{s}{\omega_0}$, welche auch schon in der Dispersionstheorie vorkommen, nämlich

$$a = \frac{\left(2-\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega_0}\right)^4 + \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}},$$

$$b = \frac{\left(2+\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)^4 + \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}},$$

$$c = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}.$$

Für die Verdetsche Konstante erhalten wir

$$V = \frac{\pi}{v^2}\frac{N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2}{\omega_0^2}\frac{s}{\omega_0}\left\{-\frac{1}{3}\frac{\delta(a+b)}{\delta\frac{s}{\omega_0}}\right\}.$$

(v = Lichtgeschwindigkeit.)

Entwickelt man nach Potenzen von $\frac{s}{\omega_0}$, und bricht man mit dem Gliede vierter Ordnung ab, so bekommt man:

$$V = \frac{\pi}{v^2}\cdot\frac{N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2}{\omega_0^2}\left\{18{,}22\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 206{,}3\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^4\right\}.$$

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Die Dispersion der magnetischen Doppelbrechung wurde gemessen von Kundt und Röntgen[1]), Siertsema[2]) und Sirks[3]). Die Messungen von Siertsema beziehen sich auf Wasserstoff von 85 kg Druck und 282,5° abs. Temperatur.

Die Drehung wird von Siertsema dargestellt durch die Formel:

$$V = \frac{\pi}{180\cdot 60}\cdot 10^{-6}\left(\frac{151\pm 1{,}2}{\lambda^2} + \frac{2{,}38\pm 0{,}27}{\lambda^4}\right),$$

wobei die Wellenlänge λ in μ auszudrücken ist. Diese experimentelle Formel hat genau denselben Typus wie die theoretisch abgeleitete. Wir können die empirische mit der theoretisch abgeleiteten Formel gliedweise vergleichen und erhalten so die zwei Gleichungen:

$$N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2\cdot 18{,}22\cdot\frac{4\pi^2v^2}{\omega_0^4} = C\cdot\frac{151\pm 1{,}2}{10^8},$$

$$N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2\cdot 206{,}6\cdot\frac{16\pi^4v^4}{\omega_0^6} = C\cdot\frac{2{,}38\pm 0{,}27}{10^{16}}.$$

Die Konstante C hat dabei den Wert:

$$C = v^2\cdot\frac{10^{-6}}{180\cdot 60}\cdot\frac{1{,}033\cdot 282{,}5}{85\cdot 273\cdot 0{,}958}\,{}^{4)}.$$

1) A. Kundt u. W. C. Röntgen, Wied. Ann. **10**, 257, 1880.
2) L. H. Siertsema, Arch. Néerl., Série 2, **2**, 291, 1889.
3) J. F. Sirks, diese Zeitschr. **14**, 336, 1913.
4) Die Abweichung vom Boyleschen Gesetz beträgt bei $p = 85$ kg etwa 4,2 Proz. Siehe Siertsema l. c.

Durch Division dieser beiden Formeln folgt zunächst

$$\frac{151}{2,38} \cdot 10^8 = \omega_0^2 \cdot \frac{18 \cdot 22}{206,6} \cdot \frac{1}{4\pi^2 v^2},$$

d. h.

$$\omega_0 = (5,06 \pm 0,28) \cdot 10^{16} \,\mathrm{sec}^{-1}. \qquad (1)$$

(Der wahrscheinliche Fehler von ω_0 beträgt ca. 6 Proz.)

Setzen wir diesen Wert in die erste Gleichung ein, so berechnet sich andererseits $N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2$ zu:

$$N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2 = (2,94 \pm 0,69) \cdot 10^{45}. \qquad (2)$$

Aus diesen zwei Werten ω_0 und $N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2$ lassen sich zwei der universellen Größen N, ε, μ, h berechnen, wenn die anderen zwei gegeben sind. Nehmen wir z. B. für $N\varepsilon$ den Wert, der sich aus der elektrolytischen Ladung eines Grammatoms $E = 96470$ Coulomb, dem Atomgewicht $A = 1,008$ und der Dichte $\delta = 8,985 \cdot 10^{-5}$ des Wasserstoffs bestimmt zu

$$N\varepsilon = \frac{E}{2A\delta} = 1,289 \cdot 10^{10},$$

so folgt aus (2) für $\frac{\varepsilon}{\mu}$ der Wert:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = (4,78 \pm 0,59) \cdot 10^{17}.$$

(Der wahrscheinliche Fehler beträgt ca. 12 Proz.)

Nehmen wir zu diesem noch den Wert $h = 6,5 \cdot 10^{-27}$ hinzu, so erhalten wir aus (1)

$$\varepsilon = (4,86 \pm 0,17) \cdot 10^{-10}.$$

(Der wahrscheinliche Fehler beträgt ca. 4 Proz.)

Diese Werte sind befriedigend und sprechen zugunsten des Modells.

Ebenso finden wir aus den Messungen von Sirks, wenn wir denselben eine zweikonstantige Formel wie oben anpassen[1]), aus den hierbei auftretenden Konstanten und unter Zugrundelegung von

$$N = 2,83 \cdot 10^{19} \text{ und } \frac{\varepsilon}{\mu} = 5,31 \cdot 10^{17}$$

für ε und h die Werte

$$\varepsilon = 4,60 \cdot 10^{-10}, \qquad h = 6,64 \cdot 10^{-27}.$$

1) Es ist diese Rechnung deshalb nicht völlig einwandfrei, weil die Sirkschen Messungen sich so weit in das ultraviolette Gebiet hinein erstrecken, daß man sich eigentlich zu ihrer Darstellung einer drei- statt einer zweikonstantigen Formel bedienen müßte.

Göttingen, Theoretische Abteilung des Physikalischen Instituts.

(Eingegangen 7. Januar 1916.)

Über das Wulfsche Elektrometer und das Engler und Sievekingsche Fontaktoskop.

Von B. Walter.

C. Engler, H. Sieveking und A. Koenig beschreiben in ihren „Neuen Beiträgen zur Messung der Radioaktivität von Quellen“[1]), worin sie die Verwendbarkeit des Engler und Sievekingschen Fontaktoskops für den genannten Zweck mit überzeugender Beweiskraft dartun, u. a. auch eine „verbesserte Form des Fontaktoskops“, die sich von der alten in der Hauptsache dadurch unterscheidet, das anstelle des bis dahin für diesen Apparat benutzten Exnerschen Elektroskops ein Wulfsches Quarzfadenelektrometer zur Verwendung kommt.

Als ich mich jedoch einige Zeit nach dem Erscheinen jener Abhandlung wegen der darin abgebildeten neuen Form dieses Elektrometers an die Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig wandte, die bekanntlich diese Instrumente herstellt, erhielt ich die Antwort, daß der Apparat von ihnen bisher weder ausgeführt noch ausprobiert sei; und die Angelegenheit scheint auch bis heute noch nicht weiter gefördert zu sein.

Vor kurzem kam mir nun der Gedanke, daß es möglich sein müsse, das Wulfsche Elektrometer auch in seiner gewöhnlichen Form ohne weiteres für den genannten Zweck zu verwenden; denn nach der ganzen Konstruktion und Wirkungsweise des Fadensystems desselben stand offenbar nichts im Wege, das Instrument einfach überkopf zu stellen und es so — unter Benutzung eines passenden Verbindungsstückes — auf die Kanne des Engler und Sievekingschen Fontaktoskops zu setzen.

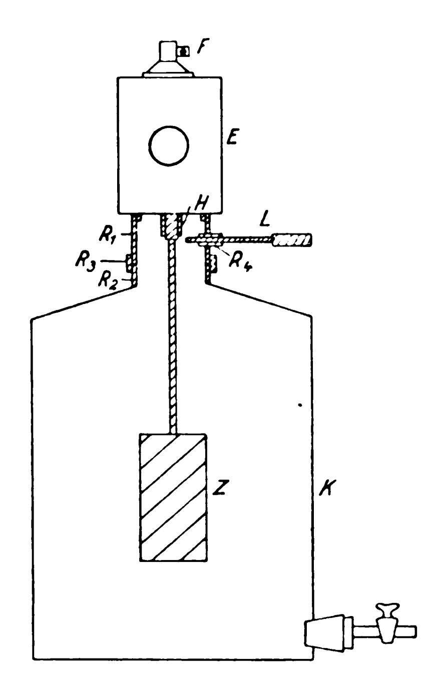
Der Versuch rechtfertigte diese Erwartung durchaus; denn das Fadensystem des genannten Elektrometers arbeitete bei umgekehrter Lage des Instrumentes genau so gut wie bei aufrechter; und es war ferner auch die Hauptbedingung für die Anwendbarkeit des Instruments in der neuen Lage, die Bedingung nämlich, daß sich die Fäden desselben beim Anlegen einer bestimmten Spannung auch stets wieder auf die gleichen Skalenteile einstellen, tatsächlich erfüllt. Allerdings war diese Einstellung für die Überkopfstellung des Instruments nicht ganz die gleiche wie für die aufrechte Stellung — was in der Hauptsache daran liegen dürfte, daß das ziemlich schwere Ablesemikroskop des Instruments, das ja überdies noch beweglich an letzterem angebracht ist, in beiden Lagen nicht genau die gleiche Stellung zum Fadensystem

1) C. Engler, H. Sieveking und A. Koenig, Chemiker-Zeitg. 38, 425 u. 446, 1914; siehe auch diese Zeitschr. 15, 441, 1914.



beibehält und daher das Bild des letzteren in beiden Fällen nicht genau auf dieselbe Stelle der im Okular des Mikroskops liegenden Skala fällt —; indessen ist dieser Umstand für die in Rede stehende Benutzungsweise des Instruments ohne Bedeutung, da man dasselbe bei ein und derselben Untersuchung nur in einer der beiden genannten Lagen verwenden wird.

Was sodann die Verbindung des überkopf gestellten Wulfschen Elektrometers mit der Kanne des Engler und Sievekingschen Fontaktoskops anbetrifft, so ist diese leicht in jeder Laboratoriumswerkstatt auszuführen; und die beigegebene Figur zeigt, in welcher Weise sie in der unsrigen nach meinen Angaben bewerkstelligt wurde.



Es stellt darin E das Elektrometer in der mehrfach genannten Lage dar — natürlich ohne seinen Dreifuß, der hier überflüssig ist und sich mit Hilfe der bei F befindlichen Schraube leicht abnehmen läßt.

Man könnte allerdings meinen, daß man diesen Fuß auch in diesem Falle noch gebrauchen könne, um nämlich darauf das Elektrometer, wenn es von der Kanne K abgehoben wird — was ja zum Einfüllen des zu untersuchenden Wassers nötig ist —, zu setzen; indessen wäre dann bei diesem Abheben und Aufsetzen jedesmal ein Umdrehen des ganzen Elektrometers erforderlich, was im Verlaufe einer und derselben Untersuchung besser vermieden wird. Ich setze deshalb das von K abgehobene Elektrometer in solchem Falle stets auf eine zweite Kanne von der gleichen Art wie der in der Figur abgebildeten. Der Besitz einer solchen zweiten Kanne ist ja übrigens auch noch aus mehreren anderen Gründen wünschenswert.

An dem überkopf gestellten Elektrometer E war nun zunächst der Zerstreuungskörper Z des Engler und Sievekingschen Fontaktoskops zu befestigen. Zu diesem Zweck wurde in das isolierte Halterohr H des Elektrometers ein kleiner Messingstift durch seitliche Schrauben fest eingesetzt und in diesem Stift dann der Stiel des Zerstreuungskörpers durch Schraubengewinde befestigt.

Zur eigentlichen Verbindung des Elektrometers mit der Kanne K wurde ferner der dem ersteren Apparat beigegebene Ring R_1 benutzt, der nämlich zufällig genau den gleichen Durchmesser hatte wie der obere Ring R_2 der Kanne K, so daß also um das untere Ende von R_1 nur ein entsprechend weiterer Ring R_3 gelötet zu werden brauchte, um das so auf die Kanne gesetzte Elektrometer vor dem Herabfallen zu bewahren und zugleich ein leichtes Auf- und Absetzen des letzteren zu ermöglichen. Es sei hierbei erwähnt, daß es nicht zweckmäßig sein würde, den Haltering R_3 in das Innere des Rohres R_1 zu verlegen; denn da beim Schütteln der Kanne der innere Rand von R_2 naß wird, so würde sich dann zwischen R_2 und R_3 stets eine Feuchtigkeitsschicht befinden, die zum Rosten der betreffenden Oberflächen Veranlassung geben und dann das Abheben des Elektrometers erschweren würde.

Damit ferner bei diesem Abheben der Ring R_1 stets in fester Verbindung mit dem Elektrometer bleibt, wurde er mit seinem an E befindlichen, auch in der Figur angedeuteten Haltering durch drei Schrauben verbunden.

Da weiter das Ablesemikroskop des Wulfschen Elektrometers ziemlich schwer ist und dieses Instrument daher, wenn auf die Kanne K aufgesetzt ist, die Neigung hat, nach vorn überzukippen, so empfiehlt es sich noch, an ersterem ein Gegengewicht anzubringen. Es liegt nahe, als Ansatzstelle dafür die Fußhaltevorrichtung bei F zu benutzen.

Zum Laden des Elektrometers endlich wurde seitlich in R_1 das kleine, mit einem Hartgummirohr gefütterte Messingrohr R_4 eingelötet, durch welches der Ladestift L mit leichter Reibung hindurchführt. Auf diese Weise ist dann zugleich die Kanne erheblich besser nach außen hin abgeschlossen als bei der alten Form des Fontaktoskops, so daß selbst bei der mehrere Stunden dauernden Beobachtung des Maximalwertes der durch die Radiumemanation und ihre Zerfallsstoffe bewirkten Ionisation ein Verlust an Emanation nicht in Frage kommen

dürfte. Im allgemeinen ist ja aber diese so langwierige Beobachtungsmethode gar nicht nötig.

Es sei noch erwähnt, daß die hier beschriebene neue Form des Fontaktoskops vor der alten — außer den schon von Engler, Sieveking und Koenig a. a. O. vermerkten Vorzügen der schärferen Ablesung und der konstanteren Einstellung des messenden Systems — auch noch den der kleineren Kapazität, d. h. also der größeren Empfindlichkeit, hat; denn die Kapazität meines neuen Instruments ergab sich zu nur 9,7 cm, während diejenige des alten 12,2 cm betragen hatte. Der Unterschied rührt natürlich daher, daß die Kapazität des Wulfschen Elektrometers erheblich geringer ist als die des Exnerschen.

Schließlich ist noch darauf hinzuweisen, daß man das Wulfsche Elektrometer in der hier beschriebenen Stellung auch für andere Zwecke als zur Bestimmung der Radioaktivität natürlich oder künstlich aktivierter Wässer, so z. B. auch zur Messung der α-Aktivität fester radioaktiver Stoffe benutzen kann. In diesem Falle hat man nämlich nur anstelle der in Figur gezeichneten Kanne K mit Auslaßhahn eine solche mit seitlicher Tür oder auch eine solche mit abnehmbarem Boden zu verwenden. Ein solcher Apparat besitzt dann bei großer Einfachheit und bequemer Ablesbarkeit eine sehr hohe Empfindlichkeit, so daß sich damit z. B. die α-Strahlung von 1 mg schwarzem Uranoxyd noch mit Sicherheit nachweisen läßt.

Hamburg, Physikalisches Staatslaboratorium im Januar 1916.

(Eingegangen 10. Januar 1916.)

Energiemessung von ionisierenden Strahlen insbesondere von Röntgenstrahlen[1].

Von Th. Christen.

Es gibt Energiegrößen, die man in ein Produkt mehrerer Faktoren zerlegen kann: Mechanische Energie = Kraft × Weg, elektrische Energie = Spannung × Stromstärke × Zeit usw. Kann man die einzelnen Faktoren messen, so findet man den Wert der Energie durch Multiplikation. Das bezeichnet man sinngemäß als „direkte Energiemessung".

Alle Energien dagegen, welche sich nicht in dieser Weise direkt messen lassen, sind überhaupt nur meßbar, wenn sie sich entweder aus einer oder in eine direkt meßbare Energieform umsetzen lassen. Solche Verfahren nennt man mit Recht „indirekte Energiemessung". Hierbei ist aber conditio sine qua non, daß das Umsetzungsverhältnis zwischen der direkt meßbaren und der indirekt gemessenen Energie entweder bekannt oder konstant sei.

Die strahlende Energie ist einstweilen einer Zerlegung in einzelne meßbare Faktoren nicht zugänglich. Wir müssen also entweder diejenige Energie messen, aus welcher die strahlende Energie entsteht, oder eine solche Energie, in welche wir die strahlende Energie umwandeln können.

Halten wir uns an das Beispiel einer Röntgenstrahlung, so ist die Energie der unmittelbar vorausgehenden Form, die Kathodenstrahlung, ebenfalls nicht direkt meßbar. Wir müssen schon auf die Energie des Sekundärstromes zurückgreifen. Und tatsächlich ist diese ja auch schon als Maß für die Röntgenenergie gebraucht worden. Einer exakten Verwertung dieser Meßmethode stehen aber zwei Bedenken entgegen:

1. Die großen Schwierigkeiten einer korrekten Bestimmung des Zeit-Integrales

$$\int_0^T v \cdot i \cdot dt,$$

wobei v und i die Momentanwerte von Spannung und Stromstärke bedeuten.

2. Die kaum kontrollierbare Veränderlichkeit des Umsetzungsverhältnisses, wozu dann noch die Verluste im Glas der Röhre und gegebenenfalls auch noch in vorgeschalteten „Strahlenfiltern" treten.

Man verwendet deshalb diese Meßmethode nur zu orientierenden Schätzungen.

Aussichtsreicher sind diejenigen Methoden, welche die strahlende Energie in eine neue Energieform umsetzen, und zwar in eine solche, welche direkt meßbar ist. Bei den Physikern am beliebtesten, und wohl mit Recht, ist die Messung der ionisierenden Wirkung der Strahlen.

Solche „iontometrische" Messungen beruhen auf der Voraussetzung, daß der durch die ionisierende Strahlung erzeugte Sättigungsstrom proportional sei der in dem ionisierten Gas in der Zeiteinheit absorbierten strahlenden Energie.

Baut man eine Ionisationskammer mit solchen Dimensionen, daß ihr ganzer Luftraum für die ionisierende Wirkung der Strahlung ausgenützt wird und daß alle Ionenwege annähernd gleich lang sind, so ist die absorbierte Energiemenge proportional dem Produkt aus der in die Kammer eindringenden Energiemenge, dem Luftweg der Strahlen innerhalb der Kammer und dem Luftabsorptionskoeffizienten der gegebenen Strahlung. Bezeichnet man diesen Koeffizienten mit λ, die in der Zeit T auf die Kammer geworfene strahlende Energie mit E_1, die Tiefe

[1] Aus der Strahlenforschungsstelle der Reiniger, Gebbert & Schall-A.-G., München.

der Kammer mit k und den Sättigungsstrom mit i, so gilt

$$i = c \cdot k \cdot \lambda \cdot \frac{E_i}{T}. \qquad (1)$$

Ist ferner f die Oberfläche der Kammer und r deren Abstand von der (hemisphärisch[1]) gedachten) Strahlenquelle, so verhält sich die auf die Kammer fallende Energie E_i zu der ganzen von der Strahlenquelle ausgehenden Energie E wie f zu $2\pi r^2$.

$$\frac{E_i}{E} = \frac{f}{2\pi r^2}, \qquad (2)$$

so daß

$$i = e \cdot \lambda \cdot \frac{E}{T} \cdot \frac{k \cdot f}{2\pi r^2}. \qquad (3)$$

Nun ist

$$k \cdot f = v \qquad (4)$$

das Volumen der Ionisationskammer. Ferner ist

$$\frac{E}{T} = L \qquad (5)$$

die Leistung der Strahlenquelle. Vereinigt man endlich noch die Konstanten in eine einzige

$$\frac{2\pi}{c} = C, \qquad (6)$$

so kommt

$$L = C \cdot i \cdot \frac{r^2}{\lambda \cdot v}. \qquad (7)$$

Die Konstante C wird man so wählen, daß man für die praktischen Messungen eine bequeme Einheit bekommt.

Eine andere Größe, deren Messung oft gefordert wird, ist die Intensität. Diese ist definiert als diejenige Menge strahlender Energie, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit fällt, also nach unserer Bezeichnung

$$J = \frac{E_i}{f \cdot T} \qquad (8)$$

und nach Gleichung (1)

$$J = \frac{i}{c \cdot v \cdot \lambda} = \frac{C \cdot i}{2\pi \cdot \lambda \cdot v}. \qquad (9)$$

Etwas ganz anderes ist das, was man in der Mediz n unter „Dosis" versteht. Dosis ist die in der Volumeinheit absorbierte Menge strahlender Energie.

Die Behandlung des Dosierungsproblems der Röntgenstrahlen und γ-Strahlen wird dadurch vereinfacht, daß man mit einer für medizinische Zwecke genügenden Annäherung die Absorptionskoeffizienten für organische Gewebe (Knochen ausgenommen) gleich denjenigen für Wasser setzen kann. Diese Koeffizienten sollen im folgenden mit γ bezeichnet werden.

Erinnern wir uns unserer früheren Bezeichnung, so fällt auf ein Körperelement, dessen Oberfläche $= f$, die Menge strahlender Energie E_i. Hat das Körperelement die Höhe k, so ist die in dessen Volumen V, absorbierte Energiemenge

$$D = \frac{k \cdot \gamma \cdot E_i}{v} = \frac{\gamma \cdot E_i}{f} \qquad (10)$$

oder nach Gleichung (8)

$$D = \gamma \cdot T \cdot J \qquad (11)$$

oder endlich nach Gleichung (9)

$$D = \frac{\gamma}{\lambda \cdot c} \cdot \frac{i \cdot T}{v}. \qquad (12)$$

Nun haben wir allen Grund anzunehmen, daß das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten γ und λ für Wasser und für Luft innerhalb der zulässigen Fehlergrenze konstant, d. h. vom Härtegrad unabhängig ist[1]). Wir dürfen also die zwei Konstanten $\frac{\gamma}{\lambda}$ und c in eine einzige zusammenfassen,

$$\frac{\gamma}{\lambda \cdot c} = K \qquad (13)$$

und erhalten so

$$D = K \cdot \frac{i \cdot T}{v}. \qquad (14)$$

Praktisch wird man die Konstante K so wählen, daß man für D als Einheit das Mikrocoulomb oder vielleicht das Zehntelmikrocoulomb pro cm³ Luft erhält, da letzteres annähernd dem Doppelten der bisher als x bezeichneten empirischen Einheit entspricht.

Vergleicht man jetzt die Formeln (7) und (8) mit (14), so erkennt man, daß allein die Dosis unabhängig vom Härtegrad gemessen werden kann und zwar auch diese nur bei iontometrischer Messung. Die Intensität aber sowohl wie die Leistung sind durch den Sättigungsstrom allein nicht bestimmt.

Es scheint mir sehr wichtig, daß diese Tatsache ein für allemal festgestellt wird, weil nicht nur von Medizinern, sondern mehrfach auch von Physikern speziell die Intensität recht häufig einfach proportional dem durch die Strahlung erzeugten Sättigungsstrom gesetzt wird. Das ist zwar richtig, solange man Strahlungen verschiedener Intensität aber gleichen Härtegrades untersucht. Sobald aber Strahlungen verschiedenen Härtegrades verglichen werden, so ist diese Betrachtungsweise fehlerhaft. Schon bei der Konstruktion von Absorptionskurven hetero-

1) Bei einer sphärischen Strahlenquelle wäre der Faktor 2 in Gleichung (2) durch 4 zu ersetzen.

1) Allerdings ist meines Wissens diese Frage für hohe Härtegrade noch nicht untersucht worden.



gener Strahlen, wo bekanntlich nach dem Röntgenschen Absorptionsgesetz der Härtegrad mit steigender Dicke der absorbierenden Schicht ständig zunimmt, darf man nicht einfach den Sättigungsstrom als Maß für die Intensität der Strahlung nehmen. Denn der Sättigungsstrom ist proportional dem Produkt aus der Intensität und dem Luftabsorptionskoeffizienten; letzterer aber ist eine variable Größe.

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt, um ein besonders interessantes Beispiel herauszugreifen, die im übrigen vorzügliche Arbeit von Kröncke: „Über die Messung der Intensität und Härte der Röntgenstrahlen" (Diss. Göttingen 1913). Hier findet sich zunächst auf S. 7 eine durchaus korrekte Definition der Intensität. Dann aber wird durchweg der Sättigungsstrom als Maß für die Intensität verwendet.

Da, wo der Verfasser mit der Beschreibung seiner Ergebnisse beginnt (S. 26), hat es zwar nichts auf sich, weil er in dem ersten Abschnitt die Spannung an der Röhre und damit auch den Härtegrad konstant hält. Im nächsten Kapitel dagegen (S. 27) fängt er nun an, bei verschiedenen Spannungen zu vergleichen und findet, daß die Intensität eine algebraische Funktion zweiten Grades der Spannung ist. Beachtet man aber, daß der vom Verfasser als konstant vorausgesetzte Luftabsorptionskoeffizient ebenfalls eine Funktion der Spannung ist, und zwar ungefähr eine lineare, so müßte nach den experimentellen Ergebnissen Krönckes die Intensität eine algebraische Funktion 3. Grades der Spannung sein. Ein höchst merkwürdiges Ergebnis, das gewiß der Nachprüfung wert sein dürfte!

Das Auftreten dieser Funktion 3. Grades ist so merkwürdig, daß unwillkürlich ein Zweifel auftaucht, ob denn auch wirklich der Sättigungsstrom der in der Luft absorbierten Energie streng proportional sei oder ob nicht am Ende das als Proportionalitätskonstante aufzufassende Umsetzungsverhältnis zwischen der absorbierten Energie und der Ionisation eine Funktion der Wellenlänge sei, etwa auf Kosten von gleichzeitig entstehender Erwärmung der Luft.

Das scheint mir eine außerordentlich wichtige grundsätzliche Frage, auf welche ich in der bisherigen Literatur über Strahlenmessung keine Antwort finde.

Zusammenfassung.

Es wird darauf aufmerksam gemacht, wie wichtig es ist, die Bedeutung des Luftabsorptionskoeffizienten für iontometrische Messungen nicht zu übersehen. Bei Messung von Leistungen und Intensitäten verschiedenen Härtegrades führt das Übersehen der genannten Tatsache direkt zu Fehlschlüssen.

Bei iontometrischer Messung einer Dosis dagegen fällt der Einfluß der Luftabsorptionskoeffizienten fort, weil das in der Gleichung auftretende Verhältnis zwischen den Absorptionskoeffizienten von Luft und von Wasser einstweilen als konstant gilt.

Ob diese Voraussetzung auch für sehr harte Strahlen gilt, scheint zur Zeit noch nicht sicher erwiesen.

Ferner bestehen Zweifel darüber, ob das Umsetzungsverhältnis zwischen der in der Luft absorbierten strahlenden Energie und der Ionisation konstant, d. h. vom Härtegrad unabhängig ist.

Allen Physikern, welche die Güte haben, mir Material über diese beiden letzten Fragen nachzuweisen, werde ich zu aufrichtigem Dank verpflichtet sein.

(Eingegangen 17. Januar 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Festschrift Julius Elster u. Hans Geitel zum sechzigsten Geburtstag[1]) gewidmet von Freunden und Schülern: Arbeiten aus den Gebieten der Physik, Mathematik, Chemie. XI, 719 S. Lex. 8⁰. Mit 149 Abbildungen im Text und auf Tafeln sowie 5 Tabellen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1915. Preis geh. M. 24.—.

Dieser stattliche, einundsechzig Arbeiten, teils theoretischen, teils experimentellen Inhalts, umfassende Band verdankt seine Entstehung einem Entschlusse der drei Schüler Elster und Geitels: Bergwitz, Harms und Witte. Da die beiden letzteren ins Heer traten, hat Bergwitz allein für die Fertigstellung dieses inmitten des Krieges besonders zu würdigenden deutschen Kulturbeweises Sorge getragen. Bergwitz selbst berichtet in „Beiträgen zur Kenntnis der γ-Strahlung des Erdkörpers" über seine Versuche zur Erforschung der durchdringenden Strahlung des Erdkörpers und beschreibt ein Instrumentarium zur Selbstregistrierung, mit dem er über und unter der Erde Ionisationsmessungen vorgenommen hat, die bedeutendes Interesse bieten.

Erwartungsgemäß sind mehrere Arbeiten aus den Forschungsgebieten der Jubilare[1]) vorhanden, unter

1) Vgl. diese Zeitschr. 16, 241, 1915.

1) In dieser Zeitschr. haben Elster u. Geitel bis jetzt 49 Arbeiten veröffentlicht.



anderem: G. Berndt, „Atmosphärische Elektrizität über dem Meere"; A. Gockel, „Über den elektrischen Leitungsstrom Atmosphäre-Erde"; K. E. F. Schmidt; „Über Gleichgewichtsstörungen der Luftelektrizität; E. v. Schweidler, „Über die möglichen Quellen der Heßschen Strahlung". Ferner werden Fragen des periodischen Systems, der Isotopie der Elemente, des Atombaues sowie rein chemische wie physikalisch-chemische Probleme behandelt. Angeführt seien: A. van den Broek, „Atombau und Atomzerfall" (eine kurze aber konzentrierte Arbeit); K. Fajans, „Die Eigenschaften isotoper Elemente im festen Zustande" (vgl. seine Arbeit in dieser Zeitschr. **16**, 456, 1915); H. Freundlich und H. Kaempfer, „Über Unterschiede im Verhalten des Thoriums, verglichen mit anderen Fremdstoffen bei der Beeinflussung der Adsorption des Uran X_1 durch Kohle" (Adsorptionsfragen behandeln ferner: S. Valentiner, „Zur Gasadsorption der Holzkohle", R. Wachsmuth und M. Seddig, „Über Absorption von *Ra*-Emanation durch Kohle"); Stefan Meyer, „Einige Bemerkungen über Atomeigenschaften"; M. v. Laue, „Die Wanderung von Unstetigkeiten in elektrolytischen Lösungen"; Max Trautz, „Die Additivität der inneren Atomwärmen bei idealen Gasen". Léon Schames hat eine umfangreiche Arbeit über van der Waalssche und thermodynamische Zustandsgleichung geliefert. Ferner berichtet Ludwig Flamm (Wien) über „Die Gesetze des Durchganges der α-Strahlen durch Luft" (eine theoretische Bearbeitung vorliegenden experimentellen Materials); Heinrich Mache (Wien), „Über die Korrekturen bei der elektrometrischen Messung schwacher Ionisationsströme und über die Bestimmung kleiner Kapazitäten", während G. Hoffmann in „Feinregistrierung der Ionisierung in geschlossenen Gefäßen" einiges über seine hochinteressanten Versuche mit dem von ihm konstruierten Elektrometer mitteilt, welche der experimentellen Beantwortung der Frage, ob die Radioaktivität eine allgemeine Eigenschaft der Elemente sei, zielbewußt näher zu kommen scheinen.

Von experimentellen Arbeiten verschiedenen Inhaltes seien ferner erwähnt: G. Quincke, „Über elektrische Schatten und die abklingende Absorption elektrischer Strahlen durch Isolatoren" (kurzes Referat seiner diesbezüglichen umfangreichen Arbeiten in den Ann. d. Phys. **43**, 1914); Edgar Meyer und Walther Gerlach, „Über die Gültigkeit der Stokesschen Formel und die Massenbestimmung ultramikroskopischer Partikel"; J. Würschmidt, „Zur Enantiotropie des Wismuts"; Walter König, „Nachweis elastischer Spannungen ringförmiger Körper mit Hilfe künstlicher Doppelbrechung" (u. a. Versuche an Glasringen); O. Lehmann, „Ausscheidungen, Niederschläge und flüssige Kristalle"; Himstedt, „Versuche über die elektrische Doppelbrechung"; weiter eine ziemlich große Arbeit von H. Dießelhorst, H. Freundlich und W. Leonhardt über „Die Doppelbrechung des Vanadinpentoxydsols", ferner von Walther Biegon v. Czudnochowski, „Kathodokoloreszenz, Permutierende Lumineszenz und Thermoluminovariabilität" sowie eine interessante, eigenartige Untersuchung von P. Lenard, „Über die druckzerstörten Erdalkaliphosphore"; endlich eine Arbeit von W. Schlichter, „Die spontane glühelektrische Emission bei Platin" (vgl. Ann. d. Phys. **47**, 573, 1915).

Von rein mathematischen Arbeiten seien angeführt: H. E. Timerding, „Über die Raumzeitvektoren und ihre geometrische Behandlung" und die möglicherweise für verschiedene physikalische Anwendungsgebiete nützliche Untersuchung von A. Kalähne, „Über Sinusschwingungen mit nichtlinearen Kraftgesetzen".

Ferner sind eine Reihe von hervorragenden theoretisch-physikalischen Arbeiten im engeren Sinne vorhanden. Vor allem sei hingewiesen auf die — wohl letzte[1] — Veröffentlichung von Eduard Riecke, „Zur Elektronentheorie der thermoelektrischen und elektrothermischen Erscheinungen". (Seite 70 bis 104.) Es handelt sich dabei um eine teilweise Neubearbeitung seiner bekannten 1908 in den Annalen publizierten Arbeit: „Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme", deren Bedeutung für die weitere Entwickelung dieses Gebietes wohl nicht immer gebührend erkannt worden ist. Riecke hat das Verdienst, die verschiedenen damals vorliegenden Gedanken einer „Mitführungstheorie" in eine brauchbare Form gebracht zu haben und auf Riecke fußend ist dann Drude durch seine bekannten vereinfachenden Annahmen, die ihm den Anschluß an die kinetische Gastheorie ermöglichten, zu Resultaten gelangt die nähere Vergleiche mit der Erfahrung gestatteten; die Proportionalität des Leitverhältnisses mit der absoluten Temperatur — das seit Drudes Theorie soviel gefeierte Wiedemann-Franzsche Gesetz — findet sich aber auch schon bei Riecke in Gleichung (14) seiner alten Arbeit. Die neue Darstellung von Riecke verwendet für die lebendige Kraft der freien Elektronen den Drudeschen Ansatz (αT), arbeitet nur noch mit negativen Elektrizitätsträgern und führt für die Geschwindigkeiten das Maxwellsche Verteilungsgesetz ein. Dadurch werden die Endformeln von Riecke mit denen von Lorentz identisch. Für die Abhängigkeit der Elektronendichte von der Temperatur ist der alte Ansatz $N = N_0 (1 + \delta t)$ beibehalten worden. Die thermomagnetischen und galvanomagnetischen Erscheinungen sind nicht mit behandelt. Der Inhalt läßt sich etwa so kennzeichnen: Ableitung des Wärmeleitungskoeffizienten und des Faktors ω der Mitführung der Elektrizität durch Wärme — elektrische Leitfähigkeit und Koeffizient der Mitführung der Elektrizität für Wärme (wird universelle Konstante im Gegensatz zu ω worin noch δ) — Erörterung der „verschiedenen Arten" von elektrischer und Wärmeleitung je nach den äußeren Bedingungen von Wärmezu- und abfuhr und Isolierung des betrachteten Metallzylinders. Dann folgt Ableitung der „Voltaschen Kontaktkraft" (d. h. die innere, zwei verlöteten Metallstücken entsprechende), der Thermokraft infolge der Lötstelle, der „inneren thermoelektrischen Kräfte" (elektromotorische Kraft im Temperaturgefälle[2]), der gesamten Thermokraft und schließlich eine Tabelle mit Verhältniszahlen der Elektronendichten und Differenzwerten des δ. Hierbei weist Riecke auf die mögliche Notwendigkeit der Einführung „positiver Elektronen" hin. Der letzte Abschnitt behandelt Joule-, Thomson- und Peltierwärme und die Gültigkeit der beiden Hauptsätze der Thermodynamik für den thermoelektrischen Kreis. Nach Aufstellung der Beziehungen der „thermoelektrischen Konstanten" zum Peltier- und Thomsoneffekt und Erörterungen über Temperaturkoeffizienten, Weglänge und Elektronendichte wird das „Spannungsgesetz" behandelt unter Einführung einer „spezifischen Spannung der Elektronen im Metall" (S) deren Werte auch berechnet werden. Das „Leitverhältnis" ist in dieser Arbeit numerisch nicht diskutiert worden: es lag wohl nicht in Rieckes Absicht an dieser Stelle erschöpfend zu sein — jedenfalls aber wird sich die Theorie trotz ihres bekanntlich beschränkten Gültigkeitsbereiches solange nicht ignorieren lassen, als bis sie einer allgemeineren, gegen tiefe Temperaturen zu gültigen Theorie sich eingliedern lassen wird.

1) Vgl. diese Zeitschr. **16**, 217, 1915.

2) Vgl. H. Hörig, diese Zeitschr. **14**, 446, 1913; **15**, 388, 1914. Ann. d. Phys. **43**, 525, 1914.



Neben einer Arbeit von F. A. Schulze über „Beiträge zu der Regel von der Konstanz der molekularen inneren Ausdehnungsarbeit von Flüssigkeiten bei Erwärmung" sei auf eine kurze Mitteilung von J. Stark aufmerksam gemacht: „Zerlegung von Serienlinien und Elektronenzahl im Atom", welche recht beachtenswerte Gesichtspunkte für Atommodelle darlegt. — Von Max Planck rührt ein Artikel her: „Über die Energieverteilung in einem System rotierender Dipole", auf den Planck selbst unlängst in seiner in den Berichten der Deutschen Phys. Gesellsch. 1915 gegebenen Arbeit: „Die Quantenhypothese für Molekeln mit mehreren Freiheitsgraden" verwiesen hat. — „Die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem konstanten elektrischen und magnetischen Felde" hat Dießelhorst mathematisch verfolgt und ist dabei zu recht interessanten Deutungen gewisser Experimente gelangt, während W. Voigt durch Betrachtungen „Über das magnetische Moment einer zirkularpolarisierten Lichtwelle" die „negativen Ergebnisse aller Versuche zum Nachweise eines magnetischen Momentes einer Lichtwelle begreiflich" gemacht hat.

Max Born bringt in einem Artikel: „Über die optische Aktivität der Kristalle" ein sehr willkommenes Referat seiner systematischen Theorie der Kristallgitter, die unter dem Namen „Dynamik der Kristallgitter" neuerdings bei Teubner erschienen ist.

Besonders hingewiesen sei auf die Arbeit von Gustav Mie: „Das Prinzip von der Relativität des Gravitationspotentials". Abgesehen davon, daß hier eine sehr angenehme Ergänzung zu seiner fundamentalen Theorie der Materie (Ann. **37**, **39**, **40**) vorliegt, namentlich hinsichtlich der zugrunde liegenden Vorstellungen, setzt Mie in überaus lichtvoller Weise den Pudelskern der hier in Frage kommenden verschiedenen Gravitationstheorien auseinander — kennzeichnet die gemeinsamen fundamentalen Schwierigkeiten, die vorliegen — und zeigt, wie auch seine eigene in der erwähnten früheren Arbeit gegebene Theorie ein Grenzfall einer noch allgemeineren, noch eine große Zahl „möglicher" Ausarbeitungen umfassenden Gravitationstheorie ist. Wer diese Fragen verfolgt hat, dürfte gerade diese Arbeit mit besonderem Interesse lesen.

Eine umfangreiche Arbeit von A. Sommerfeld ist überschrieben: „Die allgemeine Dispersionsformel nach dem Bohrschen Modell". Das Dispersionsgesetz wird hier entwickelt „für ein Molekül von axialer Symmetrie, welches aus einer Anzahl Kernen besteht, die auf der Symmetrieachse liegen, und aus einer beliebigen Anzahl Elektronen die auf einem um diese Achse beschriebenen Kreise rotieren. Die von Sommerfeld gegebenen Grundlagen sind außerordentlich allgemein gehalten; erst später wird auf den Elektronenring spezialisiert. Es soll auf diese Weise eine allgemeine Dispersionsformel gewonnen werden, die nicht nur auf das Wasserstoffmodell paßt, sondern als Untersuchungsorgan für den Bau auch komplizierterer Moleküle geeignet ist. In § 15 sind mehrere Modelle durchgerechnet: Wasserstoff, Helium, Stickstoff und Sauerstoff und mit der Erfahrung verglichen — die Übereinstimmung ist noch nicht überall genügend, aber die prinzipielle Richtigkeit des eingeschlagenen Weges scheint doch durch diese grundlegende Untersuchung außer Zweifel gesetzt zu sein.

Weiter sei noch erwähnt: „Eine Wellenstudie" von Karl Uller. Es handelt sich um Klarlegung verschiedener wellentheoretischer Begriffe und, wie es scheint, um die Aufdeckung von bisher auf diesem Gebiete nicht bemerkten Unrichtigkeiten, die zum Teil recht weittragend sind: so wird u. a. auch der Helmholtzsche Reziprozitätssatz einer Revision unterzogen, was für den Beweis des Kirchhoffschen Satzes und auch an anderer Stelle in der Theorie der Wärmestrahlung bekanntlich von fundamentaler Bedeutung sein muß.

Zum Schlusse sei noch an einen Beitrag von H. du Bois erinnert über: „Die Einrichtung physikalischer Privatlaboratorien" — möge der daraus sprechende „private Forschergeist", dem die Physik schon so vieles zu verdanken hat, im zukünftigen Frieden auch im Deutschen Reiche sich gesund entwickeln!

H. Hörig.

J. A. Schouten, Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis. Mit einem Einführungswort von F. Klein und 28 Figuren im Text. gr. 8. VIII u. 266 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1914. Preis geheftet M. 11.—

Ausgehend von der Erkenntnis, daß die Unsicherheit in der Auffassung der verschiedenen Systeme der Vektoranalysis, Quaternionentheorie, Ausdehnungslehre usw. und deren Beziehungen zueinander seinen Grund hat in der mangelnden Klarheit der Verknüpfung von Systemen höherer komplexer Zahlen mit den betreffenden geometrischen Größen — das ist gewissermaßen das persönliche Element, was die Autoren in ihre Systeme hineingelegt haben — bringt Schouten hier vom gruppentheoretischen Standpunkte aus das erlösende Wort, indem er das Kleinsche Prinzip der Klassifizierung der Geometrien, demzufolge eine Geometrie sich darstellt als Invariantentheorie einer bestimmten Transformationsgruppe, zur Bildung der betreffenden Zahlensysteme heranzieht. „Das Prinzip erwies sich als ungemein fruchtbar. Wie im ersten Kapitel gezeigt wird, gelangt man für die Größen in einem Punkt in drei Dimensionen unter Zugrundelegung der Gruppe der Drehungen für die Haupteinteilung der Größen in Ordnungen und der Gruppe der speziellen affinen Transformationen für die feinere Unterscheidung, zu einem System mit 12 Einheiten". Das so von Schouten entwickelte assoziative System umfaßt alle bis jetzt existierenden Systeme. Nach Ableitung verschiedener Multiplikationen an diesem Systeme und nach Besprechung der geometrischen Bedeutung ist der Verfasser imstande, in strenger Weise das Wesen der vorliegenden Systeme und ihrer Verwandtschaft zueinander und zum allgemeinen System klarzulegen: ein Resultat von grundlegender Bedeutung. Unter anderem ergibt sich so zum ersten Male eine durchaus strenge Begründung der „gewöhnlichen" Vektoranalysis, es zeigt sich, daß für diese $i_1 \cdot i_1 = -1$ und nicht wie populär geworden $= +1$ das logische Erfordernis ist.

Für die geometrischen Größen erster Ordnung werden im ersten Kapitel die Systeme auch für höhere Dimensionenzahl abgeleitet und diskutiert, während im zweiten Abschnitt die Ausbildung der Analysis der Größen zweiter Ordnung folgt und man dadurch zu dem Hauptinhalte des Werkes, der Affinoranalysis, geführt wird.

Bei den Affinoren tritt zu dem skalaren und vektoriellen Teile noch ein dritter hinzu: der „Deviator". Demgemäß ergeben sich drei Grundmultiplikationen: die skalare, vektorielle und deviatorische. Der allgemeine Weg zur Ableitung der Systeme höherer Ordnung wird gegeben und es finden sich sowohl für den Mathematiker wie für den Physiker in Hinblick auf die ganze hier vorliegende zusammenhängende Reihe von Analysen, deren erste die Vektoranalysis mit $i_1 i_1 = -1$ ist, recht weittragende Perspektiven. — Dann befreit Schouten die Rechnungsregeln der Affinoranalysis von den Koordinaten und nach einer

weitausgreifenden Entwicklung der affinorischen und dyadischen Multiplikationen und der Produkte von Vektoren mit Affinoren und dieser unter sich wird im vierten Kapitel die Dyadenrechnung und die Beziehung der Affinoranalysis zu andern Analysen zweiter Ordnung behandelt. Auch die Voigtsche Tensoranalysis findet sich hier. —

Die im fünften Kapitel erfolgende Ausbildung der infinitesimalen Operatoren, die natürlich auch zur Behandlung eines Affinorfeldes führt, bringt eine Fülle von mathematischen Methoden für den Physiker — dies wird im Schlußkapitel dargetan an der Behandlung verschiedener physikalischer Probleme. Ohne im einzelnen hierauf einzugehen, muß jedenfalls gesagt werden, daß diese Arbeit von Schouten durchaus dazu berufen scheint dem jetzigen theoretischen Physiker neue Hilfsmittel und prinzipielle Anregungen zu geben. Speziell in der Elastizitätstheorie ergeben sich ganz besondere Vorteile. Wenn man schließlich an die Entwicklung denkt, welche z. B. die dem relativitätstheoretischen Boden entwachsenen Theorien der Gravitation genommen haben, so dürften sich auch für diese Gebiete hochbedeutende mathematische Ausbildungsmöglichkeiten ergeben.

In einem Anhange sind die Formeln übersichtlich geordnet und daran schließt sich ein großes chronologisch geordnetes Literaturverzeichnis und ein sorgfältiges Register. Für den Physiker ist es schließlich interessant, daß der Autor neben allen rein mathematischen Gesichtspunkten auf die praktische Verwendbarkeit des Systems großen Wert legt. Schouten selbst ist übrigens (vgl. Vorwort von Klein und dazu Anhang, Seite 233) von den vektoriellen Problemen der Elektrotechnik her zur Grundlegung seines Systems gelangt. Der theoretische Physiker sei mit allem Nachdruck auf diese fundamentale Arbeit hingewiesen. — H. Hörig.

R. Nimführ, Die Luftfahrt. 8°. VIII u. 132 S. m. 60 Abbildungen. 3. Aufl. bearb. von F. Huth. Leipzig, B. G. Teubner. 1913. M. 1.—, geb. M. 1.25.

Der populären Tendenz der Sammlung (Aus Natur und Geisteswelt), der es angehört, entsprechend ist auch dieses Büchlein in erster Linie zur Orientierung für Laien bestimmt. Auf wissenschaftliche Fragen wird daher nur so weit eingegangen, als es zum Verständnis des Flugproblems unbedingt erforderlich ist. Zunächst werden die physikalischen Grundlagen des statischen und dynamischen Fluges kurz auseinandergesetzt, und im Anschluß daran die Eigentümlichkeiten unserer Atmosphäre, insbesondere das Wesen und die Eigenschaften der Winde erörtert. Darauf folgt ein Kapitel, das sich ziemlich eingehend mit dem Flug der Vögel beschäftigt. In den nächsten Abschnitten wird das Problem der künstlichen Fortbewegung durch die Luft behandelt; besonders ausführlich kommt dabei die Theorie des Freiballons (seine Bewegungsgesetze) zur Sprache. Der 2. Teil des Büchleins schildert die technische Entwickelung der Luftfahrt, und zwar sowohl der Frei- und Lenkballone als auch der Flugzeuge. Besonderer Wert ist dabei immer auf die Darstellung der geschichtlichen Entwickelung gelegt, an die sich dann die Beschreibung einiger charakteristischer moderner Fahrzeuge anschließt. Bei den dynamischen Maschinen werden außer den bis jetzt allein bewährten Drachenflugzeugen auch Schrauben- und Schwingenflieger erörtert. Betz.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Prof Dr. **Barkhausen**, von der technischen Hochschule in Dresden ist seit 1. März 1915 als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter bei der Inspektion des Torpedowesens in Kiel tätig.

Wilhelm Baumgartner, Supplent an der k. und k. Oberrealschule, Wien, Henriettenplatz, ist im Herbst 1914 in Galizien gefallen.

Dr. **Max Behacker**, Assistent an der deutschen Universität in Prag ist als Kommandant einer militärischen Arbeiterabteilung Anfang August 1915 bei Kamionka gefallen.

Dr. Phil. **Paul Gehne**, Technischer Hilfsarbeiter am Patentamt ist als Kriegsfreiwilliger im August 1914 eingetreten, war mit einem Reservekorps im Osten, später bei einer Fernsprechabteilung tätig.

Prof. Dr. **Joseph Ritter von Geitler**, Vorstand des Physikalischen Instituts der Universität Czernowitz, war seit Kriegsbeginn bei der Kassenverwaltung des roten Kreuz in Wien tätig, wurde auf seine Bitte im Juli 1915 als Leutnant zur Dienstleistung in das k. und k. Kriegsministerium in Wien berufen, war im August und September 1915 in technischer Verwendung an der Front, wurde am 1. August 1915 zum Oberleutnant befördert und der Luftschiffabteilung zugeteilt.

Dr. **Sigbert Wiesner**, Probekandidat am k. und k. Maximiliangymnasium in Wien, Oberleutnant d. Res. steht seit 11. Juni 1915 als Kompagnieführer an der österreichischen Ostfront.

Tagesereignisse.

Die Angliederung der **Bergakademie in Berlin** an die Technische Hochschule in Berlin ist für den 1. Oktober 1916 in Aussicht genommen. Die von der Bergakademie bisher benutzten Räume Invalidenstraße 44 werden für die Zwecke der Geologischen Landesanstalt hergerichtet werden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Georg Gehlhoff für Experimentalphysik.

Ernannt: Der Privatdozent für Allgemeine Zoologie und Kolloidchemie an der Universität Leipzig Dr. Wolfgang Ostwald zum a. o. Professor ebenda, der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. B. Dr. Alfred Loewy zum Honorarprofessor für Mathematik daselbst, der Assistent an der Sternwarte München Dr. August Kühl zum Kustos am Erdmagnetischen Observatorium daselbst, der a. o. Professor an der Universität Tübingen, Dr. Edgar Meyer zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Zürich (unter Ablehnung einer gleichzeitig erfolgten Berufung zum ord. Professor der Experimentalphysik an die Universität Göttingen), der a. o. Professor an der Universität München Dr. Alfred Heiduschka zum ord. Professor der Pharmazie und angewandten Chemie an der Universität Würzburg.

Gestorben: Der Dozent für physikalische und metallurgische Chemie am Royal College of Science für Irland in Dublin Dr. James Holms Pollok, der Direktor des Observatoriums Aarhus Astronom Georg Krüger (Erfinder des Fernrohr-Reflektors), der Privatdozent für Radiologie und Vorstand des Instituts für Röntgenstrahlen an der Universität Budapest Dr. Bela Alexander.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1916. Redaktionsschluß für No. 4 am 19. Februar 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Ausdehnungsmessungen an Gold und an kristallisiertem Quarz zwischen 18 und 520° nach der Methode von Fizeau.

Von Alex Müller.

Die Theorie des festen Zustandes liefert für die thermische Ausdehnung einen Ausdruck, dessen experimentelle Prüfung auch bei hohen Temperaturen von Interesse ist.

Ausdehnungsmessungen an den verschiedensten Metallen liegen in großer Zahl und über das ganze zugängliche Temperaturgebiet vor. Es seien nur beispielsweise die Arbeiten von Holborn und Day genannt.

Ausgehend von den einleitend genannten Gesichtspunkten wurde die Ausdehnung von reinem Gold[1]) untersucht, über das noch relativ wenige Angaben vorliegen. Die Messung geschah nach der Fizeauschen Methode, im Intervall von Zimmertemperatur bis ca. 520°. Die Anordnung lieferte die Firma C. Zeiß. Es kam ein Tischchen von kristallisiertem Quarz zur Anwendung (Höhe 1 cm). Zur Temperaturbestimmung diente ein *Pt*-Widerstandsthermometer. Betreffend der Details siehe die Dissertation des Verfassers[2]).

Wegen der Verwendung des kristallisierten Quarzes, war eine Überschreitung der 520 bis 540° nicht tunlich, da bekanntermaßen dieses Material bei 570° meistens springt.

Der Meßbereich kann durch Anwendung eines Tischchens aus geschmolzenem Quarz vergrößert werden. Es sei noch bemerkt, daß statt des *Q*-Glases das bedeutend billigere undurchsichtige *Q*-Gut für die Bodenplatte und den Ring verwendet werden können. Nach den Literaturangaben soll sich das letztgenannte Material in thermischer Hinsicht nicht wesentlich vom geschmolzenen durchsichtigen Quarz unterscheiden. Die Oberflächen können genügend poliert werden. (Die Firma C. Zeiß lieferte eine Bodenplatte aus *Q*-Gut auf Anfrage des Verfassers.)

Die Ausdehnungsmessungen ergaben:

Bereich	$\frac{l-l_0}{l_0} \cdot 10^6$ Gold.
0—520	$14{,}157 \cdot t + 0{,}002150 \cdot t^2$
	Quarz parallel der Achse
0—360	$7{,}067 \cdot t + 0{,}008362 \cdot t^2$
360—450	$3628 + 13{,}00\,(t - 360) + 0{,}01852\,(t - 360)^2 + 0{,}00006721 \cdot (t - 360)^3$
500—540	$5893 + 23{,}07 \cdot (t - 500) + 0{,}1031 \cdot (t - 500)^2$.

In der Dissertation l. c. des Verfassers wurde leider eine Arbeit von Randall[1]) übersehen, die sich auf die Quarzausdehnung in ähnlichen Temperaturintervallen bezieht. Die erste Gleichung von Randall, die mit der obigen unmittelbar vergleichbar ist, sei deshalb hier nachgetragen:

1) Von Heraeus.
2) Alex Müller, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrgang 61, 1916.

1) H. M. Randall, Phys. Rev. 20, 10, 1905.

Messung von Randall.

Bereich	$\frac{l - l_0}{l_0} \, 10^6$
0—250	$7{,}170 \cdot t + 0{,}00810 \cdot t^2$.

Zürich-Göttingen, Januar 1916.

(Eingegangen 28. Januar 1916.)

Notiz, betreffend die thermische Ausdehnung fester Stoffe.

Von Alex Müller.

Für die thermische Ausdehnung isotroper, einatomiger fester Stoffe hat Grüneisen[1]), ausgehend von seiner Theorie, folgende Beziehung gefunden:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{E}{Q - kE} \quad k = \text{eine Konstante.} \quad \text{(I)}$$

(Bezeichnungen am Schluß).

Später fand Debye[2]) auf allgemeinerem Wege die Gleichung:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{E}{Q - F} \,. \quad \text{(II)}$$

Sowohl I als II geben zwei wesentliche Beobachtungen wieder:

Erstens: Das Grüneisensche Gesetz, wonach der Quotient aus spezifischer Wärme und Ausdehnungskoeffizient $1/v \frac{dv}{dT}$ bei tiefen Temperaturen von T nahezu unabhängig wird.

Zweitens: Das zunehmende Anwachsen des Ausdehnungskoeffizienten mit steigender Temperatur (bedingt durch die Temp.-Funktionen kE bzw. F in den Gleichungen I und II).

Auf diese beiden Punkte macht Grüneisen l. c. bei der Diskussion seiner Gleichung schon aufmerksam.

F in Gleichung II enthält zwei Konstanten, a und b/a. (a und b kommen in der Reihenentwicklung der charakteristischen Temperatur nach dem Volumzuwachs vor, vgl. Debye l. c.).

Für Q gilt nach Debye die Beziehung:

$$Q = \left(\frac{C_v}{\frac{1}{v} \frac{dv}{dT}} \right)_{T=0} = \frac{v_0}{\varkappa_0 \cdot a} \,. \quad \text{(III)}$$

Aus II und III folgen somit zwei Wege zur Berechnung von a, nämlich aus der Kompressibilität $\varkappa_0$ und dem Grenzverhältnis Q einerseits (Gl. III), und aus der Ausdehnung bei höheren[3]) Temperaturen andererseits. Bestimmt man nämlich aus II die Differenz $v - v_{273}$, indem die rechte Seite nach $T - 273 = t$ entwickelt wird und vergleicht diese Potenzreihe mit der empirischen

$$v - v_{273} = v_{273} (3 \alpha t + [\beta + \alpha^2]) \, 3 t^2) \,,$$

so findet man zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten: a und b/a. Unter Berücksichtigung, daß in dem in Frage kommenden Temp.-Intervall Q groß ist gegen F, lauten diese beiden Gleichungen angenähert:

$$\left[3 \alpha \cdot \frac{v_{273}}{v_0} - \frac{E'_{273}}{Q} \right] \cdot Q^2 = (EF)'_{273} \qquad \text{(IV)}$$

$$\left[6 (\alpha^2 + \beta) \cdot \frac{v_{273}}{v_0} - \frac{E''}{Q} \right] Q^2 = (EF)''_{273} \,, \qquad \text{(V)}$$

wo

$$(EF)'_{273} = k_1 a - k_2 \cdot \frac{b}{a}$$

$$(EF)''_{273} = k_3 \cdot a - k_4 \cdot \frac{b}{a} \,.$$

Die $k_1 \cdot \cdot k_4$ und die linken Seiten von IV und V lassen sich zahlenmäßig für jeden Stoff angeben.

Die Differenzen in den linken Seiten der Gleichung IV[1]) sind in den meisten berechneten Fällen klein gegenüber den Einzelgliedern. Da die Q vielleicht auf einige Proz. bestimmt sind, ist die Genauigkeit der Differenzen zu klein, um aus IV und V die a und b/a auszurechnen.

In der folgenden Tabelle sind die Werte für a zusammengestellt, die aus Gleichung III resultieren, und diejenigen, welche unter Vernachlässigung von b/a gegenüber a, aus IV und V sich berechnen.

Tabelle.

	a[2]) aus III	a aus IV	a aus V
Al	2,0	5,4	0,1
Cu	1,8	3,9	0,7
Ag	2,4	2,8	3,5
Pt	2,3	6,0	1,7
[illegible]	2,7	5,1	2,7
Pb	2,5	4,1	7,0

Es ist aus der Tabelle ersichtlich, daß die a-Werte nach den beiden Berechnungsverfahren jedenfalls in der Größenordnung übereinstimmen.

Bezeichnungen:

v_T = Volumen des Grammatoms bei T^0 abs.

$$E = \int_0^T c_v \, dT = 3 RT \cdot \frac{3}{x_0^3} \int_0^{x_0} \xi^3 \frac{1}{e^\xi - 1} d\xi ;$$

$$x_0 = \frac{\Theta_0}{T}$$

---

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **39**, 257, 1912.

2) P. Debye, Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität. Leipzig, Teubner 1914. Diese Zeitschr. **14**, 259, 1913.

3) Es sind dabei Werte von T gemeint, für die $\frac{dE}{dT}$ nicht mehr wesentlich von T abhängt.

1) Für *Al* und *Cu* sind die Differenzen in Gl. V klein.

2) Das a aus III entspricht dem γ in der Arbeit von Grüneisen l. c.

Θ_0 = charakt. Temperatur

$$Q = \left(\frac{C_v}{\frac{1}{v}\frac{dv}{dT}} \right)_{T=0}; F = a \cdot \left[4E - 3\frac{3RT\varkappa_0}{e^{x_0}-1} \right] - \frac{b}{a}E$$

$$= a\,Tc_v - \frac{b}{a}E$$

$\varkappa_0$ = Kompressibilität bei $T = 0$

$$(\ )' = \frac{d}{dT}.$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = (3RT)^2 [2 - {}^3/_8\, x_0 - {}^3/_{160}\, x_0^3 \cdots] \\ k_2 = (3RT)^2 [2 - {}^3/_4\, x_0 + {}^3/_{80}\, x_0^3 \cdots] \\ k_3 = (3RT)^2 [2 + {}^3/_{80}\, x_0^3 \cdots \quad] \\ k_4 = (3RT)^2 [2 - {}^3/_{40}\, x_0^3 \cdots \quad] \end{array}\right\} \underline{\underline{T = 273.}}$$

α und β sind die Koeffizienten der Entwicklung:

$$l - l_{273} = l_{273}(\alpha t + \beta t^2)$$

l_{273} = Länge bei $t = 0$.

Bei der Berechnung der Tabelle: Daten für die Ausdehnung (α und β) aus den Tabellen von Landolt-Börnstein. Die übrigen aus der Grüneisenschen Arbeit l. c.

Zusammenfassung.

1. Es wurde versucht, den Debyeschen Ausdruck für die Ausdehnung isotroper, einatomiger fester Stoffe bei solchen Temperaturen zu verwenden, wo das entsprechende c_v nicht mehr wesentlich von T abhängt. Eine Konstante a dieses erstgenannten Ausdrucks kann aus Kompressibilität, Grenzverhältnis Q und Atomvolumen einerseits, aus der Ausdehnung bei höheren Temperaturen, Q und v andererseits berechnet werden.

2. Die zahlenmäßige Bestimmung von a konnte wegen Unsicherheit der Q-Werte nur angenähert ausgeführt werden, ergab jedoch eine Übereinstimmung in der Größenordnung für die auf beide Arten berechneten a.

Göttingen, Januar 1916. Phys. Inst. math. Abteilung.

(Eingegangen 28. Januar 1916.)

Zur Erklärung der beim Geschützdonner, bei großen Explosionen usw. beobachteten Fortpflanzungseigentümlichkeiten des Schalles.

Von Fr. Nölke.

Beobachtungen von Eigentümlichkeiten der Schallfortpflanzung, die früher bei großen Explosionskatastrophen gelegentlich gemacht worden sind, hat man neuerdings während des Krieges bei der Ausbreitung des Geschützdonners vielfach bestätigt gefunden. Diese Eigentümlichkeiten bestehen bekanntlich darin, daß jenseits der die Schallquelle unmittelbar umgebenden inneren Zone der Hörbarkeit noch eine äußere vorhanden ist, die von der ersten durch eine mehr oder weniger deutlich ausgeprägte Zone des Schweigens getrennt wird. Einige während des Krieges gemachte Beobachtungen sind bereits wissenschaftlich verwertet worden. — Meinardus[1]) hat Beobachtungen zusammengestellt, die in Deutschland und Holland bei der Belagerung Antwerpens vom 29. September bis zum 8. Oktober 1914 gemacht worden sind; de Quervain[2]) bezieht sich auf deutsche, schweizerische und französische Berichte über die Ausbreitung des Kanonendonners aus dem Sundgau, Weihnachten 1914. Zur Erklärung der eigenartigen Tatsachen ist vielfach eine Hypothese herangezogen worden, die v. d. Borne[3]) begründet hat, und auch Meinardus und de Quervain machen den Versuch, sie mit den beobachteten Erscheinungen in Einklang zu bringen. Doch ist es bemerkenswert, daß keiner von beiden sich ohne Vorbehalt zu ihr bekennt. Meinardus glaubt zwar, daß die vorliegenden Tatsachen wohl geeignet seien, die Hypothese v. d. Bornes zu stützen, wagt aber nicht, eine endgültige Entscheidung zu treffen, und noch mehr hält de Quervain mit seinem Urteil zurück, weil mehrere Gründe gegen die Hypothese zu sprechen scheinen. Wir wollen im folgenden untersuchen, ob für oder gegen die Zulässigkeit der v. d. Borneschen Erklärung ein Urteil gefällt werden kann.

I.

v. d. Borne nimmt an, daß die untere Sauerstoff-Stickstoff-Atmosphäre in größeren Höhen von einer Wasserstoffatmosphäre überlagert wird. Eine scharfe Grenze zwischen beiden ist nicht vorhanden; der Übergang von der einen in die andere erfolgt allmählich. Schallstrahlen, welche in diese Übergangsschichten eindringen, werden, da der Wert des Verhältnisses $e:d$ (Elastizitätsmodul: Dichte) immer kleiner wird, stetig vom Lote gebrochen; sie beschreiben eine zur Erdoberfläche konkave Bahn und können daher in geeigneten Fällen ihren Weg zur Erdoberfläche zurückfinden. Tritt diese Möglichkeit ein, so entsteht die äußere Zone abnormaler Hörbarkeit.

1. Wenn die angegebene Erklärung richtig wäre, so müßte man erwarten, daß sich die Zonen der Hörbarkeit und des Schweigens in konzentrischen Ringen um die Schallquelle herumlagern, und daß sie, infolge der Konstanz der physikalischen Bedingungen, stets und überall dieselbe Ausdehnung besitzen. de Quervain

---

1) W. Meinardus, Die Hörweite des Kanonendonners bei der Belagerung von Antwerpen; Meteorol. Zeitschr. **32**, Heft 5, 1915.

2) de Quervain, Die Ausbreitung des Kanonendonners aus dem Sundgau, Umschau 1915, Heft 27.

3) v. d. Borne, Über die Schallverbreitung bei Explosionskatastrophen, diese Zeitschr. **11**, 483, 1910.

macht jedoch darauf aufmerksam, daß dies nicht der Fall sei. Zunächst hat sich die Vollständigkeit der Ringe noch in keinem Falle dartun lassen; meistens erstreckten sich die Zonen nur über einen Viertel- bis zu einem Halbkreise. Bei Beobachtungen der Ausbreitung des Geschützdonners wird sich zwar, weil in der Nähe der Front der Geschützdonner auch aus anderen Gebieten sich störend bemerkbar macht, die Lückenlosigkeit der Zonen mit Sicherheit niemals feststellen lassen; aber in allen übrigen Fällen die Unvollständigkeit der Ringe durch unvollständige Berichte zu erklären, ist nicht zulässig. Die sehr sorgfältig von Dörr[1]) zusammengestellten Beobachtungen bei der Explosionskatastrophe auf dem Steinfelde bei Wiener-Neustadt (7. Juni 1912) dürften z. B. an der Einseitigkeit der Ringausbildung kaum einen Zweifel lassen. Ferner erscheint nach den Feststellungen de Quervains die Zone des Schweigens bei dem Kanonendonner aus dem Sundgau nicht kreis-, sondern zungenförmig; sie verläuft in der Richtung des Schweizer Juras und endet in der Nähe des Feldberges im Schwarzwalde, während sich nördlich von ihr die Zone der Hörbarkeit ohne Unterbrechung bis nach Stuttgart und Mannheim erstreckt. Hieraus kann geschlossen werden, daß bei der Ausbildung der Zonen lokale Verhältnisse eine Rolle spielen, was gegen die v. d. Bornesche Hypothese sprechen würde, und diese Folgerung wird noch durch die andere Tatsache gestützt, daß im letzten Falle die Zone des Schweigens vom Schallzentrum nur ungefähr 30 bis 50 km entfernt war, während sie gewöhnlich erst jenseits 100 km ihren Anfang nimmt. Endlich weist de Quervain darauf hin, daß der Schall in der äußeren Zone der Hörbarkeit nicht, wie man es nach der v. d. Borneschen Hypothese erwarten müßte, aus der Höhe, sondern dem Erdboden parallel, zum Teil durch Tallücken hindurch, zu kommen schien.

2. Den angeführten Argumenten lassen sich noch andere anreihen. Bei manchen zu wissenschaftlichen Zwecken unternommenen Ballonfahrten sind, z. B. von Flammarion[2]), Untersuchungen über die Fortpflanzung der Schalles angestellt worden. Flammarion bemerkt (a. a. O. S. 153), daß auch ein verhältnismäßig schwacher Schall, wie das Zirpen der Grille, das Quaken der Frösche, die menschliche Stimme, das Rauschen des Wassers noch in ziemlich beträchtlicher Höhe, bis zu 1000 m, und zwar besonders nachts, wahrnehmbar sei; der Klang einer Glocke sei noch in 1600 m Höhe hörbar, ein Gewehrschuß in 1800 m, der Lärm eines Eisenbahnzuges in 2500 m, der Pfiff einer Lokomotive in 3000 m. Auf Grund seiner Beobachtungen glaubt Flammarion auf eine besonders gute Fortleitung des Schalles in senkrechter Richtung schließen zu dürfen. Er befindet sich aber in einem Irrtum. Denn alltägliche Beobachtungen zeigen, daß, wenn störende Nebengeräusche fehlen, der Klang einer Glocke, ein Gewehrschuß, das Rollen eines Eisenbahnzuges, der Pfiff der Lokomotive in wagerechter Richtung in viel größeren als den von Flammarion angegebenen Entfernungen hörbar ist[1]), trotzdem entlang der Erdoberfläche die Schallstrahlen infolge ihrer nach oben gerichteten Krümmung (vgl. Abschnitt II) eine Schwächung erleiden, während die Schallfortpflanzung in senkrechter Richtung durch die Reflexion am Erdboden noch eine Kräftigung erfährt. Häufig wird auch die feierliche Stille, die in den höheren Schichten der Atmosphäre, besonders in dem Gebiete jenseits der Wolken herrscht, ausdrücklich hervorgehoben. Daß der Schall bei der Ausbreitung in senkrechter Richtung mehr geschwächt wird als in wagerechter Richtung, kann dadurch erklärt werden, daß er, beim Übergang in dünnere und anders temperierte Luftschichten, außer der Brechung auch eine Reflexion erleidet, welche die Energie der Schallwellen verringert.[2]) Beim Übergang der

1) J. N. Dörr, Über die Hörbarkeit von Kanonendonner, Explosionen u. dgl. Meteorol. Zeitschr. 32, Heft 5, 1915.

2) C. Flammarion, Meine Luftreisen, ins Deutsche übersetzt von Th. Grigull. Halle, O. Hendel.

1) Die menschliche Stimme z. B., die nach Flammarion in der Richtung von unten nach oben bis zu 500 m, in der Richtung von oben nach unten bis zu 200 m verständlich bleibt (a. a. O. S. 154), reicht, wenn keine störenden Einflüsse vorliegen, in wagerechter Richtung kilometerweit. Foster konnte sich bei Port Bowen mit einem 2 km weit entfernten Manne gut unterhalten, und der Ruf der Schildwachen von Portsmouth ist nach Nicholson 6000 bis 7500 m weit hörbar.

2) Tyndall hat durch Versuche nachgewiesen, daß Luftschichten von verschiedener Temperatur oder verschiedenem Wasserdampfgehalt den Schall nur teilweise durchlassen, daß sie ihn teilweise reflektieren. Die Atmosphäre, in der sich verschieden temperierte Luftmassen über- oder nebeneinander befinden, ist daher als akustisch trübe zu bezeichnen. Tyndall hat festgestellt, daß selbst in der klarsten Luft Echos von großer Intensität und langer Dauer entstehen. In Übereinstimmung hiermit steht die Beobachtung des Astronomen v. Zech, daß auf der isoliert liegenden Sternwarte Seeberg bei Gotha bei heiterer, ruhiger, trockener Luft, wenn die Sterne keine oder nur geringe Scintillation zeigten, die Glocken der umliegenden Dörfer, das Geräusch der Mühlen, das Bellen der Hunde, das Rufen der Nachtwächter ausnehmend deutlich gehört wurden, während alle diese Schalle gar nicht oder nur dumpf wahrnehmbar waren, wenn die Sterne scintillierten. Auch A. v. Humboldt hat über die akustische Durchlässigkeit der Luft interessante Beobachtungen gemacht (vgl. J. Tyndall, Der Schall. Deutsche Übersetzung v. Helmholtz und Wiedemann, S. 21 f.).

Wenn bei der Schallfortpflanzung die Energieübertragung nur nach den Gesetzen des elastischen Stoßes

Schallwellen von dünneren in dichtere Schichten tritt eine ähnliche Schwächung ein. Was nach Durchqueren der Luftschichten in 70 und mehr km Höhe, wo die Luftdichte geringer als der 10000. Teil der Dichte an der Erdoberfläche ist, an Schallenergie zur Erde zurückgelangt, dürfte daher nur noch ein verschwindender Bruchteil der ursprünglichen Energie, und da gleichzeitig eine Schwächung derselben nach dem Quadratgesetze der Entfernung erfolgt, nicht mehr imstande sein, auf die Gehörnerven einen Eindruck zu machen.

3. Ferner ist zu beachten, daß, wenn der Himmel bedeckt ist, die in der Grenzzone der Wasserstoffatmosphäre zurückgebogenen Schallstrahlen zweimal die Wolkenschicht durchdringen müssen und, da Nebel in hohem Grade den Schall dämpft[1]), in ihr ebenfalls eine mehr oder minder bedeutende Schwächung erfahren.

4. Die beobachtete Verstärkung des Schalles am inneren Rande der äußeren Zone der Hörbarkeit erklärt v. d. Borne dadurch, daß hier eine Art Brennlinie der Schallstrahlen entstehe. Eine Brennlinie kommt zustande, wenn zwei benachbarte Strahlen sich schneiden. Am inneren Rande der äußeren Hörbarkeitszone schneiden sich aber nicht benachbarte, sondern weit voneinander getrennte Strahlen, die in sehr verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche zur Rückkehr gezwungen wurden und daher um viele km verschiedene Wege zurücklegen mußten (vgl. v. d. Borne, a. a. O. S. 487, Tabelle). Wenn aber zwei Schallwellen viele Sekunden, ja mehr als eine Minute nacheinander eintreffen, so kann von einer gegenseitigen Verstärkung nicht mehr die Rede sein.

5. Angenommen endlich, alle unsere die Energie der zurückgebogenen Schallwellen betreffenden Einwendungen seien hinfällig, welchen Ursachen will man es dann zuschreiben, daß sich die in Rede stehenden Eigentümlichkeiten der Schallfortpflanzung nicht bei jeder heftigen Schallerregung beobachten lassen? Müßten sich nicht, da die Verhältnisse in den Grenzschichten der Sauerstoff-, Stickstoff- und der Wasserstoff-Atmosphäre ungeändert bleiben, an jedem Orte und zu jeder Zeit dieselben Erscheinungen wiederholen? Besondere Windverhältnisse in den oberen Atmosphärenschichten können hier zur Erklärung nicht herangezogen werden, da sich aus ihnen höchstens eine gewisse Einseitigkeit der Hörbarkeitsverhältnisse ergäbe. Andere Ursachen dürften aber kaum aufzufinden sein.

II.

Nach allem Gesagten erscheint es sehr zweifelhaft, ob die Hypothese v. d. Bornes bei der Erklärung der in Frage stehenden Schallphänomene herangezogen werden darf. Die andere Hypothese, daß in der Umgebung der Schallquelle aufsteigende, über der Zone des Schweigens horizontale und in der äußeren Zone der Hörbarkeit absteigende Luftströme den Schall übertragen, verdient wegen der Willkürlichkeit ihrer Voraussetzungen kaum eine ernstliche Würdigung und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Aber es läßt sich noch eine dritte Annahme machen, die merkwürdigerweise schon bald nach den ersten Beobachtungen der Schallfortpflanzungsanomalien von de Quervain und v. d. Borne aufgestellt worden ist. Sowohl de Quervain als v. d. Borne haben auf die Möglichkeit hingewiesen, daß Schallwellen an höher temperierten Luftschichten reflektiert werden können, weil der Schallstrahl beim Eindringen in wärmere Luftschichten vom Lote gebrochen wird. Trotzdem diese Erklärung, wie wir sehen werden, alle beobachteten Eigentümlichkeiten sehr gut erklärt, ist sie von ihren Urhebern wieder aufgegeben worden, wahrscheinlich weil ein Nebenumstand, mit dem sie steht und fällt, von ihnen übersehen worden ist.

Bedeutet α den Winkel, den der Schallstrahl an einer beliebigen Stelle mit der Vertikalen bildet, T die absolute Temperatur an dieser Stelle, und sind α_0 und T_0 die bei der Schallquelle geltenden Werte, so besteht, wenn die molekulare Zusammensetzung der Luft sich nicht ändert

---

vor sich ginge, so würde im Falle kontinuierlicher Dichteänderung die gesamte Energie mit den Schallstrahlen fortwandern. Es sei m die stoßende Luftmasse, c ihre Geschwindigkeit, m' die gestoßene Masse, v' ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße; dann ist

$$v' = \frac{2\,mc}{m + m'}.$$

Schreibt man $m' = m + dm$, $v' = c + dc$, so erhält man $2\,mdc = -\,cdm$ und hieraus $mc^2 =$ const., d. h. die Energie bleibt dem Schallstrahle erhalten (vgl. Seeliger, Beobachtung der Helligkeitsabnahme durch Brechung, diese Zeitschr. **5**, 237, 1904).

1) Vgl. Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. 2, Akustik, 2. Aufl., S. 558.

Die Angaben über den Einfluß des Nebels auf die Schallfortpflanzung lauten nicht ganz übereinstimmend. Nach Tyndall ist ein Einfluß nur dann erkennbar, wenn der Nebel eine andere Temperatur besitzt als die umgebende Luft. In diesem Falle würde also der Nebel selbst keine Rolle spielen, sondern nur eine Luftmasse, die schon an sich infolge ihrer Temperaturverhältnisse als akustisch trübe zu bezeichnen wäre, auch optisch trübe machen. Für unseren obigen Einwand ist diese Feststellung unwesentlich, da die Wolkenschicht häufig eine Zone der Temperaturumkehr darstellt (vgl. A. Wegener, Thermodynamik der Atmosphäre, S. 143 ff.) und daher akustisch trübe ist. Die von Flammarion beobachtete gute Wahrnehmbarkeit irdischer Geräusche in der Wolkenschicht (a. a. O. S. 57 und 154) bestätigt unsere Folgerung. Sie beruht wahrscheinlich nicht, wie Flammarion vermutet, auf einer besseren Leitfähigkeit des Nebels für den Schall, sondern auf einer Reflexion der Schallstrahlen an der höher temperierten Luftschicht der Wolke; vgl. Abschnitt II.

und wenn von der Krümmung der Erdoberfläche abgesehen wird, die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

(vgl. v. d. Borne, a. a. O. S. 485). Für den Punkt der Umkehr des Strahles nach der Erdoberfläche folgt hieraus $\sin \alpha_0 = \sqrt{T_0 : T}$. Hiernach würde ein Strahl nur dann zur Erde zurückkehren können, wenn $T > T_0$, d. h. wenn die Temperatur in den oberen Atmosphärenschichten höher als die Temperatur an der Erdoberfläche wäre. Diese Annahme bei sämtlichen beobachteten Fällen abnormaler Hörbarkeit zu machen, ist aber wegen der großen Seltenheit einer absoluten Temperaturumkehr gänzlich unzulässig. Aus dem angegebenen Grunde lehnt v. d. Borne die Erklärung ab (a. a. O. S. 485), und de Quervain scheint seiner Beweisführung gefolgt zu sein. Aber bei derselben ist ein wesentliches Moment ganz unberücksichtigt geblieben, d. i. die Beugung der Schallstrahlen. Diese darf auf keinen Fall vernachlässigt werden. Eine wie große Rolle die Beugung schon bei der gewöhnlichen Schallfortpflanzung spielt, ist bekannt. Bäume, Häuser und nicht übermäßig hohe Bodenerhebungen bieten den Schallstrahlen, besonders bei größeren Wellenlängen, nur ein geringes Hindernis; ja sogar im hindernisfreien Raume würde die nach allen Seiten hin erfolgende Ausbreitung des Schalles bei normalen Verhältnissen ohne Beugung überhaupt nicht zu erklären sein. Um dies zu zeigen, wollen wir die Bahn bestimmen, die ein Schallstrahl in der Atmosphäre zurücklegt, falls von der Beugung abgesehen wird.

Das gewöhnliche Temperaturgefälle in den unteren Luftschichten sei ε Celsiusgrade auf 1000 m Höhendifferenz; dann folgt aus der Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

da $T = T_0 - \varepsilon y \,\mathrm{km}^{-1}$ und $\sin^2 \alpha = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}$ ist, wenn man

$$\sin^2 \alpha_0 \left(1 - \frac{\varepsilon y}{T_0} \mathrm{km}^{-1}\right) = z$$

und

$$\frac{\varepsilon \sin^2 \alpha_0}{T_0} \mathrm{km}^{-1} = A$$

setzt,

$$dz \sqrt{\frac{z}{1 - z}} = - A\, dx.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus für die Bahn des Schallstrahls die Gleichung

$$A x = \sqrt{z - z^2} - \frac{1}{2} \arccos (1 - 2z) + \alpha_0 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0.$$

Für den Krümmungsradius ϱ dieser Kurve erhält man den einfachen Wert

$$\varrho = \frac{2\sqrt{z}}{A}.$$

Setzt man $\alpha_0 = 90^0$, so findet man für die Kurvengleichung die in der Umgebung des Nullpunktes geltende Näherungsformel

$$x = 2\sqrt{\frac{y}{A}}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

Der Durchschnittswert von ε ist in Mitteleuropa 6. Setzt man $T_0 = 280$, so ergibt sich aus der letzten Gleichung z. B. für $y = 1$ km, $x = 14$ km, und für $y = 0{,}5$ km, $x = 10$ km. Wenn keine Beugung vorhanden wäre, so würde also der wagerecht ausgehende Schallstrahl schon in 14 km Entfernung 1 km hoch, in 10 km Entfernung 500 m hoch und in 1 km Entfernung 5 m hoch über unseren Köpfen hinstreichen, d. h. man würde am Erdboden schon in geringer Entfernung von der Schallquelle den Schall nicht mehr wahrnehmen. In Wirklichkeit umgibt die Zone der normalen Hörbarkeit die Schallquelle aber bis zu einer Entfernung von 80 und mehr km, und dabei liegen die äußersten Punkte dieser Zone infolge der Erdkrümmung sogar noch mehr als 500 m unter der Tangentialebene, die an der Schallquelle die Erdoberfläche berührt! Wenn aus dieser Tatsache die außerordentliche Bedeutung der Beugung der Schallstrahlen für die Hörbarkeit des Schalles schon in der näheren Umgebung der Schallquelle hervorgeht, so versteht es sich von selbst, daß sie auch bei der Erklärung der Schallphänomene in der äußeren Zone der Hörbarkeit nicht vernachlässigt werden darf. Wenn auch zugegeben werden muß, daß in größerer Entfernung von der Schallquelle nicht gebeugte Schallstrahlen, weil sie bedeutende Höhen in immer steilerer Bahn durcheilen, nur dann zur Erde zurückkehren könnten, wenn sie in hoch temperierte Luftschichten eindringend, eine kräftige Brechung erführen, so ist demgegenüber doch zu betonen, daß stets noch kräftige abgebeugte Strahlen vorhanden sind, die unter kleinen Winkeln der Erdoberfläche verhältnismäßig nahe Luftschichten treffen und, falls diese eine etwas höhere Temperatur besitzen als die unter ihnen befindlichen Schichten, an ihnen zur Umkehr gezwungen werden können. So würde z. B. ein Schallstrahl, der bis zu $3^1/_2{}^0$ gegen die Grenzfläche zweier Schichten geneigt wäre, total reflektiert



werden, falls die obere Schicht eine nur um 1° C höhere Temperatur besäße als die untere. Damit die Zone des Schweigens und die äußere Zone der Hörbarkeit ihre Erklärung finden, braucht daher nur angenommen zu werden, daß in verhältnismäßig geringen Höhen der Atmosphäre die Temperatur eine Inversion erleidet. Derartige Inversionen sind häufig festgestellt worden[1]) und können verschiedene Ursachen haben. Sie können entstehen, wenn wärmere Luftströmungen sich über kältere schieben oder wenn, bei der Neubildung von Wolken, durch teilweise Kondensation des Wasserdampfes Wärme frei wird[2]). Durch ungleichmäßige Ausbildung der Inversionsschicht finden alle Unregelmäßigkeiten, die bei den drei Zonen in den verschiedenen bis jetzt untersuchten Fällen festgestellt sind, ihre Erklärung. Die Schicht kann höher und tiefer liegen; sie kann Lücken aufweisen; sie kann sich auch lokal heben oder senken. Dadurch wird die Gestalt und die Erstreckung der Zonen beeinflußt.

Der Erklärung gemäß würde, wenn eine Brechung und Reflexion der Schallwellen in den oberen Luftschichten erfolgt, die Zone des Schweigens nur die unteren Luftschichten umfassen. Bei senkrechter Erhebung von der Erdoberfläche und gleichzeitiger Annäherung an die Inversionsschicht müßte man in den Weg der Schallstrahlen gelangen und den Schall daher wahrnehmen. Dies ist tatsächlich beobachtet worden. de Quervain bemerkt, daß beim Kanonendonner aus dem Sundgau innerhalb der Zone des Schweigens an gewissen hochgelegenen Stellen (des Schweizer Juras) der Schall hörbar gewesen sei. Für die Erklärung spricht ferner der Umstand, daß die günstigste Zeit für die Schallfortpflanzung, was sich besonders deutlich bei dem Kanonendonner an der Westfront bemerkbar gemacht hat, die kühle Jahreszeit ist; im Winter ist nämlich die Inversion eine viel häufigere Erscheinung und außerdem, wegen der größeren Gleichmäßigkeit der Temperaturverteilung in den unteren Atmosphärenschichten, die akustische Durchlässigkeit der Luft eine bessere als im Sommer.

Im Hinblick auf die Intensität der Schallfortpflanzung verdient noch der Umstand Erwähnung, daß, wenn die Schallwellen in verhältnismäßig geringen Atmosphärenhöhen reflektiert werden, die Ausbreitung des Schalles gleichsam zwischen zwei parallelen Flächen erfolgt, seine Intensität also nicht mit der zweiten, sondern nur mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt.

1) A. Wegener, Thermodynamik der Atmosphäre; 1911, S. 137 ff.

2) Flammarion hat auf seinen Ballonfahrten beim Durchqueren der Wolken in ihnen gewöhnlich eine 2° bis 4° höhere Temperatur als unterhalb und oberhalb derselben festgestellt, und zwar war die Temperatur am höchsten in der Nähe des oberen Wolkenrandes (a. a. O. S. 150).

(Eingegangen 31. Januar 1916.)

Die elektromagnetischen Wellenkonstanten eines isotropen Körpers, erschlossen aus Polarisationsmessungen auf Grund der historischen Reflexionsformeln.

Von Karl Uller.

Es falle ein einfaches, einfarbiges Strahlbündel auf die Grenzebene eines isotropen und nicht-drehenden konservativen Körpers mit positiver Wellenkonstante unter einem solchen Winkel φ, daß „Totalreflexion" nicht auftritt. Wir zerlegen seine Schwingungsellipsen parallel und senkrecht zur Einfallsebene und bezeichnen die entsprechenden Amplituden mit E_p bzw. E_s. Für das Verhältnis der reflektierten Amplituden haben wir bekanntlich

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{E_p}{E_s}\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)}. \qquad (1)$$

Darin ist χ der Winkel des gebrochenen Strahlbündels mit dem Flächenlot; er berechnet sich aus dem „Snelliusschen Brechungsgesetz", welches lautet:

$$\sin\varphi : \sin\chi = \sqrt{a_2} : \sqrt{a_1}. \qquad (2')$$

Statt der Wellenkonstanten a kann man die elektrischen Erregungskoeffizienten ε setzen, wenn die magnetischen Erregungskoeffizienten μ für beide Medien gleich sind.

Findet „Totalreflexion" statt, oder besitzen die Körper Extinktionsfähigkeit oder sind die ersten Wellenkonstanten nicht positiv, so gilt der Ausdruck (1) nur noch formal, vorausgesetzt daß wir auch die Beziehung (2') nur noch formal ansetzen, also nach dem Vorgang von Cauchy χ als einen komplexen Winkel ansehen, der aus dem komplexen Verhältnis

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \qquad (2)$$

definiert ist. Die beiden Komponenten von χ haben keine physikalische Bedeutung: sie geben nicht die Richtung des Phasen- bzw. des Amplitudengefälles gegen das Flächenlot an. Natürlich fallen jetzt auch die reflektierten Amplituden in (1) komplex aus; man schreibt daher

$$R_p/R_s = \varrho \cdot e^{i\delta}, \qquad (3)$$

worin ϱ das Verhältnis der reellen Amplituden und δ die relative Phasendifferenz der P-Welle gegen die S-Welle bedeutet.

Es sei nun das einfallende Strahlbündel strichpolarisiert unter 45^0 gegen das Lot der Einfallsebene, so daß E_p gleich E_s ist. Dann ergibt sich aus (1) und (3) unter Hinzuziehung von (2) bekanntlich

$$\frac{1-\varrho\cdot e^{i\delta}}{1+\varrho\cdot e^{i\delta}}=\frac{\cos\varphi\cdot\cos\chi}{\sin\varphi\cdot\sin\chi}=\frac{\sqrt{a_2/a_1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cdot\mathrm{tang}\,\varphi}. \quad (4$$

Bei den üblichen Polarisationsmessungen im reflektierten Strahlbündel werden die Phasendifferenz δ und das Amplitudenverhältnis ϱ bestimmt; letzteres aus dem gemessenen Azimut ψ der wiederhergestellten Linearität der Schwingungen gegen das Lot der Reflexionsebene, gemäß der Formel $\varrho=\mathrm{tang}\,\psi$. Bedenken wir nun, daß

$$\frac{1-\varrho\cdot e^{i\delta}}{1+\varrho\cdot e^{i\delta}}=\frac{\cos 2\psi-i\sin\delta\cdot\sin 2\psi}{1+\cos\delta\cdot\sin 2\psi} \quad (5)$$

geschrieben werden kann, so liefert uns (4) direkt:

$$\begin{aligned} a_2' &= a_1'\sin^2\varphi+\{a_1'(\cos 4\psi+\cos^2\delta\cdot\sin^2 2\psi)+a_1''\sin\delta\cdot\sin 4\psi\}\sin^3\varphi\cdot\mathrm{tang}^2\varphi/\{1+\cos\delta\cdot\sin 2\psi\}^2\\ a_2'' &= a_1''\sin^2\varphi+\{a_1''(\cos 4\psi+\cos^2\delta\cdot\sin^2 2\psi)-a_1'\sin\delta\cdot\sin 4\psi\}\sin^2\varphi\cdot\mathrm{tang}^2\varphi/\{1+\cos\delta\cdot\sin 2\psi\}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Sind insbesondere $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ zusammengehörige Werte für $\delta=\pi/2$, und ist das erste Medium insbesondere Luft, genauer das Vakuum, dessen elektromagnetische Wellenkonstante wir mit $a_0=4\pi^2/\lambda_0^2$ bezeichnen, so kommt aus (6) unter Weglassung des Zeigers 2:

$$\left.\begin{aligned} a'/a_0 &= \sin^2\overline{\varphi}\,\{1+\mathrm{tang}^2\overline{\varphi}\cdot\cos 4\overline{\psi}\}\\ a''/a_0 &= -\sin^2\overline{\varphi}\cdot\mathrm{tang}^2\overline{\varphi}\cdot\sin 4\overline{\psi}. \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Diese einfachen Formeln liefern die beiden Wellenkonstanten des Körpers direkt und ohne irgendwelche Vernachlässigung.

Bisher sind diese Charakteristiken nur auf dem Umwege über den Brechungsindex n und den Absorptionsindex x berechnet worden, über „die optischen Konstanten", die aber nicht Konstanten in einem Brechungsgesetze der Isophasennormalen oder der Strahlungen sind und daher eine physikalische Bedeutung nicht beanspruchen können, deren Kenntnis für die gebrochene Welle also gleichgültig ist. Diese nur historisch gerechtfertigten Größen sind zudem bei Benutzung von Polarisationsmessungen bekanntlich nur aus verwickelten Formeln zu gewinnen, wobei man die Fehler von rechnerischen Vernachlässigungen oder von Ungenauigkeiten bei graphischen Auswertungen in den Kauf nehmen muß. Unsere Formeln (6) sind von diesen Übelständen frei. Einige aus der Literatur herausgegriffene Beispiele mögen die so auftretenden rechnerischen Unterschiede zeigen. Die folgende Tabelle gibt für einige Körper und Wellenlängen die Haupteinfallswinkel $\overline{\varphi}$ und die Hauptazimute $\overline{\psi}$, entnommen den Beobachtungen von Drude[1]) Wartenberg[2]) Meier[3]) Försterling u. Fréedericksz[4]). Daraus sind nach (6') die Wellenkonstanten berechnet. Die Spalten (8) und (9) enthalten die von den Herren Beobachtern aus bekannten Formeln berechneten n und nx, aus denen ich die Zahlenwerte der Spalten (10) und (11) gewann. Diese sollten mit denen der Spalten (5) und (6) identisch sein. Man sieht

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Körper	Wellenlänge λ in $\mu\mu$	φ	ψ	a'/a_0	a''/a_0	Beobachter	n	nx	$n^2(1-x^2)$	$-2n^2x$
Gold	257,3	60° 43'	30° 40'	− 0,54	− 2,0	Meier	0,918	1,142	− 0,463	− 2,10
„	668	74° 2'	42° 6'	− 10,1	− 2,3		0,355	3,206	− 9,04	− 2,28
„	4830	88° 15'	43° 24'	− 1062	− 119,3		1,83	33	− 995,6	− 120,7
Silber . . .	4370	88° 15'	41° 12'	− 1032	− 280,6	Försterling	4,34	32,6	− 1041,2	− 283
Kupfer . . .	4610	85° 30'	27°	− 48,6	− 152,6	und	7,61	9,9	− 40,2	− 150,9
Platin . . .	4650	87°	27° 18'	− 118,3	− 343	Fréedericksz	10,9	15,5	− 121,1	− 338
Iridium . . .	4600	87°	25°	− 62	− 357,6		12,28	14,61	− 63,3	− 358,7
Nickel . . .	257,3	61° 38'	31° 36'	− 1,0	− 2,7		0,872	1,238	− 0,77	− 2,7
Quecksilber. .	325,5	69° 32'	37° 51'	− 4,65	− 3,02	Meier	0,679	2,257	− 4,46	− 3,06
Woodlegierung	257,3	64°	37° 10'	− 2,02	− 1,77		0,580	1,553	− 2,08	− 1,8
Wismut . . .	257,3	59° 30'	28° 35'	− 0,14	− 1,95		0,991	0,998	− 0,015	− 1,977
Natrium . . .	589	71° 19'	32° 50'	− 6,95	− 0,0183	Drude	0,005	2,61	− 6,80	− 0,026
Jod	361,1	68° 34'	18° 41'	+ 2,34	− 5,38		2,04	1,33	+ 2,39	− 5,43
„	589,3	73° 35'	5° 18'	+ 10,75	− 3,61	Meier	3,34	0,57	+ 10,83	− 3,80
Selen	257,3	66° 22'	20° 33'	+ 1,45	− 4,32		1,731	1,255	+ 1,425	− 4,35
„	668	70° 34'	5° 6'	+ 7,55	− 2,42		2,790	0,450	+ 7,60	− 2,51
Silizium . . .	589	75° 38'	3° 30'	+ 13,55	− 3,14	Wartenberg	3,87	0,47	+ 14,78	− 3,64
Graphit . . .	589	74°	17°	+ 5,1	− 10,42		2,98	1,74	+ 5,86	− 10,37

1) Drude, Lehrbuch der Optik. 2) v. Wartenberg, Optische Konstanten einiger Elemente. (Verhandl. d. D. Phys. Ges. **12**, 105, 1910.) 3) Meier, Untersuchungen über Dispersion und Absorption bei Metallen. (Dissertation, Göttingen 1909.) 4) Försterling u. Fréedericksz, Die optischen Konstanten einiger Metalle in Ultrarot. (Ann. d. Phys. **40**, 201, 1913.)

aber, daß das nicht der Fall ist. Die Unterschiede sind meist nicht unbeträchtlich; für die erste Wellenkonstante von Wismut ist er sogar sehr groß. Es drängt sich die Frage auf: wie groß mögen erst in der Magnetooptik die Unterschiede ausfallen.

Der beschriebene Weg, auf dem das Ziel (6) erreicht worden ist, ist nicht befriedigend. Die Formeln (1) und (2) kranken an dem komplexen Winkel χ, dessen beide Komponenten jeder Anschauung bar sind. Wie ich schon früher — in der Einleitung einer Wellenstudie und im Schlußabsatz der Darstellung des Reflexionsvermögens eines isotropen Körpers — berührt habe, sind alle bisherigen Formeln für die Wellen in extingierenden, drehenden, elektrisch- und magnetisch-aktiven Körpern, ihrer Bauart nach induktiv, d. h. sie sind als Erweiterungen der Welle in einem gewöhnlichen konservativen Körper gedacht. Indessen tat diese historisch wohl erklärliche Auffassung den Verhältnissen Zwang an und schuf Formeln, die den Vorgängen nicht angemessen waren, Formeln, die ich zunächst mal nur zur Unterscheidung die historischen benennen will. Sachgemäß hat man vielmehr deduktiv zu verfahren, indem man aus den Grundgleichungen zunächst den Bau einer beliebigen Planwelle, einer Welle mit konstantem Wellenvektor sowie mit konstantem und gespreiztem Wellennormalenpaar, aufsucht, d. h. Beziehungen des Wellennormalenpaares und des Wellenvektors unter sich und zu den Wellenkonstanten feststellt. Sodann hat man mit Hilfe des Energieprinzips den Strahlvektor in seinen Beziehungen zu den genannten Größen darzustellen. Nunmehr kann man an das Problem der Brechung und Zurückwerfung der Welle herantreten. Statt der n und x treten dann die Normalkomponenten der Wellennormalenpaare in Verbindung mit den Wellenkonstanten beider Medien auf. Schließlich hat man noch die Strahlungen in allen Sekundärstrahlen zu berechnen, wobei zu beachten ist, daß im Allgemeinen nicht ihre Richtungen mit denen der zugehörigen Isophasennormalen zusammenfallen. Spezialisierte Voraussetzungen, wie z. B. daß beide Medien konservativ sind, oder daß das einfallende Wellennormalenpaar gestreckt ist, liefern einfacher gebaute Unterfälle. Die Vorzüge dieser Darstellung werden mit der Zeit auch an ihren Leistungen sichtbar werden.

Für die elektromagnetische Wellenfortpflanzung in gewöhnlichen Körpern, die ja im vorliegenden Falle in Betracht kommt, ist diese Darstellungsweise von mir durchgeführt[1]). Meine Aufgabe besteht also noch darin zu zeigen, wie die Formeln (6) auf diesem sachgemäßen Wege erreicht werden.

1) K. Uller, Brechung und Zurückwerfung elm. Wellen. (Verhandl. d. D. Phys. Ges. 16, 875, 1914.)

Gießen, im Januar 1916.

(Eingegangen 25. Januar 1916.)

Bemerkung zu meiner Notiz: „Eine Kompensationsmethode zur Messung kleiner Elektrizitätsmengen ohne Piezoquarz"[1]).

Von F. Harms.

Herr M. Wolfke macht mich freundlich darauf aufmerksam, daß die beschriebene Methode (von mir im Jahre 1903 angewandt, aber nicht publiziert) in den Jahren 1903, 1907, 1909 von Townsend, Moulin, Lattès in englischen und französischen Zeitschriften publiziert worden und nach diesen Publikationen auch in einige Handbücher aufgenommen ist. Bei der Abfassung der Notiz habe ich das, durch Militärdienst an genauerer Durchsicht der Literatur gehindert, übersehen.

Ich lege auch keinen Wert darauf, die an sich ja fast selbstverständliche Methode als mein geistiges Eigentum zu reklamieren, sondern nur darauf, auf ihre Vortrefflichkeit, auch für genaue Messungen, hinzuweisen.

1) Elster-Geitel-Festschrift, Braunschweig, Vieweg & Sohn 1915. Beilage.

Würzburg, Januar 1916.

(Eingegangen 3. Februar 1916.)

Nachtrag zu meiner Abhandlung: Über das Wulfsche Elektrometer und das Engler und Sievekingsche Fontaktoskop[1]).

Von B. Walter.

Von Herrn G. Berndt werde ich brieflich darauf aufmerksam gemacht, daß er die von mir in der obigen Abhandlung benutzte umgekehrte Stellung des Wulfschen Elektrometers bereits bei seinen luftelektrischen Messungen im Jahre 1911[2]) angewandt habe, was mir bei Abfassung meiner Abhandlung leider nicht bekannt war und daher nicht erwähnt wurde. Die Veröffentlichung der letzteren war aber deswegen doch nicht überflüssig, da ihr Hauptzweck darin bestand, auf die Möglichkeit der Verbindung

1) B. Walter, diese Zeitschr. 17, 21, 1916.
2) G. Berndt, diese Zeitschr. 12, 1125, 1911 (s. auch Veröff. d. D. Wiss. Vereins in Buenos Aires Nr. 3, 1913, S. 20).

des umgekehrt gestellten Wulfschen Elektrometers mit dem Engler und Sievekingschen Fontaktoskop und die dadurch erreichte erhebliche Verbesserung dieses Apparates hinzuweisen, was bisher von anderer Seite noch nicht geschehen zu sein scheint.

Hamburg, Physikalisches Staatslaboratorium, den 10. Februar 1916.

(Eingegangen 11. Februar 1916.)

BESPRECHUNGEN.

W. Wien, Die neuere Entwicklung unserer Universitäten und ihre Stellung im deutschen Geistesleben. Rede für den Festakt in der neuen Universität am 29. Juni 1914. 31 Seiten. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1915. M. 1.—.

Die für eine Jubelfeier der Würzburger Universität (29. Juni 1914) bestimmte Rede, welche übrigens infolge des Serajewoer Mordes (28. Juni 1914) nicht gehalten werden konnte, nimmt zu den Fragen Stellung: Haben unsere Universitäten wirklich noch die führende Stellung im deutschen Geistesleben, ist ihre Organisation noch die richtige?

Es ist ungemein erfreulich, daß auch einmal ein hervorragender Vertreter der Physik an die in jenen Fragen berührten Dinge herangeht. Trotz mancher eindringlichen Mahnung gehört es ja leider für die meisten deutschen Universitätslehrer immer noch zum Dogma, daß alles bei den Universitäten wunderbar bestellt sei, und daß man sich um Fragen jener Art immer nur zu kümmern brauche, solange man ein akademisches Ehrenamt bekleide oder sobald es gelte, ein irgendwie für gefährdet erachtetes Universitätsprivilegium zu verteidigen. In Wirklichkeit ist es höchste Zeit, mit jener „Ich lieg und besitze" Stimmung aufzuräumen. Mehr noch wie zur Zeit, da die vorliegende Rede entstand, wird heute durch den Krieg die Mahnung herangebracht, Veraltetes auszumerzen und die neuen Aufgaben entschlossen zu erkennen, damit auch Universitäten und Hochschulen den Riesenforderungen und -Hoffnungen der kommenden Zeiten gerecht werden.

Wer solche Mahnung hören will, findet in der Rede W. Wiens viele Anregung. Zahlreiche Einzelfragen werden berührt, wenn es sich auch naturgemäß im Rahmen einer Rektoratsrede eben nur um ein Berühren handeln kann. Manches klugbedachte Wort findet sich über die Dinge, die im Urgrunde des Universitätslebens gären und sich regen. Mit Recht wird z. B. wieder betont, daß es ein bedauerliches Versäumnis der Universitäten war, sich nicht bei Zeiten die technischen Hochschulen anzugliedern, wobei fraglos beide Anstalten gewonnen haben würden. Hier hätte eine eindringliche Warnung mit deutlichem Fingerzeig angebracht werden können; denn dem Eingeweihten zeigen sich schon wieder Keime zu ähnlichen Unterlassungssünden und entsprechenden weiteren Einbußen. — Daß ein Nachgeben gegen das Drängen der Privatdozenten, an der Universitätsverwaltung teilzunehmen, deren eigenes Interesse schädigen würde, wird jeder Einsichtige unterschreiben. Im großen und ganzen möchte W. Wien überhaupt die innere Organisation der Universitäten nur wenig geändert sehen. — Die von vielen gefürchtete Gefahr einer Zentralisation der deutschen Wissenschaft an die großen Universitäten hält W. Wien nicht für bedrohlich. Der Höhepunkt dieser Entwicklung sei schon überschritten, und es gäbe zum Glück eine große Reihe von Kräften, sowohl idealer wie materieller Art, welche der Zentralisation das Gegengewicht halten. Die von Althoff eingeleitete Politik, jeder der kleinen Universitäten wenigstens in einer Wissenschaftsgruppe eine auch der größten Universität gleichwertige Ausstattung zu schaffen, ist ein sehr wichtiges und bewußt angewendetes Gegenmittel dieser Art, welches gelohnt hätte, hier zu nennen und zu würdigen. — Die Forschungsinstitute sind sehr zu begrüßen, aber sie sollten unbedingt den Universitäten angegliedert werden; ihre Leitung müßte gewissermaßen „Ordinarien ohne Lehrauftrag" an einer Universität übergeben werden; das würde beiden Teilen zum Segen gereichen. — „Ebenso wichtig aber, und vielleicht wichtiger wie gute äußere Einrichtungen, ist der Geist, der an den Universitäten herrscht und die sittliche Kraft, die sie ausüben". Man darf mit Wien der Meinung sein, daß wir auch in dieser Beziehung im großen und ganzen den richtigen Weg gegangen sind. Doch wäre es gut gewesen, einmal zu fragen, ob die Universitäten nicht doch, in einseitiger Überschätzung des wissenschaftlichen Könnens vielfach den Sinn für die Bedeutung der unterbewußten Persönlichkeit und deren Pflege verloren haben; ob nicht doch hier und da der ihnen gemachte Vorwurf des „Gehirnfatzkentums" berechtigt ist; und ob sie nicht bei Vermeidung dieses Fehlers in größerer Breite als die geistigen Führer des Volkes anerkannt sein würden, als sie es jetzt sind. Der Krieg kann und wird uns auch auf diesem Gebiete seine Lehren nicht vorenthalten.

Es hätte sicher noch vieles mehr gesagt und das Gesagte in vielem tiefer gefaßt werden können. Im ganzen aber ist die Rede ein erfreuliches Zeichen der Zeit. Möchte sie ihren Zweck erreichen, recht viele zur Beantwortung ihrer Fragen durch Wort und Tat anzuregen. H. Th. Simon.

K. Schreber, Hervorragende Leistungen der Technik, Erster Teil. (B. Schmids naturwissenschaftl. Schülerbibliothek. Nr. 20.) gr. 8°. IV. u. 216 S. mit 56 Abb. im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1913. Geb. M. 3.—.

In dem vorliegenden ersten Teil findet man die mit der Mechanik und der Wärmelehre verwandten Teile der Ingenieurwissenschaften behandelt; der zweite Teil soll der Optik und der Elektrizitätslehre gewidmet sein. Das Buch enthält drei Kapitel: 1. Brückenbau, 2. Wind- und Wasserkräfte, 3. Wärmekraftmaschinen und Heizung. In jedem Kapitel werden zunächst die wissenschaftlichen Grundlagen, die der Ingenieur zur Herstellung seiner Werke benutzt hat, leicht faßlich dargelegt, woran sich jeweils die Beschreibung eines technischen Meisterwerkes anschließt. Diese „Wunder der Technik" sind im ersten Kapitel die Kaiser-Wilhelm-Brücke zwischen Remscheid und Solingen, im zweiten die Urfttalsperre in der Rheinprovinz und in dem dritten Kapitel das Königliche Fernheizwerk in Dresden.

Die Lektüre dieser Schrift wird nicht nur größeren Schülern, sondern auch Erwachsenen Freude machen. R. Lucas.

H. Thurn, Die Funkentelegraphie. (Aus Natur und Geisteswelt. 167.) 3. Aufl. 111 S. mit 51 Abbildungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1915. Gebunden M. 1,25.

Den Bestrebungen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" entsprechend will das Bändchen eine populäre Einführung in die drahtlose Telegraphie bieten und wird manchem, der es mit nicht zu großen Ansprüchen zur Hand nimmt, willkommen sein. Eingangs werden die physikalischen Grundbegriffe der Lehre von der Elektrizität und vom Magnetismus ohne mathematische Formeln entwickelt. Dann folgt nach einem kurzen Abschnitt über die geschichtliche Entwicklung der Funkentelegraphie die Besprechung der Einzelteile der Sende- und Empfangsschaltungen, wobei vorzugsweise das Telefunkensystem beschrieben wird. Ein zweiter Hauptabschnitt behandelt die drahtlose Telephonie, und zum Schluß wird in mehreren Tabellen der Einfluß der Funkentelegraphie auf den Wirtschaftsverkehr und das Verkehrsleben dargelegt. Für den Physiker kommt das Bändchen als Einführung in das Sondergebiet nicht in Frage.

P. Ludewig.

H. Böttger, Physik. Zum Gebrauch bei physikalischen Vorlesungen in höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. II. Band. Optik, Elektrizität, Magnetismus. gr. 8⁰. XII u. 1134 S. mit 882 Abbildungen u. 27 Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1915. Geb. M. 26.—.

Der erste Teil dieses fleißigen und schön ausgestatteten Werkes ist bereits hier (**14**, 789, 1913) besprochen worden; mit dem nunmehr vorliegenden zweiten Teil findet das Werk seinen Abschluß. Um einen Überblick in den reichen Inhalt des Werkes zu gewinnen, mögen hier wenigstens die Überschriften aus dem Abschnitt „Optik" angeführt werden: Von der Ausbreitung des Lichtes, Katoptrik, Dioptrik, Dispersion des Lichtes, das Auge und die Gesichtsempfindung, die optischen Instrumente, von den Lichttheorien, von der Interferenz und der Beugung des Lichtes, von den Eigenschaften der Spektren und von der Spektralanalyse, von den Lumineszenzerscheinungen, von der geradlinigen Polarisation und der Doppelbrechung des Lichtes, von der Interferenz des polarisierten Lichtes, von der natürlichen Drehung der Polarisationsebene, Photochemie (S. 985—1478).

Von der Differential- und Integralrechnung wurde in diesem Bande ausgiebiger Gebrauch gemacht, wodurch das Buch jedenfalls gewinnt. Die Darstellung, durch zahlreiche gut ausgeführte Figuren unterstützt, ist meist klar und einwandfrei.

R. Lucas.

E. Ariès, Chimie physique élémentaire. Tome premier. Les principes généraux de la statique chimique. gr. 8⁰. XXX u. 212 S. Paris, A. Hermann et fils.

Das vorliegende Werk, ein kurzes Lehrbuch der klassischen Thermodynamik in der von Gibbs und Le Chatelier gewählten Formelsprache, gibt unter möglichster Vermeidung algebraischer Rechnungen die Grundformeln und Grundgesetze fast ohne erläuternde Beispiele.

Riesenfeld.

H. Freundlich, Kapillarchemie und Physiologie. Zweite, erweiterte Auflage. gr. 8⁰. IV u. 48 S. mit 5 Figuren. Dresden, Theodor Steinkopff. 1914. Geh. M. 1.50.

Die Probevorlesung des Verfassers, deren erweiterte Wiedergabe großen Beifall gefunden hatte, liegt nun in zweiter Auflage vor. Diese hat den häufigen Nachteil des Alters, das Dickerwerden, vermieden und zeigt nur seine Vorzüge: größere Vorsicht und Erfahrung. Die seit dem Erscheinen der ersten Auflage neu gewonnenen Kenntnisse sind geschickt in den angefügten Erläuterungen verwertet, in denen auch die früher etwas tendenziöse Darstellung des Verfassers abgeschwächt und korrigiert ist. Das Wichtigste hiervon: Während der Verfasser früher annahm, daß die Adsorption nichts anderes als die von der Thermodynamik geforderte Verdichtung eines gelösten Stoffes an der Grenzfläche nach Maßgabe seines Einflusses auf die Grenzflächenspannung sei, schränkt er es jetzt darauf ein, daß der zeitlich erste, rasch verlaufende Vorgang „anscheinend fast immer" den Charakter einer Adsorption trägt, dem dann oft die Bildung fester Lösungen oder chemischer Verbindungen folgt. Dem Referenten schiene es einfacher und anschaulicher zuzugeben, daß die Adsorptionserscheinungen sowohl durch Grenzflächenspannungen wie durch chemische Kräfte (feste Lösung, Verbindung) veranlaßt sein können. Die Zwischenschiebung eines ersten, rasch verlaufenden Vorganges könnte dann in den Fällen, in denen dies rein hypothetisch und unnötig ist, fortfallen. Die klare und glatte Form der Darstellung und das Hervorheben des Wichtigsten unter Fortlassung alles unnötigen Beiwerks werden dem Buche weiter die weite Verbreitung sichern, die es schon gefunden.

Riesenfeld.

Francis W. Gray, A manual of practical physical chemistry. gr. 8⁰. XVI u. 211 S. London, Macmillan and Co.

Das Buch enthält eine Zusammenstellung von 39 physikalisch-chemischen Praktikumsaufgaben, die sich je in 2—3 Stunden ausführen lassen. Für die Auswahl war der Gesichtspunkt maßgebend, daß die Schüler die wichtigsten Apparate und Meßmethoden kennen lernen. Doch fehlt Wesentliches, so das Kompensationsverfahren zur Messung elektromotorischer Kräfte. Diese — richtiger die Klemmenspannungen, was aber der Verfasser verwechselt, — werden mit einem Voltmeter von 500 Ohm Widerstand bestimmt. Ebenso fehlen die Methoden zur Ermittlung der spezifischen Wärmen von festen Stoffen, Flüssigkeiten und Gasen u. a. m. Immerhin kann das Büchlein auch bei uns dadurch von Nutzen sein, daß manche Vereinfachung bei experimentellen Anordnungen und praktische Kunstgriffe darin zu finden sind.

Riesenfeld.

Fritz Förster, Elektrochemie wässeriger Lösungen. (Handbuch der angewandten physikalischen Chemie, herausgegeben von G. Bredig. Band I.) Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. XVIII u. 804 S. mit 186 Abbildungen im Text. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1915. M. 30.—, gebunden M. 31.50.

Die erste Auflage[1]) des vorliegenden Werkes hat

1) Diese Zeitschr. **6**, 751, 1905.

sich durch ihre pädagogischen Vorzüge Lehrenden und Lernenden und durch die Reichhaltigkeit ihres Inhalts auch wohl Ratsuchenden der Technik nützlich erwiesen. Die nach zehn Jahren erscheinende Neuauflage kann nicht auf besonders in die Tiefe dringende Fortschritte der Theorie oder in die Breite gehende technische Erfolge verweisen. Die Theorie der elektrochemischen Vorgänge ist ein wenig stationär geworden. Etliche Probleme des Gebietes sind zwar immer wieder hin und her gewendet worden ... Das Verdünnungsgesetz starker Elektrolyte, die Überspannung bei der Gasentwicklung, die Form der elektrolytischen Metallabscheidung, die Passivitätserscheinungen ... ohne daß sie eine befriedigende Lösung gefunden hätten. Und technische Aufgaben, die längst als solche erkannt sind ... Das Kohleelement, der leichtere Akkumulator ... konnten auch in dieser Zeit nicht erheblich gefördert werden. Dem Zuwachs, den die Versuche zur technischen Verwendung der Elektrophorese (Elektroosmose) gebracht haben, stehen Verluste gegenüber, indem einige Verfahren, wie die Verwendung der Elektrolyse bei der Goldgewinnung oder der Weißblech-Entzinnung durch rein chemische Arbeitsweisen wieder verdrängt worden sind.

Trotzdem kann kein Zweifel sein, daß auf dem Boden der Elektrochemie zahlreiche entwicklungsfähige Keime vorhanden sind. Und den bereits genannten Vorzügen des Buches von Förster darf hier der weitere angereiht werden, daß es durch vielfache Anregung zur Mitarbeit zu werben versteht. A. Coehn.

O. Zoth, Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese. (Sammlung Vieweg: Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik. No. 14.) gr. 8. 38 S. m. 3 Textfiguren und 10 Kurventafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1914. M. 2.80.

Der Verfasser versucht auf der Grundlage der Undulationstheorie eine physikalische Erklärung der Mischfarben zu geben. Er superponiert graphisch homogene Lichtschwingungen, die er sich als Sinusschwingungen vorstellt, und findet zunächst, daß Phasenverschiebung und Amplitudenverhältnis auf den Typus der entstehenden Kurven keinen Einfluß haben. Kombiniert er dann Schwingungen von komplementärer Farbe, so findet er als entstehenden Typus kurzdauernde Schwebungen, Lichtstöße. Er erinnert hier an die Anschauung über die Natur des weißen Lichtes, die solche stoßartige Impulse annimmt. Dieser Schwebungscharakter verschwindet um so mehr, je benachbarter die Wellenlängen bei unterkomplementärer Mischung werden. Bei überkomplementärer Farbenmischung (Purpurtöne) erhält er eine verhältnismäßig einfache Resultierende von kurzer Periode, die sich unter allen Mischfarben am ehesten einer einfachen Sinusschwingung nähert, was der gesättigten Purpurfarbe entspräche.

Es ist natürlich, daß mit den Voraussetzungen, die der Verf. über den Schwingungscharakter einer monochromatischen Strahlung macht, seine Resultate stehen und fallen. Weiterhin ist es sonderbar, daß er auf Seite 5 Gouy zitiert: „Von einer Regelmäßigkeit im weißen Lichte kann keine Rede sein", und auf S. 31 von einer Periode des weißen oder weißlichen Lichtes spricht. Man muß im allgemeinen doch sagen, daß die erhaltenen Resultate etwas verschwommen sind und daß vielleicht die Mühe, die sich der Verlag durch die reiche Tafelausstattung und der Verf. bei den graphischen Konstruktionen gemacht haben, durch das Erhaltene kaum belohnt wird. J. Engl.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Dr. **Louis Boettcher**, Hilfsassistent am mathem.-physik. Laboratorium der Universität Königsberg, Leutnant d. Res., Inhaber des Eisernen Kreuzes, ist am 21. Dezember 1915 in Nordfrankreich gefallen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Walther Schrauth für Chemie.

Ernannt: Der Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam Geh. Reg. Rat Dr. Karl Schwarzschild zum ord. Honorarprofessor an der Universität Berlin, Dr. G. J. Fowler von der Universität Manchester zum Professor der angewandten Chemie am Indian Institute of Science in Bangalore, der ord. Professor an der Bergakademie Freiberg Dr. Paul Wilski zum ord. Professor für Markscheiden und Feldmessen an der Techn. Hochschule Aachen, der Professor der Chemie an der Universität Oxford W. H. Perkin zum Leiter des Research Department und des Advisory Commitee der British Dyes Ltd., der wissenschaftliche Assistent am Chemischen Staatslaboratorium in Hamburg Dr. Wilhelm Göhlich zum Professor, der a. o. Professor an der Universität Kopenhagen Dr. H. Bohr zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst, Dr. Peter Field, Dr. J. Fort, Dr. J. H. Hildebrandt, Dr. Louis C. Karpinski, Dr. Theodore R. Running zu a. o. Professoren der Mathematik an der Universität von Michigan in Ann Arbor, der Assistant Professor an der Staatsuniversität von North Dakota in Grand Forks Raymond R. Hitchcock zum ord. Professor der Mathematik ebenda, der Assistant Professor an der Harvard University Cambridge Mass. Edward V. Huntington zum a. o. Professor der Mathematik daselbst, Dr. J. K. Lamond zum a. o. Professor der Mathematik an der Wesleyan Universität in Middletown, Dr. W. L. Miser zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität von Arkansas in Fayetteville, Dr. J. Mollerup zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen, Dr. H. B. Phillips zum a. o. Professor der Mathematik am Massachusetts Institute of Technology in Boston, Dr. J. B. Shaw zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana, der Observator an der Sternwarte der Universität Berlin Dr. Paul Guthnick zum a. o. Professor der Astronomie an derselben Universität.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Wilhelm Traube zum ord. Professor der anorganischen und Experimentalchemie an der Universität Kiel.

Verliehen: Dem ord. Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Wien Dr. Emil Müller der Titel Hofrat, dem Privatdozenten für Technologie der Brenn- und Beleuchtungsstoffe an der Böhmischen Techn. Hochschule Prag Dr. Ferdinand Schulz der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor der allgemeinen und Experimentalchemie an der Universität Rostock Geh. Hofrat Dr. August Michaelis, der ord. Professor der Mathematik an der Columbia-Universität in New York Dr. J. H. Van Amringe, der Privatdozent für Chemie an der Universität und Vorsteher der chemischen Abteilung am Rudolf Virchow-Krankenhause Berlin Professor Dr. Walther Loeb, der Professor der Mathematik und Physik am Deutschen Staatsgymnasium in Troppau Rich. Fuchs (gefallen am 13. Januar 1916 am Isonzo), der Professor der Chemie an der École centrale in Paris Dr. Rodolphe Charles Engel, der emer. Professor der höheren Mathematik an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Dr.-Ing. h. c. Richard Dedekind.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. 15. Februar 1916. Redaktionsschluß für No. 5 am 11. März 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

Dem Andenken der im Kriege gefallenen deutschen Physiker.

Max Behacker.

Dem Physiker, der in der Heimat seinem Beruf nachgeht, treten die furchtbaren Folgen des Krieges vielleicht durch nichts so eindrucksvoll entgegen, wie durch das Dahinsterben junger Berufsgenossen, deren erste wissenschaftliche Entfaltung er gesehen hat und deren Weiterentwicklung jäh abgebrochen wird.



Max Behacker wurde am 9. Juli 1885 in Urfahr bei Linz geboren und besuchte das Gymnasium zuerst in Reichenberg, dann in Prag und zuletzt in Salzburg, wo er im Jahre 1904 die Reifeprüfung mit Auszeichnung bestand. Durch seinen Vater, der selbst Schulmann, zuletzt Landesschulinspektor in Salzburg war, habe ich erfahren, daß der junge Behacker im Gymnasium in den klassischen Sprachen, der Mathematik und Physik Hervorragendes leistete, für seine Mitschüler aber, die sich durch fleißiges Lernen zunächst vorzügliche Noten in Religion und Geschichte sicherten, nur ein mitleidiges Lächeln hatte. Auch schon damals zeigte er außergewöhnliches Interesse und auffallende Begabung für Musik, für die ihn seine Lehrer am Mozarteum in Salzburg sogar als Beruf zu gewinnen suchten.

Vom Wintersemester 1905/6 bis zum Sommersemester 1909 war er an der Universität Wien inskribiert. Die Vorlesungen besuchte er nicht viel, sondern ging lieber seine eigenen Wege. Auch nahm seine Stellung im Korps Saxonia, dessen Erstchargierter er zeitweilig war, seine Zeit

viel in Anspruch. Als aber die Zeit der Rigorosen heranrückte, wunderte man sich, wie gut der junge Mann, den man so selten in den Vorlesungen gesehen hatte, beschlagen war. Hingegen hatte er immer gewissenhaft das physikalische Praktikum besucht, wo Prof. v. Schweidler ihn zu seiner ersten selbständigen Arbeit anregte [1]).

Gegen Ende des Jahres 1912 wollte Behacker die Rigorosen ablegen. Da trat infolge des Balkankrieges die Spannung zwischen Österreich und Serbien ein, es fand eine teilweise Mobilisierung statt und er mußte als Reserveleutnant sofort zu seinem Regiment, dem 101. Infanterieregiment in Bekes-Csaba (Ungarn), einrücken. In Reisekleidern legte er die Prüfungen ab und wurde am 21. Dezember 1912 in absentia zum Doktor der Philosophie promoviert.

Anfangs Januar 1913 wurde er wieder in das nichtaktive Verhältnis zurückversetzt. Sein Interesse wendete sich jetzt hauptsächlich der theoretischen Physik zu und mit der für sein ganzes Wesen bezeichnenden Konsequenz ging er nun daran, durch persönlichen Kontakt mit den führenden Männern auf diesem Gebiet, die brennendsten Probleme unserer Zeit kennen zu lernen. Zunächst begab er sich zu M. Planck nach Berlin, wo er bis zum Ende des Sommersemesters 1913 verweilte. Dort wurde er zu seiner zweiten Arbeit angeregt [2]), die vor allem seinem Wunsche entsprang, an den gerade im Vordergrunde des wissenschaftlichen Interesses stehenden Problemen aktiv mitzuarbeiten. Im Sommer 1913 hielt er sich in Paris und in Genf auf. Dazu bewog ihn vor allem der Wunsch, sein Französisch möglichst gründlich an der Quelle zu vervollkommnen, wie er überhaupt immer ein großes Interesse für moderne Sprachen zeigte, so in Prag das Tschechische ziemlich erlernte und, als er ins Feld zog, sich eine englische Grammatik mitnahm. Der Vorsatz, in den Weltkrieg zu ziehen und die Zeit zur Erlernung des Englischen zu benutzen, zeigt, daß er eine der schönsten Eigenschaften des deutschen Volkes, den um alle Verleumdungen der Feinde unbekümmerten Bildungstrieb, in hohem Maße besaß.

Das Wintersemester 1913|14 verbrachte er in Zürich, wo er bei A. Einstein studierte. Im Sommersemester 1914 war er Assistent bei A. Lampa am physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag. Dort lernte ich ihn kennen und da ich merkte, daß er mehr zu theoretischer Forschung hinneigte, bot ich ihm die eben frei gewordene Assistentenstelle am Institut für theoretische Physik derselben Hochschule an. Er sollte im Wintersemester 1914|15 dort eintreten — am 27. Juli 1914 schon wurde er telegraphisch wieder unter die Waffen gerufen; diesmal war es ernst. Er rückte zu seinem alten Regiment ein und stand im August an der serbischen Grenze; das Regiment wurde aber bald nach Galizien verschoben, er selbst blieb einige Zeit als Rekruteninstruktor in Bekes Csaba, dann wurde er mit dem Kommando einer Arbeiterabteilung des Regiments betraut und machte die so wechselvollen und schließlich so erfolgreichen Kämpfe unserer Armee gegen die Russen mit. Seine Fürsorge für die Mannschaft und sein Bestreben, ihr als Beispiel eines Soldaten voranzuleuchten, veranlaßten ihn, sich mutig immer den größten Gefahren auszusetzen, so daß kein Arbeitssoldat sagen konnte, der inzwischen zum Oberleutnant vorgerückte Kommandant schone sich mehr als der geringste Arbeiter. Bei dem siegreichen Vorrücken unserer Armee über Lemberg hinaus war seine Abteilung bei einem gefährlichen Brückenschlag über den Bug beteiligt. Dabei erhielt er einen Bauchschuß und erlag binnen 24 Stunden seiner

Wunde. Er wurde anfangs August 1915 mit militärischen Ehren im Schloßpark des Grafen Badeni bei Kamionka-Strumilova bestattet. Er war für die Verleihung des Militärverdienstkreuzes eingegeben, das ihm auch nach seinem Tode verliehen wurde. Seine Vorgesetzten und Untergebenen haben ihrer Teilnahme und ihrer Anerkennung für ihn in warmen Worten Ausdruck gegeben.

Leider habe ich Behacker nur sehr kurze Zeit gekannt, aber er erschien mir immer als das Urbild eines knorrigen, selbständigen Menschen, der alles, was er sich vornahm, auch mit großer Zähigkeit durchzusetzen versuchte. Sein hoher Grad von wissenschaftlichem Interesse, seine Begabung, wie insbesondere die ungewöhnliche Energie im Arbeiten haben erwarten lassen, daß er noch Schönes leisten würde. Nun ist das Rätsel, das jede wissenschaftliche Entfaltung darstellt, ausgelöscht, ehe es gelöst ist.

Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten:

1) Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XLI. Zur Berechnung des Erdfeldes unter der Voraussetzung homogener Ionisation der Atmosphäre. (Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1910.)
2) Der freie Fall und die Planetenbewegung in Nordströms Gravitationstheorie. (Diese Zeitschr. **14**, 989, 1913.)

Institut für theoretische Physik.
Prag, am 2. Februar 1916.

Philipp Frank.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der Fall eines kleinen Tropfens in einem zähflüssigen Medium.
(The Fall of a Droplet in a Viscous Medium.)

Von O. W. Silvey.

I. Vergleichung des Falles eines Tröpfchens in einer Flüssigkeit mit jenem in einem Gase.

In seinem Bericht über einen Versuch, den Wert der Konstanten A der berichtigten Stokesschen Formel[1]) für fallende Kugeln in Luft nach einem direkten Verfahren zu messen, ist Roux[2]) zu dem Schlusse gelangt, daß die experimentelle Bestimmung von Millikan[3]) fehlerhaft sei, und daß der Wert dieser Konstanten 1,6 sein müsse, und nicht, wie Millikan angegeben hat, 0,875.

Das Verfahren von Roux bestand darin, ein Quecksilber- oder Schwefeltröpfchen in Luft und darauf in eine Flüssigkeit fallen zu lassen und aus der Fallgeschwindigkeit in den beiden Medien den Wert von A zu berechnen. Dabei nahm er die ursprüngliche Stokessche Formel für den Fall in der Flüssigkeit als gültig an. Wenn sein Verfahren auch anscheinend gute Ergebnisse zu liefern vermag, ist es doch dem Einwande ausgesetzt, daß der Fehler bei der Ablesung der Fallzeit des Tröpfchens zu groß war, um zuverlässige Ergebnisse erreichen zu lassen.

Ich beschloß deshalb, die Arbeit von Roux zu wiederholen, und zwar unter Bedingungen, die eine genauere Messung gestatteten. An Stelle einer Stoppuhr benutzte ich ein Hippsches Chronoskop, mit dem Zeiträume bis auf $^1/_{1000}$ Sekunde gemessen werden konnten. Um den persönlichen Fehler leichter ausschalten zu können, ordnete ich einen Apparat so an, daß ich ein geladenes Tröpfchen mehrmals durch ein elektrostatisches Feld heben und fallen lassen konnte. Darauf ließ ich das Tröpfchen in ein mit Xylol gefülltes Gefäß fallen. Seine Fallzeit durch eine bekannte Strecke wurde sowohl in Luft als auch im Xylol gemessen, und aus diesen Messungen und den erforderlichen Konstanten wurde der Wert des Tropfenhalbmessers a und jener der Konstanten A auf folgende Weise bestimmt:

Für den Fall in Luft wurde die berichtigte Gleichung

$$V_1 = {}^2/_9\, g a^2 \frac{(\sigma - \varrho_1)(1 + AL/a)}{\mu_1} \qquad (1)$$

angesetzt.

1) G. G. Stokes, Mathematical and Physical Papers, **3**, S. 59.
2) Roux, Ann. de Chim. **29**, 69.
3) Millikan, Phys. Rev. **32**, 350, 1911; diese Zeitschr. **13**, 1162, 1912.

Für den Fall in der Flüssigkeit nahm ich die ursprüngliche Stokessche Formel

$$V_2 = {}^2/_9\, g a^2 \frac{(\sigma - \varrho_2)}{\mu_2} \qquad (2)$$

als gültig an.

Dividiert man (1) durch (2) und löst nach A auf, so erhält man:

$$A = \left(\frac{V_1}{V_2}\frac{\mu_1 (\sigma - \varrho_2)}{\mu_2 (\sigma - \varrho_1)} - 1\right)\frac{a}{L}.$$

Hier sind a und σ der Halbmesser und die Dichte des fallenden Tröpfchens, μ_1, ϱ_1 und L die innere Reibung, die Dichte und die mittlere Fallstrecke für Luft, μ_2 und ϱ_2 die innere Reibung und die Dichte der Flüssigkeit, V_1 die Geschwindigkeit in Luft und V_2 die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit.

Der Wert des Halbmessers wurde aus der Fallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit erhalten.

Die angewandte Apparatur war dieselbe, die Millikan bei seiner Bestimmung der elektrischen Elementarladung benutzt hat, mit der Ausnahme, daß ich an Stelle der festen unteren Platte des Kondensators eine dünne Eisenblechscheibe mit einem kreisrunden Loch von 6,4 mm Durchmesser in der Mitte benutzte. An die Unterseite dieser Scheibe war ein Glasgefäß angekittet, welches das Xylol enthielt. Mit Hilfe eines Fernrohres konnte die Fallzeit des Tropfens durch eine bekannte Strecke in Luft und darauf in Xylol bestimmt werden. Die Tröpfchen wurden nach demselben Verfahren erhalten, dessen sich Roux bedient hat, nämlich durch Blasen eines Luftstromes über siedendes Quecksilber.

Die Apparatur.

Die benutzte Apparatur ist in Figur 1 dargestellt. Sie bestand aus einem Paar Kondensatorplatten der von Millikan angegebenen Art von je 22 cm Durchmesser. In der Mitte der oberen Platte waren drei etwa 0,7 mm weite Löcher, durch welche Quecksilbertröpfchen hindurchfallen konnten. Über der Mitte dieser Platte befand sich eine Eisenblechscheibe D_1, mit deren Hilfe ein Hebel zur Seite bewegt werden konnte, um zu ermöglichen, daß fallende Tröpfchen die Löcher erreichen. An der einen Kante sorgte ein kleines mit Quecksilber gefülltes Näpfchen für einen elektrischen Kontakt mit den durch den Ebonitstopfen E eingeführten Zuleitungsdrähten. Die in Figur 1 A im Querschnitt dargestellte untere Platte bestand aus ungefähr 0,36 mm dickem Eisenblech. Sie war mittels Schrauben an einem kurzen hölzernen Zylinder von demselben Durchmesser und ungefähr 5 cm Höhe befestigt. Auf ihr ruhten drei Glaspfeiler T, T, T von 15,875 mm Höhe,

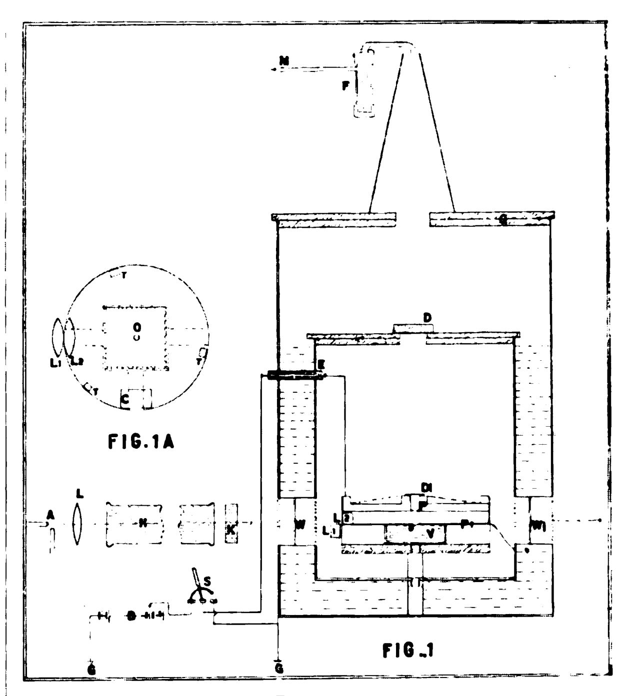


Fig. 1.

die alle aus einem und demselben Stück Glas geschnitten worden waren. Diese trugen die obere Platte. In die Mitte dieser dünnen Platte war ein kreisrundes Loch von 6,4 mm Durchmesser eingeschnitten, und an ihre Unterseite war ein rechteckiges Glasgefäß V angekittet, dessen Innenmaße $4{,}9 \times 4{,}9 \times 2{,}1$ cm waren. Der Holzzylinder war in der Mitte für die Aufnahme des Gefäßes V ausgespart und längs des Durchmessers $L_1\, L_2\, O$ mit einer Nut versehen, wie dies durch die gestrichelten Linien angedeutet wird; durch diese Nut konnte Licht zu dem Gefäße gelangen. Eine zweite Nut längs des Halbmessers CO gestattete die Betrachtung des beleuchteten Gefäßes. Ein in die Mitte der Unterseite des Holzzylinders eingeschraubter zylindrischer Messingpfeiler trug den ganzen Kondensator sicher, so daß seine Achse mit jener eines ihn umschließenden zylindrischen Troges aus Eisenblech von 30,5 cm Durchmesser und 30,5 cm Höhe zusammenfiel. Letzterer war seinerseits wiederum von einem größeren Troge aus demselben Material von 45,7 cm Durchmesser und 67,5 cm Höhe umschlossen. Die beiden Tröge wurden durch den den Kondensator tragenden Messingpfeiler in der Mitte sowie durch vier Enden Teleskoprohr unverrückbar in ihrer Lage zueinander gehalten. Eines dieser Rohrenden von 2,5 cm Durchmesser trug den isolierenden Ebonitstopfen E; die übrigen drei hatten einen Durchmesser von 7 cm. Zwei von ihnen, bei W und W_1,

gestatteten dem Licht den Durchgang durch das Gefäß und zwischen den Kondensatorplatten, und das dritte, das senkrecht zu der Linie $W W_1$ stand, gestattete dem Beobachter, das Gefäß zu sehen. Jedes der 7 cm weiten Rohre enthielt ein Glasfenster. Die untere Platte des Kondensators war elektrisch mit dem inneren Troge und somit durch Erdung des äußeren Troges mit der Erde verbunden. Beide Tröge waren mit hölzernen Deckeln versehen, und zur Vermeidung rascher Temperaturänderungen war der äußere oben und an den Seiten ungefähr 6 mm stark mit Asbest bedeckt. Der Raum zwischen beiden war mit Öl gefüllt.

Die Tropfen wurden durch Durchblasen eines plötzlichen starken Luftstoßes durch das Eisengefäß F gebildet, welches eine kleine Menge siedenden Quecksilbers enthielt. Der von dem Luftstrom mitgeführte Quecksilberdampf verdichtete sich nach dem Verlassen des Siedegefäßes zu kleinen Tropfen und fiel frei auf den Kondensator, wenn der Schieber, der den inneren Trog bedeckte, und jener, welcher die Löcher im Kondensator bedeckte, beiseite geschoben waren.

Das System wurde durch eine Bogenlampe A mit rechtwinklig gestellten Kohlen beleuchtet. Der Krater dieser Lampe wurde mittels der Linse L auf dem Fenster W abgebildet, und dann wurde von ihm durch die Zylinderlinsen L_1 und L_2 ein vertikales Band von etwa 8 mm Breite und 3,5 cm Länge in der Achse des Kondensators entworfen. Um die nicht leuchtende Strahlung auszuschalten, wurde das Licht durch eine Wassersäule H von 52,5 cm Länge und durch eine 1 cm dicke Schicht K einer 12 prozentigen Lösung von Kupferchlorid in Alkohol filtriert.

Die obere Platte wurde elektrisch mit einer Sammlerbatterie B durch Schließen des Schlüssels S verbunden, und durch entgegengesetzte Schaltung des Schlüssels wurden die beiden Platten kurzgeschlossen und geerdet.

Zur Verhinderung von Luftströmungen wurde der Kondensator mit einer durchsichtigen Zelluloidhülle umgeben, in der an den Stellen L_1, L_2 und C (s. Figur 1 A) Fenster ausgespart waren.

Die Tröpfchen, welche durch die Löcher in der oberen Kondensatorplatte fielen, wurden in der Richtung CO durch ein Fernrohr mit kurzer Brennweite und konstanter Länge betrachtet. Eine sorgfältig geteilte Skala im Okular bot die Möglichkeit, den von den Tröpfchen zurückgelegten Weg in Millimetern zu messen. Das Fernrohr konnte mittels Zahntriebes gehoben werden, um das Tröpfchen in der Luft zu betrachten, und dann gesenkt werden, um ihn in der Flüssigkeit zu betrachten, die das Gefäß V bis auf den gekrümmten Meniskus bei O vollständig füllte. Zur sicheren Auffindung des Tröpfchens in der Flüssigkeit war zwischen den Kondensatorplatten ein Stück optischen Glases C angebracht, das dem doppelten Zweck diente, das Fenster in dem Schutzmantel zu verschließen und die Änderung der optischen Weglänge beim Eintritt der Tröpfchen in die Flüssigkeit zu kompensieren. Die Dicke der Xylolschicht, welche durch das Glas C kompensiert wurde, war durch Versuche vor dem Aufkitten der Kondensatorplatte ermittelt worden.

Handhabung.

Bei geerdeten Kondensatorplatten, offenem Schieber D und geschlossenem Schieber D_1 wurde eine Wolke von Tröpfchen abgeblasen. Dann wurde der Schieber D_1 geöffnet, so daß die Tröpfchen durch die kleinen Löcher des Kondensators hindurchfallen konnten. Darauf wurde der Schlüssel S geschlossen, und die Tröpfchen mit dem richtigen Ladungsvorzeichen durch das elektrische Feld nach oben gezogen. Eines dieser Tröpfchen wurde für die Beobachtung ausgewählt, der Schieber D_1 wurde wieder geschlossen, um zu verhindern, daß weitere Tröpfchen in den Kondensator eintraten, und dann wurden durch mehrmaliges Steigen- und Fallenlassen des Tröpfchens alle übrigen aus dem Felde beseitigt. Nunmehr wurde dieses Tröpfchen in den oberen Teil des Feldes gezogen und unter der Einwirkung der Schwerkraft durch eine Strecke von 1 cm fallen gelassen, wobei jedesmal die Fallzeit mit dem Chronoskop gemessen wurde. Das wurde eine Reihe von Malen, für gewöhnlich etwa 40 mal, wiederholt. Während dieser Zeit fielen alle übrigen Tröpfchen, die in die Flüssigkeit eingetreten waren, zu Boden. Nunmehr wurde das Tröpfchen in die Flüssigkeit fallen gelassen, das Fernrohr wurde schnell gesenkt, und es wurde beobachtet, wie der Tropfen durch den Meniskus hindurch kam und langsam fiel. Dann wurde das Fernrohr so lange verschoben, bis es scharf auf das Tröpfchen eingestellt war, und die Fallzeit durch möglichst viele Strecken von einem Millimeter oder von zwei Millimetern gemessen. Der mit 10 multiplizierte Mittelwert aus diesen Millimeterablesungen wurde als die Fallzeit für 1 cm in der Flüssigkeit angenommen. Infolge von Konvektionsströmungen machten Unregelmäßigkeiten in der Geschwindigkeit in den einzelnen Teilen der Bahn die Aufzeichnung der Fallzeit für die einzelnen Millimeterstrecken statt jener für die ganze Bahn erforderlich.

Mit dieser Versuchsanordnung war es nicht möglich, die störenden Konvektionsströmungen

auf der ganzen Fallstrecke in der Flüssigkeit gänzlich auszuschalten, aber im mittleren Teile wurden unter den günstigsten Verhältnissen keine Störungen beobachtet, und ich glaube, daß die nachstehend angegebenen Werte von dieser Fehlerquelle frei sind, wie auch von dem etwaigen Fehler, der durch die Verdampfung des Quecksilbertropfens auftritt.

Nachstehend sind einige der gewonnenen Ergebnisse angeführt:

Anzahl der Fallwege in der Luft	Temperatur	Mittlere Fallzeit drch. 1 cm i. d. Luft in Sek.	Höchste Fallzeit durch 1 cm in Xylol in Sek.	$a \cdot 10^4$	A
43	25,2	1,668	62,49	1,878	1,13
20	25,2	1,707	63,59	1,740	0,95
43	25,3	1,987	74,40	1,720	1,05
43	25,0	2,059	77,52	1,692	1,06
42	25,0	2,114	79,69	1,665	1,07
43	25,0	2,145	80,69	1,732	1,03
43	25,3	2,257	84,95	1,610	1,08
43	25,3	2,866	108,56	1,424	1,06
42	25,2	2,849	108,23	1,427	1,05
43	25,0	2,924	110,94	1,415	1,01
43	25,0	3,074	116,33	1,377	0,98
43	25,2	3,754	143,30	1,241	0,99
42	25,2	4,852	185,00	1,091	0,86
43	25,2	5,189	200,59	1,048	1,00
10	25,0	5,343	208,44	1,029	1,06
10	25,0	6,182	241,64	0,9563	1,04
40	25,0	6,190	244,00	0,952	1,08
					1,03

Die Dichte der Luft bei 23° C, wurde zu 0,0001824 angenommen, und bei der Korrektion auf die oben genannten Temperaturen wurde eine lineare Beziehung mit der Temperatur vorausgesetzt. Dieselbe Annahme wurde bei der Korrektion der Dichte und der inneren Reibung der Flüssigkeit gemacht. Die Messung der Dichte und der inneren Reibung der Flüssigkeit lieferte folgende Ergebnisse:

	23°,00	25°,00
Dichte:	0,8504	0,8487
Innere Reibung:	0,006226	0,006107

Der Fehler im Werte für A ist m. E. bei den kleineren Tröpfchen nicht größer als 8 v. H.

II. Bestimmung von A aus dem scheinbaren Werte der Elementarladung.

Nach Ersatz des hölzernen Kondensators der Fig. 1 durch eine eiserne Kondensatorplatte von demselben Durchmesser und Einrichtung einer Röntgenstrahlenausstattung wurde der Apparat der gleiche, wie ihn Millikan ursprünglich zur Messung der Elementarladung benutzt hat. Bei dieser Anordnung machten indessen zwei Versuchsbedingungen eine genaue Messung von e unmöglich: 1. Die Verdunstung des Tröpfchens ließ die Arbeit sehr langsam fortschreiten und rief, wenn sie nicht ganz aufhörte, große Unsicherheit hervor. Der Umstand, daß bei den meisten Tröpfchen die Verdunstung tatsächlich aufhörte, schien auf einer Kondensation des Öles, mit dem die Platten zum Auffangen von Staubteilchen überzogen waren, an dem Tröpfchen zu beruhen. Die Kondensation war ebenfalls eine Fehlerquelle. 2. Die zweite Fehlerquelle war die Aufhäufung von Quecksilber auf der unteren Platte. Im Gegensatz zu dem Öl, das sich über die Oberfläche ausbreitete, häufte sich das Quecksilber in kleinen Kügelchen an, die das elektrische Feld ungleichförmig machten.

Nachstehend sind die Beobachtungen an einem der kleineren Tröpfchen zusammengestellt.

Tropfen Nr. 13.

T_g	T_f	$\frac{1}{T_f}$	n'	$\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{T_f}-\frac{1}{T_f}\right)$	n	$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{T_g}+\frac{1}{T_f}\right)$
55,6	43,8	0,02304			1	
56,6	43,0					0,04083
55,8	9,635					
56,8	9,640		2	0,04083		
55,8	9,443	0,10446			3	0,04075
56,2	9,572					
56,2	42,4		2	0,04046		
56,4	42,6	0,02353			1	0,04131
	15,464		1	0,04084		
	15,487	0,06437			2	0,04108
	15,651		1	0,04078		
	42,4	0,02359			1	0,04137
56,4	9,427		2	0,04078		
	9,594	0,10514			3	0,04098
	43,0	0,02320	2	0,04097		
	43,2				1	0,04099
	15,674		1	0,04047		
	15,423	0,06377			2	0,04073
	15,994		1	0,04008		
56,4	42,4	0,02359			1	0,04137
56,22				0,040684		0,041023

$V_i = 3410 \qquad V_f = 3385$

$t = 24^0{,}8$ C $\qquad a = 0{,}00003001$

$$\frac{L}{a} = 3203$$

$$e_i = 6{,}585 \times 10^{-10}$$

$$e_i^{2/3} = 75{,}69 \times 10^{-8}.$$

V_i und V_f bedeuten hier die Anfangs- und die Endspannung.

Der erste Fall dieses Tröpfchens erfolgte in zwanzig Sekunden. Ehe die vorstehend aufgeführten Ablesungen vorgenommen wurden, wurde das Tröpfchen solange festgehalten, bis die Verdunstung aufhörte. Die Zeit, die erforderlich war, um die vorstehenden Angaben zu erhalten, betrug fünfzig Minuten.

In der folgenden Übersicht sind Beobachtungen und berechnete Werte für andere Tröpfchen zusammengestellt:

Tröpfchen	T_g	$a \cdot 10^5$	$e_i \cdot 10^{10}$	$l/a \cdot 10^2$	$e_i^{2/3} \cdot 10^8$
1	8,066	8,469	5,143	11,36	64,19
2	8,327	8,463	4,967	11,23	63,74
3	11,054	7,175	5,350	13,24	66,11
4	13,668	6,447	5,345	14,72	65,86
5	19,340	5,332	5,572	17,82	67,72
6	23,261	4,812	5,762	19,74	69,24
7	25,910	4,536	5,906	20,95	70,39
8	26,437	4,533	5,720	20,96	68,91
9	27,970	4,442	5,979	21,88	70,97
10	36,150	3,761	6,305	25,26	73,53
11	40,140	3,575	6,228	26,57	73,49
12	45,000	3,399	6,266	27,95	73,22
13	56,22	3,001	6,585	32,03	75,69
14	62,15	2,791	6,645	34,04	76,14

In diesen Zusammenstellungen habe ich dieselben Bezeichnungen und dieselbe Art der Darstellung benutzt, die sich in Millikans zweitem Bericht über die Messung der Elementarladung[1]) findet.

Trägt man die für $e_i^{2/3}$ und für L/a gefundenen Werte als Ordinaten bzw. als Abszissen

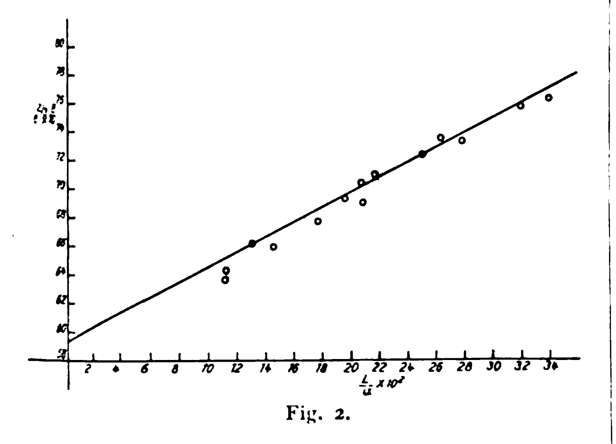


Fig. 2.

auf und gibt dabei jenen Tröpfchen das größte Gewicht, die unter dem Einfluß der Schwerkraft eine größere Fallgeschwindigkeit als 20 Sek./cm hatten, und benutzt man für den Schnittpunkt den Millikanschen Wert, so findet man den Wert von A zu 0,826. Der niedrige Wert für den Schnittpunkt (59,3 statt 61,05) läßt die Unvollkommenheit der Apparatur erkennen. Der geringe Wert der Neigung steht in Einklang mit der Annahme, daß sich auf den Tröpfchen Öldampf niedergeschlagen hatte, denn die größte Wirkung würde an den kleinsten Tröpfchen hervorgerufen werden (s. Fig. 2).

III. Der Fall von Quecksilbertröpfchen in einem zähflüssigen Medium.

Die Anwendung der Gleichung von Hadamard[2]) auf den Fall im Xylol ergab für A den Wert 2,635 an Stelle von 1,0808 für den letzten Tropfen der Liste. Ich untersuchte deshalb das Gesetz des Falles von Quecksilbertröpfchen in Glyzerin. Die Tröpfchen wurden auf die Spitze einer Nadel aufgespießt und ihr Durchmesser mit Hilfe eines Zeißschen Mikrometerokulars an einem Mikroskop von Leitz in Wetzlar gemessen, das eine etwa 600fache lineare Vergrößerung hatte. Nach Messung des Durchmessers wurde das Tröpfchen in Rizinusöl gebracht, das sich in einer Fallröhre von 5,5 cm Durchmesser und 40 cm Länge befand. Die Fallröhre war an beiden Enden ausgezogen und an ein kurzes 0,8 cm weites Rohr angeschmolzen, das mit Hilfe eines Gummischlauches und einer Klemme verschlossen werden konnte. Es wurde die Fallzeit des Tröpfchens zwischen zwei ringsum das Rohr eingeätzten parallelen Linien beobachtet. Nachdem das Tröpfchen die Strecke zwischen den parallelen Linien durchfallen hatte, wurde die Röhre umgekehrt und eine neue Messung der Fallzeit angestellt. Jedes Tröpfchen wurde nach einer Reihe von sechs oder mehr Fällen aus der Röhre herausgenommen.

Die umstehende Zusammenstellung gibt die beobachtete Geschwindigkeit für die einzelnen Tröpfchen an und daneben die nach der Stokes-

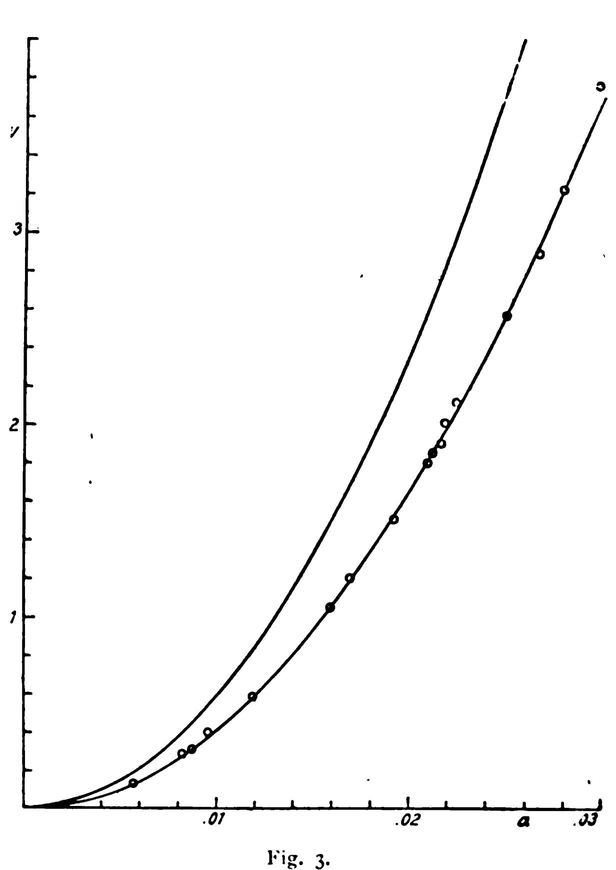


Fig. 3.

1) Phys. Rev. (2) 2, Aug. 1913.
2) Hadamard, C. R., März 1911.



Ladenburgschen Gleichung[1]) berechnete Geschwindigkeit, sowie die nach der Stokes-Hadamardschen Gleichung berechnete. Die Übersicht läßt deutlich erkennen, daß in diesem Falle die Stokes-Ladenburgsche Gleichung anzuwenden ist, und nicht die Stokes-Hadamardsche. Zeichnet man Kurven für die nach den beiden Gleichungen berechneten Werte in der Weise, daß man die Halbmesser als Abszissen und die zugehörigen Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, so findet man, daß die beobachteten Werte sich der Stokes-Ladenburgschen Kurve anschließen (s. Fig. 3).

Halbmesser in cm	Geschwindigkeit in cm/Sek.	Geschwindigk. nach d. Stokes-Ladenburgsch. Gleichung berechnet	Geschwindigk. nach d. Stokes-Hadamardschen Gleichg. berechnet
0,00577	0,0139	0,0139	0,0202
0,00829	0,0281	0,0286	0,0416
0,00863	0,0305	0,0301	0,0451
0,00974	0,0398	0,0395	0,0575
0,01198	0,0589	0,0596	0,0868
0,01599	0,1045	0,1057	0,1538
0,01696	0,1217	0,1189	0,1728
0,01928	0,1511	0,1533	0,2229
0,02090	0,1800	0,1798	0,2615
0,02118	0,1842	0,1846	0,2685
0,02149	0,1903	0,1900	0,2763
0,02194	0,2014	0,1979	0,2878
0,02251	0,2113	0,2083	0,3029
0,02506	0,2572	0,2575	0,3744
0,02659	0,2893	0,2893	0,4208
0,02789	0,3226	0,3214	0,4675
0,02997	0,3775	0,3668	0,5335
0,03779	0,5982	0,6211	0,9033

Die vorstehende Untersuchung wurde im Ryerson-Laboratorium für Physik an der Universität Chicago ausgeführt. Ich möchte Herrn Professor R. A. Millikan, auf dessen Anregung hin ich die Untersuchung unternommen habe, meinen Dank für die Überlassung der Hilfsmittel des Institutes und für seine freundlichen Ratschläge und seine fördernden Anregungen während des Fortganges der Arbeit zum Ausdruck bringen.

1) Ladenburg, Ann. d. Phys. (4) **22**, 287, 1907; **23**, 447, 1907.

Purdue-Universität, W. La Fayette, Indiana.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 8. Februar 1916.)

Über die Hochfrequenzspektra (K-Reihe) der Elemente *Cr* bis *Ge*.

Von Manne Siegbahn und Wilhelm Stenström.

(Mit Tafel II.)

Einleitung.

Durch die bisherigen Untersuchungen[1]) im hiesigen Institute über die Hochfrequenzspektra der Elemente sind jetzt die vier Komponenten der K-Reihe ziemlich vollständig von Arsen bis Neodym bekannt. Die Fortsetzung zu höheren Elementen läßt sich wegen Mangel an den betreffenden Substanzen noch nicht ausführen. Dagegen ist eine Neubestimmung der vorangehenden leichteren Elemente nötig, weil — wie wir jetzt wissen — die K-Reihe aus vier Komponenten[2]) besteht, und die schon klassisch gewordenen Moseleyschen Messungen nur zwei Komponenten aufnehmen. Von diesen beiden ist die mit α bezeichnete eine Doppellinie, die (wohl wegen zu großer Spaltöffnung) bei Moseley als eine einzige Linie photographiert und gemessen ist. Für die schwache β_2-Linie (nach der Bezeichnung von Malmer), dessen Intensität, wie es scheint, bei leichteren Elementen abnimmt, liegen bisher keine Messungen vor. Bei Germanium ist von de Broglie nach der Sekundärstrahlungsmethode die $\alpha_1 - \alpha_2$-Linie bestimmt. Gallium stand uns nicht zur Verfügung.

Die Aufnahme der Spektrogramme.

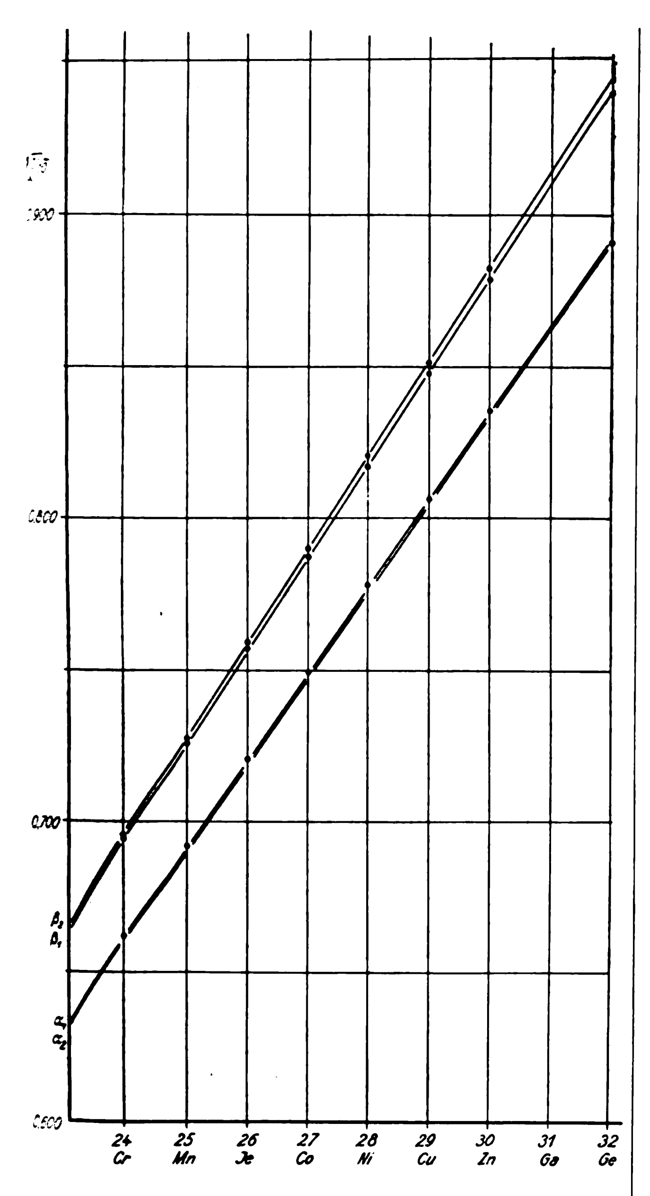
Zur Erzeugung der charakteristischen Strahlung wurde das betreffende Element an die gekühlte Antikathode einer Röntgenröhre angebracht. Als Fenster für diese sehr weichen Strahlen diente ein 0,05 mm dickes Aluminiumblech. Für die experimentellen Anordnungen im übrigen sei an zwei Mitteilungen in den Annalen der Physik[3]) hingewiesen.

Die Elemente wurden im allgemeinen in mehreren Kombinationen untersucht, um an demselben Spektrogramme Linien von verschiedenen Elementen messen zu können, wodurch eine gute Kontrolle gewährt wird. Die Übereinstimmung der an verschiedenen Platten gemessenen Linien ist sehr gut; die Abweichungen sind von der Größenordnung 0,1 bis 0,2 Proz.

1) I. Malmer, Diss. Lund 1915; M. Siegbahn, Verhandlungen der D. Phys. Ges. 1916, S. 39; M. Siegbahn und E. Friman, Ann. d. Phys. 1916.

2) Es sei erwähnt, daß an mehreren unserer Spektrogramme noch eine dritte, sehr schwache, α-Linie zu sehen ist.

3) M. Siegbahn und E. Friman, Ann. d. Phys. 1916.



Einige der Spektrogramme sind in Tafel II reproduziert:

a) Messing (Cu, Zn) Pl. 47
b) Nickelin (Ni, Cu, Zn) Pl. 48
c) Kobalt (Co, Ni) Pl. 49.

Germanium wurde als Oxyd an der gefeilten Kupferantikathode gerieben. Zur Aufnahme wurden etwa 3 bis 4 Milligramm der Substanz benutzt.

Messungen.

In den folgenden Tabellen sind die an den verschiedenen Spektrogrammen erhaltenen Messungsergebnisse zusammengestellt.

Tabelle 1.

Pl. 47. Messing.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Zn\ \beta_1$	13° 18′ 10″	1,295	0,8788
$Cu\ \beta_2$	14° 11′ 35″	1,380	0,8513
$Cu\ \beta_1$	14° 19′ 0″	1,392	0,8477
$Zn\ \alpha_1$	14° 45′ 25″	1,434	0,8352
$Zn\ \alpha_2$	14° 47′ 40″	1,437	0,8342
$Cu\ \alpha_1$	15° 52′ 30″	1,539	0,8060
$Cu\ \alpha_2$	15° 54′ 55″	1,543	0,8050

Tabelle 2.

Pl. 48. Nickelin.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Cu\ \beta_2$	14° 10′ 30″	1,378	0,8518
$Cu\ \beta_1$	14° 17′ 50″	1,390	0,8482
$Zn\ \alpha_1$	14° 44′ 10″	1,432	0,8358
$Zn\ \alpha_2$	14° 46′ 40″	1,436	0,8346
$Ni\ \beta_2$	15° 19′ 45″	1,488	0,8198
$Ni\ \beta_1$	15° 25′ 50″	1,497	0,8172
$Cu\ \alpha_1$	15° 51′ 50″	1,538	0,8062
$Cu\ \alpha_2$	15° 54′ 25″	1,543	0,8052
$Ni\ \alpha_1$	17° 6′ 15″	1,655	0,7773
$Ni\ \alpha_2$	17° 8′ 40″	1,659	0,7764

Tabelle 3.

Pl. 49. Kobalt.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Co\ \beta_2$	16° 32′ 10″	1,602	0,7901
$Co\ \beta_1$	16° 39′ 35″	1,613	0,7873
$Ni\ \alpha_1$	17° 3′ 30″	1,651	0,7783
$Ni\ \alpha_2$	17° 5′ 55″	1,655	0,7774
$Co\ \alpha_1$	18° 27′ 0″	1,781	0,7493
$Co\ \alpha_2$	18° 29′ 30″	1,785	0,7485

Tabelle 4.

Pl. 50. Eisen.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Fe\ \beta_2$	17° 58′ 0″	1,736	0,7590
$Fe\ \beta_1$	18° 6′ 0″	1,749	0,7556
$Fe\ \alpha_1$	20° 0′ 55″	1,926	0,7205
$Fe\ \alpha_2$	20° 3′ 40″	1,931	0,7197

Tabelle 5.

Pl. 51. Chromeisen.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Fe\ \alpha_1$	20° 2′ 40″	1,929	0,7200
$Fe\ \alpha_2$	20° 4′ 55″	1,932	0,7194
$Cr\ \beta_2$	21° 34′ 0″	2,069	0,6953
$Cr\ \beta_1$	21° 40′ 30″	2,079	0,6936
$Cr\ \alpha_1$	23° 56′ 40″	2,284	0,6617
$Cr\ \alpha_2$	23° 59′ 0″	2,288	0,6612

Tabelle 6.

Pl. 52. Spiegeleisen.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Fe\ \beta_2$	17° 57′ 10″	1,735	0,7593
$Fe\ \beta_1$	18° 5′ 10″	1,747	0,7565
$Mn\ \beta_1$	19° 44′ 15″	1,901	0,7254
$Fe\ \alpha_1$	20° 1′ 35″	1,927	0,7203
$Fe\ \alpha_2$	20° 4′ 10″	1,931	0,7196
$Mn\ \alpha_1$	21° 49′ 35″	2,092	0,6913
$Mn\ \alpha_2$	21° 51′ 55″	2,096	0,6907

Tabelle 7.

Pl. 53. Manganeisen.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Mn\ \beta_1$	19° 45′ 10″	1,902	0,7251
$Fe\ \alpha_1$	20° 1′ 30″	1,927	0,7204
$Fe\ \alpha_2$	20° 4′ 10″	1,932	0,7195
$Mn\ \alpha_1$	21° 50′ 20″	2,094	0,6911
$Mn\ \alpha_2$	21° 53′ 0″	2,098	0,6904

Tabelle 8.

Pl. 54. Manganeisen.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Mn\ \beta_2$	19° 38′ 45″	1,892	0,7270
$Mn\ \beta_1$	19° 46′ 5″	1,903	0,7248
$Fe\ \alpha_1$	20° 3′ 20″	1,930	0,7198
$Fe\ \alpha_2$	20° 5′ 45″	1,934	0,7191

Tabelle 9.

Pl. 55. Neusilber.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Zn\ \beta_1$	13° 18′ 30″	1,296	0,8786
$Cu\ \beta_1$	14° 19′ 0″	1,392	0,8477
$Zn\ \alpha_1$	14° 45′ 40″	1,434	0,8351
$Zn\ \alpha_2$	14° 48′ 0″	1,438	0,8340
$Cu\ \alpha_1$	15° 52′ 55″	1,540	0,8058
$Cu\ \alpha_2$	15° 55′ 15″	1,544	0,8048
($Ni\ \alpha_1$)	17° 7′ 20″	1,657	0,7769

Tabelle 10.

Pl. 56. Germanium.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Ge\ \beta_2$	11° 29′ 35″	1,121	0,9443
$Ge\ \beta_1$	11° 35′ 20″	1,131	0,9405
$Ge\ \alpha_1$	12° 54′ 35″	1,257	0,8918
$Ge\ \alpha_2$	12° 56′ 55″	1,261	0,8905

Tabelle 11.

Pl. 58. Zink.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Zn\ \beta_1$	13° 17′ 50″	1,294	0,8790
$Zn\ \alpha_1$	14° 45′ 20″	1,434	0,8352
$Zn\ \alpha_2$	14° 47′ 40″	1,437	0,8342

Tabelle 12.

Pl. 59. Zink.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
$Zn\ \beta_2$	13° 9′ 10″	1,281	0,8837
$Zn\ \beta_1$	13° 16′ 20″	1,292	0,8797
($Zn\ \alpha_3$)	(14° 40′ 30″)	(1,426)	(0,8375)
$Zn\ \alpha_1$	14° 44′ 0″	1,431	0,8359
$Zn\ \alpha_2$	14° 46′ 40″	1,436	0,8346

Die Resultate.

In der Tabelle 13 sind die erhaltenen Wellenlängen (die arithmetischen Mittel) zusammen mit den Werten von Moseley $M\alpha$, $M\beta$ angegeben.

Wie die Werte zeigen, sind die von uns erhaltenen Wellenlängen durchweg etwa 1 Proz. kleiner als die Moseleyschen[1]). Unsere Werte sind unter Verwendung der von Bragg angegebenen Gitterkonstante des Steinsalzes ($\log 2d = 0{,}75035$ berechnet). Es sei daran erinnert, daß Moseley bei seinen Messungen Ferrocyankalium als analysierenden Kristall be-

Tabelle 13.

Grundstoff	$\lambda \cdot 10^{-8}$ cm							
	β_2	β_1	α_1	α_2	$M\beta$	$M\alpha$	$\frac{\beta_1}{M\beta}$	$\frac{\alpha_1}{M\alpha}$
Chrom	2,069	2,079	2,284	2,288	2,093	2,301	0,9933	0,9926
Mangan	1,892	1,902	2,093	2,097	1,918	2,111	0,9917	0,9915
Eisen	1,736	1,748	1,928	1,932	1,765	1,946	0,9904	0,9908
Kobalt	1,602	1,613	1,781	1,785	1,629	1,798	0,9902	0,9905
Nickel	1,488	1,497	1,653	1,657	1,506	1,662	0,9940	0,9946
Kupfer	1,379	1,391	1,539	1,543	1,402	1,549	0,9922	0,9936
Zink	1,281	1,294	1,433	1,437	1,306	1,445	0,9908	0,9917
Germanium	1,121	1,131	1,257	1,261				

1) So ist auch der Fall mit den früheren Messungen von M. Siegbahn und E. Friman.

nutzt hat, dessen Gitterkonstante er zu $d = 8{,}454 \cdot 10^{-8}$ cm bestimmte. Eine kleine Änderung der Gitterkonstante würde die fehlende Übereinstimmung erklären können, wie die zwei letzten Kolonnen der Tabelle 13 zeigen. Allerdings sei bemerkt, daß die Abweichungen innerhalb der Genauigkeit unserer Kenntnis von d liegen.

Nach Moseley genügen die Werte von $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ und die Ordnungszahlen der betreffenden Elemente einer linearen Beziehung. Daß dies für sämtliche vier Komponenten[1]) innerhalb dieses Gebietes richtig ist, zeigt Tabelle 14

Tabelle 14.

Grundstoff	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$				
	β_2	β_1	α_1	α_2	$\alpha_1 - \alpha_2$
Chrom	0,6953	0,6936	0,6617	0,6612	0,0005
Mangan	0,7270	0,7251	0,6912	0,6906	6
Eisen	0,7592	0,7561	0,7202	0,7195	7
Kobalt	0,7901	0,7873	0,7493	0,7485	8
Nickel	0,8198	0,8172	0,7778	0,7769	9
Kupfer	0,8515	0,8479	0,8060	0,8050	10
Zink	0,8837	0,8790	0,8354	0,8343	11
—	—	—	—	—	—
Germanium	0,9443	0,9405	0,8918	0,8905	13

und die graphische Darstellung.

Lund, Physikalisches Institut, 8. Febr. 1916.

(Eingegangen 10. Februar 1916.)

1) Der Komponentenabstand $\alpha_1 \alpha_2$ ist durch Ausmessung mit Komparator erhalten und gewährt daher eine größere Genauigkeit als die Absolutwerte der Wellenlängen.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Einsteins Theorie der Gravitation und der allgemeinen Relativität.

Von Max Born.

Wenn eine neue physikalische Theorie mathematischer Hilfsmittel benötigt, die dem Arsenal des Physikers fremd sind, so gewinnt sie alsbald den Ruf großer Schwierigkeit und erfährt Ablehnung auch von solchen, die keineswegs konservativer Gesinnung sind. Darum mag ein Versuch nicht unwillkommen sein, die Einsteinsche Theorie der Gravitation und der allgemeinen Relativität, aller mathematischen Formen entkleidet, in ihrem gedanklichen Inhalte und in ihren Beziehungen zu gewohnten und anerkannten Vorstellungen darzustellen; denn mancher scheut die Mühe, sich eine neue mathematische Disziplin anzueignen, bevor er die Überzeugung von der Nützlichkeit und Notwendigkeit dieser Anstrengung durch Erkenntnis der Wichtigkeit des physikalischen Gegenstandes und der Richtigkeit der Grundgedanken gewonnen hat. In diesem Falle wird die Wichtigkeit des Problems der Gravitation wohl nicht bestritten werden; der Weg aber, auf dem Einstein die Lösung sucht, ist nicht nur richtig, sondern verblüffend großartig. Dieses Urteil, das mich selbst zur Niederschrift einer Einführung in Einsteins Gedanken drängt, wird natürlich der nicht zugeben, der den Wert einer Theorie nach dem praktischen Erfolge abschätzt; denn soweit es sich heute übersehen läßt, sind die Naturerscheinungen, die zur Prüfung der Theorie durch Beobachtungen dienen können, nur spärlich vorhanden. Die Größe und Tragweite der Theorie liegt im Reiche des Gedankens, in jenem Triebe zur Einheit und Widerspruchslosigkeit des Bildes, das der Extrakt unserer Naturerkenntnis ist. Durch die Unvorstellbarkeit der „absoluten" Bewegung hat Newton sich nicht davon abhalten lassen, diesen Begriff in die Grundlagen der Mechanik einzuführen, — und das mit Recht, da es dazumal darauf ankam, überhaupt ein in sich widerspruchloses System der Mechanik zu schaffen. Später hat dieser Begriff oder besser dieses Unding viel Kopfzerbrechen erregt, das sich in einer gewaltigen Literatur[1]) über den absoluten Raum, die absolute Zeit, die absolute Bewegung widerspiegelt. Die Erfolge der Mechanik aber haben einen Versuch zur Ausmerzung dieser „unvorstellbaren Vorstellungen" nie aufkommen lassen, bis Ernst Mach nachdrücklich die Forderung einer Revision der Grundlagen der Mechanik in diesem Sinne stellte. Dieselbe Forderung haben dann die Brüder Benedict und Immanuel Friedlaender in einer kleinen, leider wenig beachteten Schrift[2]) erhoben, in der nicht nur die Frage aufs klarste und gründlichste erörtert, sondern auch ein Experiment angegeben

1) Eine Übersicht über diese Literatur gibt A. Voß in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV, 1. Ich möchte die Schriften von E. Mach, L. Lange, H. Streintz, C. Neumann nennen, die in einer neueren Arbeit von H. Seeliger (Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der Kgl. Bayer. Ak. d. Wiss. Bd. 36, 1906, S. 85) „über die sogenannte absolute Bewegung" zitiert sind.

2) Dr. Benedict Friedlaender und Dr. Immanuel Friedlaender, Absolute oder relative Bewegung? Berlin, Verlag von Leonhard Simion, 1896.

wird, das im Prinzipe durchaus geeignet ist, eine Entscheidung über die Existenz absoluter Bewegungen herbeizuführen. Doch von hier bis zu einer wirklichen Abänderung der Mechanik ist noch ein weiter Weg, den zu finden Einstein vorbehalten blieb.

Ich will aber diesen Gedankengang, der die absolute Bewegung wegen ihrer Unvorstellbarkeit aus den Grundlagen der Physik entfernen will, als zu abstrakt beiseite schieben und lieber das Problem der Gravitation an die Spitze stellen, das dann von selbst zu der ersten Fragestellung zurückleiten wird. Um dabei den richtigen Standpunkt zu finden, ist es notwendig, sich der geschichtlichen Entwicklung der physikalischen Wissenschaften bewußt zu werden und sie als Maßstab zu benutzen.

Das Grundgewölbe des riesigen Baues der exakten Naturwissenschaften ist die Mechanik Newtons, und diese ruht auf zwei Pfeilern, der Lehre von den Trägheitswiderständen und der Lehre von der Gravitation; diese Pfeiler sind durch einen Gewölbebogen verbunden, den Satz, daß die Quantität der Trägheit und der Gravitation eines Körpers ein und denselben Wert haben: „alle Körper fallen gleich schnell, träge und schwere Masse sind gleich".

Über diesem Fundamente erhebt sich nun das Gebäude, an dem zwei Jahrhunderte in rastloser Arbeit gewirkt haben. Man muß sich die einzelnen Stockwerke vor Augen stellen, um die Größe des Baues zu ermessen: Da ist zuerst Newtons eigene Ausarbeitung der astronomischen Grundtatsachen, die Erklärung der Kepplerschen Gesetze, der Störungen, dann die Anwendung seiner Prinzipien auf die irdische Mechanik und Optik; übergehen wir die geringeren unter seinen Schülern, so gelangen wir zu Euler und den Bernoullis, die die Newtonschen Gedanken von der Massenträgheit und Gravitation auf immer mehr Naturvorgänge anwandten, und sehen dann in den Händen der Franzosen, von Maupertuis, d'Alembert bis Lagrange und Laplace, die Newtonsche Mechanik zur Vollendung kommen. Die „mechanische Naturerklärung" war die Forderung, die aller Forschung zugrunde lag. Man verstand darunter die Zurückführung aller physikalischen Erscheinungen auf die Bewegungen der Moleküle, die man sich als kleine anziehende oder abstoßende träge Massen vorstellte, immer den bewundernden Blick auf die Astronomie gerichtet, wo dieser Gedanke Newtons so ungeheuer erfolgreich war. Dabei war man Newtonscher als Newton; denn diesem war sein Anziehungsgesetz niemals als das letzte Erklärungsprinzip erschienen, er fühlte die Schwierigkeit, unmittelbare Fernwirkungen vorzustellen, und sprach dies aus. Aber in demselben Maße, als die Erfolge des Gesetzes wuchsen, verlor sich die Kritik. Und wenn auch gelegentlich ein Forscher Bedenken fühlte, das Attraktionsgesetz als etwas schlechthin gegebenes anzusehen, und nach einer tieferen Erklärung suchte, so war doch der andere Pfeiler der Newtonschen Theorie, der Begriff der trägen Masse, bis in die neueste Zeit vor allen Angriffen sicher. So können wir den Sieg der Newtonschen Gedanken weiter ins 19. Jahrhundert hinein verfolgen; wir sehen, wie die Gesetze der Elastizität von Navier, Poisson und Cauchy auf die Vorstellung der anziehenden oder abstoßenden trägen Moleküle aufgebaut werden, wie dann dieselben Vorstellungen Laplace und Gauß zur Erklärung der Kapillarität dienen, und wie schließlich die großen, neu entstehenden Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus von Coulomb und seinen Nachfolgern vollständig vom Standpunkte Newtons erfaßt werden. Wir können diesen Aufstieg der Newtonschen Prinzipien mit dem großen Triumphe der Astronomie schließen, der Entdeckung des Neptun durch Leverrier aus den Abweichungen von der Newtonschen Theorie, die sich in den Bahnen der bekannten Planeten zeigten.

Diese ganze Entwicklung muß man vor Augen haben, will man die Arbeit Einsteins richtig einschätzen. Denn die beiden Pfeiler der Newtonschen Theorie, die Gesetze der Trägheit und der Gravitation, sind es gerade, die, im Laufe der neueren Entwicklung ins Wanken geraten, durch Einstein einen gründlichen Umbau erfahren und einen gemeinsamen Unterbau erhalten, der sie von neuem befähigt, das ganze Gebäude zu tragen.

Man kann aber die Notwendigkeit dieses Schrittes nur verstehen, wenn man die oben angedeutete Entwicklung der Erklärungsprinzipien weiter verfolgt. Denn die Zwischenzeit hat mehrere Vorboten der Umwälzung gebracht und sie bis zu gewissem Grade vorbereitet. Den ersten Stoß hatte der Pfeiler der Attraktionskräfte auszuhalten. Nachdem Faraday, dem die Vorstellung der Fernwirkung unerträglich war, gezeigt hatte, daß auf dem Gebiete der elektrischen und magnetischen Vorgänge die entgegengesetzte, dem menschlichen Geiste so viel angemessenere Vorstellung der Nahwirkung nicht nur zulässig, sondern im höchsten Grade fruchtbar sei, gewann diese Nahwirkungstheorie durch Maxwell ein so vollkommenes mathematisches Gewand, daß sie den Kampf gegen die Attraktionen erfolgreich aufnehmen konnte. Und in demselben Maße, als die Lehren Maxwells Verbreitung gewannen,

versank die alte Forderung der mechanischen Naturerklärung, um dem neuen „elektromagnetischen Weltbilde“ Platz zu machen. Doch gelang diese Wandlung den Geistern nur durch eine kleine Vergeßlichkeit; die Gravitation selbst, das Vorbild aller Fernkräfte, wollte sich zwanglos keiner Nahwirkungstheorie fügen; man zuckte die Achseln, wies das Gebiet der Schwerkraft aus dem Reiche der Physik aus und überließ es den Astronomen. Bei diesen aber war die Newtonsche Überlieferung in sicherer Hut.

Halten wir an dem Bilde von den beiden Pfeilern fest, so können wir also sagen, daß der Pfeiler der Attraktionskräfte von dem Bau der irdischen Physik entlastet worden ist, indem man diese auf neue Fundamente stützte, daß man ihn aber weiter die himmlische Physik, die Astronomie, tragen ließ. Mancher hat diesen Dualismus schmerzlich gefühlt, aber erst in neuester Zeit begannen die Versuche, ihn auszumerzen.

Inzwischen wurde der andere Pfeiler angesägt. Die träge Masse verlor ihren ursprünglichen, substantiellen Charakter und ihre Unveränderlichkeit. Auch diese Wandlung kam von der Elektrodynamik her. Man entdeckte die Trägheit bewegter elektrischer Ladungen und durchstrahlter Hohlräume; man sprach erst von „scheinbarer Masse“, bis man erkannte, daß dem Elektron keine andere als elektromagnetische Masse zukäme. Jetzt begab man sich, entsprechend dem wachsenden Erfolge des Schlagworts vom elektromagnetischen Weltbilde, auf den entgegengesetzten Standpunkt und wollte in der Trägheit der Materie überhaupt nichts sehen als die Wirkung der in ihr verteilten elektrischen Ladungen. Doch hingen diese Gedanken einigermaßen in der Luft, bis die Entdeckung des Relativitätsprinzips der Elektrodynamik die Lage klärte durch Aufstellung des Satzes von der Trägheit der Energie.

Diese erste große Leistung Einsteins erscheint heute nur als Vorarbeit zur allgemeinen Relativität, die die Luft reinigte; sie zeigt aber das Wesen der Einsteinschen Denkweise, das auch in der neuen Theorie den Ausschlag gibt. Es handelt sich darum, daß eine merkwürdige physikalische Erscheinung in das Gefüge der geltenden Anschauungen nicht hereinpaßt; so bewies der Michelsonsche Versuch, daß die Lichtgeschwindigkeit von der Erdbewegung unabhängig ist, entgegen den herrschenden Theorien. Einstein sucht nicht nach „physikalischen Erklärungen“ in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes, durch Einführung geeigneter Kräfte oder verborgener Massen im Sinne der alten Mechanik; sondern er dreht den Sachverhalt um, erhebt die zu erklärende Tatsache, gehörig verallgemeinert, zum Prinzipe und stellt die Frage, ob dieses Prinzip (z. B. die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustande des Bezugssystems) mit den allgemein anerkannten Grundsätzen vereinbar sei und welche Folgerungen aus ihm fließen. Die Fruchtbarkeit dieser Wendung, die dem oberflächlichen Urteile ein billiger Ausweg scheinen mag, ist durch den Erfolg bewiesen worden.

Sehen wir nun des näheren zu, welche Stellung das elektrodynamische Relativitätsprinzip zu den beiden Pfeilern der Newtonschen Mechanik einnimmt, so haben wir neben der Klärung des Massebegriffs, auf den wir schon hinwiesen, den starken Impuls nach Vereinheitlichung des Weltbildes hervorzuheben, der sich mit der traditionellen Absonderung der Gravitation nicht zufrieden geben konnte. Was den ersten Punkt betrifft, so gipfeln die Aussagen des Relativitätsprinzips in folgenden Sätzen: Die Energie besitzt Trägheit, daher kann Trägheit mit (zum Teil verborgener) Energie identifiziert werden. Andererseits ist die Dichte der Energie kein Skalar, d. h. nicht vom Bezugssysteme unabhängig, sondern tritt als Komponente eines vierdimensionalen Tensors, des Impuls-Energie-Tensors, auf. Aus der Vereinigung beider Sätze geht hervor, daß auch die Massendichte ihren skalaren Charakter verliert. Gleichzeitig mit dieser Erkenntnis hat nun, wie gesagt, das Bestreben eingesetzt, die Gravitation aus ihrer Sonderstellung zu entfernen; aber die aufgezählten Sätze zeigen, welche neue Schwierigkeiten diesem Unterfangen entgegentreten. Der heikelste Punkt ist jenes Gewölbe, das die Pfeiler der Newtonschen Lehre verbindet, der Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse. Gemäß diesem Satze pflegt man die Masse der Körper mit der Wage zu bestimmen, d. h. durch Vergleich der Anziehung, die sie von der Erdkugel erfahren. Dabei hat sich niemals eine Unstimmigkeit ergeben. Aber über diese fortlaufende mittelbare Kontrolle hinaus ist der Satz durch direkte Messungen nachgeprüft worden; die Versuche von Eötvös haben ihn mit einer Genauigkeit bestätigt, die wohl alle andern physikalischen Messungen übertrifft. Will man nun diese Erfahrungstatsache als absolut genaues Gesetz ansehen, so wird, da Trägheit mit Energie identisch ist, jede Energie auch schwer sein, und da andererseits Energie nur relativ (kein Skalar) ist, so wird auch die schwere Masse diese Eigenschaft bekommen und aller Substanzialität verlustig gehen. Oder man muß jenes Gesetz nur als Näherung gelten lassen. Wegen dieser Schwierigkeiten,

die der Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse einer Einfügung der Gravitation in das elektrodynamische Weltbild entgegensetzt, begnügte man sich zuerst mit einer formalen Einordnung (Poincaré, Minkowski, Sommerfeld); man stellte in Analogie mit den Formeln für die bekannten elektromagnetischen Potentiale ein Fernwirkungsgesetz auf, welches gegen die Lorentz-Transformationen invariant ist und bei kleinen Geschwindigkeiten in das Newtonsche Gesetz übergeht. Wer aber entschlossen war, das Relativitätsprinzip nicht anzuerkennen und der ganzen Forschungsrichtung den Rücken zu kehren, der konnte sich gerade auf diese Schwierigkeiten der Gravitationstheorie berufen. Das tat Abraham; ja, er ging noch weiter und fiel den Verfechtern der Relativität in den Rücken, indem er sich erkühnte, eine Nahwirkungstheorie der Gravitation auf Grund der Anschauungen vom absolut ruhenden Äther ohne innere Widersprüche aufzubauen. Dabei benutzte er freilich trotz seiner Feindschaft die durch das Relativitätsprinzip aufgedeckten energetischen Zusammenhänge in reichem Maße, und diese Inkonsequenz beraubt sein System aller inneren Wahrscheinlichkeit. Zu gleicher Zeit begann Einstein sein Werk, das ihn schließlich zur Aufstellung der allgemeinen Relativität führte; und im Wetteifer mit beiden arbeiteten Mie und Nordström. Auf die Ergebnisse dieser Forscher will ich hier nicht eingehen; jeder einzelne hat einen wertvollen Beitrag geliefert, aber sie sind alle nicht bis zu der Allgemeinheit der Auffassung durchgedrungen, die Einstein gleich von Anfang an gewonnen hat. Dabei darf man nicht verschweigen, daß die ersten Publikationen Einsteins mathematische Irrtümer enthielten, die erst in den letzten Mitteilungen richtig gestellt worden sind. Zuletzt aber hat die Theorie eine so einfache Form angenommen, daß sie jedem zugänglich sein muß, der die Mühe nicht scheut, die Grundlagen der Differentialgeometrie sich anzueignen.

Wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie erhebt Einstein gerade den Satz, der sich am schwersten in das Gefüge der anderen einordnet, zum Prinzipe. Der Satz, daß die Schwere auf alle Körper gleich stark wirkt, soll in aller Strenge gelten. Die oben erörterten Schwierigkeiten des Massebegriffs verbieten aber, diese Forderung ohne weiteres wie in der Newtonschen Mechanik auszusprechen, mit den Worten: Schwere und träge Masse sind gleich. Vielmehr muß man eine andere Formulierung suchen. In der Newtonschen Mechanik wird einem Beobachter, der sich auf einer geraden Linie mit gleichförmiger Beschleunigung bewegt, ein allen Kräften entzogener, also ruhender oder gleichförmig bewegter Massenpunkt in gleichförmig beschleunigter Bewegung erscheinen, gerade so, wie wenn der Punkt in einem homogenen Gravitationsfelde fiele. Umgekehrt erscheint ein im homogenen Gravitationsfelde fallender materieller Punkt von beliebiger Masse einem Beobachter ruhend, wenn dieser sich mit geeigneter Beschleunigung in Richtung des Gravitationsfeldes bewegt. Diese Formulierung der in Frage stehenden Tatsache eignet sich nun zur Verallgemeinerung. Einstein erweitert sie nämlich auf beliebige Bewegungen; aber indem er gleichzeitig das Relativitätsprinzip in möglichst weitem Umfange aufrecht erhalten will, wird er gezwungen, an den Grundlagen unserer Raum- und Zeitvorstellungen zu rütteln.

Einstein fordert, daß jede, unter der Wirkung anziehender Körper stattfindende Bewegung eines Körpers durch geeignete Bewegung des Beobachters aufgehoben, daß umgekehrt jede durch Bewegung des Beobachters entstehende Änderung der Erscheinungen als Wirkung eines Gravitationsfeldes aufgefaßt werden könne, ohne daß es ein physikalisches Mittel gibt zwischen beiden Wirkungen, Bewegung des Beobachters und Gravitation, zu unterscheiden; das heißt aber mathematisch, daß erstens die Gesetze der kräftefreien Trägheitsbewegung und der Bewegung in beliebigen Gravitationsfeldern in ein einheitliches Grundgesetz höherer Art vereinigt werden sollen, und daß zweitens eine beliebige Transformation der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, der vierdimensionalen Minkowskischen Welt, keine Änderung an den Gesetzen der Erscheinungen bewirken darf, sofern nur jenes Grundgesetz der Trägheits- und Gravitationsbewegung dabei unverändert bleibt. Das bedeutet die Relativität aller Vorgänge im weitesten Sinne.

Auf welche Weise soll man aber zu dem Grundgesetze der Trägheits- und Gravitationsbewegung gelangen? Einstein gebraucht dazu wiederum eine einfache Umformulierung der Newtonschen Trägheitsgesetze, durch die die verlangte Verallgemeinerung relativ nahe gelegt wird. Anstatt nämlich mit Newton zu sagen, ein sich selbst überlassener Massenpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig, sagt Minkowski, die Weltlinie des Punktes ist eine Gerade im vierdimensionalen Raume, und Einstein schließlich sagt, die Weltlinie ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der vierdimensionalen Welt. Betrachtet man nun den bewegten Punkt von einem irgendwie beschleunigten Bezugssysteme, so heißt das, man führt statt Koordinaten und Zeit durch eine beliebige Transformation vier neue Veränder-

liche ein; dabei behält aber das Gesetz der Punktbewegung in der Einsteinschen Fassung seine Form, da ja darin nichts enthalten ist, was auf die Koordinaten und das Zeitmaß Bezug hat. Allerdings ändert sich der mathematische Ausdruck für den Abstand zweier Weltpunkte auf einer Weltlinie; lautete er vorher wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie

$$\int\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2},$$

wo x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten, $\frac{x_4}{ic}$ die Zeit bedeuten, so geht er durch eine beliebige Transformation in

$$\int\sqrt{g_{11}\,dx_1^2 + \cdots + g_{44}\,dx_4^2 + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + \cdots + 2g_{34}\,dx_3\,dx_4}$$

über, wo die Koeffizienten g_{ik} der quadratischen Form unter dem Wurzelzeichen aus den ersten Ableitungen der Transformationsfunktionen gebildet sind.

Soweit ist noch nichts Neues geschehen. Doch ist die letzte Fassung des Trägheitsgesetzes tatsächlich der Form nach schon so allgemein, daß sie fähig ist, alle Gravitationsbewegungen darzustellen. Dazu ist es nur nötig, die 10 Größen g_{ik} als beliebige Funktionen in der vierdimensionalen Welt anzusehen und zu fordern, daß die Bewegung eines Massenpunktes unter jenen Wirkungen, die wir bisher als Trägheit und Gravitation unterschieden, so geschieht, daß die Variation des Integrals

$$\int\sqrt{g_{11}\,dx_1^2 + \cdots\cdots + 2g_{34}\,dx_3\,dx_4},$$

erstreckt über seine Weltlinie, verschwindet; mit anderen Worten, die Trägheits- und Gravitationsbewegungen sollen durch die geodätischen Linien der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit mit dem Linienelemente

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + \cdots + g_{44}\,dx_4^2 + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + \cdots + 2g_{34}\,dx_3\,dx_4$$

dargestellt werden.

Jetzt sind also die g_{ik} nicht mehr jene festen, durch die Transformation der rechtwinkligen auf krummlinige Koordinaten bestimmten Ausdrücke, von denen wir ausgingen, sondern irgendwelche Funktionen, die durch die Anwesenheit aller übrigen Körper bedingt sind. Gerade der letzte Punkt ist natürlich der wichtigste; denn die ganze Aussage gewinnt erst ihren Sinn, wenn gesagt wird, welche Funktionen die g_{ik} eigentlich sind. Da sie die Bewegung in ähnlicher Weise bestimmen, wie das Gravitationspotential der Newtonschen Theorie, so kann man sie auch als die 10 Potentiale des Gravitationsfeldes bezeichnen.

Die neue Formel bleibt solange ein Programm, bis folgende Fragen beantwortet sind: Wie bestimmen sich die Potentiale g_{ik} durch die vorhandenen Massen? Ergeben sich daraus in erster Näherung solche Werte der g_{ik}, daß unsere Gleichungen der geodätischen Linie in die Newtonschen Bewegungsgleichungen im Schwerefelde übergehen? Wenn die Antworten hierauf günstig lauten, dann bleibt endlich die wichtige Frage, wie müssen die übrigen Gesetze der Physik geändert werden, damit die Grundforderung der Theorie erfüllt wird, daß durch keine physikalische Messung zwischen Trägheit und Gravitation unterschieden werden kann?

Ehe wir an diese Aufgaben herantreten, wollen wir einige ganz allgemeine, historische und mathematische Bemerkungen einschalten. In der Einsteinschen Theorie nimmt, wie man sieht, die Gravitation eine ganz andere Stellung ein, als alle übrigen Kräfte. In der Tat, eine „Schwerkraft" im Sinne der alten Mechanik gibt es nicht mehr. Hier ist es nötig an die berühmte Mechanik von Heinrich Hertz zu erinnern. Dieser hat die Forderung aufgestellt, den Kraftbegriff überhaupt aus der Mechanik zu verbannen. Jede Bewegung ist nach Hertz eine reine Trägheitsbewegung; krumme Bahnen und Beschleunigungen sind Folgen kinematischer Zwangsbedingungen. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen dient das „Prinzip der geradesten Bahn". Schon der Name weist auf die Verwandtschaft mit dem Einsteinschen Grundgedanken hin. Deutet man die Freiheitsgrade des Massensystems als Koordinaten eines Punktes im n-dimensionalen Raume, so ist die „geradeste Bahn" von Hertz offenbar durchaus ein Analogon zur Einsteinschen „kürzesten oder geodätischen Weltlinie". Von diesem Standpunkte aus erscheint der Ansatz Einsteins als geradlinige Fortsetzung der vielbewunderten Mechanik von Hertz, ein vollkommen durchgeführter Fall der Elimination einer Kraft. Wer die Mechanik von Hertz anerkennt, kann die Mechanik von Einstein nicht schlankweg ablehnen.

Man wird nun fragen, warum Einstein bei der Gravitation halt macht und nicht die andern Kräfte in ähnlicher Weise beseitigt. Dazu ist einmal zu sagen, daß eben die Gravitation, die auf alle Körper gleich stark wirkt, in der Natur wirklich eine ausgezeichnete Rolle spielt, die ihr in der Rangordnung der Gesetzmäßigkeiten einen höheren Platz anweist. Außerdem aber ist es ja auch gar nicht wahr, daß die andern Kräfte in der alten Newtonschen Weise beibehalten werden. Wir haben schon

oben dargelegt, wie die Entwicklung der Elektrodynamik zersetzend auf die Newtonschen Begriffe eingewirkt hat. Die „mechanische Kraft" eines elektromagnetischen Feldes ist schon lange zu einem Hilfsbegriffe herabgesunken; an seine Stelle ist das Begriffssystem des Impuls-Energie-Tensors getreten. Und in ähnlicher Weise beginnen sich überall die Vorstellungen zu wandeln.

Was nun die mathematische Durchführung der Einsteinschen Theorie betrifft, so handelt es sich um die Geometrie einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, deren Linienelement eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale ist. Die hierzu nötige Mathematik liegt in vollem Umfange in der Literatur vor. Nachdem Gauß die Theorie der zweidimensionalen Gebilde (Flächen im Raume von 3 Dimensionen) entwickelt hatte, ist die Lehre von den n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten von Riemann in seiner berühmten Habilitationsschrift ausgeführt worden. Dann haben Christoffel, Ricci und Levi-Civitá einen bequemen Algorithmus ausgearbeitet, den man den „absoluten Differentialkalkül" nennt. Einstein hat im wesentlichen diesen Formalismus übernommen.

Hier wollen wir diese mathematische Theorie gleich in dem physikalischen Gewande erläutern, die sie durch Einstein erhalten hat.

Die grundlegende Tatsache der vollständigen Relativität kommt darin zum Ausdrucke, daß in der Einsteinschen Welt die Koordinaten und die Zeit jeder physikalischen Bedeutung bar sind. Man muß sich klar sein, daß das in der klassischen Theorie nicht der Fall ist; denn in dieser gibt es ausgezeichnete Bezugssysteme, Inertialsysteme genannt, in denen die physikalischen Gesetze in ihrer einfachsten Form gelten, und diese Bezugssysteme sind nicht relativ zu bestimmten Körpern definiert, sondern gewissermaßen Eigentümlichkeiten des absoluten leeren Raumes und der absoluten Zeit. Die Literatur über diese Frage ist unübersehbar und zeigt, wie ungern sich der Menschengeist mit einer Theorie abfindet, die dem leeren Raume Eigenschaften beilegt. Bei Einstein fällt das fort; beliebige Transformationen sollen zulässig sein, die Gesetze der Physik sollen in allen, nicht nur in gewissen ausgezeichneten Bezugssystemen in der gleichen Form gelten. Damit scheint zunächst jeder feste Halt verloren zu gehen, alles zerfließt und zerrinnt, und manchem, der das neue Gebiet betritt, mag zu Mute sein wie dem Wanderer, der ein Moor durchquerend den Boden unter den Füßen verliert. Doch ist es leicht, ihm die Furt zu weisen, die ihn vor dem Versinken rettet. In der Theorie der krummen Flächen sind wir seit Gauß gewöhnt, die Punkte einer Fläche auf irgend zwei Kurvenscharen zu beziehen, die die Fläche netzartig überdecken. Alle Gesetzmäßigkeiten der Fläche, die durch Verschiebung und unelastische Verbiegung der Fläche im Raume nicht zerstört werden, bei denen also der Abstand benachbarter Punkte, das Linienelement, konstant ist, bleiben, in diesen Kurvenkoordinaten ausgedrückt, völlig ungeändert, wenn man zu einem beliebigen andern Bezugssysteme übergeht. Man denke etwa an die Formeln für die Krümmung in Gaußschen Koordinaten. Hier haben wir eine vollständige Analogie für die Forderung der allgemeinen Relativität; ja es ist mehr als Analogie, denn mathematisch handelt es sich bei Einstein um dieselben Begriffe und Formeln in der vierdimensionalen Welt, die seit Gauß für zweidimensionale Flächen jedem geläufig sind. Auf einen Punkt ist besonders hinzuweisen. Zwei Flächen, die man durch Verbiegung zur Deckung bringen kann, haben in entsprechenden Punkten dasselbe Linienelement; auf ihnen gilt also dieselbe Geometrie. Die Länge des Linienelements gilt dabei als eine mit Hilfe starrer Maßstäbe im Raume vergleichbare und meßbare Größe. Im Falle der vierdimensionalen Welt, in der wir selber gefangen sitzen, steht uns kein Maßstab zur Verfügung, der in einer Mannigfaltigkeit höherer Dimension sich ohne weiteres als starr erweist. Gleichwohl muß die Einsteinsche Theorie die Annahme machen, daß die vierdimensionale Entfernung zweier benachbarter Punkte eine meßbare Größe sei; das bedeutet aber physikalisch die Voraussetzung der Existenz starrer Maßstäbe und vergleichbarer Uhren im Unendlichkleinen. Die Theorie läßt sich überhaupt nur auf die Erscheinungswelt anwenden, wenn man annimmt, daß es in der Natur solche Körper und Vorgänge gibt, die sich im Unendlichkleinen als Maßstäbe und Uhren gebrauchen lassen und daß wir durch die Erfahrung solche Körper allmählich immer besser kennen und gebrauchen lernen. In der bisher geltenden Mechanik wurde viel mehr verlangt, nämlich die Existenz von Maßstäben und Uhren im Endlichen. Praktisch ist der Unterschied nicht sehr groß; denn es ist wohl klar, daß Räume riesiger, sogar astronomischer Dimension bei der Ungenauigkeit unserer Messungen für die Einsteinsche Theorie noch unendlich klein sind — wie könnte sonst die gewöhnliche Auffassung, die doch als Grenzfall herauskommen muß, sich auch nur annähernd bewährt haben?

Um sich eine Vorstellung von der physikalischen Bedeutung des Linienelements zu machen, denke man daran, daß im Unendlichkleinen die gewöhnliche Relativitätstheorie gilt.

Daher zerfallen alle von einem Weltpunkte ausgehenden Linienelemente in zeitartige und raumartige, die durch einen Kegel getrennt sind, dessen Linienelemente gleich Null sind. Hat man nun zwei zeitlich und räumlich benachbarte Ereignisse, so kann man, wenn das sie verbindende Weltlinienelement zeitartig ist, ein solches Bezugssystem einführen, daß beide Ereignisse am selben Orte statthaben; dann ist der Zeitunterschied zwischen ihnen, gemessen mit den oben definierten Uhren, gleich dem Linienelemente. Oder aber das verbindende Linienelement ist raumartig; dann werden die Ereignisse in einem geeigneten Bezugssysteme gleichzeitig erscheinen, und das Linienelement ist gleich dem räumlichen Abstande, gemessen mit den oben definierten Maßstäben. Endlich betrachten wir den Fall eines verschwindenden Linienelements; in der gewöhnlichen Relativitätstheorie bedeutet die Relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0$$

eine Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = c.$$

Die entsprechende Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + \cdots + g_{44}\,d_4^2 + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + \cdots = 0$$

wird dieselbe Bedeutung haben; die zugehörigen geodätischen Linien sind die Weltlinien der Lichtausbreitung.

Nun kann man ohne Rechnung bereits einige Folgerungen ziehen, die der neuen Theorie eigentümlich sind und später zu ihrer experimentellen Prüfung herangezogen werden. Die idealen Uhren und Maßstäbe, deren Existenz wir voraussetzen, erlauben das Linienelement zu messen. Ist nun dieses zeitartig, so wird bei geeigneter Wahl des Bezugssystems eine solche Uhr an einem festen Orte direkt das Linienelement als Zwischenzeit ablesen lassen, indem für

$$dx = dy = dz = 0$$

die Formel

$$ds^2 = dx_4^2 = -c^2\,dt^2$$

gilt; bringt man nun aber die Uhr an einen andern Ort, so wird dieselbe Uhrablesung $\frac{ds}{ic}$ nicht mehr mit der dort geltenden Zwischenzeit dt übereinstimmen, denn es gilt nun für

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$$
$$ds^2 = g_{44}\,dx_4^2 = -c^2\,g_{44}\,dt^2,$$

wo g_{44} von Ort zu Ort verschiedene Werte hat. Die Angaben einer idealen ruhenden Uhr hängen also vom Gravitationsfelde ab. Das Entsprechende geht für die Maßstäbe aus der Betrachtung raumartiger Linienelemente hervor. Betrachten wir endlich verschwindende Linienelemente, so definiert die Gleichung

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + \cdots + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + \cdots = 0$$

in einem beliebigen Bezugssysteme eine krumme Kurve; das bedeutet, die Lichtstrahlen werden durch das Schwerefeld abgelenkt.

Es wird sich nun darum handeln, wie groß diese Einflüsse auf Uhren, Maßstäbe und auf den Strahlengang zu erwarten sind und ob sie beobachtet werden können. Dazu ist natürlich notwendig, die Koeffizienten des Linienelements wirklich zu kennen.

Wir gelangen damit zu der Hauptaufgabe der Theorie, nämlich anzugeben, wie die Gravitationspotentiale g_{ik} von der Verteilung der Körper im Raume abhängen, d. h. die Verallgemeinerung des Newtonschen Anziehungsgesetzes aufzustellen. Da natürlich die Vorstellungen der Nahwirkungstheorie maßgebend sind, so ist an Stelle des expliziten Newtonschen Gesetzes von der Differentialgleichung für das Gravitationspotential $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ auszugehen, wo ϱ die Massendichte ist; ihre Verallgemeinerung wird in 10 Differentialgleichungen für die 10 Funktionen g_{ik} bestehen. Diese Gleichungen müssen invariant gegenüber beliebigen Transformationen sein und werden auf der rechten Seite an Stelle der Massendichte die Dichte der Gesamtenergie enthalten, gemäß der Forderung, daß die Ergebnisse der alten Relativitätstheorie möglichst aufrecht zu erhalten sind; ferner müssen sie so eingerichtet werden, daß der Impuls-Energiesatz für alle Energiearten einschließlich der Gravitationsenergie selbst erfüllt bleibt. Außer diesen ganz natürlichen Forderungen nimmt Einstein nur noch aus der Newtonschen Theorie die Annahme herüber, daß die Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sein sollen. Dann zeigt er — und das ist wohl die Hauptleistung —, daß sich die Differentialgleichungen ohne weitere Willkür hinschreiben lassen.

Um zu erläutern, wie diese 10 invarianten Differentialgleichungen 2. Ordnung zustandekommen, kann man an den Gedankengang Riemanns in seiner schon genannten grundlegenden Arbeit über die mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten anknüpfen. Es sei P_1 irgendein Punkt in der vierdimensionalen Welt, und P_2 ein Nachbarpunkt, der um ds von P_1 entfernt ist. Dann ist

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + \cdots + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + \cdots.$$

Nun verschieben wir den Punkt P_1 nach Q_1 derart, daß die Koordinaten von P_1 um $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ vermehrt werden, und verbinden

Q_1 mit demjenigen Nachbarpunkte Q_2, dessen Koordinaten sich von denen des Punktes Q_1 um dieselben Beträge dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 unterscheiden, wie die Koordinatendifferenzen zwischen P_1 und P_2. Ist $d\sigma$ das Linienelement zwischen Q_1 und Q_2, so entsteht offenbar $d\sigma^2$ aus ds^2, indem man in jedem Koeffizienten g_{ik} die Koordinaten um $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ vermehrt; dann ist g_{11} nach dem Taylorschen Satze durch

$$g_{11} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} d\xi_1 + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} d\xi_1^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} d\xi_2 d\xi_3 + \cdots\right) + \cdots$$

zu ersetzen, und man erhält

$$d\sigma^2 = ds^2 + \sum_{ikl} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} d\xi_l dx_i dx_k + \frac{1}{2}\sum_{iklm} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} d\xi_l d\xi_m dx_i dx_k + \cdots .$$

Man kann nun durch geeignete Wahl des Koordinatensystems beweisen, daß die dreifache Summe verschwindet. Die vierfache Summe aber hat dann folgende Bedeutung: Wenn sie verschwindet, so werden auch, wie man zeigen kann, alle folgenden Glieder der Entwicklung gleich Null, und man erhält $d\sigma = ds$; bei einer Verschiebung zweier Punkte unter Beibehaltung ihrer Koordinatendifferenzen ändert sich also das Bogenelement nicht, d. h. in dem Raume gibt es endliche starre Körper, die sich frei bewegen lassen. Die vierfache Summe mißt also die Abweichungen des Raumes von dem gewohnten Verhalten, oder, wie es Riemann nennt, die „Krümmung" des Raumes. Die Koeffizienten dieser vierfachen Summe bilden einen sogenannten Tensor vierten Ranges, dessen fundamentale Bedeutung für die Eigenschaften des Raumes aus dem Gesagten wohl genügend hervorleuchtet. Er ist der einzige Tensor vierten Ranges und zweiter Ordnung, der allein von den g_{ik} abhängt, und aus ihm läßt sich nur auf eine Weise ein Tensor zweiten Ranges und zweiter Ordnung bilden. Der letztere hat 10 Komponenten, die Differentialausdrücke der g_{ik} sind; indem Einstein diese den 10 Komponenten des Energie-Spannungstensors der Materie, d. h. der übrigen Energiearten, proportional setzt, gewinnt er die gesuchten Grundgleichungen des Schwerefeldes. Der Proportionalitätsfaktor ist die Gravitationskonstante. In diesem Gedankengange ist Willkür fast ganz ausgeschaltet. Um so überraschender ist es, wenn man sieht, wie diese aus ganz allgemeinen Gesichtspunkten gewonnene Theorie in erster Näherung auf die bekannten ganz speziellen Newtonschen Bewegungsgleichungen führt.

Diese erste Näherung geht davon aus, daß das im leeren Weltenraume bei geeigneter Wahl der Koordinaten gültige Linienelement

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

durch die Wirkung der Sonne am Orte eines Planeten nur sehr wenig geändert wird; d. h. die Potentiale g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} unterscheiden sich von 1 nur um kleine Größen erster Ordnung, die Potentiale g_{23}, g_{31} .... sind selbst kleine Größen erster Ordnung. Schreibt man dann die Differentialgleichungen bis auf Glieder erster Ordnung hin, so erhält man durch Integration leicht das Gravitationsfeld in erster Näherung. Merkwürdig ist dabei, daß die g_{23}, g_{31} ... keineswegs als Null herauskommen, daß es also schon in erster Näherung mehr als ein Gravitationspotential gibt; Einstein hatte zuerst das Gegenteil vermutet und war auf Umwege und unrichtige Ansätze gedrängt worden, als er seine Vermutung nicht bestätigt fand. Trotz dieser verwickelten Darstellung des Feldes lauten die Differentialgleichungen der geodätischen Linie vollkommen ebenso wie die Newtonschen Bewegungsgleichungen; alle Potentiale außer g_{44} fallen heraus, und g_{44} spielt dann formal die Rolle des gewöhnlichen Gravitationspotentials.

Wenn man dieses Ergebnis als zu selbstverständlich ansieht, um es als Bestätigung der Theorie selbst gelten zu lassen, so gibt es doch andere Erscheinungen, die durch die neue Theorie schon in erster Näherung anders als gewöhnlich herauskommen und zur Prüfung dienen können. Erinnern wir uns der oben erläuterten Bedeutung des Linienelements, insbesondere zunächst des Falles, daß es zeitartig ist.

Wir sahen, daß sich eine Abhängigkeit des Ganges einer idealen Uhr vom Gravitationsfelde ergeben hat. Nun wird wohl niemand zögern, die schwingenden Atome oder Moleküle eines leuchtenden Gases als von der Natur selbst konstruierte ideale Uhren anzusehen. Die Periode des Lichtes ein und derselben Spektrallinie auf der Erde und auf der Sonne oder einem Fixsterne wird also, mit irdischen Uhren gemessen, verschieden sein; die genauere Rechnung ergibt eine Verschiebung der Spektrallinien nach Rot (bei der Sonne im Betrage $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-6}$).

Eine vollkommen zwingende Bestätigung dieser Folgerung der Theorie scheint noch nicht erbracht zu sein, doch ist bereits viel Material gesammelt, das zu ihren Gunsten spricht.

Die von der Theorie geforderte Krümmung der Lichtstrahlen könnte ebenfalls geprüft werden, wenn man das Licht eines Fixsterns be-

obachtet, das dicht an der Sonne oder einem Planeten vorbeistreicht; die Ablenkung betrüge bei der Sonne bestenfalles 1,7″. Zur Untersuchung dieser Frage war zur Zeit der totalen Sonnenfinsternis von 1914 eine Expedition unter E. Freundlich nach Südrußland geschickt worden; doch wurden ihre Bemühungen teils durch tückische Wolken, teils durch den Ausbruch des Weltkrieges vereitelt. Wenn es nicht gelingt, die Erscheinung an den großen Planeten zu untersuchen, wird man die nächste totale Sonnenfinsternis abwarten müssen.

Die Ausbeute dieser Effekte 1. Ordnung ist also gering; um so wichtiger ist es, daß es einen Effekt 2. Ordnung gibt, der von der Erfahrung voll bestätigt wird. Das ist die Perihelbewegung der Merkurbahn. Die Rechnungen der Astronomen haben nämlich ergeben, daß die Berücksichtigung der Störungen aller bekannten Planeten ein Fortschreiten des Perihels der Merkurbahn um 43″ in hundert Jahren unerklärt lassen.

Es sind viele Hypothesen ersonnen worden, um diesen Widerspruch gegen die Newtonsche Theorie aufzuheben, jedoch keine hat große Überzeugungskraft. Der Einsteinschen Theorie aber gelingt die Erklärung dieser Störung ohne weiteres. Hier sind ja die Newtonschen Bewegungsgleichungen nur eine erste Näherung, die zweite Näherung ergibt eine langsame Perihelbewegung der Planeten, und diese hat für den Merkur genau den richtigen Betrag.

Zum Abschlusse unseres kurzen Ganges durch die neue Lehre haben wir die wichtige Frage zu erledigen, welche Abänderungen an den Gesetzen der übrigen physikalischen Erscheinungen nötig sind, damit die allgemeine Relativität gewahrt bleibt. Man gelangt zu diesen Änderungen in der einfachsten Weise, indem man die Gleichungen von den gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten auf beliebige krummlinige transformiert; dabei treten die Koeffizienten g_{ik} des Linienelements zunächst als gewisse Differentialausdrücke der Transformationsfunktionen auf. Läßt man dann in den neuen Gleichungen diese Bedeutung der g_{ik} beiseite und identifiziert sie mit den Gravitationspotentialen, die durch die Einsteinschen Differentialgleichungen bestimmt sind, so erhält man die gesuchten modifizierten Gesetze, die gegenüber beliebigen Transformationen invariant sind. Einstein hat diese Betrachtungen für die hydrodynamischen und die elektromagnetischen Grundgleichungen durchgeführt. Im Prinzipe werden alle diese Erscheinungen vom Schwerefelde abhängig, doch hat sich noch kein Fall finden lassen, wo die Abweichungen in den Bereich des Meßbaren fallen.

Mancher wird der Ansicht zuneigen, daß, wenn überhaupt von experimenteller Bestätigung der Theorie die Rede ist, es sich nur um „letzte Dezimalen“ handeln kann, zu deren Erklärung keine alles Bestehende umstürzende Theorie nötig sein sollte. Ich habe mich bemüht zu zeigen, daß der Fortschritt der Einsteinschen Lehre nicht so sehr in den numerischen Folgerungen, als in der Großartigkeit des inneren Aufbaues zu suchen ist. Wie weit man das anerkennen will, ist natürlich bis zu gewissem Grade Sache des Geschmackes und wissenschaftlichen Taktes. Jedenfalls wird eine Klasse von Widersachern ausfallen, die sich beim Auftreten des engeren Relativitätsprinzips hervortaten, nämlich die, denen die mathematische Form der neuen Theorie denn doch zu schwierig ist. Die andern aber, die darin festen Fuß fassen, werden großen Genuß daraus schöpfen und einen weiten Ausblick auf neue Fortschritte in der Erkenntnis des Wesens der Materie gewinnen. Denn es scheint nicht ausgeschlossen, daß die Einsteinschen Gesetze der Gravitation nicht nur die Bewegungen der Himmelskörper, sondern auch die Vorgänge im Elektron, Atom und Molekül im tiefsten Grunde beherrschen.

Literatur.

1) Albert Einstein, Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Ann. d. Phys. (4), **35**, 898, 1911.

2) Albert Einstein, Physikalische Grundlagen einer Gravitationstheorie; Marcel Großmann, Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie; Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrgang LVIII (1913).

3) Albert Einstein und Marcel Großmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von A. Einstein, II. Mathematischer Teil von M. Großmann. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913. Abgedruckt in der Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 225—261, 1913.

4) Albert Einstein und Marcel Großmann, Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik **63**, 215—225, 1914.

5) Albert Einstein, Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der kgl. preuß. Akad. d. Wiss. 29. Okt. 1914, Heft XLI, S. 1030 bis 1085.

6) Albert Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wiss. 11. Nov. 1914, Heft XLIV, XLVI, S. 778—801.

7) Albert Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wiss. 18. Nov. 1915, Heft XLVII, S. 831—839.

8) Albert Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 25. Nov. 1915, Heft XLVII, S. 844—847.

(Eingegangen 13. Februar 1916.)



BESPRECHUNGEN.

Das Erdöl. Seine Physik, Chemie, Geologie, Technologie und sein Wirtschaftsbetrieb in 5 Bänden. Herausgegeben von C. Engler u. H. v. Höfer. IV. Band. Die Prüfung und Verwendung des Erdöls, des Erdgases und der Erdölprodukte. Redigiert von C. Engler. Unter Mitwirkung von E. Czakó, G. Meyerheim, F. Nallinger, K. Pfeiffer, A. Freiherr von Schmidt, E. Terres und L. Ubbelohde bearbeitet von D. Holde, C. Koettnitz, L. Singer, St. Goulischambaroff und S. Aisinman. gr. 8⁰. XVI u. 775 S. mit 368 Abbildungen. Leipzig, S. Hirzel. 1916. Geheftet M. 36.—, gebunden M. 40.—

Der erste Teil des vorliegenden Bandes enthält die technische Analyse des Erdöls und der Erdölprodukte, und zwar werden in einzelnen Kapiteln der Reihe nach rohes Erdöl, Benzin, Leuchtpetroleum, Putzöl, Gasöle, Treiböle, Heizöle, Transformatorenöle, Fußbodenöle, Schmieröle, Maschinen- und Wagenfette, Bohr-, Fräs- und Textilöle, Paraffin, Vaseline, Goudron und Asphalt, Abfälle der Erdölverarbeitung und Erdgase behandelt. Bei jedem einzelnen dieser Produkte werden die physikalischen und chemischen Eigenschaften und die Methoden zu ihrer Ermittlung, die Gütebestimmung und der Nachweis schädlicher Beimischungen angeführt. Der zweite Teil befaßt sich mit der Verwendung des Erdgases, Erdöls und der Erdölprodukte, welche diese, in erster Linie als Heizmaterial, als Betriebskraft für Explosionsmotoren und als Schmiermittel finden. Schon diese kurze Inhaltsangabe zeigt, daß auch für Physiker der reiche Inhalt dieses Bandes viel Wissenswertes bringt. Fast könnte man sagen, daß er das zusammenfaßt, was einen Physiker von der Technologie des Erdöls interessiert. Daher bildet dieses Werk eine wertvolle Ergänzung jeder physikalischen Bibliothek. Als Beispiele hierfür mögen besonders die Kapitel über Transformatorenöle und Schmieröle angeführt werden. Wie oft haben viele experimentell arbeitenden Physiker schon vergeblich in den gebräuchlichen Handbüchern der chemischen Technologie Aufschluß über Schmier- und Isolieröle gesucht, die für ihre besonderen Zwecke am geeignetsten wären! Hier fänden sie das Gesuchte. Auch in den anderen Kapiteln, so besonders in den über Erdgas und Erdölfeuerung wird der Physiker neue Anregungen erhalten, denn sie sind eine mit wissenschaftlicher Gründlichkeit und Sachkenntnis geschriebene Zusammenstellung, die es in der deutschen Literatur meines Wissens bisher nicht gab. Nicht minder wertvoll ist der in knapper Form abgefaßte, inhaltsreiche Abschnitt über die Theorie der Verbrennung explosiver Gasmischungen in Motoren. Nur die Kapitel rein physikalischen und technischen Inhalts über Licht- und Wärmestrahlung und über Diesel- und Benzinmotoren sind, der Natur des Werkes entsprechend, so kurz gehalten, daß sie Physikern und Technikern kaum Neues bringen können. Wenn in andern Abschnitten Wiederholungen nicht vermieden werden, so ist dies wohl kein Fehler, sondern erhöht die Verwendbarkeit des Handbuches, das weniger zur Lektüre als zum Nachschlagen bestimmt ist, und bei dem es daher angenehm ist, in den einzelnen Abschnitten das Zusammengehörige immer wieder beieinander zu finden. Es ist das besondere Verdienst des Herausgebers, daß er für jedes einzelne Kapitel einen Fachmann heranzuziehen wußte, dessen wertvolle, im praktischen Betriebe gewonnenen Kenntnisse so der Allgemeinheit nutzbar gemacht werden konnten. Im übrigen kann auf die Besprechungen des ersten Bandes (diese Zeitschrift **14**, 215, 1913 und **15**, 64, 1914) verwiesen werden. Wohl niemals mehr als in diesen Kriegsjahren hat man die ungeheure Bedeutung des Erdöls für unser gesamtes Wirtschaftsleben ermessen. Ihr wird dieses große Werk gerecht, das nun bis auf den letzten Band vollständig vorliegt. Daß es auch unter den heutigen, schweren Zeitverhältnissen in dieser Weise weitergeführt und abgeschlossen werden konnte, darauf können Herausgeber und Verleger stolz sein.

Riesenfeld.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Direktor der Abteilung für mathematische Physik der Universität Göttingen Professor Dr. Peter Debye zum Leiter des gesamten physikalischen Instituts derselben Universität, mit dem Lehrauftrag der Experimentalphysik für Physiker und Mathematiker, der Privatdozent an der Universität Berlin Professor Dr. Otto Diels zum ord. Professor der allgemeinen und Experimentalchemie an der Universität Kiel (Prof. Wilh. Traube — vgl. No. 3 — hat abgelehnt).

Berufen: Der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Robert Pohl zum a. o. Professor an der Universität Göttingen, mit dem Lehrauftrag der Experimentalphysik für Mediziner und Chemiker.

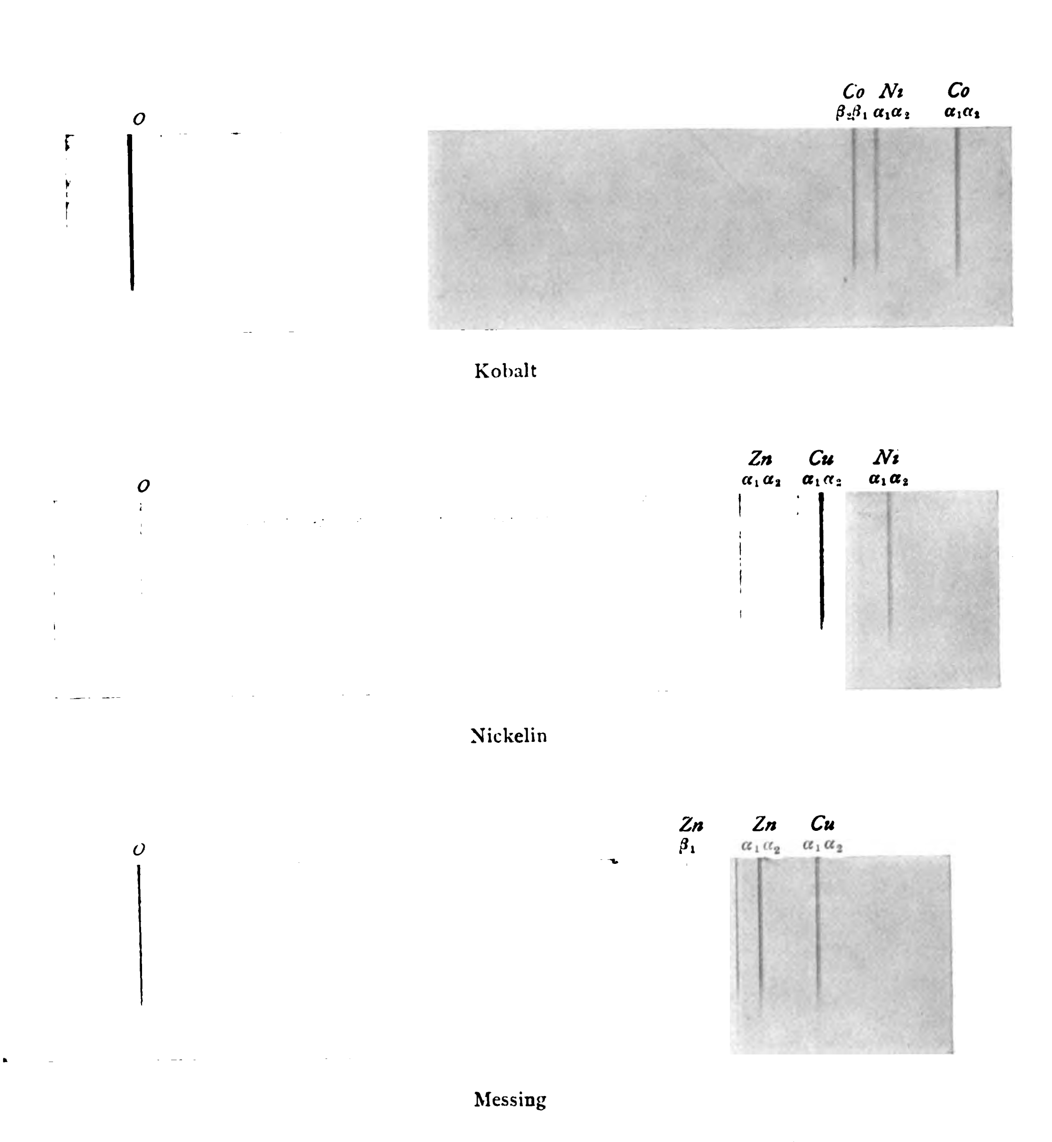
Verliehen: Dem ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Friedrich Emich, dem ord. Professor der chemischen Technologie organischer Stoffe an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Georg v. Georgievics und dem ord. Professor für allgemeine und analytische Chemie an der Montanistischen Hochschule Přibram Dr. August Harpf der Titel Hofrat, dem Privatdozenten der Physik an der Universität Leipzig Dr. George Jaffé der Titel Professor.

Preise: Dem Professor der Physik an der Universität Kopenhagen Dr. Martin Knudsen die goldene H. C. Orsted-Medaille der Selskabet for Naturlärens Udbredelse mit dem damit verbundenen Geldpreis von 2000 Kr., Dr. Walther Bothe in Berlin-Charlottenburg der Preis der Dr. Elsa-Neumann-Stiftung im Betrage von 1000 M. für seine Arbeit „Beiträge zur Theorie der Brechung und Reflexion".

Gestorben: Der emer. Professor der Theorie und Geschichte der induktiven Wissenschaften an der Universität Wien Hofrat Dr. Ernst Mach in Haar bei München, der Physiker Dr. Pierre Chappuis-Sarasin in Basel, der Direktor des Observatoriums Aarhus Astronom Friedrich Krüger (nicht Georg Krüger, wie irrtümlich S. 28 angegeben), der Erfinder des Coalits Dr. Thomas Parker.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.





M. Siegbahn u. W. Stenström, Über die Hochfrequenzspektra (K-Reihe) der Elemente *Cr* bis *Ge*.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5/6. | 15. März 1916. Redaktionsschluß für No. 7 am 1. April 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Hochfrequenzspektra (L-Reihe) der Elemente Polonium, Radium, Thor und Uran.

Von Manne Siegbahn und Einar Friman.

In einer früheren Mitteilung[1]) wurde über eine vollständige Untersuchung der L-Reihen der Elemente Tantal bis Wismut berichtet. Es wurden hierbei wenigstens elf Liniengruppen festgestellt. Die Messungen sind jetzt mit Benutzung derselben Apparatur auf die Elemente Polonium, Radium, Thor und Uran erstreckt worden. Bei Polonium, das als elektrolytischer Niederschlag auf einem Kupferblech zur Untersuchung gelangte, wurden zwei von den charakteristischen Linien (α_1, β_1) nebst einer Zahl anderer Linien, die möglicherweise von Verunreinigungen herrühren, erhalten. Bei *Ra* konnte dagegen wegen der Kleinheit des zur Verfügung stehenden Bromsalzes (0,1 mg) nur eine sehr schwache α-Linie aufgenommen werden. *Th* und *U* gaben beide linienreiche Spektra.

Die Resultate der Messungen finden sich in den Tabellen 1—4.

Tabelle 1. Polonium.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
	12° 43′ 40″	1,240	0,898
$Pb^*\alpha_1$	12° 3′ 35″	1,176	0,922
	11° 45′ 35″	1,147	0,934
α_1	11° 21′ 35″	1,109	0,950
	10° 46′ 50″	1,053	0,975
	10° 41′	1,043	0,979
$Pb^*\beta_1$	10° 3′ 10″	0,982	1,009
	9° 48′ 50″	0,959	1,021
β_1	9° 24′ 45″	0,920	1,042
	9° 9′	0,895	1,057
	8° 56′ 45″	0,875	1,069
	8° 50′ 40″	0,865	1,075

*) Wahrscheinlich vom Bleispalte herrührend.

Tabelle 2. Radium.

Linie	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
α_1	10° 20′ 30″	1,010	0,995

Tabelle 3. Thorium.

Linie	Rel. Intens.	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
α_2	3	9° 54′ 50″	0,969	1,016
α_1	10	9° 47′ 25″	0,957	1,022
	2	8° 28′ 58″	0,830	1,098
β_2	6	8° 7′ 45″	0,797	1,121
β_1	8	7° 49′ 20″	0,766	1,143
β_3	2	7° 44′ 30″	0,758	1,149
γ_1	4	6° 40′ 30″	0,654	1,236
$\gamma_{2,3}$	1	6° 28′ 35″	0,635	1,255

Tabelle 4. Uran.

Linie	Rel. Intens.	φ	$\lambda \cdot 10^8$ cm	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$
α_2	3	9° 25′ 35″	0,922	1,042
α_1	10	9° 19′	0,911	1,048
	2	8° 1′ 40″	0,786	1,128
β_2	7	7° 43′ 15″	0,756	1,150
	2	7° 38′ 25″	0,748	1,156
	2	7° 23′ 45″	0,724	1,175
β_1	7	7° 20′ 50″	0,720	1,179
β_3	1	7° 14′ 50″	0,710	1,187
γ_1	4	6° 16′ 25″	0,615	1,275
	0	6° 11′ 25″	0,607	1,284
$\gamma_{2,3}$	0	6° 4′ 25″	0,596	1,296

1) Siegbahn und Friman, Ann. d. Phys. 1916.

Wenn man die Wurzeln aus $\frac{1}{\lambda}$ gegen die Ordnungszahlen für sämtliche untersuchte Elemente graphisch aufträgt, ergibt sich, daß die neuen α_2-, α_1- und β_2-Werte mit den alten genau in gerader Linie liegen, während die übrigen (β_1, β_3, γ_1, γ_2, γ_3) höher fallen. Es ist daher unzweifelhaft, daß die diese Gruppen darstellenden Kurven nach oben gekrümmt sind. —

Lund, Physikalisches Institut der Universität, 12. Februar 1916.

(Eingegangen 15. Februar 1916.)

Die statistisch-mechanische Grundlage der Thermodynamik.

Von Th. Wereide.

Die klassische Thermodynamik ruht auf dem folgenden Satze:

Ein beliebiges physikalisches System mit Energie u, das in einem Volumen v unter dem Drucke p und der Temperatur T eingeschlossen ist, hat eine charakteristische Funktion, die Entropie. Diese Funktion S ist durch die Gleichung

$$S = \int \frac{du + p\,dv}{T}$$

definiert, wo die Differentiale des Integrals sich auf Änderungen beziehen, die in der Nähe des Gleichgewichtszustandes verlaufen. Alle meßbaren Änderungen in dem System finden in solcher Weise statt, daß die Entropie dabei wächst. Wenn keine solchen Änderungen mehr stattfinden, hat die Entropie ihr Maximum erreicht.

In dem Folgenden soll gezeigt werden, wie man den obigen thermodynamischen Satz auf statistisch-mechanischem Wege ableiten kann.

Die Grundlage dieser Theorie ist dieselbe wie bei Gibbs[1]) mit der Ausnahme eines einzigen Punktes. Wenn Gibbs die statistischen Eigenschaften eines Systems studieren will, betrachtet er eine große Zahl von Exemplaren desselben Systems in verschiedenen Zuständen. Diese Systeme bewegen sich unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit eines Zustandsgebietes wird definiert als der Bruchteil der Systeme, die sich in einem gegebenen Augenblick in dem Gebiete befinden.

Im Gegensatz hierzu werden wir in dem Folgenden nur ein einzelnes System betrachten; und als Wahrscheinlichkeit werden wir die von Einstein[1]) eingeführte Wahrscheinlichkeit nach der Zeit benutzen.

Während unsere Grundgleichungen dieselben sind wie bei Gibbs, so wird die weitere Ausbildung der Theorie, infolge des erwähnten Unterschiedes, von der Gibbsschen verschieden.

Bevor wir das Problem allgemein angreifen, sollen die Grundbegriffe durch ein einfaches Beispiel illustriert werden.

Es sei ein Würfel gegeben, in welchem sich ein einziges Gasmolekül hin- und herbewegt. Die Lage des Moleküls in einem gegebenen Augenblick ist bestimmt durch drei Koordinaten x, y und z. Untersuchen wir zuerst die Änderung der Koordinate x. Wir teilen die x-Kante des Würfels in eine Reihe gleich großer Teile dx. Dann denken wir uns, daß wir die Bewegung des Moleküls verfolgen können. Das Molekül läuft hin und her und in solcher Weise, daß es mit gewissen Zeitintervallen zu dem Gebiete dx zurückkehrt. Wenn die Koordinate x Werte hat, die dem Elementargebiete dx zugehören, so wollen wir dies dadurch ausdrücken, daß wir sagen: die Koordinate x ist in dem Elemente dx enthalten.

Es sei $\triangle\varrho_x$ die Zeit, die das Molekül braucht, um das Gebiet dx zu durchlaufen, und es sei ϱ die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Besuchen in demselben Gebiete. Wenn wir die x-Bewegung des Moleküls hinreichend lange beobachtet haben, fangen wir an, den Mittelwert zu bilden

$$\overline{\triangle\varrho_x} = \frac{1}{\nu}(\triangle\varrho_{x1} + \triangle\varrho_{x2} + \cdots + \triangle\varrho_{x\nu})$$

und

$$\overline{\varrho_x} = \frac{1}{\nu}(\varrho_{x1} + \varrho_{x2} + \cdots + \varrho_{x\nu}).$$

Nach jedem Besuche des Moleküls im Gebiete dx bilden wir einen neuen Mittelwert. Wir setzen voraus, daß diese Mittelwerte gegen einen hinreichend konstanten Wert konvergieren. Diesen Wert definieren wir als den Mittelwert von $\triangle\varrho_x$ und ϱ_x für die betrachtete Beobachtungszeit.

Für die Beobachtungszeit können wir dann sagen: Die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß die x-Koordinate sich im Gebiete dx befindet, ist

$$P_{dx} = \frac{\overline{\triangle\varrho_x}}{\overline{\varrho_x}}.$$

Wenn wir nun die x-Bewegung des Moleküls in einer Zeit verfolgen, die größer als die Beobachtungszeit ist, so können zwei Möglichkeiten eintreten:

---

1) Gibbs, Elementary Principles in Statistical Mechanics; siehe auch P. Debye, Ann. d. Phys. **33**, 441, 1910.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **11**, 172, 1903; **14**, 357, 1904.

1. Die Wahrscheinlichkeit P_{dx} bleibt für jedes Element dx konstant. In diesem Falle sagt man, daß **statistisches Gleichgewicht** eingetreten ist, d. h. das mittlere Verhalten des Moleküls bleibt immer dasselbe, unabhängig von der Zeit.

2. Die Wahrscheinlichkeit P_{dx}, die für die Beobachtungszeit konstant ist, kann sich mit der Zeit ändern. In diesem Falle ist statistisches Gleichgewicht nicht vorhanden, aber man kann trotzdem für eine relativ kurze Beobachtungszeit von einer Wahrscheinlichkeit P_{dx} sprechen.

Wenn wir in derselben Weise die y-Bewegung verfolgen, so finden wir die Wahrscheinlichkeit, daß das Molekül sich im Gebiete dy befindet, gleich

$$P_{dx} = \frac{\overline{\triangle \varrho_y}}{\bar{\varrho}_y},$$

wo $\bar{\varrho}_y$ das mittlere Zeitintervall zwischen zwei Besuchen in dem Gebiete dy ist und $\overline{\triangle \varrho_y}$ die mittlere Zeit, die das Molekül braucht, um das Gebiet dy zu durchlaufen.

Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit eines Gebietes $dx dy$, d. h. der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich zugleich x im Gebiete dx und y im Gebiete dy befindet. In dem vorliegenden Falle ist diese Wahrscheinlichkeit offenbar

$$P_{dx\,dy} = P_{dx} \cdot P_{dy}.$$

Man sagt in diesem Falle, daß die zwei Koordinaten voneinander **unabhängig** sind. Die Koordinaten haben je einen ganzen Freiheitsgrad.

Wenn wir nun weiter die z-Bewegung des Moleküls berücksichtigen, so finden wir die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Molekül sich in einem Raumelement $d\tau = dx dy dz$ befindet, gleich

$$P_{d\tau} = P_{dx} \cdot P_{dy} \cdot P_{dz}.$$

Nun ist aber der Zustand des Moleküls nicht vollständig bestimmt durch die Lage allein. Wir müssen auch die Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ in Betracht ziehen. Wenn wir nun diese Koordinaten in eben derselben Weise wie die anderen behandeln, so finden wir für die Wahrscheinlichkeit, daß zugleich

x im Gebiete dx
y „ „ dy
z „ „ dz
$\dot{x}$ „ „ $d\dot{x}$
$\dot{y}$ „ „ $d\dot{y}$
$\dot{z}$ „ „ $d\dot{z}$

ist, den Ausdruck

$$P_{d\tau} = P_{dx} P_{dy} P_{dz} P_{d\dot{x}} P_{d\dot{y}} P_{d\dot{z}}.$$

Dies ist also die mathematische Wahrscheinlichkeit des Gebietes

$$d\tau = dx\, dy\, dz\, d\dot{x}\, d\dot{y}\, d\dot{z}.$$

Ganz wie die Gebiete dx, dy, dz ein dreidimensionales Raumelement definieren, so definieren die Gebiete dx, dy, dz, $d\dot{x}$, $d\dot{y}$, $d\dot{z}$ ein sechsdimensionales Raumelement.

Die Koordinaten x, y, z definieren einen Punkt in dem dreidimensionalen x-y-z-Raum. Ebenso definieren die Koordinaten x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ einen Punkt in dem sechsdimensionalen x-y-z-$\dot{x}$-$\dot{y}$-$\dot{z}$-Raum. $P_{d\tau}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustand des Moleküls — d. h. der Punkt — sich in dem Element $d\tau$ befindet.

Wir greifen nun das Problem generell an. Es sei irgendein System gegeben, dessen Zustand bestimmt ist durch die unabhängigen Variabeln

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

und dessen Zeit derivierte

$$\dot{p}_1 \dot{p}_2 \cdots \dot{p}_n.$$

Für ein solches System kann man anstatt der Koordinaten $\dot{p}$ einige damit proportionnle Koordinaten q benutzen. Die Koordinate q ist definiert durch

$$q = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}}$$

wo T die von $\dot{p}$ abhängende Energie des Systems ist. Der Zustand des Systems in einem gegebenen Augenblicke ist also bestimmt durch die Werte der Koordinaten

$$p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_n.$$

Um die Vorstellungen zu erleichtern, denken wir uns einen Raum, der ebensoviele Dimensionen hat als das System unabhängige Koordinaten, also $2n$-Dimensionen. In diesem Raume denken wir uns $2n$-Achsen von demselben Punkte senkrecht zueinander gezeichnet. Auf jeder Achse wird der augenblickliche Wert der zugehörigen Koordinate abgetragen. Die augenblicklichen Werte der einzelnen Koordinaten definieren zusammen einen Punkt in dem $2n$-dimensionalen Raume, und die Zustandsänderung des Systems wird illustriert durch die Kurve, die der Punkt beschreibt.

Mittels Ebenen, die durch die Teilungspunkte der einzelnen Achsen gehen und die auf den zugehörigen Achsen senkrecht stehen, wird der $2n$-dimensionale Raum in eine Reihe von $2n$-dimensionalen Elementarzellen geteilt — alle von derselben Größe.

Wir machen die folgenden Ansätze:

I. Jedes Gebiet einer einzelnen Koordinate hat eine bestimmte mathematische Wahr-



scheinlichkeit, die sich längs der Koordinatenachse ändern kann, aber in kontinuierlicher Weise.

II. Diese Wahrscheinlichkeiten sollen sich nicht zu schnell mit der Zeit ändern.

Die letzte Voraussetzung spricht aus, daß das System nicht zu weit von dem Gleichgewichtszustande entfernt sein darf.

Es sei P_{dp_1} die Wahrscheinlichkeit des Gebietes dp_1, P_{dp_2} die des Gebietes dp_2 usw., und es sei $P_{d\tau}$ die Wahrscheinlichkeit des Gebietes

$$d\tau = dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n.$$

Da die Koordinaten voneinander unabhängig sind[1]), so muß diese Wahrscheinlichkeit — infolge des früher Gesagten — die Form haben

$$P_{d\tau} = P_{dp_1} P_{dp_2} \cdots P_{dq_n}.$$

Es sei t die Zeit, welche notwendig ist, um die eventuelle Wahrscheinlichkeit $P_{d\tau}$ zu bestimmen. Wenn die Wahrscheinlichkeiten P_{dp_1}, P_{dp_2} usw. sich so langsam ändern, daß sie in der Zeit t als konstant betrachtet werden können, so folgt, daß die Wahrscheinlichkeit $P_{d\tau}$ einen bestimmten Wert haben muß. Das System verhält sich quasi-periodisch, es kehrt so oft zu dem Elemente zurück, daß man von einer Wahrscheinlichkeit dieses Elementes sprechen kann.

Wir wollen nun diese Wahrscheinlichkeit berechnen. Das System befinde sich in einem Punkt an der Grenze des Elementes. Es geht durch das Element und braucht hierzu die Zeit $\triangle\varrho_1$. Danach geht es durch $W_1 - 1$ andere Elemente, bevor es zum ersten zurückkommt, und braucht zu diesem Kreislauf die Zeit ϱ_1. Dieser Kreislauf wiederholt sich nun fortlaufend. Zu dem zweiten Kreislauf braucht das System ϱ_2 Sek., darunter $\triangle\varrho_2$ in dem betrachteten Elemente und die Anzahl der Elemente, die es durchläuft, ist W_2. Wenn das System eine hinreichend große Zahl von solchen Kreisläufen zurückgelegt hat, fangen wir an, die folgenden Mittelwerte zu bilden:

$$\overline{\varrho_\nu} = \frac{1}{\nu}(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu)$$

$$\overline{\triangle\varrho_\nu} = \frac{1}{\nu}(\triangle\varrho_1 + \triangle\varrho_2 + \cdots + \triangle\varrho_\nu)$$

und

$$\overline{W_\nu} = \frac{1}{\nu}(W_1 + W_2 + \cdots + W_\nu).$$

Für die Zeit, welche notwendig ist, um diese relativ konstanten Mittelwerte zu bilden, können wir dann sagen: die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System sich in dem Elemente $d\tau$ befindet, ist

$$P = \frac{\triangle\varrho}{\varrho},$$

wo $\triangle\varrho$ und ϱ die gefundenen Mittelwerte sind. Über die Größe von $d\tau$ ist vorläufig nichts vorausgesetzt. Wir werden später die Frage nach seiner Größe näher diskutieren. Die obige Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$P = D\,d\tau$$

wo

$$D = \frac{\triangle\varrho}{\varrho\, d\tau}.$$

Die Konstante D ist die Fundamentalgröße der Statistik. Wir können sie die Wahrscheinlichkeitsdichte nennen, weil sie — wie man sieht — die Wahrscheinlichkeit pro Volumeinheit angibt.

Das Problem der Statistik ist nun, diese Wahrscheinlichkeitsdichte D als Funktion der Koordinaten zu berechnen.

Wir verfolgen die Bewegung des Systems durch eine Zeit, die größer ist als die, welche notwendig war, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Zwei Möglichkeiten liegen dann vor

1. Die Wahrscheinlichkeitsdichte D bleibt konstant,

2. sie ändert sich.

Im ersten Falle ist das System in statistischem Gleichgewicht, d. h. die verschiedenen Mittelwerte des Systems bleiben konstant unabhängig von der Zeit.

Wir werden zuerst den zweiten Fall betrachten, daß D sich ändert.

Da die Summe aller mathematischen Wahrscheinlichkeiten immer gleich 1 sein muß, so ist

$$\int D\,d\tau = 1,$$

wo die Integration über den ganzen Zustandsraum zu unternehmen ist.

Da überdies D eine skalare, kontinuierliche Größe ist, die nur von den Koordinaten und der Zeit abhängt, können wir auf D die Kontinuitätsgleichung anwenden.

Wenn z. B. D eine materielle Dichte wäre, so hätte die Kontinuitätsgleichung die Form

$$-\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D\dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z}(D\dot{z}),$$

welche Gleichung ausspricht: Die Verminderung der Dichte pro Sekunde ist gleich dem, was in einer Sekunde aus der Volumeneinheit herausströmt.

Ganz analog hat für die Wahrscheinlichkeits-

1) In einigen Fällen hängt der Mittelwert einer Koordinate p von dem Mittelwert der zugehörigen Koordinate q ab. Die Zahl der unabhängigen Koordinaten wird dann nur n und ebenso die Zahl der Faktoren in $d\tau$. Man hat sich dann zwei und zwei der obigen Koordinaten und Elemente zu einem einzigen vereint zu denken.

dichte in dem $2n$-dimensionalen Raume die Kontinuitätsgleichung die Form

$$-\frac{\partial D}{\partial t} = \sum \frac{\partial}{\partial p}(D\dot{p}) + \sum \frac{\partial}{\partial q}(D\dot{q})$$

oder

$$\frac{\partial D}{\partial t} dt + \sum \left[\frac{\partial D}{\partial p} dp + \frac{\partial D}{dq} dq\right] =$$

$$-\sum D\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right) dt.$$

Dieses Resultat ist rein statistisch. Bisher ist das System keinen speziellen physikalischen Bedingungen unterworfen worden. Wir wollen nun die Bedingung einführen, daß das System sich nach den Gesetzen der Mechanik bewegen soll.

Wenn das System isoliert ist, d. h. sich selbst ganz überlassen, so ist die Totalenergie u des Systems konstant. Dann können die Gesetze der Mechanik in der Hamiltonschen Form geschrieben werden:

$$\dot{p} = \frac{\partial u}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = -\frac{\partial u}{\partial p},$$

die auch für die Mittelwerte der $\dot{p}$ und $\dot{q}$ gelten müssen. Führen wir diese Gleichungen in die obige ein, wird die rechte Seite gleich Null und wir haben:

$$\frac{\partial D}{\partial t} dt + \sum \left[\frac{\partial D}{\partial p} dp + \frac{\partial D}{\partial q} dq\right] = 0. \quad (1)$$

Das erste Glied hat die Form eines lokalen Differentials von D und das zweite Glied hat die Form eines stationären Differentials von D. Infolge der Voraussetzung II ist das lokale Differential gleich Null für eine Beobachtungszeit. Folglich muß auch das stationäre Differential gleich Null sein. Dies bedeutet, daß sich das System während eines Kreislaufes in jedem der W-Elemente durchschnittlich gleich lange aufhält, nämlich die Zeit $\triangle\varrho$. Also wird die Zeit des Kreislaufes $\varrho = W\triangle\varrho$, das gibt

$$D = \frac{1}{W\,d\tau}. \quad (2)$$

Diese Gleichung ermöglicht es nun, etwas über die Änderung von D auszusprechen. W bedeutet die Anzahl der mikroskopischen Zustände oder Elemente $d\tau$, die das System durchläuft. Je verwickelter die mikroskopischen Vorgänge sind, desto größer ist W. Wir können, streng genommen, nichts darüber aussprechen, in welcher Weise sich W ändert. Aber wir müssen es — in Übereinstimmung mit Boltzmann — als wahrscheinlich ansehen, daß die Änderung in der Weise vor sich geht, daß die mikroskopischen Vorgänge immer verwickelter werden. Unter dieser Voraussetzung muß W immer wachsen, und die Wahrscheinlichkeitsdichte D folglich immer abnehmen.

Wenn das absolute statistische Gleichgewicht erreicht ist, hat W sein Maximum und D sein Minimum erreicht.

Die Gleichgewichtsbedingung ist also

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0,$$

d. h. nach (1)

$$\sum \left(\frac{\partial D}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial D}{\partial q}\dot{q}\right) = 0.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß Koordinaten mit verschiedenem Index voneinander unabhängig sind, und wenn wir Hamiltons Gleichungen einführen, läßt sich die Bedingungsgleichung leicht auf die Form bringen

$$\left(\frac{\partial D}{\partial u}\right)_q = \left(\frac{\partial D}{\partial u}\right)_p,$$

woraus folgt: die Wahrscheinlichkeitsdichte hängt von den Koordinaten p und q nicht direkt ab, sondern nur von der Energie des Systems

$$D = f(u).$$

Um nun weiter diese Funktion zu finden, gehen wir in der folgenden Weise vor:

Wir teilen die Koordinaten des Systems in zwei Gruppen[1]). Mittels spezieller Einrichtungen, z. B. Scheidewänden, werden die Variationen der Koordinaten so begrenzt, daß jede Koordinatengruppe sich immer in ihrem eigenen Variationsgebiet bewegt. Die Energie, die von der ersten Koordinatengruppe repräsentiert wird, sei u_1, die andere u_2.

Das Element $d\tau$ kann geschrieben werden als das Produkt zweier kleinerer Elemente $d\tau_1$ und $d\tau_2$

$$d\tau = d\tau_1\, d\tau_2,$$

wo $d\tau_1$ in dem Variationsgebiet der ersten Koordinatengruppe liegt und $d\tau_2$ im Gebiet der zweiten Koordinatengruppe.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Elementes $d\tau$ ist

$$D = f(u) \quad \text{d. h.} \quad u = \varphi(D)$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte des Elementes $d\tau_1$ ist

$$D_1 = f_1(u_1) \quad \text{d. h.} \quad u_1 = \varphi_1(D_1)$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte des zweiten Elementes $d\tau_2$ ist

$$D_2 = f_2(u_2) \quad \text{d. h.} \quad u_2 = \varphi_2(D_2).$$

Nun ist

$$u = u_1 + u_2$$

1) Wie aus dem Folgenden hervorgeht, ist es hinreichend, daß diese Teilung für ein einziges System möglich ist.

und

$$D = D_1 D_2$$

und diese Gleichungen geben

$$\varphi(D_1 D_2) = \varphi_1(D_1) + \varphi_2(D_2).$$

Wir denken uns nun, daß u_1 eine kleine Änderung erleidet, aber doch in solcher Weise, daß die zwei Systeme fortwährend im Gleichgewicht bleiben. Diese Änderung wird mathematisch ausgesprochen durch eine Differentation der Gleichung nach D_1. Die Gleichung gibt dann

$$D_2 \varphi'(D_1 D_2) = \varphi_1'(D_1).$$

Danach lassen wir ebenso u_2 eine kleine Änderung erfahren, das entspricht also einer Differentation der Gleichung nach D_2. Dies gibt

$$D_1 D_2 \varphi''(D_1 D_2) + \varphi'(D_1 D_2) = 0$$

d. h.

$$D \varphi''(D) + \varphi'(D) = 0$$ [1].

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$D = e^{au + b},$$

wo a und b zwei Konstanten sind. Hierbei ist nun das Folgende zu bemerken. Die Konstanten a und b sind unabhängig von u. Dies gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß die Temperatur konstant geblieben ist, denn sonst wäre kein Gleichgewicht vorhanden. Die Konstanten a und b sind also unabhängig von u, wenn die Temperatur konstant bleibt; sonst können sie Funktionen von u sein.

Über die relative Größe der Elemente $d\tau_1$ und $d\tau_2$ ist nichts vorausgesetzt worden. Daraus müssen wir schließen, daß die gefundene Funktion gültig ist, selbst wenn keine Teilung des Gebietes $d\tau$ vorgenommen wurde.

Also kann die Wahrscheinlichkeitsdichte in einem System geschrieben werden

$$D_1 = e^{a_1 u_1 + b_1}$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte in einem anderen System ist

$$D_2 = e^{a_2 u_2 + b_2}.$$

Bringen wir nun diese zwei Systeme miteinander in Kontakt, so wird die Wahrscheinlichkeitsdichte des Doppelsystems gleich

$$D = D_1 D_2 = e^{a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 + b_2}.$$

Aber wenn das ganze System im Gleichgewicht ist, so muß D die Form haben

$$D = e^{a(u_1 + u_2) + b}.$$

Diese zwei Gleichungen können nebeneinander nur dann bestehen, wenn

$$a = a_1 = a_2$$

d. h., wenn zwei willkürliche Systeme miteinander im Gleichgewicht sind, so muß der Koeffizient a in beiden Systemen denselben Wert haben. Dies kann mit anderen Worten so ausgesprochen werden: Der Koeffizient a hängt nur von der Temperatur ab.

Von der Konstante b wissen wir, daß, wenn die Temperatur konstant bleibt, sie nicht von u abhängt. Dann kann b nur von den Koordinaten p abhängen, denn diese können sich in gewissen Fällen ändern, ohne daß die Energie geändert wird. Die Konstante b wird dann, in den in Betracht kommenden Fällen, nur von den Grenzen des Variationsgebietes der Koordinaten p abhängen. Das ganze Variationsgebiet, innerhalb dessen die Koordinaten p sich frei bewegen können, ohne die Energie des Systems zu ändern, wollen wir den freien Raum oder das freie Volumen des Systems nennen. Die Konstante b hängt also nur von dem freien Volumen ab.

Wir werden nun a bestimmen.

Da a denselben Wert für alle Systeme der nämlichen Temperatur hat, so können wir ein ganz beliebiges System zur Bestimmung von a wählen. Wir wählen das leichtest mögliche, ein ideales einatomiges Gas. Nach der kinetischen Gastheorie gilt für ein solches System

$$u = \frac{3}{2} \nu k T = \frac{3}{2} \nu m \overline{\dot{x}^2} = \frac{3}{2} \nu m (\overline{\dot{x}})^2 \frac{3\pi}{8}.$$

Hier bedeutet

ν die Zahl der Moleküle,
k die Gaskonstante pro Molekül,
m die Masse eines Moleküls,
T die absolute Temperatur.

Nun ändern wir $\overline{\dot{x}}$ um einen solchen Betrag, daß auch u eine merkbare Änderung erfährt. Wenn $\overline{\dot{x}}$ in einem gewissen Verhältnis geändert wird, so wird $\overline{q}$ in demselben Verhältnis geändert. Dann muß sich die Wahrscheinlichkeit, daß eine variable Koordinate q in ein bestimmtes Element dq fällt, in dem umgekehrten Verhältnis geändert haben. Nun enthält das Element $d\tau$ als Faktoren 3ν Elemente dq. Folglich hat sich die Wahrscheinlichkeit, daß alle Koordinaten q in das Element $d\tau$ fallen, geändert, und zwar in dem erwähnten umgekehrten Verhältnisse in der 3νten Potenz. Wenn wir alle Größen nach der Änderung mit einem Strich versehen, so haben wir also

$$\frac{P}{P'} = \frac{D}{D'} = \frac{e^{au}}{e^{a'u'}} = \left(\frac{\overline{q}'}{\overline{q}}\right)^{3\nu} = \left(\frac{u'}{u}\right)^{\frac{3\nu}{2}}$$

woraus

$$au + \frac{3\nu}{2} \log u = a'u' + \frac{3\nu}{2} \log u' = \text{konstant}.$$

---

1) Vgl. Plancks Ausführung: Wenn die Entropie S eine Funktion von w ist, so gilt

$$W S''(W) + S'(W) = 0.$$

(Vorl. über die Theorie der Wärmestrahlung S. 117.)

Durch Differentiation der Gleichung erhalten wir

$$d(au) = -\frac{3\nu}{2}\frac{du}{u} = -\frac{du}{kT}$$

d. h.

$$au = -\int^{T}\frac{du}{kT},$$

wo wir vorläufig die untere Grenze unbestimmt lassen.

In ganz analoger Weise kann nun die Größe b bestimmt werden. Wir halten die Energie und die Temperatur konstant und ändern das freie Volumen des Systems. Durch ganz dieselbe Methode wie früher finden wir dann

$$b = -\int^{v}\frac{\nu dv}{v}.$$

Also haben wir

$$D = e^{-\int^{T}\frac{du}{kT} - \int^{v}\frac{\nu}{v}dv}.$$

Dieses Resultat ist richtig unter der Voraussetzung, daß das System sich in Übereinstimmung mit Hamiltons Gleichungen bewegt und ein freies Volumen hat. Ein solches System ist ein ideales Gas. Es sei D' die Wahrscheinlichkeitsdichte und u' die Energie eines idealen Gases, dessen Molekülzahl ν' ist und dessen Volumen v'. Es sei weiter D die Wahrscheinlichkeitsdichte und u die Energie eines ganz beliebigen Systems, das nicht den Hamiltonschen Gleichungen zu folgen braucht, und es sei v sein Volumen, das nicht frei zu sein braucht. Das einzige, was wir von dem System voraussetzen müssen, ist, daß es fähig ist, mit dem idealen Gase im Gleichgewicht zu sein.

Bringen wir also unser System mit dem Gase in Kontakt und betrachten wir die zwei Systeme als ein einziges, so ist für dieses System die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$D'' = DD' = De^{-\int^{T}\frac{du'}{kT} - \int^{v}\frac{\nu'}{v'}dv'}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist nun

$$dD'' = 0,$$

das gibt

$$d\log D = \frac{du'}{kT} + \frac{\nu'}{v'}dv'$$

$$= -\frac{du}{kT} - \frac{\nu'}{v'}dv.$$

Es gilt also für ein ganz beliebiges System

$$D = e^{-\int^{T}\frac{du}{kT} - \int^{v}\frac{\nu'}{v'}dv}.$$

Wenn das System ein freies Volumen hat, bezieht sich der Faktor $\frac{\nu'}{v'}$ auf das System selbst; sonst bezieht er sich immer auf ein Gas, das mit dem System im Gleichgewicht steht.

Dieses Resultat ist nicht ganz neu. Maxwell und Boltzmann haben für ein ideales Gas eine Formel gefunden, die in der folgenden Weise geschrieben werden kann

$$D = Ae^{-\frac{u}{kT}},$$

wo A eine Konstante ist. Später haben Gibbs[1]) und unabhängig von ihm Einstein[2]) und Jeans[3]) analoge Formeln abgeleitet. Man hat dieser Formel allgemeine Gültigkeit zugeschrieben, und sie bildet die Basis der klassischen Statistik.

Es ist aber hierbei zu bemerken, daß man sehr leicht von der ersten Formel zu der letzten gelangen kann, aber nicht umgekehrt.

Die Überbrückung zu der klassischen Entropie folgt nun sehr einfach.

Bilden wir die Funktion

$$S = k\log\frac{1}{D} = \int\frac{du}{T} + \int\frac{\nu'}{v'}k\,dv$$

und führen wir hier den Druck des Gases

$$p = \frac{\nu'}{v'}kT$$

ein, so folgt

$$S = \int\frac{du + p\,dv}{T}.$$

Die Funktion S ist also mit der klassischen Entropie identisch. Als allgemeine Definition der Entropie haben wir dann die drei folgen- Formeln

$$S = k\log\frac{1}{D} = k\log(Wd\tau) = \int\frac{du + p\,dv}{T}.$$

Wenn man nun voraussetzt, daß diese Identifizierung richtig ist, so kann man fragen: welche Bedeutung hat nun ein solches Resultat?

Die Bedeutung liegt darin, daß der Entropiebegriff auf eine ganz konkrete Vorstellung zurückgeführt ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichte D ist nämlich eine ganz konkrete Größe, die wir uns vorstellen können. Da die Wahrscheinlichkeitsdichte D einen ganz bestimmten Wert hat, so muß auch S einen bestimmten endlichen Wert haben. Dies ist nun eben, was das Nernstsche Theorem ausspricht, und es läßt sich leicht zeigen, daß Nernsts Theorem mit

1) Loc. cit.
2) Loc. cit.
3) Jeans, The dynamical theory of Gases, S. 59.

der obigen Entropiedefinition in Übereinstimmung steht.

Vergleichen wir nun die obige Definition mit der Definition nach Boltzmann und Planck.

Für ein ideales Gas hat Boltzmann die folgende Formel gefunden

$$S = \log W + C,\ C = \text{Konstante}.$$

Boltzmann nennt W die Wahrscheinlichkeit des Systems. Es läßt sich zeigen, daß Boltzmanns W mit dem obigen W identisch ist. Die obige Definition ist also mit Boltzmanns Definition in Übereinstimmung mit Ausnahme der Konstante k.

Planck hat Boltzmanns Formel erweitert, indem er als Definition der Entropie die Formel annimmt

$$S = k \log W,$$

welche Formel nicht nur für Gase, sondern auch für irgendein physikalisches System gelten soll.

Wenn man die Plancksche Definition annimmt, muß man folgendermaßen schließen:

Nach Nernst hat S und also auch W einen endlichen bestimmten Wert. Nun ist aber die Größe W abhängig von der Größe des Elementargebietes $d\tau$. Folglich muß auch $d\tau$ einen endlichen ganz bestimmten Wert haben.

Dies ist die Quantenhypothese in der allgemeinsten Form.

Nach der obigen Entropiedefinition dagegen scheint die Sache anders zu sein. Man wird das folgende ausführen: wenn $d\tau$ hinreichend klein ist, muß W und $d\tau$ einander umgekehrt proportional sein, so daß die Größe $W d\tau$ von $d\tau$ unabhängig ist. Folglich kann $d\tau$ beliebig klein gewählt werden ohne daß dies den geringsten Einfluß auf S hat.

Von einem rein mathematischen Standpunkte aus ist diese Ausführung richtig, physikalisch aber nicht. Das System kann nämlich solchen physikalischen Bedingungen unterworfen sein, daß $d\tau$ nicht willkürlich klein gewählt werden kann. Eine spezielle Untersuchung[1]) zeigt, daß dies eben der Fall ist. Wenn man nämlich die Existenz einer endlichen Nullpunktsenergie voraussetzt, so muß man $d\tau$ gleich Z_0 wählen, wo Z_0 der Nullpunktswert des Zustandsvolumens ist.

1) „Die statistisch-mechanische Grundlage der allgemeinen Quantentheorie" erscheint in einer der folgenden Nummern dieser Zeitschrift.

(Eingegangen 6. März 1916.)

Die Entropie materieller Systeme.

Von Th. Wereide.

Die Entropie eines physikalischen Systems kann ganz allgemein in der folgenden Weise berechnet werden:

Man vermindert die Entropie soviel wie möglich dadurch, daß man das Zustandsvolumen[1]) des Systems so klein wie möglich macht. Es sei das minimale Zustandsvolumen Z_0. Die Entropie in dem Minimalzustande ist dann nach der allgemeinen Entropiedefinition

$$S_0 = k \log Z_0.$$

Wenn man hierzu die stattgefundenen Entropieminderungen addiert, bekommt man den absoluten Wert der Entropie. Die Entropie besteht also aus zwei Teilen, einem variablen, meßbaren Teil und einer Konstante, die Minimalentropie S_0. Diese Konstante spielt aber für die gewöhnlichen Anwendungen der Entropie keine Rolle. Wir werden sie deshalb hier weglassen und als Entropie nur die variable und meßbare Entropie ansehen.

Nach der statistischen Mechanik[2]) kann die Entropie in der folgenden Form geschrieben werden

$$S = \int^{T} \frac{dU}{T} + k \int^{v} \frac{\nu_1}{v_1} dv = \int \frac{dU + p\,dv}{T}.$$

Hier bedeutet U die Energie des Systems, k die Gaskonstante pro Molekül, v das Volumen des Systems und $\frac{\nu_1}{v_1}$ die Molekülzahl pro Volumeneinheit in einem idealen Gase, das mit dem System in Gleichgewicht ist.

Für Molekularbewegungen, die ohne Änderung der Energie verlaufen, kann $\frac{\nu_1}{v_1}$ durch $\frac{\nu}{v}$ ersetzt werden, wo ν die Molekülzahl des Systems ist.

Wir bemerken, daß die Entropie infolge der obigen Definition in zwei Glieder gespaltet werden kann. Das erste Glied hängt nur von der Energie ab und kann als die Energie-Entropie bezeichnet werden. Das zweite Glied hängt nur von dem Volumen ab und kann die Volumen-Entropie genannt werden. Beide können zusammen in der obigen klassischen Form geschrieben werden. Um die Entropie nach der obigen Definition zu berechnen, suchen wir sie möglichst viel zu vermindern. Die Summe aller Verminderungen ist dann die gesuchte Entropie.

Die Entropieverminderung geschieht einerseits durch eine größtmögliche Abkühlung (Einschränkung des Variationsgebietes der q-Koordinate und der von der Energie abhängenden p-Koordinate). Andererseits geschieht sie durch eine Einschränkung der Bewegungsfreiheit der Moleküle (Verminderung des Variationsgebietes der von der Energie unabhängigen p-Koordi-

1) Vgl. die vorhergehende Abhandlung.

2) Loc. cit. oder „Statistical Theory of Energy and Matter". Kristiania, Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag.

nate). Im kondensierten Zustande sind die physikalischen Eigenschaften der Moleküle praktisch dieselben bei der absoluten Temperatur 1^0 wie bei dem absoluten Nullpunkt. Wir werden deshalb in dem Folgenden, wo es zweckmäßig ist, die Temperatur 1^0 als die praktisch erreichbare Minimaltemperatur ansehen.

Die Entropie eines homogenen festen Körpers.

Wenn wir den Körper zu der absoluten Temperatur $T = 1^0$ abkühlen, wird die Energieentropie praktisch soviel wie möglich vermindert. Da eine meßbare Einschränkung der Bewegungsfreiheit der Moleküle praktisch unmöglich ist, kann eine weitere Verminderung der Entropie nicht vorgenommen werden. Die Entropie des festen, homogenen Körpers wird also

$$S = \nu \int_1^T \frac{\sigma\, dT}{T},$$

wo ν die Zahl der Moleküle bedeutet und σ die spezifische Wärme pro Molekül.

Die Entropie einer homogenen Flüssigkeit.

Wir werden zuerst die Volumenentropie berechnen. Wie oben gesagt, kann man für Molekularbewegungen, die ohne Änderungen der Energie verlaufen, die Volumenentropie durch die Formel

$$k \int^v \frac{\nu}{v}\, dv$$

ausdrücken. Wir teilen das Volumen v der Flüssigkeit in eine Reihe kleinerer Volumina v_1, v_2, ... welche beziehungsweise ν_1, ν_2, ... Moleküle enthalten. Durch diese Einschränkung der Bewegungsfreiheit der Moleküle bekommt die Volumenentropie der Moleküle ν_1 eine Verminderung gleich

$$k\nu_1 \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v} = k\nu_1 \log \frac{v}{v_1},$$

wo v das totale Volumen ist. Eine analoge Verminderung entspricht auch den anderen Molekülgruppen, so daß die totale Verminderung wird

$$\Sigma k \nu_1 \log \frac{v}{v_1}.$$

Wir wollen diese Entropie die *innere Volumenentropie* nennen, weil sie auf einer inneren Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle beruht. Die größtmögliche Verminderung bekommen wir, wenn wir die Partialvolumina v_1 von der Größenordnung der Molekularvolumina ω_1 machen. Dann wird die Volumenentropie

$$\Sigma k \nu_1 \log \frac{v}{\omega_1}.$$

Die Energieentropie wird dann durch Abkühlung zu der Temperatur 1^0 vermindert, und diese Verminderung ist

$$\Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_1\, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \frac{\mu_1}{T_0},$$

wo σ_1 die spezifische Wärme pro Molekül bedeutet und μ_1 die molekulare Schmelzwärme bei der Schmelztemperatur T_0.

Durch diese Abkühlung wird das Flüssigkeitsvolumen v eine kleine Verminderung bekommen, welche eine kleine Verminderung der Volumenentropie zur Folge hat. Wir können aber dieser Verminderung dadurch Rechnung tragen, daß wir ω in der Formel der Volumenentropie auf die Temperatur 1^0 beziehen.

Als die Entropie der Flüssigkeit haben wir die Summe der zwei obigen Verminderungen anzusehen, also

$$S = \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_1 dT}{T} + \Sigma \nu_1 \frac{\mu_1}{T_0} + \Sigma k \nu_1 \log \frac{v}{v_1}.$$

Bei dieser Formel ist aber zu bemerken, daß das letzte Glied, die Volumenentropie, nicht gemessen werden kann. Ob sich nämlich die Moleküle von einem Orte zum anderen bewegen, oder ob diese Bewegung begrenzt wird, so ist diese Einschränkung mit keinen meßbaren physikalischen Änderungen verbunden, weil die Moleküle einander gleich sind. Wenn wir eine praktische Formel haben wollen, so müssen wir dies Glied der Volumenentropie weglassen, und wir bekommen dann als brauchbare Formel der Entropie

$$S = \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_1\, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \frac{\mu_1}{T_0}.$$

Die Entropie einer flüssigen Lösung.

Es seien die Zahlen der verschiedenen Moleküle der Lösung ν_1, ν_2, $\cdots$, und wir setzen voraus, daß sie sich alle in dem ganzen Volumen der Flüssigkeit bewegen können.

Untersuchen wir zunächst die Volumenentropie.

Die Moleküle ν_1 werden in einem Partialvolumen v_1 gesammelt, ebenso die Moleküle ν_2 in dem Partialvolumen v_2. Durch diese Einschränkung der Bewegungsfreiheit bekommt die Volumenentropie, ganz wie oben, eine Verminderung

$$\Sigma \nu_1 k \log \frac{v}{v_1}.$$

Diese Entropieverminderung ist meßbar, weil die Molekülgruppen verschieden sind. Eine weitere Zerteilung der Partialvolumina würde dagegen keine meßbare Entropieänderung geben, weil diese Volumina homogen sind.

Die Energieentropie wird offenbar dieselbe Form haben wie im vorigen Falle, und wir finden dann als Ausdruck für die meßbare Entropie der Lösung

$$S = \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_1 \, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \frac{\mu_1}{T_0} + \Sigma \nu_1 k \log \frac{v}{v_1}.$$

Die hier auftretende spezifische Wärme σ_1 und die Schmelzwärme μ_1 beziehen sich auf die Moleküle in gelöstem Zustande. Sie werden also von den entsprechenden Größen im homogenen Zustande gewöhnlich etwas verschieden sein.

Da

$$\frac{v}{v_1} = \frac{v}{\nu_1} \frac{\nu_1}{v} = \frac{1}{c_1 \omega_1} = \frac{1}{h_1 c \omega_1},$$

wo ω_1 das Molekularvolumen, c_1 die Konzentration, c die totale Molekülzahl pro Volumeneinheit und h_1 die numerische Konzentration bedeutet, kann die obige Formel auch in der folgenden Form geschrieben werden

$$S = \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_1 \, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \frac{\mu_1}{T_0} - \Sigma \nu_1 k \log c_1 \omega_1$$

$$= \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_1 \, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \frac{\mu_1}{T_0} - \Sigma \nu_1 k \log h_1 c \omega_1.$$

Die Entropie einer festen Lösung.

Wenn man eine flüssige Lösung gefrieren läßt, so ist die einzige dabei stattfindende meßbare Änderung eine Verminderung der Energieentropie. Hieraus folgt, daß die Entropie einer festen Lösung dieselbe Form haben muß wie die einer flüssigen Lösung.

Die Entropie eines Gasgemisches.

Die Entropie eines Gasgemisches kann in der Weise gefunden werden, daß man von einem passenden Körper bei der Temperatur $T = 1^0$ ausgeht und dann diese Substanz in ein Gasgemisch von der Temperatur T überführt.

Ein solcher Körper ist ein System von homogenen Körpern, welche die Molekülzahlen $\nu_1, \nu_2, \cdots$ und beziehungsweise die Volumina $v_1, v_2, \cdots$ haben. Einem solchen Körper muß nach dem obigen die Entropie Null zugeschrieben werden.

Der Druck auf den Körper wird so klein gemacht, daß er eben gleich dem Sättigungsdruck der Moleküle ν_1 wird. Durch Wärmezufuhr werden diese Moleküle verdampft, so daß sie das Volumen v_1 in Dampfform einnehmen. Danach wird das Volumen v_1 zu v vergrößert. Diese zwei Änderungen geben den Entropiezuwachs

$$\nu_1 \pi_1 + \nu_1 k \log \frac{v}{v_1},$$

wo π_1 die (innere und äußere) Verdampfungswärme pro Molekül ist.

Wenn nun das Volumen v hinreichend groß ist, so sind während der Volumenvergrößerung alle Moleküle in Dampfform übergegangen und jeder Molekülgruppe entspricht eine Entropiezunahme von der obigen Form.

Der totale Entropiezuwachs ist also

$$\Sigma \nu_1 \pi_1 + \Sigma \nu_1 k \log \frac{v}{v_1}.$$

Wenn nun das Gasgemisch bei dem Volumen v zu der Temperatur T erwärmt wird, bekommt das Gasgemisch noch den Entropiezuwachs

$$\Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_{v_1} \, dT}{T}.$$

Addiert man diese zwei Änderungen, so bekommt man als Ausdruck der Entropie des Gasgemisches

$$S = \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_{v_1} \, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \pi_1 + \Sigma \nu_1 k \log \frac{v}{v_1}$$

$$= \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_{v_1} \, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \pi_1 + \Sigma \nu_1 k \log c_1 \omega_1,$$

wo c_1 die Konzentration und ω_1 das Sättigungsvolumen pro Molekül ist.

Allgemeine Formel für die Entropie materieller Systeme.

Für kondensierte Körper kann die Wärmekapazität σ gleich σ_v gesetzt werden. Dann kann die Entropie eines willkürlichen materiellen Systems in der folgenden Form geschrieben werden:

$$S = \Sigma \nu_1 \int_1^T \frac{\sigma_{v_1} \, dT}{T} + \Sigma \nu_1 \varphi_1 + \Sigma \nu k \log \frac{v}{v_1},$$

wo

$$\varphi_1 = \pi_1 \text{ für Gase}$$

$$\varphi_1 = \frac{\mu_1}{T_0} \text{ für Flüssigkeiten}$$

und

$$\varphi_1 = 0 \text{ für feste Körper,}$$



v_1 bedeutet das kleinste Volumen, das die Moleküle ν_1 einnehmen können, ohne daß der Aggregatzustand[1]) geändert wird. Für ein Gasgemisch bedeutet also v_1 das Partialvolumen der Moleküle ν_1 im gesättigten Zustande bei der Minimaltemperatur $T = 1^0$.

Mittels einer partiellen Integration kann die Entropie auch auf die folgende Form gebracht werden

$$S = \Sigma\nu_1 c_{v_1} \log T + \Sigma\nu_1 x_1 - \Sigma\nu_1 k \log c_1,$$

wo

$$x_1 = \pi_1 + k \log \frac{1}{\omega_1} - \int_1^T \frac{\partial \sigma_{v_1}}{\partial T} \log T dT$$

für Gase,

$$x_1 = \frac{\mu_1}{T_0} + k \log \frac{1}{\omega_1} - \int_1^T \frac{\partial \sigma_v}{\partial T} \log T dT$$

für Flüssigkeiten,

und $$x_1 = k \log \frac{1}{\omega_1} - \int_1^T \frac{\partial \sigma_{v_1}}{\partial T} \log T dT$$

für feste Körper.

Dabei bedeutet ω_1 immer das kleinste Volumen, das einem Molekül zur Verfügung stehen muß, wenn der Aggregatzustand nicht geändert werden soll. Für ein Gas bedeutet also ω_1 das Sättigungsvolumen pro Molekül bei $T = 1^0$.

1) d. h. als gasförmig oder kondensiert betrachtet.

(Eingegangen 6. März 1916.)

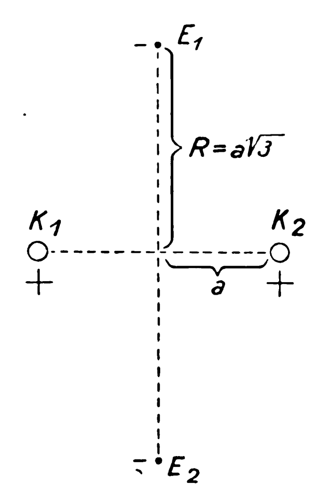
Strahlungseigenschaften des Debyeschen Modells eines Wasserstoff-Moleküls.

Von M. Wolfke.

Bekanntlich hat Debye[1]) die Dispersion des Wasserstoffs durch ein Modell des Wasserstoff-Moleküls berechnet. Ich möchte hier die Strahlung dieses Modells näher untersuchen, da neuerdings auf Grund der Versuche mit Kanalstrahlen die Vermutung ausgesprochen worden ist[2]), daß die Träger der Serienlinien nicht nur die Atome, sondern auch die Moleküle sein können.

Zu diesem Zweck wähle ich den einfachsten Weg, indem ich die Bohrschen Strahlungsannahmen auf das Debyesche Modell des Wasserstoff-Moleküls direkt anwende.

Das Debyesche Modell des Wasserstoff-Moleküls besteht bekanntlich aus zwei positiven



Kernen K_1 und K_2 (Figur) und aus zwei Elektronen E_1 und E_2. Die beiden Elektronen rotieren auf einem Kreise in der Symmetrieebene der beiden positiven Kerne, indem sie stets auf den Enden eines Durchmessers sich gegenüber verbleiben. Der Gleichgewichtszustand wird durch folgende zwei Gleichungen bestimmt[1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{4a^2} &= 2 \cdot \frac{e^2}{a^2+R^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}; \\ \frac{e^2}{4R^2} + \frac{mv^2}{R} &= 2 \cdot \frac{e^2}{a^2+R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo $2a$ die Entfernung K_1K_2 der beiden positiven Kerne, $2R$ die Entfernung E_1E_2 der beiden Elektronen, v die Peripheriegeschwindigkeit der Elektronen, m die Masse eines Elektrons und e die Elementarladung bedeuten.

Die erste Gleichung ergibt:

$$a = \frac{R}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

Aus der zweiten Gleichung läßt sich ohne weiteres die Peripheriegeschwindigkeit v und die kinetische Energie der beiden Elektronen berechnen:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-1}{Rm}}; \\ T &= 2 \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{4R}(3\sqrt{3}-1). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Bezeichnen wir mit E_∞ die gesamte Energie des Systems, wenn alle vier Punktladungen unendlich weit voneinander entfernt sind. Alsdann wird die potentielle Energie U des Moleküls durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$U = E_\infty + \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2R} - 4\frac{e^2}{\sqrt{a^2+R^2}} = E_\infty - \frac{e^2}{2R}(3\sqrt{3}-1);$$

wo die einzelnen Glieder die gegenseitigen potentiellen Energien der vier Punktladungen bedeuten.

1) P. Debye, Münch. Ber. 1915, S. 1.

2) Für Serienlinien des Sauerstoffs vgl. J. Stark, G. Wendt u. H. Kirschbaum, diese Zeitschr. 14, 770, 1913; T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4) 48, 546, 1915. Für Wasserstoffserienlinien nimmt allerdings Stark (Ann. d. Phys. (4) 49, 179, 1916) die einfach geladenen Atome als Träger an.

1) Vgl. P. Debye, l. c.

Die gesamte Energie E des Moleküls ist also gleich:

$$E = T + U = E_x - \frac{e^2}{4R}(3\sqrt{3}-1). \quad (4)$$

Wir wollen jetzt die Bohrschen Annahmen anwenden. Wir nehmen also an, daß es mehrere Stabilitätskreise mit den Radien $R_1, R_2, \cdots R_i \cdots$ gibt, auf denen die beiden Elektronen strahlungslos rotieren können, und der Bohrschen Impulsgleichung genügen:

$$m \cdot v_i R_i \cdot = i \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \quad (5)$$

Indem wir den Wert (3) für v in die Gleichung (5) einsetzen, erhalten wir für R_i folgenden Ausdruck:

$$R_i = \frac{i^2 h^2}{\pi^2 e^2 m (3\sqrt{3}-1)}. \quad (6)$$

Die zu diesem Zustand gehörige Energie E_i des Moleküls läßt sich aus der Gleichung (4) und (6) berechnen:

$$E_i = E_\infty - \frac{\pi^2 e^4 m (3\sqrt{3}-1)^2}{4 i^2 h^2}. \quad (7)$$

Wenn die beiden Elektronen beide gleichzeitig von einem Ring i_2 auf einen näheren Ring i_1 springen, so verliert das Molekül dadurch an Energie den Betrag $E_{i_2} - E_{i_1}$. Wir benutzen jetzt die Bohrsche Strahlungsannahme, indem wir voraussetzen, daß die beim Überspringen der beiden Elektronen frei gewordene Energie, in Form einer monochromatischen Strahlung von der Frequenz ν ausgestrahlt wird und zwar je ein Quant $h\nu$ für jedes Elektron. Diese Annahme führt zur folgenden Gleichung:

$$E_{i_2} - E_{i_1} = 2h\nu. \quad (8)$$

Aus der Gleichung (7) und (8) ergibt sich für die Frequenz ν folgende Seriengleichung:

$$\nu = \frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{8} \cdot \frac{\pi^2 e^4 m}{h^3}\left(\frac{1}{i_1^2} - \frac{1}{i_2^2}\right). \quad (9)$$

Diese Seriengleichung ist mit derjenigen, die Bohr[1]) für ein Wasserstoffatom berechnet, bis auf die Konstante, identisch.

Aus der Formel (9) ergibt sich für die Balmersche Konstante folgender Ausdruck:

$$\frac{(3\sqrt{3}-1)^2 \pi^2 e^4 m}{8 h^3}. \quad (10)$$

Setzen wir mit Riecke:

$$\frac{e}{m} = 5{,}28 \cdot 10^{17}, \quad e = 4{,}69 \cdot 10^{-10}, \quad h = 6{,}55 \cdot 10^{-27},$$

so folgt aus der Formel (10) für die Balmer sche Konstante der Wert

$3{,}32 \cdot 10^{15}$,

der mit dem experimentellen Wert $3{,}29 \cdot 10^{15}$ bis auf 9 pro Mille genau übereinstimmt.

1) Vgl. E. Riecke, diese Zeitschr. **16**, 222, 1915.

Diese vorzügliche Übereinstimmung ist überraschend, da bekanntlich der Bohrsche Wert der Balmerschen Konstante um 9 Proz. zu klein ist[1]), also eine zehnmal so große Abweichung aufweist.

Allerdings wird der Zahlenwert der obigen Übereinstimmung stark durch die Wahl eines bestimmten Wertes für die Elementarladung e beeinflußt. Trotzdem darf man, in Betracht dessen, daß die oben benutzten Daten die wahrscheinlichsten sind, hierdurch die Tatsache als bewiesen betrachten, daß die Anwendung der Bohrschen Strahlungsannahmen auf das Debyesche Wasserstoff-Molekül zu einer genaueren Wiedergabe des Wasserstoff-Serienspektrums führt als das Bohrsche Atommodell.

1) Vgl. E. Riecke, l. c.

Zürich, März 1916.

(Eingegangen 5. März 1916.)

Über das Wulfsche Elektrometer und das Engler und Sievekingsche Fontaktoskop.

(Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung B. Walters.)

Von V. F. Hess.

Herr B. Walter teilt unter obigem Titel in Nr. 2 dieser Zeitschrift (15. Januar 1916) seine Erfahrungen über die Verwendung des Wulfschen Zweifaden-Elektrometers in Überkopf-Stellung mit. Ich bin in der Lage, seine Angaben in erfreulicher Weise durchaus bestätigen zu können; im Institute für Radiumforschung in Wien steht diese naheliegende Anordnung des Wulfschen Elektrometers seit 1912 in Gebrauch, und zwar für die verschiedensten Zwecke.

Ein und dasselbe Elektrometer mit einer aufgesteckten Scheibenelektrode und einem größeren auf dem Elektrometerhals aufgepaßten Metallteller wird als Meßapparat auf die betreffenden Ionisierungsgefäße gesetzt.

Bei β-Strahlenmessungen z. B. ist das Ionisierungsgefäß ein zylindrischer Blechtopf, der auf drei Füßen steht und in der Bodenfläche eine runde Öffnung besitzt, die mit einer für α-Strahlen undurchlässigen Folie bedeckt ist.

Das Präparat wird direkt unter diese Öffnung gestellt. Bei α-Strahlenmessungen wird das Präparat im Innern eines ähnlichen Gefäßes ohne Bodenöffnung angebracht. Der Vorteil hierbei ist, daß die Präparate stets geerdet bleiben und bei entsprechender Dimensionierung des Ge-



fäßes keine merklichen Kapazitätsänderungen beim Einbringen von Schälchen u. dgl. eintreten. Die Aufladung erfolgt durch einen seitlich am Hals des Elektrometers angebrachten federnden Stift, ähnlich, wie Herr Walter es beschreibt.

Die Eichkurve des Elektrometers in verkehrter Lage unterscheidet sich nur sehr wenig von der in aufrechter Lage; man muß natürlich berücksichtigen, daß der rechte Faden im Gesichtsfeld bei verkehrter Lage links erscheint und umgekehrt. Die beiden Fäden sind nie ganz gleich empfindlich. Um auch bei höheren Spannungen arbeiten zu können, etwa 300 bis 400 Volt, die das Fadensystem ohne weiteres verträgt, wird das Ablesemikroskop durch seine Schlittenverschiebung exzentrisch gestellt und nur der eine Faden beobachtet.

Von der Verwendung des Wulfschen Elektrometers in verkehrter Lage für fontaktometrische Messungen sind wir wieder abgekommen, da der Bernstein in direktem Kontakt mit der feuchten Innenluft der Fontaktometerkanne sich leicht beschlägt.

Die in der Skizze der Walterschen Abhandlung angegebene Form des Zerstreuungskörpers beim Engler und Sievekingschen Fontaktoskop ist wohl als überholt zu bezeichnen und wird besser durch einen dünnen zylindrischen Stift ersetzt.[1]).

Es sei noch erwähnt, daß die verschiedenen Verwendungsweisen des Wulfschen Elektrometers in Überkopf-Stellung anläßlich der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien 1913 vielen Besuchern des Radium-Instituts demonstriert wurden.

1) Vgl. H. Mache und St. Meyer, diese Zeitschr. **10**, 860, 1909.

Wien, Institut für Radiumforschung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften 10. Februar 1916.

(Eingegangen 17. Februar 1916.)

Über die verbesserte Form des Fontaktoskops nach Engler und Sieveking.

Von C. Engler und A. Koenig.

Am Schlusse einer Mitteilung „Neue Beiträge zur Messung der Radioaktivität von Quellen“[1]) ist von C. Engler, H. Sieveking und A. Koenig eine verbesserte Form des Fontaktoskops kurz beschrieben worden, welche sich von dem älteren Apparat u. a. durch die Verwendung eines Wulfschen Quarzfadenelektrometers unterscheidet. Von diesem Instrument wurde an der genannten Stelle auch eine schematische Zeichnung unter genauer Angabe der wesentlichen Abmessungen gebracht, die wir hier nochmals wiedergeben (Fig. 1).

1) Chem. Ztg. **38**, 425, 446, 1914.

Die Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig, welche im Juni 1914 mit der Ausführung des Apparates betraut worden war, hat indessen, wie sie uns schrieb, durch den inzwischen ausgebrochenen Weltkrieg fast aller Arbeitskräfte beraubt, uns erst im März 1915 das erste Wulfsche Elektrometer liefern können. Unser hier photographisch abgebildeter Apparat (Fig. 2) war in der Fabrik bezüglich Voltempfindlichkeit und Kapazität geeicht worden. Wir haben gleich nach Empfang der Sendung die Angaben des Instrumentes nachgeprüft und bestätigt gefunden.

Kürzlich hat nun B. Walter eine Abhandlung „Über das Wulfsche Elektrometer und das Engler und Sievekingsche Fontaktoskop“[1]) veröffentlicht, die von unserer Seite nicht unwidersprochen bleiben darf, weil durch sie der Anschein erweckt wird, als ob das neue Fontaktoskop von uns nur auf dem Papier, von ihm aber erst praktisch konstruiert worden sei.

Herr Walter schreibt: „Als ich mich einige Zeit nach dem Erscheinen jener Abhandlung (von Engler, Sieveking und Koenig) wegen der darin abgebildeten neuen Form dieses Elektrometers an die Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig wandte, die bekanntlich diese Instrumente herstellt, erhielt ich die Antwort, daß der Apparat von ihnen bisher weder ausgeführt noch ausprobiert sei, und die Angelegenheit scheint auch bis heute noch nicht weiter gefördert zu sein.“

Dieser unzutreffenden Vermutung liegt wohl die Annahme zugrunde, daß wir am Wulfschen Elektrometer für die Verwendung im Fontaktoskop eine weitgehende Umkonstruktion vorzunehmen beabsichtigten, was nicht der Fall war. Eine briefliche Anfrage an den einen von uns hätte Herrn Walter sogleich Aufklärung über die Sachlage verschafft; er hätte erfahren, daß der Apparat hier vollständig ausgeführt war, und wir lediglich auf die Lieferung des Wulfschen Elektrometers eine Zeitlang warten mußten.

Die Anordnung des Wulfschen Fadenelektrometers in unserem Fontaktoskop ist aus umstehender photographischen Abbildung (Fig. 2) ersichtlich. Es versteht sich von selbst, daß das Elektroskop bei dieser Art der Benutzung „auf dem Kopf stehen“ muß, da ja der Zerstreuungskörper nach unten hängt.

1) Diese Zeitschr. **17**, 21, 1916.

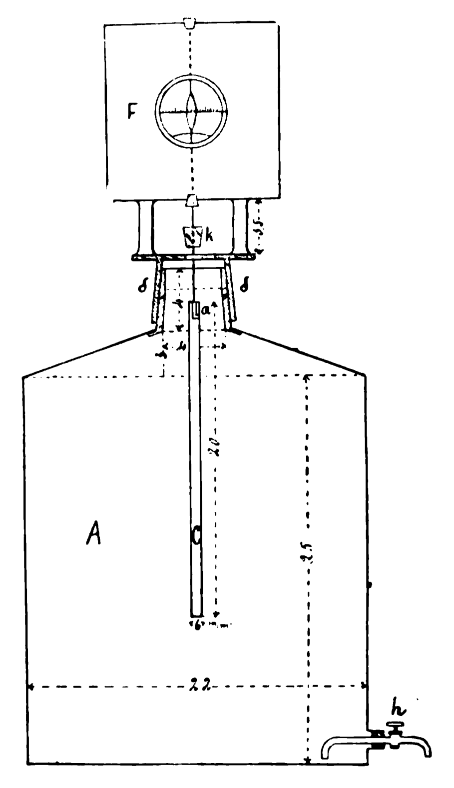


Fig. 1.

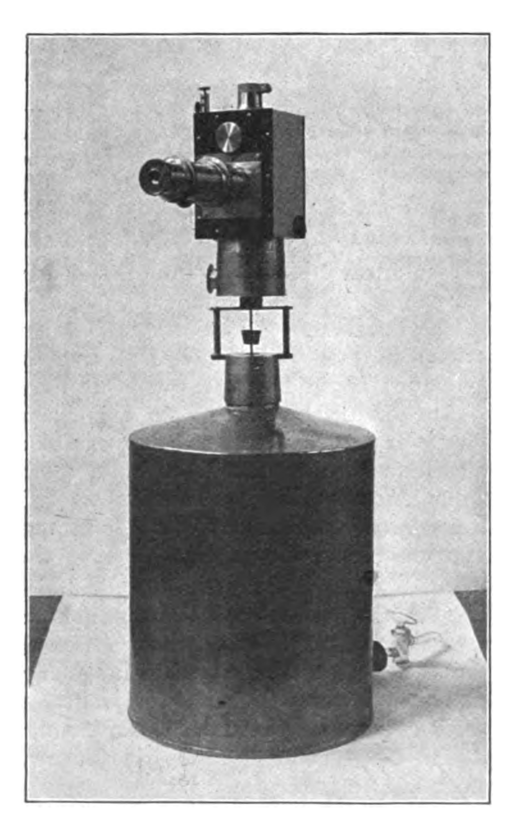


Fig. 2.

Auf den Abstand der gespreizten Fäden ist die Lage des Elektrometerkastens ohne wesentlichen Einfluß. Der Erfinder, Herr Prof. Th. Wulf-Valkenburg (Holland), hebt ja auch als eine der guten Eigenschaften seines Elektrometers speziell für den Gebrauch auf Reisen hervor, daß es ohne besondere Arretierungsvorrichtung transportfähig ist, und das Fadensystem im geladenen Zustande Lagenänderungen und selbst heftige Stöße ohne Schaden verträgt[1]).

Die Volteichung des uns gelieferten Instrumentes war sowohl in aufrechter Lage auf dem Dreifuß, wie auch in „verkehrter" Lage auf der Fontaktoskopkanne vorgenommen worden. Das beistehende Diagramm (Fig. 3) zeigt, wie nahe beieinander die beiden Kurven liegen. (D = Messung auf Dreifuß, F = am Fontaktoskop.)

Die Kapazität des ganzen Fontaktoskops beträgt 7,67 cm, also nur wenig mehr als die Hälfte der Kapazität (13—14 cm) der alten Konstruktion.

Diese Verkleinerung der Kapazität, welche zusammen mit der Verfeinerung der Ablesung den Hauptzweck der Umkonstruktion des Engler-Sievekingschen Fontaktoskops gebildet hat, ist auf drei Ursachen zurückzuführen: 1. Die Benutzung des Wulfschen Fadenelektrometers, dessen Kapazität nur rund 3 cm beträgt (genau 2,81 cm ohne, 3,28 cm mit Schutzkappe); 2. die Verwendung eines dünnen Stiftes als Zerstreuungskörper an Stelle des alten dicken Zylinders; 3. eine geringe Erweiterung der Öffnung im Kannendeckel, durch welche der Haltestift für den Zerstreuungskörper hindurchgeführt ist.

Besonderen Wert legen wir darauf[2]), daß bei der Verbindung des Elektroskops mit der Kanne (dem Zerstreuungsgefäß) ein Zwischenraum frei bleibt, zu welchem die äußere, relativ trockene Luft ungehindert Zutritt hat. Ohne diesen offenen Zwischenraum sind nämlich Isolationsstörungen schwer zu vermeiden; der feine Wassernebel, der sich beim Schütteln in der Kanne bildet, kann durch Konvektion leicht über die Mündung der Kanne steigen und den Bernsteinisolator des Elektroskops oberflächlich leitend machen[3]). Unsere Anordnung mit Luftisolation beseitigt, wie sich in langjähriger Erfahrung von Engler und Sieveking ergeben hat, diese Fehlerquelle vollständig.

Der von Herrn Walter hervorgehobene Vor-

1) Diese Zeitschr. **10**, 252, 1909.

2) Vgl. auch die eingangs erwähnte Abhandlung in der Chemiker-Zeitung.

3) Das am Elektrometer angebrachte Trockengefäß ist kein genügender Schutz dagegen.

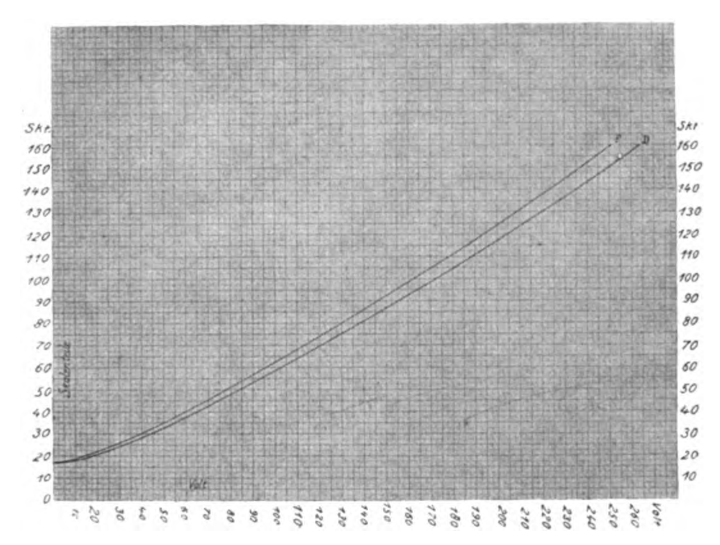


Fig. 3.

zug seines Apparates, infolge luftdichten Abschlusses Messungen auch nach längerer Wartezeit zu ermöglichen, ist insofern ohne praktische Bedeutung, als der je nach der Geschwindigkeit des Eintauchens des großen Zerstreuungskörpers in die Kanne[1]) verschieden große Emanationsverlust den durch Ausströmen aus unserem offenen Apparat entstandenen selbst bei halbstündiger Beobachtungszeit übertrifft. Für die Messung im radioaktiven Gleichgewicht, also etwa $2^1/_2$—3 Stunden nach Einbringen der Radiumemanation in die Kanne, ist übrigens unser Apparat bis zum Zeitpunkt der Messung in einfachster Weise durch einen kleinen Kautschukstopfen verschlossen zu halten, der über den Haltestift des Zerstreuungskörpers geschoben ist und in die Deckelöffnung genau paßt. (Vgl. die Abbildungen Fig. 1 und 2.)

Es läßt sich also sagen, daß die von Herrn Walter empfohlene Abänderung des Engler-Sievekingschen Fontaktoskops sich von dem in der Chemiker-Zeitung 1914 von uns und Sieveking beschriebenen, von Günther & Tegetmeyer ausgeführten und seit 1 Jahr bei uns in Gebrauch befindlichen Apparat nur dadurch unterscheidet, daß Walters Apparat 1. infolge Benutzung des alten dicken Zerstreuungszylinders eine etwas größere Kapazität (9 cm) besitzt und 2. infolge Verzichts auf unsere „Luftisolation" eher der Gefahr von Isolationsstörungen ausgesetzt ist.

1) Vgl. hierzu auch die Bemerkungen von W. Hammer über Fehlerquellen beim alten Fontaktoskop, diese Zeitschr. 13, 943, 1912.

(Eingegangen 19. Februar 1916.)

Bemerkungen zu den vorstehenden Abhandlungen des Herrn Hess und der Herren Engler und Koenig.

Von B. Walter.

Zunächst hat meine in Rede stehende Abhandlung jedenfalls den Nutzen gehabt, daß sie Herrn Hess zu der Mitteilung veranlaßte, daß das Wulfsche Elektrometer in Überkopfstellung sich auch im Wiener Radiuminstitute schon seit mehreren Jahren für die verschiedensten Zwecke bewährt hat, so daß also an der Brauchbarkeit dieses mit Recht so beliebten Instrumentes in der erwähnten Stellung kein Zweifel mehr bestehen kann.

Allerdings sagt nun Herr Hess, daß man für fontaktometrische Messungen, auf die ich ja in meiner Abhandlung das Hauptgewicht gelegt hatte, in dem genannten Institute von der Verwendung jenes Elektrometers in umgekehrter Lage wieder abgekommen sei, da der Bernstein durch die unmittelbare Berührung mit der feuchten Innenluft sich leicht beschlage. Hierzu habe ich nun zu bemerken, daß diese Befürchtung allerdings bei der von mir angegebenen Konstruktion des Fontaktometers, trotzdem ich bei meinen zahlreichen Beobachtungen mit demselben niemals einen feuchten Beschlag auf der Bernsteinoberfläche gesehen habe, und trotzdem auch die durch einen etwaigen „unsichtbaren" Beschlag dieser Art hervorgerufenen Messungsfehler danach nur von geringer Größe sein können, doch wohl nicht ganz von der Hand zu weisen ist. Darum besteht nun aber doch noch kein Grund, das genannte Elektrometer in diesem Falle ganz zu verwerfen, da man

sich ja hier einfach in der Weise helfen kann, wie die Herren Engler und Koenig dies in ihrer vorstehenden Abhandlung getan haben; und ich darf es daher wohl als ein weiteres Verdienst der meinigen in Anspruch nehmen, daß sie diese Herren veranlaßt hat, nunmehr die endgültige Konstruktion ihres Fontaktoskops zu veröffentlichen.

Hamburg, Physikalisches Staatslaboratorium den 3. März 1916.

(Eingegangen 4. März 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Flüssige Kristalle und anisotrope Flüssigkeiten[1]).

Von W. Voigt.

1. Einleitung.

In den verschiedensten Gebieten der Physik hat uns die Entwicklung der letzten Dezennien gezwungen, lange festgehaltene und vielfach als nützlich erprobte Vorstellungen aufzugeben. Ein solcher Prozeß vollzieht sich naturgemäß jederzeit gegen einen gewissen Widerstand, der indessen keineswegs immer auf Bequemlichkeit oder dogmatischer Gebundenheit beruht, sondern ebenso oft der pflichtmäßigen Vorsicht entspringt. Nur zu häufig ist eine neu auftauchende Vorstellung das Produkt der einseitigen Untersuchung eines einzelnen Erscheinungsgebietes und wird mit Wärme vertreten, bevor noch ausreichend untersucht worden ist, wie sie sich in anderen Gebieten als möglich und nützlich bewährt. Der oben erwähnte Widerstand kann deshalb statt hemmend geradezu fördernd für die Sicherung und Vertiefung der Erkenntnis wirken, wenn er die Anregung zu systematischer kritischer Bearbeitung aller möglichen Konsequenzen einer neu auftauchenden Vorstellung gibt. Ein solcher Vorteil wiegt aber den Nachteil, den wissenschaftlich die Verzögerung des Sieges einer neuen Vorstellung etwa darstellt, der Regel nach weit auf. Der Entdecker muß sich demgemäß in solchen Fällen in Geduld bescheiden und sich des späteren, aber vollständigeren Erfolges, wenn er ihn erlebt, doppelt freuen.

Die Einbürgerung der zuerst von O. Lehmann ausgesprochenen Vorstellung, daß die Materie gleichzeitig Eigenschaften besitzen könne, die wir als für den kristallinischen und für den flüssigen Zustand charakteristisch ansehen, hat Widerstände der oben genannten Art in reichem Maße gefunden. Zum Teil spielten sich dieselben in einem ziemlich unfruchtbaren Streit um Definitionen und Worte ab, zum größeren Teil aber in ernsten kritischen Versuchen, die beobachteten Erscheinungen, die zu der neuen Vorstellung Anlaß gegeben hatten, auf andere, der Tradition gemäßere Weise zu deuten. Wie die Dinge jetzt liegen, wird jedenfalls behauptet werden dürfen, daß die neue Vorstellung in der vorsichtigen Fassung, die ihr im Vorstehenden wegen der großen Mannigfaltigkeit der in Frage kommenden Erscheinungen und der Dehnbarkeit des Begriffes „Kristall" gegeben ist, sich einerseits nicht hat eliminieren lassen, sondern in unseren Vorstellungskreis fest eingebürgert ist, und daß sie sich andererseits auch ohne die revolutionären Wirkungen nach allen möglichen Richtungen hin, die je nach dem Standpunkt von Manchen erhofft oder gefürchtet waren, in diesen Kreis eingefügt hat.

Die letzten Jahre haben noch mancherlei wichtige Fortschritte in der Bearbeitung dieser merkwürdigen je nach Auffassung als „flüssige Kristalle" oder „anisotrope Flüssigkeiten" bezeichneten Körper gebracht; doch scheint, nach Art und Zeitmaß dieses Fortschreitens zu urteilen, die Entwicklung sich asymptotisch einem Gleichgewichtszustand beträchtlich genähert zu haben. Darum dürfte es zeitgemäß sein, einmal wieder den Zustand unserer Kenntnisse in dem ganzen Gebiete zusammenfassend darzustellen. Diese Zeitschrift brachte eine solche Darstellung für das um die Jahrhundertwende Erreichte in ihrem ersten Bande[1]); Zusammenfassungen der eigenen nach verschiedenen Seiten bahnbrechenden Arbeiten unter Heranziehung von Verwandtem haben später Lehmann[2]), Schenck[3]), Vorländer[4]) gegeben; aber die neueste dieser Monographien ist doch bereits fünf Jahre alt, und alle verfolgen mehr oder weniger spezielle Ziele. Nach Lage der Dinge wird auch die folgende Darstellung nicht das ganze Gebiet decken können. Die speziellen chemischen Unter-

1) Erweiterte Niederschrift einer im Laufe des Februar 1916 in einem theoretischen Seminar an der Universität Göttingen gehaltenen Vortragsreihe.

1) R. Schenck, diese Zeitschr. 1, 409 u. 425, 1900.

2) O. Lehmann, Flüssige Kristalle, Leipzig 1904; Die neue Welt der flüssigen Kristalle, Leipzig 1911.

3) R. Schenck, Kristallinische Flüssigkeiten und flüssige Kristalle, Leipzig 1905.

4) D. Vorländer, Kristallinisch-flüssige Substanzen, Stuttgart 1908.

suchungen, die mit so großer Zähigkeit und so großem Erfolg von Vorländer durchgeführt sind, müssen unberücksichtigt bleiben, und auch auf die äußerst zahlreichen experimentellen Arbeiten Lehmanns kann nicht entfernt so eingegangen werden, wie sie es wohl verdienten[1]). Letzteres ist dadurch bedingt, daß viele dieser interessanten Versuche überaus komplizierte Verhältnisse (z. B. Kopulation von einer größeren Zahl kristallinischer Tropfen) betreffen und zunächst einem tieferen Verständnis noch nicht recht zugänglich sind, wenn auch beachtenswerte Ansätze für die Deutung vorliegen. Damit steht im Zusammenhang, daß sie auch eine bloße Beschreibung nur an der Hand der Reproduktion von Photogrammen gestatten, und daß eine solche nicht in dem Plane dieser Darstellung liegt[2]). Das Hauptziel, das die letztere sich stellt, ist die Darstellung derjenigen Erscheinungen, die nicht nur dem Verständnis, sondern auch der exakten physikalischen Messung einigermaßen zugänglich sind. Doch sollen einleitend die fundamentalen qualitativen Beobachtungen, obwohl sie schon in dem oben erwähnten Schenckschen Bericht von 1900 Berücksichtigung gefunden haben, zum Zweck einer schnellen Orientierung noch einmal kurz aufgeführt werden. Die weitere Darstellung wird sich nicht streng an die zeitliche Folge der bezüglichen Arbeiten halten, sondern gelegentlich alles, was eine einzelne Frage betrifft, zusammenrücken. Allgemein ist die Anlage so gewählt, daß die mechanischen und thermodynamischen Untersuchungen (mit Einschluß vereinzelter magnetischen) vorweg genommen werden, und die optischen, die in der Mehrzahl tatsächlich auch neueren Datums sind, in den zweiten Teil verwiesen werden.

2. Die ersten Beobachtungen.

Daß es Kristalle gibt, die sich als dauernd deformierbar darstellen, ist eine alte Beobachtung. Die meisten derartigen Fälle werden durch eine innere Verschiebbarkeit der Kristallsubstanz nach Gleitflächen erklärt, wobei ein unstetiges Umspringen größerer oder kleinerer Teile in eine Zwillingsstellung stattfindet. Es kommen aber auch dauernde Deformationen vor, die anderen Charakter haben und die bez. Kristalle wachs- oder pechartig erscheinen lassen. Stäbe von Steinsalz erfahren bei gewöhnlicher Temperatur schon von kleinsten Belastungen an dauernde Biegungen, die bei vorsichtigem Operieren sehr beträchtliche Größe erreichen können[1]). Jodsilber, welches zwischen 146 und 450° in einer zähflüssigen Modifikation besteht, ist dabei, wie O. Lehmann[2]) erkannt hat, im regulären System kristallisiert. Die Raumgitter der Kristallstruktur können sonach unter Umständen dauernde Verzerrungen erfahren, ohne sich dabei von Grund aus zu ändern, etwa in verschieden orientierte Elemente zu zerfallen.

Während diese und ähnliche Wahrnehmungen ohne Fortentwicklung geblieben sind, gab eine etwas spätere verwandte Entdeckung der Forschung einen entscheidenden Anstoß. Reinitzer[3]) fand, daß Cholesterilbenzoat in zwei flüssigen Phasen existiere. Die eine entstand aus den festen Kristallen bei 145°, die zweite aus der ersteren bei 179°; die Übergänge waren umkehrbar wie normale Schmelzpunkte. Die erste Phase, die sich bei Beobachtung dünner Schichten mit freiem Auge trübe darstellte, erwies sich nun im Polarisationsapparat ziemlich stark doppelbrechend, während die zweite Phase die gewöhnliche Konstitution der Flüssigkeiten, Durchsichtigkeit und Isotropie erkennen ließ. Doppelbrechung war zur Zeit jener Wahrnehmung bei Flüssigkeiten nur bekannt, wenn dieselben gegen eine starke innere Reibung zu Strömungsbewegungen gezwungen und dadurch mit inneren Spannungen ausgestattet wurden; ruhende Flüssigkeiten galten für ausnahmslos isotrop. An ruhenden Körpern waren überhaupt Doppelbrechungen nur beobachtet, wenn sie fest und von Natur oder durch äußere Einwirkung anisotrop waren.

Reinitzer gab die neue Substanz zur näheren Untersuchung an O. Lehmann, und in dem Austausch der Ansichten zwischen den beiden Forschern wurde zuerst von Lehmann aus den Beobachtungen die Folgerung gezogen, daß hier fließende doppeltbrechende „Kristalle" vorlägen[4]). Die Trübung der ersten flüssigen Phase wäre hiernach darauf zurückzuführen, daß die Substanz in ihr (ähnlich wie ein kristallinisches Gestein, aber in voller und homogener Raumerfüllung) aus äußerst zahlreichen regelmäßig konstituierten Kristallindividuen in regelloser Anordnung bestände.

Die Veröffentlichung dieser Resultate machte

1) Ein umfassender Nachweis der Literatur bis zum Jahre 1908, in dem die bez. Lehmannschen Arbeiten voll berücksichtigt sind, findet sich am Ende der Vorländerschen Monographie.

2) Die Vorträge, auf denen der obige Bericht beruht, gingen auf jene Versuche etwas näher ein, da Herr Lehmann für dieselben ein großes Material an Diapositiven in freundlichster Weise zur Verfügung gestellt hatte.

1) W. Voigt, Diss. Königsb. 1874.

2) O. Lehmann, Zeitschr. f. Krist. **1**, 120 u. 492, 1877.

3) F. Reinitzer, Monatsh. f. Chemie, **9**, 421, 1888.

4) O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 462, 1889.

Gattermann[1]) auf die Bedeutung ähnlicher Wahrnehmungen aufmerksam, die ihm bei zwei von ihm hergestellten Substanzen *p*-Azoxyanisol und *p*-Azoxyphenetol geglückt waren. Beide Substanzen zeigten ebenso wie Cholesterilbenzoat eine trübe und eine klare flüssige Phase; von der ersteren lagen die beiden Umwandlungs-(oder Schmelz-)punkte bei ca. 116° und 134°, von der letzteren bei 137,5 und 168°. Gattermann gab beide Substanzen zur genaueren Bearbeitung an Lehmann, und sie haben erst ihm und später mehreren anderen Forschern zu einer sehr großen Zahl von Beobachtungen gedient. Dem günstigen Material wurde von Lehmann besonders mit Hilfe eines geschickt konstruierten heizbaren Mikroskopes eine Fülle interessanter Resultate abgewonnen.

Man kann in einem solchen Mikroskop leicht die drei Phasen (fest-, flüssig-aeolotrop oder -anisotrop, flüssig-isotrop) nebeneinander zur Anschauung bringen, wenn man eine dünne Schicht einer der genannten Substanzen unter dem Mikroskop zwischen gekreuzten Polarisatoren von einer Randstelle aus erwärmt oder abkühlt. Ist die Schicht anfänglich isotrop flüssig, also in der Durchsicht dunkel, so entstehen in ihr bei Abkühlung von einem Rande her tropfenförmige Gebilde, die durch Doppelbrechung hell erscheinen — die flüssig-anisotrope Phase —; diese fließen allmählich zu größeren hellen Massen zusammen und gehen auf der gekühlten Seite schließlich in ein Aggregat nadelförmiger fester Kristalle über.

Es sei schon hier bemerkt, daß es später Vorländer gelungen ist, eine sehr große Zahl von anderen chemischen Verbindungen herzustellen, die flüssige doppeltbrechende Phasen besitzen, darunter solche ohne merkliche Trübung. Auch erwies sich der Fall einer solchen Phase nicht als der einzige; es fanden sich vielmehr Substanzen, die deren zwei, drei, vier besaßen. Eine große Anzahl von Beobachtungen ist aber vor den Vorländerschen Entdeckungen, insbesondere mit den Gattermannschen Substanzen, durchgeführt worden, und so soll auf jene hier nur vorläufig hingewiesen werden.

Im Interesse der Einfachheit der Darstellung soll weiterhin die isotrop-flüssige Phase kurz als die i-Phase, die aeolotrop- oder anisotropflüssige als die a-Phase, die feste als die f-Phase bezeichnet werden. Existieren mehrere a-Phasen, so mögen sie nach ihren stabilen Existenzbereichen im Sinne fallender Temperaturen gezählt, also die mit dem höchsten Temperaturbereich als a_I-Phase bezeichnet werden.

1) L. Gattermann, Ber. Deutsche Chem. Ges. **23**, 1738, 1890.

3. Isolierte Individuen.

Der einfache Kunstgriff, kleine Mengen der Substanz in einer indifferenten Flüssigkeit oder Schmelze (Olivenöl, Glyzerin, Kolophonium) zu suspendieren, ermöglichte Lehmann[1]) das genauere mikroskopische Studium ihrer Eigenschaften ohne Störung durch umgebende anders orientierte Individuen, freilich dafür in nicht vollkommener chemischen Reinheit.

Die oben genannten beiden Gattermannschen Substanzen, *p*-Azoxyanisol und -phenetol, stellten sich bei dieser Behandlung in Form von nahe kugelförmigen, merklich klaren Tröpfchen dar, die eine regelmäßige innere Struktur zu haben schienen. Es war an ihnen auch bei Beobachtung ohne Polarisatoren eine Polachse erkennbar, mit der sie sich meistens in die Richtung normal zu Objektträger und Deckglas zu stellen suchten (erste Hauptlage); daneben war die parallele Lage bevorzugt (zweite Hauptlage).

In der letzteren Lage ließ sich im Innern der Tröpfchen, wohl als Folge singulärer Brechungsverhältnisse, ein etwa spindelförmiger Kern erkennen, der in der ersten Lage sich nur durch eine in konzentrischen Kreisen wechselnde Intensitätsverteilung geltend machte.

Da diese Tröpfchen im Gegensatz zu ausgedehnten Schichten nicht trübe, sondern relativ klar erschienen, so spricht ihnen Lehmann die Eigenschaft abgeschlossener regelmäßig konstituierter, in gewissem Sinne homogener Individuen zu. Wulff[2]) deutet die an ihnen beobachteten Erscheinungen allerdings auf eine komplexe Struktur: einen isotropen Kern, umgeben von einer doppeltbrechenden Hülle. Man kann prinzipiell gewiß zugeben, daß durch die Suspension in einer fremden, zumeist vielleicht unreinen Substanz die Möglichkeit von Verbindungen vorliegt, die zu der Bildung von Häutchen oder (wie Andere meinen) von Fäden führen. Indessen ist, wie es scheint, die Wulffsche Deutung von keiner anderen Seite aufgenommen worden; sie will sich auch mit weiter unten zu besprechenden Wahrnehmungen nicht vereinigen lassen und dispensiert überdies nicht von der Annahme einer anisotropen Flüssigkeit. Man wird also vorerst jedes dieser Tröpfchen wohl als eine Art von Individuum gelten lassen, das sich indessen von einem gewöhnlichen Kristallindividuum sofort dadurch wesentlich unterscheidet, daß seine Begrenzung nicht polyedrisch ist. Es wäre an sich nicht undenkbar, daß es trotzdem regelmäßige Raumgitterstruktur besäße

1) S. zu dem Folgenden z. B. die Lehmannsche Monographie „Flüssige Kristalle" von 1904.
2) G. Wulff, Zeitschr. f. Krist. **46**, 261, 1909.



und daß die hiermit im allgemeinen verbundene polyedrische Form nur dadurch nicht zustande kommen könnte, daß die inneren orientierenden Kräfte gegen die Oberflächenspannung zu gering sind. Es ist aber nach dem Aussehen in natürlichem Lichte auch denkbar, daß es sich bei diesen Tröpfchen überhaupt nicht um eine normale Gitterstruktur handelt, sondern daß z. B. eine Anordnung vorliegt, bei der die Moleküle mit äquivalenten Richtungen auf Breitenkreisen angeordnet sind.

Bei Beobachtung mit einem Polarisator erschienen die (sonst leicht gelblich gefärbten) Tröpfchen in der ersten Hauptlage quadrantenweise abwechselnd gelb und weiß, — dabei lagen die Symmetrielinien der Quadranten aber nicht normal und parallel zur Hauptrichtung des Polarisators, sondern waren dagegen um ca. 45^0 gedreht, — in verschiedenen Sinne, wenn der Polarisator vor und wenn er hinter dem Präparat stand. Zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren zeigten die Tröpfchen in der ersten Hauptlage ein dunkles Kreuz (wie eine normal zur Hauptachse geschliffene Kalkspatplatte im konvergenten Licht). Die Quadranten zwischen den Kreuzarmen ließen abwechselnd weiße und gelbe Färbung erkennen; die Kreuzarme waren häufig gefärbt. Die Gesamtheit dieser Erscheinungen deutet, wie später genauer zu erörtern sein wird, auf das Vorhandensein zirkularer Polarisation in Verbindung mit Dichroismus. —

Erwärmt man das Präparat — indifferente Flüssigkeit mit suspendierten Tröpfchen — von unten her, so beginnen die Tröpfchen, und zwar die in der ersten Hauptlage schwächer, in der zweiten Hauptlage lebhafter, zu rotieren, beide Male in der Richtung entgegen derjenigen des Uhrzeigers. Dabei entstehen infolge innerer Reibung relative Verschiebungen zwischen den einzelnen kugelförmigen Schichten, und damit sekundäre Anisotropien, die sich für die erste Hauptlage durch die spiralige Deformation des Kreuzes zwischen Polarisatoren, für die zweite auch in natürlichem Licht durch (unter Umständen sehr starke) spiralige Deformation des spindelförmigen Kernes erkennen lassen. In beiden Fällen bleiben, wenn die Tröpfchen völlig frei in der umgebenden Flüssigkeit schweben, die Randschichten gegen das Innere zurück. Dasselbe gilt, wenn mehrere Tröpfchen einander berühren. Man wird daraus folgern, daß die Ursache der Rotation ein auf das Innere der Flüssigkeit ausgeübtes Drehungsmoment ist, dem am Äquator die Reibung gegen die umgebende ruhende Flüssigkeit entgegenwirkt. Bei großen Tropfen, die beiderseits an den die Schicht begrenzenden Glasplatten haften, kann natürlich das Verhältnis sich umkehren, so daß die Randschichten dem Innern des Tropfens voraneilen.

Die Ursache dieser merkwürdigen Rotationen ist noch nicht völlig aufgeklärt. Kann man auch durch das Temperaturgefälle von unten nach oben eine polare Richtung, durch die Drehung der Polarisationsebene (Aktivität) einen ausgezeichneten Drehungssinn als gegeben betrachten, so ist der Mechanismus des Vorganges doch bislang unklar. Ein Schluß auf die Symmetrie der Moleküle, der über das zur Drehung der Polarisationsebene des Lichtes Notwendige hinausgeht, erscheint bedenklich. —

Tropfen, die in irgendeiner Lage zwischen Deckglas und Objektträger flach gedrückt werden, können ihr Aussehen und darnach also auch ihre innere Struktur beträchtlich ändern. Man wird daraus auf einen gewissen Grad von Richtungskraft zwischen den Molekülen schließen. Bei Zerlegung eines undeformierten Tropfens in Teile nimmt ein jeder von ihnen von selbst die Form und Konstitution des ursprünglichen an, wobei natürlich die Orientierung gegen die begrenzenden Glasplatten von den Umständen abhängt.

Mehrere Tropfen zur Berührung gebracht, fließen in einen zusammen, doch so, daß für längere oder kürzere Zeit jeder Teil ein eigenes Gesetz innerer Struktur beibehält. Dabei entstehen für die Beobachtung sowohl im natürlichen wie im polarisierten Lichte merkwürdige und reizvolle Erscheinungen.

Ausgedehnte Beobachtungen über das Verhalten einfacher und zusammengesetzter Tropfen von verschiedenen Substanzen sind neuestens wieder von Lehmann[1]) beschrieben worden.

Im Magnetfeld zeigen die Kristalltropfen die Tendenz, sich mit der Polachse parallel zu den Kraftlinien einzustellen. Sind sie durch die Umgebung, etwa durch die Reibung an Objektträger und Deckglas, an der freien Bewegung behindert, so bringt das Feld innere Verschiebungen hervor, die sich insbesondere durch die Deformation des spindelförmigen Kernes geltend machen. —

Substanzen, von denen in der oben geschilderten Weise suspendierte kleine Mengen in der anisotropen Phase Tropfenform annehmen, stellen den einen Typ dar, den man wohl als kristallinische oder anisotrope Flüssigkeit bezeichnet hat. Ihm gegenüber steht ein anderer, wo suspendierte Teilchen sich mehr oder weniger polyedrisch darstellen. Bei diesen Substanzen müssen also die Oberflächenspannungen gegenüber den inneren orientierenden Kräften an Wirkung zurücktreten; sie hindern

1) O. Lehmann, diese Zeitschr. **13**, 550, 1912.



nicht völlig die mit einer Raumgitterstruktur zusammenhängende Formbildung, sondern beeinflussen sie nur durch mehr oder weniger starke Abrundung der Ecken und Kanten. Die Gebilde zeigen im polarisierten Licht Erscheinungen, die auf gleichförmige normale Doppelbrechung und somit auf eine regelmäßige Raumgitterstruktur schließen lassen.

Erste Beispiele für diesen Typ sind von Lehmann[1]) gefunden worden. Aus einer warmen alkoholischen Lösung von ölsaurem Ammonium scheiden sich Kristalle in Form von steilen Doppelpyramiden ab, deren Querschnitt aber kein reguläres Polygon, sondern ein Kreis ist. Dies letztere deutet darauf hin, daß die transversalen orientierenden Kräfte nicht ausreichen, um der Oberflächenspannung den zur Formbildung ausreichenden Widerstand zu leisten. Suspendierte kleine Mengen von Cholesteriloleat verhielten sich analog.[2]) Die reelle Flüssigkeit der Individuen bekundet sich unter anderem in der Fähigkeit des Zusammenfließens mehrerer bei paralleler, sowie des Verwachsens bei gekreuzter Lage. Man kann mit einem gewissen Recht die Gebilde dieser Art als Individuen „flüssiger oder fließender Kristalle" bezeichnen.

War bei den genannten Substanzen in der äquatorialen Richtung die Oberflächenspannung den formbildenden Molekularkräften noch überlegen, so hat Vorländer[3]) Substanzen hergestellt, bei denen in allen Richtungen die letzteren Kräfte die Oberhand besitzen, und demgemäß aus der Mutterlauge regelmäßige Polyeder mit merklich scharfen Ecken und Kanten entstehen. Daß diese Kristalle wirklich flüssig sind, ergibt sich daraus, daß auch sie, wie die vorgenannten, bei gegenseitiger Berührung zusammenfließen. Ist die gesamte Schmelze in die anisotrop-flüssige a-Phase übergegangen, so gibt sie im Polarisationsmikroskop ein Bild, das sich von einem Gesteinsschliff nicht unterscheidet; aber die Substanz ist reell flüssig.

Bei derartigen in der a-Phase mit deutlicher Kristallstruktur beobachteten Substanzen kommt gelegentlich der Fall vor, daß eine dünne Schicht der a-Phase deutlich die Textur der festen widerspiegelt, aus der sie entstanden ist[4]); ferner, daß nach Erhitzen bis zum Entstehen der isotropen i-Phase und Wiederabkühlen die anisotrope merklich in derselben Textur entsteht, die sie ursprünglich besaß, selbst wenn die isotrope Schmelze absichtlich zum Strömen gebracht war. Es folgt hieraus, daß an den Flächen der die Schicht begrenzenden Platten Elemente haften müssen, welche die Orientierung der Moleküle der anisotropen Phase bestimmen.

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle S. 32 u. f.
2) O. Lehmann, l. c. S. 34.
3) D. Vorländer, Zeitschr. f. phys. Chemie **57**, 363, 1906.
4) O. Lehmann, Flüssige Kristalle, S. 58; auch Ch. Mauguin, diese Zeitschr. **12**, 1011, 1911.

3. Homogene Schichten.

Der oben beschriebenen ersten Methode Lehmanns zur Herstellung einfacher und für die Untersuchung günstiger Verhältnisse durch Suspension kleiner Massen der bez. Substanz in einer indifferenten Flüssigkeit — die gelegentlich auch durch die Mutterlauge vertreten werden kann — ist eine zweite zuzuordnen[1]), die insbesondere für optische Zwecke sehr große Bedeutung gewonnen hat und prinzipiell vielleicht noch größere Bedeutung dadurch besitzt, daß sie keine fremde Flüssigkeit mit der untersuchten in Berührung bringt. Von vielen Substanzen gelingt es, dünne Schichten trüber Schmelze durch gewisse Kunstgriffe zu klären; außer durch bestimmte Leitung der Erwärmung insbesondere dadurch, daß man das Deckglas mehrfach um kleinere Strecken hin- und herrückt. Die zuvor durch Doppelbrechung helle Masse wird dann zwischen gekreuzten Nikols für senkrechte Beobachtung dunkel. Daß keine wirkliche Isotropie vorliegt, lehrt die Beobachtung bei schiefem Einfall, insbesondere auch im konvergenten Licht. Wir kommen auf die Verwertung dieser Methode unten ausführlich zurück. Hier mag nur erwähnt werden, daß der neue Zustand mit großer Sicherheit darauf gedeutet werden kann, daß bei ihm die Moleküle innerhalb der ganzen Schmelze (offenbar durch Einwirkung der Begrenzung) mit in ihnen ausgezeichneten Richtungen (Hauptachsen) normal zu den begrenzenden Glasplatten gerichtet sind. Dies erhellt unter anderem daraus, daß sowohl der Rand einer solchen dunkel erscheinenden Schicht, wo sie eine scharf gekrümmte kapillare Oberfläche begrenzt, hell erscheint, als daß auch die Grenze gegen die isotrope Phase, wenn sie durch Wärmezu- und -abfuhr im Vorrücken oder Zurückweichen schwankt, zwischen gekreuzten Nikols sich hell darstellt.

Sehr interessante Beobachtungen über homogene Schichten zwischen parallelen Glasplatten verdankt man Mauguin[2]). Dieser Forscher fand, daß hinreichend dünne Schichten von p-Azoxyphenetol zwischen sorgfältig gereinigten Platten ohne irgendwelche besondere Behandlung Bereiche zeigten, die sich durchaus wie Platten aus einem einachsigen Kristall in allen mög-

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle S. 80.
2) Ch. Mauguin, C. R. **151**, 886; diese Zeitschr. **12**, 1011, 1911.



lichen Orientierungen verhielten, nämlich bei Beobachtung im konvergenten polarisierten Licht entsprechende Interferenzerscheinungen zeigten. Die bez. Orientierung bestimmte sich dabei anscheinend durch das Verhalten der ersten an den Platten adhärierenden Molekülschichten, derart, daß, wenn durch Nähern oder Entfernen der Platten eine Strömung der Schmelze hervorgebracht wurde, doch in einem jeden Bereich die Orientierung erhalten blieb. Mit der Änderung der Dicke der Schicht wechselte dabei die Interferenzfigur genau ebenso, wie dies bei einer Serie von Platten verschiedener Dicke aus einem festen Kristall geschehen würde.

p-Azoxyanisol verhielt sich ähnlich; nur stellte sich bei sorgsam gereinigten Glasplatten regelmäßig von selbst die Orientierung normal zu den Platten ein. Die orientierende Wirkung der die Schicht begrenzenden Glasplatten erstreckt sich dabei nicht in sehr große Tiefe. Mauguin gibt bei *p*-Azoxyanisol als Grenzdicke, innerhalb deren die Orientierung noch homogen ist, 0,02 mm an. Innerhalb einer solchen Dicke ist die spezielle, normal orientierende Wirkung aber so kräftig, daß, wenn man durch Heben oder Andrücken des Deckglases Strömungen innerhalb der Schmelze hervorbringt, deren optisch anisotropes Verhalten sich nicht ändert, nämlich dasjenige einer Platte aus einem einachsigen Kristall normal zur optischen Achse bleibt. Hier ist also in weitgehendem Maße der Idealfall einer „kristallinischen Flüssigkeit“ realisiert.

Eine weitere Bestätigung dafür kann man in der etwas späteren Beobachtung Mauguins[1]) sehen, daß bei Anwendung einer sehr starken Lichtquelle derartige Schichten im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nikols nicht völlig dunkel erscheinen, sondern im Mikroskop zahlreiche lokale Intensitätswechsel, Aufhellen und Verdunkeln kleiner Bereiche erkennen lassen, die den Eindruck machen, als ob infolge der Wärmebewegung fortwährende Störungen der regelmäßigen Orientierung der Moleküle stattfänden. Diese Störungen steigern sich mit steigender Temperatur, verschwinden aber vollständig, wenn die Schicht in die isotrope Phase übergegangen ist. Bei einigen Flüssigkeiten mit zwei *a*-Phasen ließ die zweite, bei tieferer Temperatur stabile und sehr viel zähere derartige Bewegungen nicht erkennen. Es ist klar, daß sich alle diese Wahrnehmungen gut den Lehmannschen Vorstellungen anschließen; sie haben demgemäß (wie auch andere später zu besprechende Beobachtungen Mauguins) stark für die Einbürgerung jener Vorstellungen gewirkt und manche Forscher[1]), die denselben zuvor lebhaft widerstanden, sachlich für sie gewonnen; auf formale Gegensätze, die mit der Definition eines Kristalles zusammenhängen, wird unten zurückzukommen sein.

Überaus merkwürdige Resultate erhielt Mauguin[2]), als er Schichten von *p*-Azoxyanisol nicht zwischen Glasplatten, sondern zwischen frisch gespaltenen Platten von Glimmer erzeugte, die in ihrer ursprünglichen gegenseitigen Orientierung aufeinander gelegt waren. Glimmer besitzt in der Spaltungsebene drei um 60° gegeneinander geneigte ausgezeichnete Richtungen, die durch die sogenannte „Schlagfigur“ sichtbar gemacht werden können. Eine von ihnen ist eine kristallographische Symmetrieachse; die beiden andern mögen auf den beiden Glimmerhälften 1, 2 mit l_1, r_1 und l_2, r_2 bezeichnet werden. Dann geht die Beobachtung von Mauguin dahin, daß die Schicht der *a*-Phase zwischen den beiden Glimmerblättchen nicht homogen ist, sondern in ihr die optische Achse auf der Seite der Platte 1 nach l_1, der Platte 2 nach r_2 orientiert ist (oder bzw. nach r_1 und l_2) und zwischen beiden Seiten sich — rechts oder links gewunden — um 60° dreht. Damit ist eine sehr eigentümliche orientierende Wirkung des Glimmers auf die Moleküle der *a*-Phase festgestellt.

Es mag schließlich bemerkt werden, daß eine anscheinend ziemlich vollständige Parallelorientierung der Moleküle einer anisotropen Schmelze auch auf eine andere mechanische Weise realisiert werden kann. Wie (zuerst wohl) Lehmann bemerkt hat, zeigt eine solche Substanz, während sie durch ein Kapillarrohr fließt, merklich regelmäßige Doppelbrechung, so daß durch um ±45° gegen die Strömungsrichtung geneigte Polarisatoren Interferenzstreifen parallel zur Rohrachse erkennbar sind. Daß eine solche Parallelrichtung der Elemente auch durch ein Magnetfeld hervorgerufen werden kann, folgt aus dem S. 79 Gesagten und wird später erörtert werden.

4. Die Emulsions- und die Suspensionshypothese.

Wie schon im Eingang bemerkt, hat die von Lehmann gegebene Deutung der trüben Schmelzen als mit Kristallen vergleichbarer Gebilde zunächst lebhaften Widerstand gefunden. Wo in anderen Fällen optisch trübe Substanzen beobachtet wurden, hatte sich der Regel nach nachweisen lassen, daß dieselben nicht einheitlich waren, sondern Aggregate räumlich ge-

1) Ch. Mauguin, C. R. **154**, 1359, 1912.

1) S. z. B. G. Friedel und F. Grandjean, C. R. **151**, 327, 442, 762, 988; **152**, 322, 1911.
2) Ch. Mauguin, C. R. **156**, 1246, 1912.

trennter Elemente von verschiedenen Brechungsindizes darstellten. So lag auch bei den erwähnten trüben Schmelzen die Auffassung nahe, daß dieselben in Wahrheit Suspensionen oder Emulsionen seien[1]). Dabei konnten letztere entweder aus chemisch verschiedenartigen Substanzen oder aber aus verschiedenen Modifikationen derselben Substanz bestehen.

Es entstand die Aufgabe, die physikalischen Konsequenzen der beiden Auffassungen möglichst umfassend mit der Beobachtung, am besten mit der Messung zu vergleichen, um auf diese Weise, wenn angängig, eine Entscheidung zwischen ihnen zu treffen. Diese Aufgabe ist nachhaltig und planvoll besonders von Schenck[2]) und dessen Schülern in Bearbeitung genommen worden.

Gegen die erste oben formulierte Annahme, speziell gegen die Vermutung, daß Verunreinigungen die Ursache der Trübung sein möchten, ließ sich die Tatsache geltend machen, daß nach ganz verschiedenen Methoden hergestellte Präparate sich bezüglich der trüben Phase gleich verhielten, daß mäßige künstliche Verunreinigungen die Trübung nicht merklich verstärkten, daß die wohlgereinigten Präparate beim Erstarren gut definierte Kristalle lieferten. Allerdings können die komplizierten in Betracht kommenden Verbindungen bei längerem Erhitzen teilweise Zersetzungen erleiden, und die fremden Produkte dann die Eigenschaften beeinflussen; reine Substanzen zeigen aber auch stets dieselben charakteristischen Eigenschaften[3]).

Es blieb nun eine Möglichkeit, auch bei Ausschließung von fremden Substanzen zu einer Emulsion zu gelangen, wenn die einheitliche feste Substanz beim Schmelzen in zwei chemisch verschiedene, begrenzt ineinander löslichen Flüssigkeiten zerfiele, — ein Vorgang, der in gewissen seltenen Fällen wirklich beobachtet ist und zu einer Emulsion führt[4]). Hier findet dann zwischen den beiden Flüssigkeiten ein thermo-chemisches Gleichgewicht statt, derart, daß die Lösungen von der Temperatur abhängige Zusammensetzung besitzen, und daß bei steigender Temperatur ein Zustand (kritischer Punkt) eintreten kann, wo beide Flüssigkeiten identisch werden und weiterhin auch bleiben. Jener kritische oder Entmischungs-Punkt würde also den Klärungspunkt darstellen.

Gegen eine solche Auffassung spricht (abgesehen von chemischen Bedenken, zu denen die speziellen Substanzen Anlaß geben) von physikalischer Seite zunächst der Umstand, daß nach ihr die Klärung allmählich eintreten müßte, da die beiden Flüssigkeiten ihre Eigenschaften, wenngleich mit wachsender Geschwindigkeit, doch stetig einander annähern. Die Beobachtung zeigt dagegen eine merklich plötzliche Aufhellung bei einer bestimmten Temperatur, ja direkt unterhalb derselben in vielen Fällen mit wachsender Temperatur nicht nur keine Abnahme, sondern sogar eine kleine Zunahme der Trübung. Dies ist durch Messungen von Schenck[1]) angedeutet und durch solche von Nernst[2]) bestätigt worden.

Daß Emulsionen zwar infolge der inneren Reflexionen eine Aufhellung zwische gekreuzten Nikols zeigen können, daß sie abe die durch die Beobachtung an den trüben Schmelzen festgestellte Doppelbrechung nicht besitzen, sei besonders hervorgehoben. Die Schmelzen haben außerdem spezifische, häufig bei seinen Suspensionen beobachtete Interferenzerscheinungen, nicht erkennen lassen[3]).

Ferner haben alle Versuche einer mechanischen Sonderung zweier Komponenten in den trüben Schmelzen, wenn dieselben wirklich rein waren, sowohl mit Hilfe des Zentrifugierens, als auch mit Hilfe angelegter elektrischen Spannungen negative Resultate ergeben.[4])

Diese Ergebnisse sprechen auch gegen eine veränderte Form der Emulsionshypothese, deren Vertretung später versucht worden ist, als besonders die gehäuften Beobachtungen über die optischen Eigenschaften der anisotropen Phasen das Aufrechterhalten der ursprünglichen Form nicht mehr zuließen. Um jene optischen Eigenschaften zu erklären, wurde speziell von *p*-Azoxyanisol und -phenetol angenommen, daß ihre *a*-Phase eine Suspension von Kriställchen in einer isotropen Flüssigkeit darstellten[5]). Gewiß kann man mit einer solchen künstlich hergestellten Suspension manche der an den *a*-Phasen beobachteten optischen Erscheinungen wiedergeben; z. B. ist bei nadelförmigen Kriställchen sehr wohl verständlich, daß sie sich in einem durch eine Kapillare fließenden Strom der Rohrachse parallel richten und so gemäß S. 81 zu einer regelmäßigen Doppelbrechung der

1) S. dazu insbesondere G. Tammann, Ann. d. Phys. **4**, 524, 1901; **8**, 103, 1902; **19**, 421, 1906.
2) S. insbesondere die S. 76 zitierte Monographie „Kristallinische Flüssigkeiten" von 1905.
3) R. Schenck, l. c. S. 19 u. f.
4) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. **12**, 431, 1906.

1) R. Schenck, Ann. d. Phys. **9**, 1053, 1902.
2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie **16**, 702, 1910.
3) A. C. de Kock, Zeitschr. f. phys. Chem. **48**, 129, 1904.
4) R. Schenck, Kristallinische Flüssigkeiten S. 35; A. Coehn, Zeitschr. f. Elektrochemie **10**, 856, 1904; G. Bredig u. G. v. Schukowsky, Chem. Ber. **37**, 3419, 1904.
5) Ähnlich bereits bei G. Quincke, Wied. Ann. **53**, 613, 1894.

Flüssigkeit führen. Aber man muß diesen Kriställchen doch ganz wunderbare, an ähnlich ausgedehnten Molekülkomplexen sonst nie beobachtete Eigenschaften beilegen, insbesondere die regelmäßige Orientierung in suspendierten Tropfen und in dünnen Schichten zwischen Glasplatten.

Was die chemische Natur dieser Kriställchen angeht, so ist es keineswegs erlaubt, dieselben etwa einfach mit der umgebenden Schmelze als gleichartig zu denken; denn dann käme man in Widerspruch mit dem Grundsatz der Thermodynamik, daß zwei Phasen derselben Substanz bei vorgegebenem Druck nur bei einer Temperatur nebeneinander im Gleichgewicht sein können, während die a-Phase ein ausgedehntes Temperaturbereich deckt. Man müßte somit die Kriställchen und die Schmelzen als chemisch verschieden annehmen, dabei die erstere in der letzteren lösbar; aber die chemische Natur der fraglichen Substanzen gibt einer solchen Vorstellung keinerlei Stütze. Und so lassen sich noch andere Bedenken geltend machen, die hier nicht erörtert zu werden brauchen.

Nur darauf mag abschließend aufmerksam gemacht werden, daß wenn man, wie geschehen ist, die Suspensionshypothese für die Gattermannschen Substanzen, welche Tropfen bilden, heranzieht, sie aber den Vorländerschen gegenüber, die gewisse Formkräfte erkennen lassen, nicht für nötig hält, der Gewinn an Erklärung doch sehr gering ist, zumal die übrigen physikalischen Eigenschaften beider Klassen von Körpern eine ganz stetige Reihe bilden.

Der Grad der Trübung mag bei den ersten größer sein; vollkommene optische Leere scheint auch bei den zweiten nur selten einzutreten; aber man kann sich wohl vorstellen, daß, wenn Raumelemente mit orientierten Molekülen kristallinische Eigenschaften haben, dann auch in einer sonst regelmäßig orientierten Schicht der Substanz nach Zufall verteilte Elemente in abweichender Lage vorkommen und optisch den Eindruck von suspendierten Fremdkörpern machen können.

5. Die innere Reibung der a- und i-Phasen.

Wie im Eingang bemerkt, hat die Emulsions- und die Suspensionshypothese die Anregung zu vielen messenden Beobachtungen an anisotropen Flüssigkeiten gegeben; es soll über dieselben nunmehr im Zusammenhang berichtet werden.

Von besonderer Wichtigkeit war die Frage, ob (außer der Durchsichtigkeit) andere physikalische Eigenschaften der fraglichen Substanzen beim Klärungspunkt unstetige Änderungen erfahren, und ob, wenn dies statthat, darin ein Argument gegen die Annahme einer Emulsion zu sehen sei. Die in dieser Hinsicht zuerst behandelte Eigenschaft ist die der inneren Reibung, über die mit Hilfe von Beobachtungen über Ausfluß aus Kapillarröhren Tatsachen gewonnen worden sind.

Ein sehr überraschendes Resultat mag vorweg genommen werden. Die innere Reibung der trüben Phase erwies sich mit nichten größer, als die der klaren, obwohl der normale Verlauf der inneren Reibung bei Flüssigkeiten der ist, daß höheren Temperaturen kleinere Werte entsprechen; im Gegenteil ist der entgegengesetzte Fall der häufigere. Die bezüglichen Unterschiede sind sehr beträchtlich; bei p-Azoxyanisol wachsen die Ausflußzeiten bei Überschreitung des Klärungspunktes um etwa 50 Proz.

Die ersten Beobachter[1]) schlossen aus ihren Messungen auf eine wirkliche Unstetigkeit der inneren Reibung bei Überschreitung des Klärungspunktes, und es schien damit der Emulsionscharakter der trüben Schmelze widerlegt zu sein. Bose[2]) hat die Frage theoretisch kritisch behandelt und zunächst die genannten Beobachtungen als mit einem faktisch stetigen Verlauf, wenn auch unter einem starken Knick bei einem großen positiven Differentialquotienten unterhalb, einem kleinen negativen oberhalb desselben, vereinbar erwiesen. Für die Deutung macht er die Annahme, daß der Einfluß der suspendierten Tröpfchen auf die innere Reibung ignoriert werden dürfe, und die Veränderlichkeit der letzteren nur auf der mit der Temperatur wechselnden Zusammensetzung der sie tragenden Flüssigkeit beruhe. Durch die weitere Annahme, daß die Substanz der suspendierten Tröpfchen beträchtlich größere innere Reibung besitze, als die äußere Flüssigkeit, und demgemäß ihre Auflösung in der letzteren deren innere Reibung beträchtlich vermehre, gelingt es ihm dann, einen Verlauf der inneren Reibung, erst für die trübe, dann für die klare Phase plausibel zu machen, der den genannten Beobachtungen, bzw. der sie nach Bose darstellenden Kurve, entspricht. Hierdurch erscheint die Beweiskraft jener Beobachtungen gegen die Emulsionshypothese in der Tat beträchtlich erschüttert; freilich ist damit aber auch kein entscheidendes Argument für diese Hypothese geliefert.

Weil die früheren Beobachtungen in dem für die Beurteilung der Verhältnisse in erster Linie maßgebenden Temperaturbereich direkt unterhalb des Klärungspunktes nicht eindringend

1) S. dazu die Monographie von Schenck; ferner R. Schenck, Zeitschr. f. phys. Chem. **27**, 167, 1898; E. Eichwald, Diss. Marb. 1904; C. Bühner, Diss. Marb. 1906; L. Puccianti, Rend. Linc. (5) **16**, [1], 754, 1907.

2) E. Bose, diese Zeitschr. **8**, 347, 1907.

genug erschienen, haben Bose und Conrat[1]) zahlreiche Ausflußversuche mit Anisaldazin in einem Temperaturbereiche von 164 bis 194° C angestellt, welches den zwischen 182,6 und 182,8° liegenden Klärungspunkt umschließt. Diese Versuche ergaben ein anfängliches langsames Abnehmen der Ausflußzeiten mit wachsender Temperatur, dem direkt unter dem Klärungspunkte ein ebenso langsames, schließlich ein wenig beschleunigtes Ansteigen folgte. Diese auf ca. 20° ausgebreitete Schwankung betrug etwa 10 Proz. des Absolutwertes. Im Bereiche des Klärungspunktes trat dann eine Steigerung der Ausflußzeit um nahe 40 Proz. innerhalb eines Temperaturintervalles von nur $^1/_2$° C ein. Es scheint einigermaßen zweifelhaft, ob wirklich (wie Bose annimmt) durch diesen Befund die Stetigkeit des Überganges bewiesen ist. In der Tat ist klar, daß jede Fehlerquelle (Temperaturschwankung, Inhomogenität der Schmelze durch teilweise Zersetzung, Verschiedenheit der Klärungstemperatur für die verschiedenen Teile) dahin wirken wird, eine vorhandene Unstetigkeit zu verhüllen, und ein Forscher, der etwa aus theoretischen Gründen von der Unstetigkeit des Überganges überzeugt ist, wird diese Anschauung durch die genannten Resultate kaum als widerlegt betrachten.

Etwa gleichzeitige Beobachtungen von Dickenschied[2]), die sich auf neue von Vorländer hergestellte Substanzen bezogen, haben einen ganz ähnlichen Verlauf der inneren Reibung mit der Temperatur ergeben, wie die früheren Messungen an den Gattermannschen Substanzen, bei zum Teil beträchtlich höheren absoluten Werten.

Dies ist von besonderer Bedeutung, weil die Vorländerschen Substanzen zum Teil eine derartig vollkommene Klarheit besitzen, daß auf sie die (durch die Trübung der anderen Substanzen für jene gestützte) Emulsionshypothese von keiner Seite angewandt worden ist. In der Tat sind diese Beobachtungen auch die Veranlassung dafür gewesen, daß, außer anderen Vertretern, auch Bose später die Emulsionshypothese hat fallen lassen.

6. Thermodynamik des Klärungsvorganges.

Nicht wesentlich anders, als im Vorstehenden bezüglich der inneren Reibung auseinandergesetzt ist, verhält es sich bezüglich der Unstetigkeit anderer physikalischen Eigenschaften bei der Klärungstemperatur. Je nach der Schwierigkeit der Beobachtung und der speziellen Eigenschaften der untersuchten Substanz erscheinen jene Unstetigkeiten mehr oder weniger wahrscheinlich gemacht; in allen Fällen läßt sich die Beweiskraft der Beobachtungen gegen die Emulsionshypothese bestreiten. Andererseits kann in ihnen doch auch eine gewisse Stütze für die Auffassung der trüben und der klaren Schmelze als zweier Phasen desselben einfachen Stoffes gefunden werden, insofern die Erscheinungen mit derselben vereinbar sind.

Es handelt sich zunächst um eine Reihe von Erscheinungen, die durch die allgemeinen Sätze der Thermodynamik für Übergänge zwischen verschiedenen Phasen (1) und (2) eines Einstoffsystems miteinander mehr oder weniger in Beziehung gesetzt werden[1]). Von diesen Beziehungen kommen in Betracht 1. die Clausius-Clapeyronsche Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{T\omega}{J\lambda} \tag{1}$$

zwischen dem Gradienten der Umwandlungstemperatur ϑ und dem Druck, der begleitenden Volumenänderung ω und der Wärmeaufnahme λ, wobei T die absolute Temperatur und J das mechanische Wärmeäquivalent bezeichnet; 2. die Clausiussche Beziehung

$$\frac{T\,d(\lambda/T)}{dT} = \overline{c_1} - \overline{c_2} \tag{2}$$

zwischen der Temperaturabhängigkeit der Umwandlungswärme und den spezifischen Wärmen der beiden Phasen längs der Übergangskurve.

Weiter ist herangezogen worden das aus der Theorie der Lösungen gewonnene Gesetz für die Depression der Übergangstemperatur zwischen zwei Phasen infolge von Beimengungen. Geht die Beimengung in die eine Phase (z. B. die feste im Falle des Schmelzvorganges) nicht ein, dann ist die Depression τ gegeben durch den Ausdruck

$$\tau = \frac{BT^2 q}{J\lambda}, \tag{3}$$

wobei B die Konstante des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes und q das Mischungsverhältnis in der zweiten Phase bezeichnet.

Die Beobachtungen[2]) bezogen sich auf die Dichteänderungen ω, die Wärmeaufnahmen λ,

1) E. Bose u. F. Conrat, diese Zeitschr. **9**, 169, 1908.

2) Fr. Dickenschied, Diss. Halle 1908. Dort auch Beobachtungen über die Änderung der Dichte und der Kapillarkonstanten bei den Übergängen.

1) S. dazu die umfassende Darstellung in der Monographie von R. Schenck, S. 44 u. f.

2) R. Schenck, Zeitschr. f. phys. Chem. **25**, 341, 1898; G. A. Hulett, Zeitschr. f. phys. Chem. **28**, 269, 1899; R. Schenck u. Fr. Schneider, ebenda, **29**, 557, 1899; K. Auwers, ebenda **32**, 60, 1900; A. C. de Kock, ebenda **48**, 137, 1904; A. Amerio, Nuovo Cim. V (2), 281, 1901; E. Eichwald, Diss. Marburg 1904; C. Bühner, Diss. Marburg 1906.

die thermische Änderung der Übergangstemperatur $d\vartheta/dp$, die spezifischen Wärmen c_1, c_2 und die Änderung τ der Übergangstemperatur. Die Resultate gaben der Größenordnung nach Übereinstimmung mit den thermodynamischen Gesetzen, und die numerischen Abweichungen konnten teils auf Fehlerquellen, teils auf Nichterfüllung der Voraussetzungen der Theorie geschoben werden. Insbesondere durfte die schlechte Erfüllung der Gleichung (3) dadurch als erklärt angesehen werden, daß sich nachweisen ließ, die der Schmelze zugefügte Beimengung trete ebensowohl in die klare, wie in die trübe Phase ein.

Was die Größenordnungen der auf den Übergang bezüglichen Veränderungen angeht, so erwiesen sich dieselben als sehr verschieden. λ und ω fanden sich sehr klein, demgemäß $d\vartheta/dp$ mäßig und τ — in Übereinstimmung mit (3) — beträchtlich. —

Bei Untersuchung der Einwirkung von fremden Beimengungen fand sich u. a. das interessante Resultat, daß gewisse von ihnen (z. B. Zusatz von Benzophenon zu *p*-Azoxyanisol) den Klärungspunkt so viel schneller herabdrücken, als den Schmelzpunkt, daß die den Verlauf

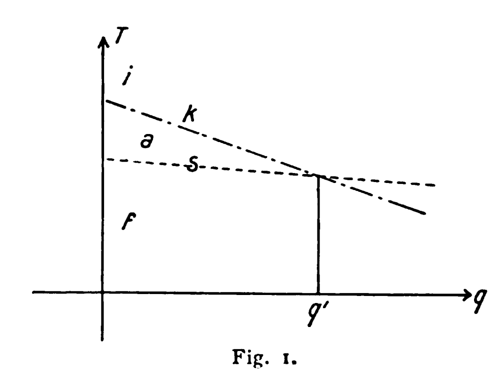


Fig. 1.

darstellenden Kurven sich schneiden. Bei einer gewissen Konzentration q' koexistieren dann also die feste Phase (*f*) mit der klaren (*i*) und der trüben (*a*) Schmelze zugleich; bei größeren ist nur das Paar (*f*, *i*) stabil. Es ist aber von Interesse und kann als Stütze für die Annahme homogener Phasen gelten, daß man durch vorsichtiges Unterkühlen nicht nur die *i*-Phase unterhalb des Erstarrungspunktes erhalten, sondern auch in die *a*-Phase überführen kann. Es wird damit also die Grenzkurve zwischen zwei labilen Phasen erreicht und überschritten, wie dies bei zweifellos homogenen Phasen gleichfalls ausgeführt worden ist.

Nicht minder hat sich bei Schmelzen mit Zusätzen jene schmale inhomogene Grenzzone zwischen der homogenen *i*- und der homogenen *a*-Phase von gleichen Konzentrationen q nachweisen lassen, die von der Thermodynamik gefordert wird. Dieselbe entsteht dadurch, daß bei Abkühlung der klaren Schmelze sich zunächst ein Gleichgewicht zwischen der klaren Schmelze von der Konzentration q und einer trüben von einer anderen Konzentration q_1 bildet und aus diesem Gemisch bei weiterer Abkühlung eine homogene Phase von der Konzentration q entsteht, während bei Erwärmung von hier aus zunächst die trübe Schmelze mit einer klaren von einer (dritten) Konzentration q_2 ins Gleichgewicht kommt, und dieses Gemisch sich zur klaren Schmelze entwickelt, von der oben ausgegangen worden ist.

Auch das Verhalten der Gemische von zwei „flüssige Kristalle" bildenden Substanzen ist untersucht worden, und es hat sich dabei, trotz der in gewisser Hinsicht prinzipiell verschiedenen Bedingungen, manche auffallende Analogie zu dem Verhalten fester Mischkristalle ergeben.

Diese im Gebiet der Thermodynamik gewonnenen Ergebnisse mögen, wie gesagt, keine hinreichenden Stützen für die Annahme einer homogenen anisotropen Phase sein, aber sie sind notwendige Konsequenzen einer solchen, und ihre Feststellung hat auch dann Bedeutung, wenn, wie oben schon angedeutet ist, der zwingende Beweis auf anderem Gebiete geliefert ist.

7. Dielektrizitäts- und Kapillarkonstanten.

Das Verhalten der Dielektrizitätskonstante ε innerhalb der *a*- und der *i*-Phase ist wiederholt der Gegenstand der Messung gewesen. Außer älteren, bereits in der S. 76 erwähnten Monographie von Schenck besprochenen Beobachtungen[1]) kommen hier neuere Messungen von Specht[2]) und Sultze[3]) in Betracht. Diese letzteren ergaben bei den untersuchten Gattermannschen und Vorländerschen Substanzen kleine Unstetigkeiten von ε in den Übergangspunkten, die früheren Beobachtungen zum Teil entgangen waren.

Diese Unstetigkeiten ließen sich bei *p*-Azoxyanisol im wesentlichen durch die Änderungen der Dichten ϱ begründen, welche nach den Messungen von Dickenschied[4]) den bezüglichen Übergang begleiteten, wenn man dafür die H. A. Lorentzsche Regel zur Anwendung brachte, nach der unter gewissen Voraussetzungen für eine Substanz

1) R. Schenck, Kristallinische Flüssigkeiten, S. 30 u. f.; R. Abegg u. Seitz, Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 491, 1891; E. Eichwald, Diss. Marburg 1904.
2) B. Specht, Diss. Halle 1908.
3) C. Sultze, Diss. Halle 1908.
4) Fr. Dickenschied, Diss. Halle 1908.

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\varrho} = K \qquad (4)$$

d. h. konstant sein sollte. Wo sich eine solche Erklärung nicht genügend erwies, zeigten sich auch innerhalb der Phasen Abweichungen gleicher Ordnung von dem Lorentzschen Gesetz. Man kann daraus schließen, daß die immer kleinen Änderungen der Konstanten K in Umwandlungspunkten wahrscheinlich nicht auf Änderungen der chemischen Konstitution zu deuten sind.

Das letztere Resultat ist auch gegen die nach S. 82 von manchen Forschern vertretene Anschauung geltend gemacht worden, daß die trübe Schmelze eine Suspension von festen Kriställchen wäre; denn da nach der Erfahrung die feste Phase der Regel nach eine beträchtlich größere Dielektrizitätskonstante besitzt, als die flüssige, so ließe die trübe Schmelze bei jener Auffassung eine beträchtlich größere Dielektrizitätskonstante erwarten, als die klare. Doch kann man die zwingende Kraft einer solchen Folgerung bezweifeln. —

Beobachtungen über Kapillaritätskonstanten α sind erst von Schenck[1]) an *p*-Azoxyanisol und -phenetol und Cholesterylbenzoat, später von Dickenschied[2]) an zwei Vorländerschen Substanzen angestellt worden.

Derartige Beobachtungen haben eine prinzipielle Bedeutung für die Deutung der verschiedenen flüssigen Phasen, weil sie mit Hilfe eines von Eötvös angegebenen, in neuerer Zeit auch theoretisch begründeten Satzes zu einer Vergleichung der Molekulargrößen der trüben und der klaren Phase benutzt werden können. Jener Satz setzt nämlich das Temperaturgefälle des Quotienten aus Kapillaritätskonstante und der $^2/_3$ ten Potenz der Dichte mit der $^2/_3$ ten Potenz des Molekulargewichtes indirekt proportional. Die Beobachtung hat nun ergeben, daß jedenfalls bei *p*-Azoxyanisol und bei *p*-Azoxyphenetol nach jenem Satz die Molekulargrößen in den genannten beiden Phasen als gleich erscheinen. Kleine Differenzen des bez. Temperaturgefälles sind ja offenbar nicht auf die Änderung von Molekulargrößen zu schieben, die sich in beträchtlichen Sprüngen vollziehen müßten.

Bei den von Dickenschied untersuchten Substanzen mit zwei a-Phasen ist das Verhalten beim Übergang $a_I \rightleftarrows i$ so, daß man dort gleichfalls auf eine Konstanz der Molekulargröße schließen dürfte. Ganz abweichend ist das Verhalten von α im Bereiche des Überganges $a_{II} \rightleftarrows a_I$, wo a_{II} einen negativen, a_I einen positiven Temperaturkoeffizienten zu haben scheint, also die Temperaturabhängigkeit sich durch eine nach unten gerichtete starke Ecke oder Spitze ausdrückt. Eine befriedigende Deutung dieses Verlaufes ist noch nicht gegeben.

1) R. Schenck, Zeitschr. f. phys. Chem. **25**, 346, 1898.

2) Fr. Dickenschied, l. c.

8. Verschiedene Typen von Substanzen mit a-Phasen.

Während die physikalischen Beobachtungen und Überlegungen im Sinne der Elimination der Emulsionshypothese wirkten, hatte auch die chemische Arbeit sich in der gleichen Richtung bewegt. Es kommen hier in erster Linie die umfänglichen und zielbewußten Untersuchungen Vorländers[1]) in Betracht, die der ganzen Frage eine ungemein große Förderung gegeben haben und auf die oben schon wiederholt hingewiesen worden ist. Kann auch nach der Anlage dieses Berichtes auf die Ergebnisse dieser Arbeiten nach chemischer Seite nicht näher eingegangen werden, so muß doch (neben einigen direkt physikalisch wichtigen Resultaten) ein jene allgemein charakterisierender Abschnitt aus Vorländers Monographie[2]) hier Platz finden.

Vorländer sagt: „Etwa 170 kristallinisch-flüssige Substanzen wurden neu aufgefunden und geprüft. Sie sind weit verbreitet unter den organischen Verbindungen und finden sich besonders bei vielen Benzolderivaten, bei Karbonsäuern, Estern, Phenoläthern, Ketonen, Aminen, Nitroverbindungen, Azinen, Arylidenaminen, Azo- und Azoxy-Verbindungen u. a. m. Die Beziehungen zur chemischen Konstitution sind so einfach, daß man jetzt kristallinisch-flüssige Substanzen in beliebiger Anzahl synthetisch darzustellen vermag, während man vor zwei Jahren nur einige wenige Vertreter kannte. Das Resultat der chemischen Untersuchung läßt sich in den Satz zusammenfassen: Der kristallinisch-flüssige, anisotrope Zustand wird durch eine möglichst lineare Struktur der Moleküle hervorgerufen. Doch nicht jedes linear gebaute Molekül ist im flüssigen Zustande kristallinisch. Wie überall auf solchem Gebiete physikalischer und chemischer Eigenschaften treffen auch hier mehrere Umstände zusammen. Wir finden im günstigsten Falle einige den Zustand beeinflussende Faktoren heraus, doch es fehlt die Kenntnis, wie die Faktoren miteinander wirken."

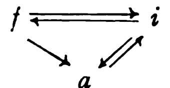
Man darf wohl behaupten, daß diese Feststellungen im hohen Grade für jene Auffassung

1) D. Vorländer, Zeitschr. f. phys. Chem. **57** (3) 361, 1906; Ber. d. D. Chem. Ges. **40**, 4532, 1907; **41**, 2045, 1908. Außerdem auch F. M. Jaeger, Amst. Proc. **9**, 359, 472, 483, 1906; Chem. Zentralbl. 1907, (2), 1321.

2) D. Vorländer, Kristallinisch-flüssige Substanzen, S. 43.

sprechen, daß es sich bei den anisotrop-flüssigen Körpern wirklich um Zustände einfacher Körper handelt, die weitgehende Analogien zum kristallinischen Zustand besitzen.

Von wesentlichem physikalischen Interesse sind einige Resultate Vorländers, die sich auf die Zahl und Art der möglichen Umwandlungen beziehen, welche Körper mit flüssig-anisotropen Phasen erfahren können. Schon Lehmann hatte bemerkt, daß neben Substanzen, die gemäß dem Schema $f \rightleftarrows a \rightleftarrows i$ Übergänge von der festen in die a-Phase und von dieser in die i-Phase in vollkommen umkehrbarer Weise (enantiotrop) zulassen, solche existieren, deren a-Phasen nur (monotrop) von der Seite der i-Phase erreichbar ist. Dabei kann aber die Abkühlung der letzteren ebensowohl auf die anisotrop-flüssige als auf die feste Phase führen, wie dies durch das Schema:

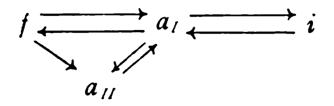


erläutert wird. Vorländer hat diese Verhältnisse näher studiert und die große Rolle festgestellt, welche bei der Bestimmung der Art der Umwandlung die Größe der vorgenommenen Unterkühlung der isotropen Schmelze spielt. Er hat auch eingehend die Komplikationen untersucht, die eintreten, wenn die feste Phase in zwei Modifikationen existiert und die anisotrop-flüssige einen Übergang nach beiden hin besitzt.

Ganz besonderes Interesse erweckt aber die Entdeckung Vorländers, daß es Substanzen gibt, welche in zwei bis vier a-Phasen existieren können, zwischen denen eine Grenze von derselben Schärfe existiert, wie zwischen der festen und einer a-Phase. Die verschiedenen a-Phasen unterscheiden sich nicht nur durch die Kristallform isoliert suspendierter kleiner Massen, sondern auch durch die physikalischen Eigenschaften der Schmelzen, insbesondere durch ihre innere Reibung.

Bei diesen Substanzen entstehen je nach der Umkehrbarkeit oder Nichtumkehrbarkeit der verschiedenen Übergänge neue Typen. Es möge genügen, hier nur Fälle mit zwei anisotrop-flüssigen Phasen in Betracht zu ziehen. Eine in allen Umwandlungen umkehrbare Substanz von dem Schema: $f \rightleftarrows a_{II} \rightleftarrows a_I \rightleftarrows i$ ist der von Vorländer und Wilke hergestellte Anisal-p-aminozimtsäureäthylester. Die Umwandlungstemperaturen liegen bei 108°, 117°, 136°.

Kompliziertere Verhältnisse treten ein, wenn einer der Übergänge nicht umkehrbar ist; ein Beispiel bietet Cholesterin-Caprinat, welches sich gemäß dem Schema:



verhält. Noch mehr verwickeln sich die Verhältnisse, wenn neben mehreren a-Phasen auch noch mehrere feste existieren. Es soll hierauf nicht eingegangen werden.

(Fortsetzung folgt.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Alfred Schaarschmidt für Technologie der Teerfarbstoffe, an der Universität Kiel Dr. Karl Freudenberg für Chemie.

Ernannt: Das Mitglied der Schulabteilung beim Magistrat Lodz Stanislaw Garlicki zum Professor für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule Warschau, Physiker Dr. Orgler zum Kais. Regierungsrat und Mitglied des Patentamts in Berlin, der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. med. Max Siegfried zum ord. Honorarprofessor für Physiologische Chemie daselbst.

Verliehen: Dem Privatdozenten der Physik an der Universität Zürich Dr. Heinrich Greinacher der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor der Physik an der Universität von Michigan in Ann Arbor Dr. Karl Eugen Guthe, der a. o. Professor für synthetische Geometrie an der Universität Heidelberg Dr. Wolfgang Vogt (am 4. März gefallen), der ord. Professor für Chimie appliquée aux industries des matières colorantes am Conservatoire national des arts et métiers in Paris Daniel Auguste Rosenstiehl.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1916.

Technische Hochschule Aachen.

Stark: Experimentalphysik II: Atomdynamik, Optik, Thermodynamik, 4; Physikalisches Praktikum: a) Praktische Übungen aus allen Teilen der Physik für Anfänger, 4 oder 6, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen (Dissertationen), tägl. — **Seitz:** Theoretische Physik: Theorie der elektrischen Schwingungen und elektromagnetische Lichttheorie, 2; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kursus: Wärme, Schall, Licht, 2. — **Steubing:** Photographie I, für Anfänger, II, für Fortgeschrittene, 1, Übungen, 2; Theorie der Wärmestrahlung, 1. — **Hopf:** Quantentheorie, 1; Variationsprinzipien der Mechanik, 1. — **Schreber:** Technische Thermodynamik, 2. — **Grotrian:** Allgemeine Elektrotechnik, 5; Theoretische Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 8. — **Rasch:** Ausgewählte Kapitel der praktischen Elektrotechnik, 1; Einleitung in die Elektrotechnik, 2; Konstruktionslehre der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 2. — **Finzi:** Elektrische Zentralanlagen und Leitungen, 2, Übungen, 2; Elektromotorische Antriebe in Berg- und Hüttenwerken, 2. —

Bredt: Organische Experimentalchemie I, 4; Allgemeine Übersicht über die organische Chemie, 2; Organisches Praktikum (mit Lipp). — **Classen:** Allgemeine

und anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisches Praktikum; Elektroanalytisches und elektrochemisches Praktikum. — **Rau**: Chemische Technologie II: Anorganische Industrien, 2, IV, 2; Entwerfen von chemischen Apparaten und Fabrikanlagen, Übungen, 4; Chemischtechnisches Praktikum (mit Lambris und Salmang). — **Ruer**: Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1; Übungen in physikalischer Chemie für Hüttenleute, 3, für Chemiker, 1 Vormittag, für Fortgeschrittene: Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten; Allgemeines hüttenmännisches Praktikum, 3. — **v. Kapff**: Chemische Technologie der Gespinstfasern: Färberei, Bleicherei usw., 2, Übungen, 4. — **Lambris**: Kalk- und Zementindustrie, 1. —

Blumenthal: Höhere Mathematik III, 3; Elemente der Differential- und Integralrechnung mit Übungen, 5, Übungen, 1. — **Hamel**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Funktionentheorie, 2 *g*. — **v. Kármán**: Mechanik I: Übersicht über Dynamik des Punktes und starren Körpers, Festigkeitslehre, Hydraulik, 4, Übungen, 1, II: Dynamik und Hydraulik, 3, Übungen, 1; Flugtechnische Aerodynamik, 2 *g*. — **Kötter**: Darstellende Geometrie II, 2, Übungen, 2; Elemente der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 2. — **Gast**: Praktische Geometrie I, 2, II, 1; Geodätisches Praktikum I, 1 Tag, II, 1 Nachmittag; Geodätische Ausarbeitungen, Übungen, 4; Geographische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 2. — **Wilski**: Markscheiden und Feldmessen II, 3, Übungen (mit Wandhoff und Nysten), 1 Tag. — **Wandhoff**: Markscheiderische Zeichen- und Rechenübungen, 2. —

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik I, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Demonstrationsexperimente, 1; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Veillon**: Handfertigkeitspraktikum (mit Zickendraht), 2. — **Matthies**: Optik, 4, Übungen, 1 *g*; Elastizitätstheorie, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Zickendraht**: Elektrotechnische Messungen an Maschinen, 2. —

Rupe: Die Methoden der organischen Synthese, 3; Chemisches Vollpraktikum für organische Chemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Fichter und Bernoulli), 1 *g*. — **Fichter**: Anorganische Experimentalchemie, 6; Analytisches Halbpraktikum für Anfänger (mit Bernoulli), 9, für Mediziner: Übungen in der qualitativen Analyse; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Kreis**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. — **Bernoulli**: Physikalische Chemie der Metalle und Legierungen, 1; Kinetische Theorie der Gase und Suspensionen, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum: Übungen und Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. —

Spieß: Kurven und Flächen, 4; Ein Kapitel der Geometrie, 3; Mathematisches Seminar (mit Hecke), 1 *g*. — **Hecke**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1 *g*; Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen, 2. — **Flatt**: Pädagogisches Seminar, math.-naturwissenschaftliche Abteilung II, 2; Darstellende Geometrie, 2. — **Knapp**: Populäre Astronomie II, 1; Geographische Ortsbestimmungen, 2, Astronomische Übungen, 2—3; Erdbeben, 1 *g*. —

Universität Berlin.

Rubens: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 5, Mathematische Ergänzung, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, $1^1/_2$ *g*; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium, für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck**: Mechanik deformierbarer Körper, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Wehnelt**: Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 *g*; Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3. — **Hellmann**: Theoretische Meteorologie, 1; Meteorologisches Kolloquium, 1 *g*. — **Warburg**: Elektrisches Leitungsvermögen, 2. — **Schmidt**: Erdmagnetismus, 2; Allgemeine Theorie periodischer Vorgänge, 1 *g*. — **Neesen**: Geometrische Optik und optische Instrumente, 2. — **Blasius**: Übungen im Anschluß an das Praktikum, 1 *g*. — **E. Meyer**: Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik, 2. — **Born**: Kinetische Theorie der festen Körper, 3; Kapillarität, 1 *g*. — **Weinstein**: Allgemeine Mechanik und Mechanik der starren Systeme, 4; Vektoranalysis der physikalischen Größen, 2; Geschichte der Physik vom 19. Jahrhundert ab, 1 *g*. — **Krigar-Menzel**: Verschiedene Gebiete der theoretischen Physik, 4. — **Leß**: Praktische Wetter- und Klimakunde, 1; Über die jeweiligen Witterungsvorgänge, 1 *g*. — **Byk**: Absolutes Maßsystem und physikalischer Dimensionsbegriff, 1. — **Henning**: Theorie elektrischer Schwingungen, 2. — **Kiebitz**: Atmosphärische Elektrizität, 1. — **Reiche**: Kinetische Theorie der Gase, 2. — **Scheffer**: Angewandte wissenschaftliche Photographie, mit praktischen Übungen, 1; Grundlagen der wissenschaftlichen Mikroskopie und Mikrophotographie, 1 *g*. —

Fischer: Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium (mit Gabriel, Traube, Leuchs und Stähler), tägl., Kursus für Mediziner und Zahnärzte (mit Schoeller und Schrauth), 6. — **Nernst**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen und Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium (mit Marckwald), tägl. — **Beckmann**: Chemische Untersuchungen, tägl. *g*. — **Wichelhaus**: Technologie für Chemiker: Anorganische Stoffe, 4; Übungen (mit Großmann), tägl.; Anleitung im Institut (mit Großmann), tägl. — **Gabriel**: Organische Experimentalchemie, 5. — **Thoms**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 4; Praktische Übungen und Arbeiten in pharmazeutischer, toxikologischer und Nahrungsmittel-Chemie, tägl. — **Traube**: Quantitative chemische Analyse, 1. — **Biedermann**: Explosivstoffe, 2. — **Fock**: Physikalische Chemie, 1; Kristallstruktur, 1. — **Marckwald**: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Rosenheim**: Anorganisch-chemisches Praktikum (mit R. J. Meyer), tägl.; Übungen in der Experimentalchemie, besonders für Lehrer und Lehrerinnen (mit R. J. Meyer), 8; Praktische Übungen in der Gas- und Maßanalyse, 4. — **v. Buchka**: Chemie der Nahrungsmittel, Genußmittel und Gebrauchsgegenstände, 4. — **Jacobson**: Besprechung chemischer Tagesfragen, 1. — **Spiegel**: Anorganische Chemie, für Zahnärzte, 3. — **Neuberg**: Arbeiten auf dem Gebiete der Biochemie, tägl.; Organischchemische Arbeiten, tägl. — **Sachs**: Konstitutionsbestimmung organischer Verbindungen, 1. — **Meisenheimer**: Überblick der organischen Experimentalchemie, 3, Ergänzungen, 2; Anorganisch- und organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Großmann**: Besprechung chemischtechnischer und wirtschaftlicher Tagesfragen, mit Exkursionen, $1^1/_2$. — **Houben**: Chemische Entdeckungen und ihre Geschichte, 1 *g*. — **Leuchs**: Neuere organische Arbeiten, 1 *g*. — **Pringsheim**: Alkoholische Gärung, 1. — **Anselmino**: Arzneimittelgesetzgebung, 1. — **Lenz**: Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, $1^1/_2$; Mikrochemische Analyse, 2. — **Schrauth**: Die Methodik der Arzneimittelsynthese, 1. —

Schwarz: Differentialrechnung, 4, Übungen, 14tägig, 2 *g*; Theorie der analytischen Funktionen I, 4; Analytische Geometrie der Raumkurven, 2 *g*; Mathematisches Seminar (mit Frobenius und Schottky), 2 *g*. — **Foerster**: Geschichte der Astronomie, 2 *g*; Grundlehren der Zeit- und Ortsbestimmung, 1 *g*; Zur Geschichte der kosmischen Harmonielehre, 1 *g*. — **Helmert**: Geodätische Dreiecke, 1 *g*. — **Frobenius**: Theorie der Determinanten, 4. — **Schottky**: Analytische Geometrie, 4. — **Struve**: Praktische Astronomie, Theorie der Instrumente, 3; Übungen

auf der Sternwarte für Fortgeschrittene, *g*. — **Cohn**: Theorie der Beobachtungsfehler, 3, Übungen im Seminar, 2 *g*. — **Rothe**: Differentialgeometrie, 4. — **Knopp**: Integralrechnung, 4, Übungen, 1 *g*; Elliptische Funktionen, 4. — **Schur**: Theorie der Integralgleichungen, 4; Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Über den Integralbegriff, 1 *g*. — **Marcuse**: Geographische Ortsbestimmung mit geographisch-, nautisch- und aeronautisch-astronomischen Übungen, 1 1/2; Einführung in die astronomische Geographie und kosmische Physik, mit Lichtbildern, 1 1/2; Die Naturwissenschaft im Dienste des Krieges, mit Lichtbildern, 1 *g*. — **Witt**: Geometrische Optik: Fernrohr, 2; Übungen am Fernrohr, 6 *g*. — **Schweydar**: Analyse der Meeresgezeiten, 1 *g*. —

Technische Hochschule Berlin.

Kurlbaum: Experimentalphysik: Wärme, Optik, 4; Physikalische Übungen, 4. — **Krigar-Menzel**: Allgemeine Mechanik II: Gleichgewicht und Bewegung von elastischen, festen und flüssigen Körpern, 4; Einführung in die kinetische Gastheorie, 2. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente (Physikalische Übungen), 4. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik I, 2; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, 1; Elektromagnetismus und Induktion mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, 2. — **Berndt**: Temperaturmessungen, 1. — **Kaßner**: Der Wind nach Entstehung, Messung und Ausnutzung für Hoch- und Hafenbau, See- und Luftschiffahrt, sowie für Windmotorenbau, 1. — **Kock**: Methoden zur Aufnahme von schnell verlaufenden elektrischen und magnetischen Erscheinungen: Oszillographen usw., 2; Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie, 2. — **Möller**: Beleuchtungstechnik, 1. — **Petzoldt**: Die Relativitätstheorie, 1 *g*. — **Pirani**: Elemente der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens, mit besonderer Berücksichtigung physikalischer und technischer Anwendungen, 1; Ausführung kleinerer physikalischer Experimentaluntersuchungen, mit besonderer Berücksichtigung der Licht- und Temperaturmessungen, 2. — **Zehnder**: Angewandte Physik mit Exkursionen in technischen Betrieben, 2. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. — **Orlich**: Grundlagen der Elektrotechnik, 4, Übungen, 2; Übungen im Elektrotechnischen Laboratorium, 12; Elektrotechnische Meßkunde, 2, Übungen, 2. — **Wedding**: Übungen im Elektrotechnischen Laboratorium, 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2; Beleuchtungstechnik, 2. — **Franke**: Elektrische Fernmeldetechnik einschließlich drahtlose Telegraphie, 4, Übungen, 6; Entwerfen von Instrumenten und Apparaten der Meß- und Fernmeldetechnik, 2. — **Kloß**: Elektromaschinenbau, 4, Übungen, 8, Abgekürzte Vorlesung, 2; Übungen im Elektrotechnischen Versuchsfelde, 4. — **v. Parseval**: Motorluftschiffe, 2; Flugzeuge, 2; Übungen im Bau von Luftfahrzeugen, 2. — **W. Reichel**: Elektrische Kraftanlagen und Bahnen, 4, Übungen, 4. — **Benischke**: Allgemeine Wechselstromtechnik, 4. — **Breslauer**: Berechnung und Prüfung elektrischer Maschinen nach den in der Praxis herrschenden Gepflogenheiten, 2. — **Faßbender**: Einführung in die drahtlose Telegraphie, 2. — **Rüdenberg**: Selbstinduktion und Streuung in elektrischen Maschinen, 2. — **Wagner**: Ausgewählte Kapitel aus der Hochspannungstechnik, 2. — **Zehme**: Elektrische Stadtschnellbahnen und Vorortsbahnen, 2. — **Krell**: Schiffselektrotechnik, 2. — **Dietzius**: Luftschiffbau und Luftschiffahrt, 1. —

Hofmann: Experimentalchemie: Chemie der Metalle mit Einführung, 4; Praktische Arbeiten im anorganischen Laboratorium, tägl.; Gasanalyse, Übungen, 2. — **v. Buchka**: Chemie der Nahrungsmittel mit Berücksichtigung der Nahrungsmittelanalyse und Bakteriologie, 4; Chemisch-technische Analyse, 2. — **Dolezalek**: Angewandte Elektrochemie, 2; Kleines physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, 2 halbe Tage; Praktische Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Institut, tägl. — **Holde**: Untersuchung der Kohlenwasserstofföle und verwandter Produkte: Schmieröle, Treiböle, Leuchtöle, Paraffin, Ceresin, Asphalt usw., 2. — **Miethe**: Spektralanalyse, mit Übungen, 2; Photochemie und photomechanische Prozesse, 2; Konstruktionstypen photographisch-optischer Instrumente, 1; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium, für Photochemiker, tägl.; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen, 16. — **Pschorr**: Organische Chemie II: Aromatische Reihe, zyklische Verbindungen, Farbstoffe, Alkaloide usw., 4; Praktische Arbeiten im organischen Laboratorium, tägl. — **Reisenegger**: Chemische Technologie I, 4; Glas, Keramik, Apparatenkunde, 4; Praktische Arbeiten im technisch-chemischen Institut, tägl. — **Traube**: Thermochemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Kolloquium über Chemie der Kolloide, 1. — **Arndt**: Anwendungen der physikalischen Chemie auf technische Vorgänge, 1. — **Bucherer**: Die Grundzüge der Färberei und Druckerei, 1. — **Byk**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 2. — **Endell**: Ausgewählte Kapitel der Mineralchemie, nebst technischen Anwendungen, 1. — **v. Girsewald**: Praktische Kalorimetrie mit Übungen, 2. — **Guertler**: Physikalische Chemie der Metallegierungen II: Konstitution ternärer Systeme, 2; Mineralsynthesen, 1. — **Just**: Chemische Elektronenlehre, 1. — **Lehmann**: Die Farbenphotographie, 1. — **Liebermann**: Methoden zur Konstitutionsbestimmung organischer Verbindungen, 1. — **Loewenherz**: Erläuternde Vorträge zu den Führungen durch das Chemische Museum: Organischer Teil, 1 *g*; Die Produkte der chemischen Industrie, ausgewählte Kapitel im Anschluß an die Sammlungen: Organischer Teil, 1 *g*. — **Scheibler**: Über heterozyklische Verbindungen, 1. — **Seegert**: Ausgewählte Kapitel aus der Spektralanalyse, 1. — **Simonis**: Organische Analyse und Arbeitsmethoden, 2. — **Stavenhagen**: Einführung in die Experimentalchemie, 2. — **Treadwell**: Ausgewählte technisch-chemische Prüfungsmethoden, 1. — **Ullmann**: Ausgewählte Kapitel der Farbenindustrie, 1. — **Voswinckel**: Terpene und Kampfer, 1. — **Wirth**: Analytische Chemie, 1. — **Wolffenstein**: Die neueren Arzneimittel und ihre Fabrikation, 2. —

Dziobek: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Haentzschel**: Elemente der Mechanik, 4. — **Jolles**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie, 2. — **Lampe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen, 2. — **Rothe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Differentialgleichungen, 2. — **Scheffers**: Darstellende Geometrie II, 5, Übungen, 5. — **Wallenberg**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Funktionentheorie II, 2; Variationsrechnung, 2. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen II, 2; Die Meßinstrumente des Chemikers, 2. — **Fuchs**: Lineare Differentialgleichungen, 2. — **Jacobsthal**: Höhere Zahlentheorie, 4. — **Lichtenstein**: Darstellende Geometrie I, 5, Übungen, 5. — **Haußmann**: Niedere Geodäsie, 4; Geodätisches Praktikum II, 2; Praktische Übungen im Feldmessen, 4; Planzeichnen zugleich Bearbeitung der Aufnahmen, nach Verabredung; Höhere Geodäsie, 2. — **Reißner**: Mechanik und graphische Statik I, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 2 *g*. — **Wolff**: Niedere Geodäsie im Abriß, Aufnahme und Bearbeitung eines Höhen- und Lageplanes, 1, Übungen, 1 Nachmittag. — **Hartmann**: Kinematische Geometrie und theoretische Kinematik, 2; Maschinengetriebe: Anwendungen der Kinematik, 2. — **E. Meyer**: Mechanik I, 4, Übungen und Festigkeits-Laboratorium, 3; Ausgewählte Kapitel der Technischen Mechanik, 2. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik I: Allgemeine Physik, Akustik, Optik, 6; Wärmelehre (Schluß), 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Theoretisch-praktischer Kurs der Photographie, 2; Physikalisches Praktikum, 4. — **Gruner**: Thermodynamik, 3, Übungen, 1; Elektronentheorie, 2; Seminar für theoretische Physik, nach Verabredung. — **Blattner**: Theorie der Wechselströme, 1. — **Luterbacher**: Die Elemente der Meteorologie und ihre Beobachtung, 2. —

Kohlschütter: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner, 8; Physikalische Chemie, 2. — **Ephraim**: Analytische Chemie, 3; Gasanalytisches Praktikum, 3; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie, für Mediziner und Lehramtskandidaten, 2. — **Tambor**: Organische Chemie I, 6, Repetitorium, 1; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Frl. Woker**: Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, tägl.; Kurs für die Untersuchung von Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Milch, Magensaft, 4; Theorie und Praxis der Fermentuntersuchung, 1, Übungen im Nachweis und der Bestimmung von Fermenten, 1; Die physikalische Chemie der Zelle, 1 *g*; Die Chemie als Hilfswissenschaft der Biologie, 2; Die Katalysatoren der Technik, 1. — **Abelin**: Chemie der Eiweißkörper und ihrer Spaltungsprodukte, 1. — **Schaffer**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Chemische Technologie der Lebensmittelgewerbe, nach Verabredung. —

Graf: Kugelfunktionen II, mit Repetitorium, 3; Besselsche Funktionen II, mit Repetitorium, 3; Integralrechnung, mit Repetitorium, 3; Differentialgleichungen I, 2; Funktionentheorie II, 2; Renten- und Versicherungsrechnung, 2; Mathematisches Seminar (mit Huber), 1 1/2. — **Huber**: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2; Theorie der algebraischen Flächen, 3; Theorie und Anwendung der elliptischen Integrale, 2; Einleitung in die Differentialgeometrie, 1; Mathematisches Seminar: Geometrische Richtung (mit Graf), 1. — **Ott**: Algebraische Analysis I, 2; Differentialrechnung, 2; Analytische Geometrie der Ebene I, 2; Goniometrie und ebene Trigonometrie, 2; Mathematische Übungen, 2. — **Benteli**: Elemente der darstellenden Geometrie, 4; Praktische Geometrie, mit Übungen auf dem Terrain, 3. — **Crelier**: Ausgewählte Kapitel aus der synthetischen Geometrie, 2; Nichteuklidische Geometrie, 2; Unterrichtsfragen aus der Geometrie, 1. — **Mauderli**: Die astronomischen Instrumente II, 1, Übungen, mit Projektionen und Exkursionen, nach Verabredung; Geographische Ortsbestimmung auf Forschungsreisen, 1, Übungen, nach Verabredung; Wissenschaftliches Rechnen I, 1; Geschichte der Astronomie seit der Erfindung des Fernrohrs, 1 *g*. — **Berliner**: Höhere Algebra (Fortsetzung), 1. — **Moser**: Intensitätsfunktion und Überlebensordnung, 1—2; Mathematische Grundlagen der Invaliden- und Altersversicherung, 2; Ausgewählte Kapitel der Versicherungslehre, nach Verabredung; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1—2. — **Bohren**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. —

Universität Bonn.

Kayser: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8, für Fortgeschrittene, tägl. — **Eversheim**: Übungen für Lehramtskandidaten im Experimentalvortrag und in der Anfertigung einfacher Apparate, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 1 *g*. — **Pflüger**: Wärmetheorie, 4, Übungen, 1 *g*. — **Bucherer**: Einführung in die Vektoranalysis, 1 *g*. —

Anschütz: Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6; Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Chemie, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene, sowie für Nahrungsmittelchemiker (mit Benrath, Frerichs und Kippenberger), tägl., für Mediziner (mit Benrath), tägl. außer Sonnabend. — **Benrath**: Spezielle anorganische Chemie II, 1 *g*; Justus Liebig und seine Zeit, 1 *g*; Analytische Chemie II, 2; Übungen in der Gasanalyse, 3 *g*. — **Rimbach**: Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie, 3; Chemisches Rechenseminar: Unterstufe: Stöchiometrische und chemisch-analytische Aufgaben (mit Wintgen), 14tägig, 2 *g*, Oberstufe: Physikalisch-chemische Aufgaben (mit Wintgen), 14tägig, 2 *g*; Übungen in den wichtigsten physikalisch-chemischen Meßmethoden, 3. — **Wintgen**: Physikalische Chemie und Kolloidchemie für Mediziner und Biologen, 2. — **Frerichs**: Toxikologische Analyse, 1; Pharmazeutische Chemie II (organisch), 3, III: Zyklische Verbindungen, 1 *g*. — **Gewecke**: Einführung in das chemische Praktikum, 1. — **Mannheim**: Einführung in das chemische Praktikum, für Pharmazeuten, 1; Sterilisieren von Arzneimitteln, 1. — **Kippenberger**: Grundzüge der Nahrungsmittelchemie, 2; Chemische Technologie, organischer Teil, ausschließlich der Farbstoffchemie, mit Exkursionen, 2; Einführung in die chemische Großtechnik II: Organisch-chemische Betriebe, mit Exkursionen, 1 *g*; Besprechung technisch-chemischer Betriebskontrollen, 1 *g*. — **Laar**: Übungen in ausgewählten photographischen Verfahren, tägl.; Graphische Verfahren mit Besichtigungen, 1. —

Study: Einführung in die Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar: Oberstufe: Vortragsübungen. — **London**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Analytische Geometrie II: Projektive Geometrie, 3. — **N. N.**: Zahlentheorie, 4; Theorie der elliptischen Funktionen, 4; Mathematisches Seminar: Mittelstufe: Behandlung einfacher Aufgaben für mittlere Semester, 14tägig, 2 *g*. — **C. Müller**: Einführung in die Geodäsie, mit Übungen im Freien, 2 *g*. — **Küstner**: Theorie und Praxis der astronomischen Instrumente, 3; Praktische Übungen im astronomischen Beobachten, nach Verabredung; Astronomisches Kolloquium, 1 *g*. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Dießelhorst: Experimentalphysik: Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, Wärmelehre und Optik, 4; Wechselströme, 3; Physikalisches Praktikum I: Einfache experimentelle Aufgaben aus allen Gebieten der Physik, II: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Laboratorium; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Bergwitz**: Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre, 1; Theoretische Telegraphie, 1. — **Witte**: Naturwissenschaft und Erkenntnistheorie, 1. — **Peukert**: Elektrotechnische Messungen, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 9; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, für Fortgeschrittene, 9. — **N. N.**: Elektromaschinenbau, 4, Übungen, 6; Elektrische Bahnen, 2; Elektrische Kraftbetriebe, Übungen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Mosler**: Drahtlose Telegraphie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, 3. — **Micheler**: Einführung in die Photographie, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. —

Meyer: Organische Experimentalchemie, 6; Chemische Technologie der Faserstoffe, 1; Arbeiten im chemischen Laboratorium; Chemisches Kolloquium (mit Freundlich), nach Verabredung, *g*. — **Biehringer**: Analytische Chemie, 2; Chemisch-technische Rechnungen, 1; Heizstoffe und Kesselspeisewasser, 2, Übungen, 1. — **Freundlich**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie I, 4; Arbeiten im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie. — **Reinke**: Chemische Technologie II 2: Technische Herstellung der Zuckerarten, 4; Chemisch-technische Analyse II für Zucker-, Stärke-, Gärungs- und Molkereitechnik, 2; Enzyme, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe; Seminaristische Übungen, monatlich 2 *g*. — **Schultze**: Agrikulturchemie, 2. — **Beckurts**: Abwässerreinigung, 1; Wasser- und Harnuntersuchung, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für phar-

mazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie. — **Troeger**: Analytische Chemie, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde**: Alkaloide, 2. —

Fricke: Analytische Geometrie und Algebra, 3; Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, 2; Grundlagen der Theorie der Fourierschen Reihen, 1. — **Timerding**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Perspektive, 1, Übungen, 2; Einführung in die höhere Mathematik, 3, Übungen, 1. — **N. N.**: Statik starrer und elastisch-fester Körper, 4, Übungen, 2. — **Schlink**: Technische Mechanik I: Statik, 6, Übungen und Repetitionen, 3, III: Hydraulik, Aerostatik und Aerodynamik, 4, Übungen und Repetitionen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Luftfahrt, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Konstruktionen, 2. — **Näbauer**: Geodäsie I, 5, Übungen, 2; Grundzüge der sphärischen Astronomie, 2, Übungen, 2; Vermessungsübungen I, 5, II, 9; Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 3. —

Universität Breslau.

Lummer: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schaefer und Waetzmann), 3, (mit Schaefer, Waetzmann und Ladenburg), 3, für Mediziner (mit Ladenburg), 3, für Pharmazeuten (mit Ladenburg), 3, für Geübtere (mit Pringsheim, Schaefer, Waetzmann und Ladenburg), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Pringsheim und Schaefer), 2 *g*. — **Pringsheim**: Theoretische Optik, 4; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 14tägig, 2 *g*. — **Schaefer**: Theoretische Mechanik materieller Punkte und starrer Körper, 4. — **Riesenfeld**: Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1 *g*. —

Biltz: Unorganische Experimentalchemie, 6; Chemische Referatenstunde für Vorgeschrittenere (mit Meyer und Koenigs), 14tägig, 1½ *g*; Chemisches Praktikum, unorganische Abteilung, tägl. außer Sonnabend, organische Abteilung, ganztägig, für Mediziner (mit Meyer), 4, für Landwirte, 4. — **Herz**: Die physikalisch-chemischen Grundlagen der analytischen Chemie, 2; Grundlagen der Maßanalyse, 1; Anwendungen der Maßanalyse, mit besonderer Berücksichtigung des Deutschen Arzneibuches, 1; Besprechungen zur qualitativen Analyse, 1 *g*. — **Gadamer**: Anorganische Experimentalchemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, 6; Prüfung der Arzneimittel, 1 *g*; Praktisch-chemische Übungen, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, der forensischen Chemie und Nahrungsmittelchemie, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, 6. — **Danckwortt**: Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der menschlichen Nahrungs- und Genußmittel, 2. — **Ehrlich**: Landwirtschaftlich-chemische Technologie II: Die Gärungsindustrien: Brennerei, Brauerei usw., 2; Einführung in die Chemie für Landwirte, organischer Teil, 2; Die Enzyme und ihre Bedeutung für das Pflanzen- und Tierleben, 1 *g*; Die Milch, ihre technische Verarbeitung und Verwertung, 1; Gasanalytische und chemisch-technische Untersuchungen, 4; Chemische, biochemische und technische Arbeiten im landwirtschaftlich-technologischen Institut, für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. —

Sturm: Geometrische Verwandtschaften II, 3; Analytische Geometrie des Raumes, 3. — **Kneser**: Differentialrechnung, 4; Differentialgleichungen und Transformationsgruppen, 3; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **Schmidt**: Zahlentheorie, 4; Theorie der reellen Funktionen, 2; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars: Lektüre Gaußscher Abhandlungen, 2 *g*. — **Schnee**: Algebra, 4. — **Steinitz**: Funktionentheorie, 4, Übungen, 1 *g*. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **von dem Borne**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Flugzeuge, 2; Aeronautische und meteorologische Übungen, 2; Grundzüge der Meteorologie, 1; Physik der Erdfeste, 2. — **Hilpert**: Elektrotechnik II, 4; Elektromaschinenbau I und II, 2; Apparatebau, 2; Übungen im Elektromaschinen- und Apparatebau, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 4, III, 8. — **Euler**: Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrische Kraftanlagen II, 2; Elektrische Bahnen, 2; Übungen im Bau elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Große-Leege**: Telegraphentechnik, 2. —

Ruff: Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Analytische Chemie, 3; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14tägig, 2 *g*. — **Neumann**: Anorganisch-chemische Technologie, 4; Chemisch- und elektrochemisch-technisches Praktikum, tägl. — **Semmler**: Organisch-chemisches Praktikum, tägl.; Organische Experimentalchemie, 4; Abriß der organischen Chemie, 1. — **Eucken**: Physikalische Chemie I und II, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Übungen in physikalischer Chemie und Elektrochemie, 4. — **Ehrlich**: Zuckertechnische und gärungsphysiologische Übungen, 4. — **Engelhardt**: Der elektrische Ofen in der Eisen- und Stahlindustrie, 14tägig, 2. — **Nauß**: Einführung in die Gastechnik, 1. —

Steinitz: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **Dehn**: Höhere Mathematik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Analysis, nach Verabredung. — **Hessenberg**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 4; Analytische Geometrie, 3. — **Mann**: Mechanik: Graphische Statik II, 4, Übungen, 2, IV, 2, Übungen, 2; Eisenhochbau, einschließlich Eisenbetonbau II, 2, Übungen, 2; Statik der Baukonstruktionen II, 1. — **Schnee**: Ausgewählte Kapitel der Analysis, nach Verabredung. —

Technische Hochschule Darmstadt.

Schering: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, 5; Physikalisches Praktikum (mit Zeißig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeißig), nach Verabredung; Theoretische Elektrizitätslehre, 2. — **Zeißig**: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, 4; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, für Pharmazeuten, 1. — **Wirtz**: Allgemeine Elektrotechnik I: Elemente der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde I, 2; Übungen im elektrotechnischen Laboratorium (mit Sengel), 4 halbe Tage; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittenere (mit Sengel und Petersen), nach Verabredung; Grundzüge der Telegraphie und Telephonie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, ½ Tag. — **N. N.**: Allgemeine Elektrotechnik II: Gleich- und Wechselstromtechnik, 4. — **Petersen**: Allgemeine Elektrotechnik, Übungen, 2; Grundzüge der Hochspannungstechnik, 1. — **Sengel**: Konstruktion elektrischer Maschinen und Apparate, 3, Übungen, 3; Elektrische Licht- und Kraftanlagen, 2, Übungen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Goldschmidt**: Elektrischer Antrieb von Hebemaschinen und industrielle elektrische Betriebe, 2; Referate aus elektrotechnischen Fachblättern, Kolloquium, 1. — **Eberhardt**: Luftschiffahrt, 2, Übungen, 6; Flugtechnik, 2, Übungen, 6; Allgemeine Vorlesung über das gesamte Gebiet der Luftschiffahrt, 2. — **Schleiermacher**: Aerodynamik in Beziehung zur Luftfahrt, 2 *g*; Rechenapparate und wissenschaftliches Rechnen, 2 *g*. — **Gasser**: Geodätische Aufgaben im Luftfahrtwesen, 2, mit stereophotogrammetrischen Feldübungen. —

Wöhler: Spezielle anorganische Chemie, 4; Theoretische Chemie II, 2; Kolloquium über chemische Tagesfragen (mit Martin), 1; Chemisches Praktikum für anorganische und physikalische Chemie (mit Heyl, Martin und Schaeffer), tägl. außer Sonnabend. — **Schaeffer**: Agrikulturchemie, 1. — **Finger**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Teerfarbstoffe, 4; Praktikum im Laboratorium für organische Chemie (mit Friedlaen-

der), tägl. außer Sonnabend; Färberei-Praktikum (mit Heuser), 4. — **Martin**: Analytische Chemie I, 2. — **Heuser**: Organisch-chemisches Praktikum, nach Verabredung; Chemische Technologie der Gespinstfasern, Gewinnung der Fasern: Bleicherei, Färberei, Zeugdruck, 1; Kunstseide, andere künstliche Fäden und Zelluloseprodukte, 1. — **Friedlaender**: Chemie der natürlichen Farbstoffe, 1 *g*. — **Heyl**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 2, organischer Teil, Repetitorium, 1; Ausmittelung der Gifte, 1. — **Dieffenbach**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie, 2; Metallurgie, 2; Chemisches, chemisch-technisches und elektrotechnisches Praktikum (mit Sander), tägl. außer Sonnabend. — **Vaubel**: Theoretische Chemie II: Thermochemie, 1, Übungen, 3; Die Steinkohlengasindustrie, 1 *g*; Die maschinellen Hilfsmittel der chemischen Technik, 1½. — **Sonne**: Chemische Technologie der Explosivstoffe, 2. — **Weller**: Untersuchen von Nahrungsmitteln, Genußmitteln und Gebrauchsgegenständen, 8, Übungen, 1. —

Graefe: Repetitorium der Elementar-Mathematik, 3, Übungen, 2; Höhere Mathematik, 3, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik, 2. — **Horn**: Höhere Mathematik I, einschließlich Elemente der höheren Algebra, 5, Übungen, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Differentialgleichungen, 2—3; Äußere Ballistik, 3. — **Dingeldey**: Höhere Mathematik I, einschließlich Elemente der höheren Algebra, 6, Übungen, 3, II, 2, Übungen, 1. — **Wiener**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Neuere mathematische Lehren zur Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben: Ortsfunktionen und Vektorfelder, 2; Arbeiten im mathematischen Institut (mit Sulzmann), 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 6; Reine Kinematik, 2. — **Hohenner**: Geodäsie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Geodäsie, 2; Geodätische Übungen I, 2 Nachmittage, II, 1 Nachmittag; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Praktische Geometrie, Übungen, 1 Nachmittag, Ausarbeitungen, 2. — **Assistenten**: Planzeichnen, 4. — **Henneberg**: Technische Mechanik, 3, Übungen (mit Graefe), 2; Mechanik I, 6; Übungen in Mechanik, 2; Hydrodynamik, 1. — **Braun**: Hydraulik, 2, Übungen, 1. — **Blaeß**: Ausgewählte Abschnitte aus der technischen Mechanik, 2 *g*. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: (ev. **Würschmidt**:) Theoretische Physik, 4; Elektrotechnisches Praktikum, 3. — **Würschmidt**: Physikalische Geographie, 2; Geschichte der Physik II, 2. — **Hauser**: Photographie, mit Übungen, 2. —

O. Fischer: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Henrich): a) Analytisch-chemische Übungen, b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Chemische Technologie: Organische Großindustrie, mit Exkursionen, 2; Ausmittelung von Giften, 1; Chemisches Voll- und Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Nahrungsmittelchemisches Praktikum, tägl.; Grundlagen der Chemie und ihre Anwendung, 2 *g*. — **Henrich**: Analytische Chemie der Metalloide, mit besonderer Berücksichtigung der Maßanalyse (Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums), 3; Ausgewählte Kapitel aus der Chemie, 2. — **Jordis**: Physikalische Chemie, 2; Elektrochemisches Praktikum, 4; Anorganische Chemie, 2; ev.: Anorganische Chemie für Anfänger, 4; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2 oder 4. —

Noether: Differentialgleichungen, 3; Einführung in die analytische Geometrie und in die Differentialrechnung, 4, Übungen, nach Verabredung. — **E. Fischer**: Algebra, 6, Übungen, 2 *g*; Höhere Zahlentheorie, nach Verabredung, *g*. —

Universität Frankfurt a. M.

Wachsmuth: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Die Polarisation des Lichtes, 1; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2; Physikalische Übungen, für Anfänger, 6, für Fortgeschrittene, tägl.; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. — **Déguisne**: Der elektrische Wechselstrom (Experimental-Vorlesung), 2; Elektrische Wechselstrommessungen, 1; Magnetismus und magnetische Kreise, 1; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14tägig, 2; Kleines elektrotechnisches Praktikum I, 3, II, 3; Großes elektrotechnisches Praktikum, tägl.; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Gasmotorenpraktikum, nach Verabredung. — **v. Laue**: Theoretische Optik, 4, Übungen, 1; Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen und Kristallstruktur, 1; Potentialtheorie, 2. — **Linke**: Luftelektrizität und Erdmagnetismus, 3; Meteorologisch-geophysikalische Übungen, 2; Die Bedeutung des Wetters im öffentlichen Leben, 1. — **Humann**: Theoretische Kapitel aus dem Gebiete der elektrischen Freileitungen und Kabel, 1; Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze, 1. — **Seddig**: Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1; Photographisches Praktikum, 8 oder 4. — **Stern**: Einführung in die Quantentheorie, 2. —

Freund: Anorganische Experimentalchemie, 5; Kolloquium über neue chemische Literatur, 14tägig, 1½; Großes chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: Organische Abteilung, ganztägig, anorganische Abteilung, ganz- oder halbtägig (mit Ebler); Kleines chemisches Praktikum für Anfänger; Darstellung chemischer Präparate, Einführung in die qualitative und quantitative Analyse, Nahrungsmittelanalyse (mit Ebler), 2 halbe Tage; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Ebler), 6; Chemisches Praktikum für Angehörige der Wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), 2 halbe Tage. — **Lorenz**: Elektrochemie, mit Einleitung in die physikalische Chemie, 3; Metallographie, 1; Kolloquium über neuere Arbeiten aus dem Gebiet der physikalischen Chemie, 14tägig, 2; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie, 4 Wochen; Übungen im physikalisch-chemischen Laboratorium, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium, ganztägig. — **Ebler**: Analytische Chemie I: Einführung in die analytische Chemie und qualitative Analyse, 2; Radioaktivität und radioaktive Substanzen, 1; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Kolloquium über anorganische und analytische Chemie, 1. — **Mayer**: Einführung in die organische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe, 2; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Speyer**: Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der ätherischen Öle, 1. — **Tillmans**: Die Chemie der menschlichen Nahrungs- und Genußmittel II, 1; Praktische Übungen in der Untersuchung von Nahrungsmitteln, Wasser und Abwasser, nach Verabredung; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittel-, Wasser- und Abwasserchemie, halbtägig. —

Schoenflies: Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4, Übungen, 1; Geometrische Grundlagen der Kristallstruktur, 1. — **Bieberbach**: Funktionentheorie, 4; Über die Weiterentwickelung der Differential- und Integralrechnung in neuerer Zeit, 2; Mathematisches Seminar: Vorträge über unendliche Reihen (mit Szász), 1. — **Brill**: Theorie der Rotation der Himmelskörper, 2. — **Szász**: Differential- und Integralrechnung I, 5, Übungen, 1. —

Universität Freiburg i. Br.

Himstedt: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, Elektrooptik, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten, 3, für Naturwissenschaftler, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Repetitorium der mathematischen Physik, 2; Mathematische Physik: Elek-

trizität, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Technisch-physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler: Übungen in der Anfertigung physikalischer Apparate und in der Vorführung von Demonstrationen, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. —

Gattermann: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Riesenfeld, Fromm, Meigen, Skita, Heß und Schwarz), tägl. außer Sonnabend; Übungen im Experimentieren und Vortragen für künftige Lehrer der Chemie I: Anorganischer Teil (mit Riesenfeld, Heß und Schwarz), 2 *g*; Chemisches Kolloquium, 1 *g*. — **Riesenfeld**: Anorganische Experimentalchemie, 5. — **Fromm**: Organische Technologie mit Exkursionen, 2; Repetitorium der organischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 3; Gasanalytisches Praktikum, 2. — **Meyer**: Physikalische Chemie, 2; Theorie der elektromotorischen Kräfte, 1; Photographie mit Demonstrationen und praktischen Übungen, 2; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Untersuchungen, nach Verabredung. — **Skita**: Chemie der Teerfarbstoffe, 2; Übungen im Färben von Gespinstfasern, 2. — **Madelung**: Neuere Arbeiten auf den Gebieten der organischen Chemie, 1. — **Heß**: Die natürlichen Farbstoffe und Pigmente, 1. — **Schwarz**: Theorie der quantitativen Analyse, 1. —

Stickelberger: Algebraische Analysis, 3; Analytische Mechanik, 4, Seminarübungen, 1. — **Heffter**: Integralrechnung, 4, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar: Funktionentheorie, 2 *g*. — **Loewy**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 *g*; Einführung in die Theorie der sozialen Versicherung, 2. — **Bolza**: Variationsrechnung, 3, Übungen, 1 *g*. — **Seith**: Praktische Geometrie, 2, Übungen im Felde, 2 *g*. — **Angel**: Theoretische Astronomie, 2; Graphische Methoden der angewandten Mathematik, 2, Übungen, 2; Einführung in die höhere Geodäsie, 2. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Grundlagen der Molekularphysik, 1; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Vorgeschrittene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 2. — **Fromme**: Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Theoretisch-physikalische Übungen, 1; Niedere Geodäsie, 3, Praktische Übungen, 1 Nachmittag; Übungen im Feldmessen und Nivellieren für Landwirte, 1 Nachmittag; Meteorologie, 1. — **Aßmann**: Ausgewählte Kapitel aus der Meteorologie und Aerologie, 1. — **Uller**: Elektrotechnisches Praktikum (mit Cermak), 2. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 3. — **Peppler**: Meteorologische Optik, 1. — **Jentzsch**: Beugungstheorie der optischen Instrumente, 1; Ballistik, 1. —

Elbs: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, tägl., für Landwirte, tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner und Veterinärmediziner (mit Brand), 5. — **Feist**: Pharmazeutische Präparate, anorganischer Teil, 3; Die menschlichen Nahrungsmittel und ihre Verfälschungen, 1; Gesetzeskunde für Apotheker und Nahrungsmittelchemiker, 1. — **Schaum**: Physikalische Chemie, Einführung, 2; Physikalisch-chemisches Seminar, 1 *g*; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Photographische Übungen, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **v. Liebig**: Grenzfragen der Chemie, 1 *g*. — **Thomae**: Kolloidchemie und Ultramikroskopie, 1. —

Schlesinger: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1; Differentialgeometrie, 4; Mathematisches Seminar: Mechanik, 1. — **Engel**: Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1½. — **Graßmann**: Darstellende Geometrie II, 3, Übungen, 4; Anwendung der Streckenrechnung auf die Mechanik, 1, Seminar, 14tägig, 1. —

Universität Göttingen.

Rausch v. Traubenberg: Experimentalphysik, (in Vertretung von Pohl) 4; Einführende physikalische Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Radioaktivität und Elektronik mit Demonstrationen 2. — **Voigt**: Elektrodynamik, 4; Magnetismus, 2 *g*; Ergänzungskurs über ausgewählte Kapitel der Physik, 2 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, nach Verabredung; Physikalisches Kolloquium (mit Debye), 2 *g*. — **Wiechert**: Erdbeben, 1 *g*; Geophysik: Meteorologie, Luftelektrizität, Ebbe und Flut, 3; Vermessungswesen, praktischer Teil: Übungen in Feldmessung, 4; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung, *g*; Quantentheorie, 2. — **Prandtl**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik, einschließlich Aerodynamik und Thermodynamik, tägl. — **Simon**: Schwingungen und Resonanz in Physik und Technik, 4; Elektrotechnisches Praktikum, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen auf dem Gebiete der angewandten Elektrizität, tägl.; Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge über Fragen der angewandten Elektrizität, 2 *g*. — **Debye**: Praktische Übungen im Physikalischen Institut (mit Simon, von Traubenberg und Engl); Mechanik mit erläuternden Demonstrationen, 4; Röntgenstrahlen, 1; Mathematisch-physikalisches Seminar: Vorträge über Struktur der Materie (mit Hilbert), 2 *g*. Wissenschaftliche Arbeiten, täglich. —

Windaus: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Seminar für Lehramtskandidaten, 1 *g*; Chemische Übungen (mit Borsche und Sielisch), Voll- und Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Tammann**: Elektrochemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4 Wochen; Physikalisch-chemische Arbeiten, ganz- und halbtägig; Kolloquium, 1 *g*. — **Zsigmondy**: Anorganische Kolloide I: Metalle, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie, 1; Praktikum der anorganischen und der Kolloidchemie, ganz- und halbtägig. — **Coehn**: Photochemie, mit Demonstrationen, 2; Photographisches Praktikum, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3; Photochemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Mannich**: Die Auffindung der Gifte, 1; Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Kolloquium über pharmazeutische Chemie, 1 *g*; Praktische Übungen in pharmazeutischer, toxikologischer und Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend. — **Kötz**: Einführung in die Chemie, 3; Theorien in der analytischen und anorganischen Chemie, 1; Chemisches Kolloquium: Vorträge über physikalische Chemie, 1 *g*; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 2. — **Borsche**: Einführung in die analytische Chemie, 3; Arbeitsmethoden der organischen Chemie II: Synthetische Methoden, 2; Färberei-chemische Übungen, 3. — **Sielisch**: Einführung in die Chemie für Mediziner, 2. — **Vogel**: Einführung in die Lehre vom heterogenen Gleichgewicht, 1. —

Hilbert: Einleitung in die Prinzipien der Physik, 2; Partielle Differentialgleichungen, 2. — **Hartmann**: Spektralanalyse der Gestirne, 1; Anleitung zu Beobachtungen ohne astronomische Instrumente, 2; Leitung astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl.; Astronomisches Seminar: Literaturbesprechung, 2 *g*. — **Runge**: Analytische Geometrie, mit Übungen, 6; Numerisches Rechnen, mit Übungen, 4; Photogrammetrie, 1 *g*. — **Landau**: Zahlentheorie, 4; Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 3, Übungen, 1 *g*. — **Carathéodory**: Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 2 *g*; Konforme Abbildungen, 4. — **Klein**: Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (Schluß), 2 *g*. — **Bernstein**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Versicherungsrechnung mit schriftlichen Übungen, 2; Vorträge über ausgewählte Gegenstände der mathematischen Statistik, 2 *g*. — **Ambronn**: Einführung in die praktische Astronomie: Astrometrie, 2; Die Praxis der Ausgleichsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 1; Übungen im astronomischen Beobachten für Anfänger und für Lehramtskandidaten,

8; Leitung selbständiger astronomischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. —

Technische Hochschule Graz.

v. Ettingshausen: Physik, 5; Physik: Elektrizitätslehre, 5; Elektrotechnik, $3^1/_2$; Elektrotechnische Übungen: Praktische Messungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 4; Der Bleiakkumulator, $1^1/_2$. —

Emich: Organische Chemie I, 5; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, nach Verabredung, für Vorgeschrittene. — **Andreasch**: Qualitative chemische Analyse II, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen, 16; Chemische Technologie der organischen Stoffe b, 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der organisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **B. Reinitzer**: Quantitative chemische Analyse II, 1; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der chemischen Maßanalyse, 20; Chemische Technologie der anorganischen Stoffe b, 4; Elektrochemie II: Angewandte Elektrochemie, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung anorganisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **v. Cordier**: Besondere organische Synthesen: Zucker, Eiweiß usw., 1. — **v. Hemmelmayr**: Agrikulturchemie, 2. — **Kremann**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie II, 2. — **Fuhrmann**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 3, Übungen, 4; Wissenschaftliche Photographie, einschließlich Mikrophotographie und Röntgenphotographie, 1. —

Hocevar: Mathematik I: Algebra, Analysis und Analytische Geometrie, 6, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Weitzenböck**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1. — **v. Peithner**: Mathematik II: Geometrie, Integralrechnung und Differentialgleichungen, 4, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Schüßler**: Darstellende Geometrie, 3, Repetitorium, 2, Übungen, 6, Seminarübungen: Unterseminar, 2, Oberseminar, 2; Projektive Geometrie II, 3, Übungen, 3; Durchdringung von Flächen zweiten Grades, 2, Konstruktionsübungen, 2. — **Wittenbauer**: Allgemeine Mechanik II, 4, Übungen, 3 und 2; Technische Mechanik II, 3. — **Klingatsch**: Niedere Geodäsie, 4; Geodätische Feldübungen, 8; Sphärische Astronomie, 2; Katastervermessung, 3, Übungen, 16; Situations- und Terraindarstellung, 4. —

Universität Greifswald.

Mie: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen, für Naturwissenschaftler, 6, Erläuterungen, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Leitung selbständiger physikalischer Untersuchungen, tägl. —

Dimroth: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum: a) anorganische Abteilung, b) organische Abteilung (mit Posner), c) für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Scholtz), tägl. außer Sonnabend, d) für Mediziner, 4, Erläuterungen, ½ *g*. — **Scholtz**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Sterilisationskursus für Pharmazeuten, 2; Pharmazeutisches Kolloquium, 1 *g*. — **Posner**: Chemie der Benzolderivate, 2; Besprechungen neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie, 1. —

Hausdorff: Mechanik, 4; Analytische Geometrie des Raumes, 3, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*. —

Universität Halle.

Dorn: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Licht, 4; Elektromagnetische Theorie des Lichtes, 2 *g*; Physikalisches Laboratorium: a) Übungspraktikum, 6, b) Halbpraktikum, 3, c) Selbständige Arbeiten von Geübten, tägl. — **Schmidt**: Mechanische Wärmetheorie, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, ganztägig; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Bernstein**: Maschinentheorien, 1, Demonstrationen, nach Verabredung. — **Wigand**: Über Elektronen und Ionen, 1; Physikalisches Handfertigkeits-Praktikum, 3. — **Thiem**: Kursus der Farbenphotographie, 2. —

Erdmann: Praktische Übungen im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner, 4. — **Schulze**: Experimentalchemie, organischer Teil, 4; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Tubandt), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend; Besprechung der Arzneimittelprüfungen, 1 *g*. — **Baumert**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Praktische Übungen im Laboratorium für Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Die wichtigsten Lebensmittel und deren Verfälschungen, 1 *g*. — **Tubandt**: Elektrochemie, 1; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 4. —

Wangerin: Analytische Geometrie der Ebene, 3; Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, 5; Übungen des Mathematischen Seminars, 14 tägig, 2 *g*. — **Gutzmer**: Höhere Algebra, 4; Bestimmte Integrale, 2; Übungen des Mathematischen Seminars, 14 tägig, 2 *g*. — **Eberhard**: Differentialrechnung, 4; Differenzierübungen, 1 *g*. — **Buchholz**: Geographische Ortsbestimmung, mit praktischen Übungen, 2. — **Pfeiffer**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 4 *g*. —

Technische Hochschule Hannover.

Precht: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik, 4; Luftschiffahrt, 2; Photographie, 2. — **Kohlrausch**: Grundzüge der Elektrotechnik, 2; Theoretische Elektrotechnik, 4; Elektrotechnisches Laboratorium (mit Beckmann, Brückmann und Hölter) I, 8, II, 16, III für Maschineningenieure, 8. — **Heim**: Elektrische Anlagen II: Zentralanlagen (mit Helsing), 3, Übungen, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen und Transformatoren (mit Helsing), 3, Übungen, 2; Elektrische Bahnen, Elektrotechnischer Teil, 2; Elektrische Kraftübertragung, 2. — **Beckmann**: Praktische Elektrotechnik für Anfänger I, 1; Elektrotechnische Meßkunde I, 1, 2, II, 1; Elektrizitätszähler, 1 *g*. — **Brückmann**: Gleichrichter zur Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom, 1 *g*; Elektrotechnisches Seminar, 1; Einanker- und Kaskaden-Umformer, 1. —

Seubert: Grundzüge der Chemie, 6; Arbeiten im Laboratorium der anorganischen Chemie (mit Eschweiler, Seybold und Sauermilch), tägl. außer Sonnabend. — **Eschweiler**: Maßanalyse, 2. — **Behrend**: Grundzüge der organischen Chemie, 3; Arbeiten im Laboratorium der organischen Chemie (mit Ingebrigtsen und Nottbohm), tägl. außer Sonnabend. — **Ost**: Zuckerindustrie und Gärungsgewerbe, 3; Mineralöle und Fette, 2; Arbeiten im Laboratorium der technischen Chemie (mit Matthies), tägl. außer Sonnabend. — **Bodenstein**: Angewandte Elektrochemie, 3; Elektrochemische Übungen (mit Braune), 4; Arbeiten im elektrochemischen Institut (mit Braune), tägl.; Übungen in der Elektroanalyse (mit Braune), 7. — **Laves**: Grundzüge der physiologischen Chemie, 2. —

Kiepert: Höhere Mathematik II (mit Prange), 6, Übungen, 2, Repetition, 1; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Geometrie der Lage, 4. — **Müller**: Höhere Mathematik I A (mit Prange), 6, Übungen, 2, III A, 3, Übungen, 1; Anwendungen der Variationsrechnung auf mechanische Probleme, 2. — **Salkowski**: Grundzüge der höheren Mathematik, 3, Übung, 1; Praktische Mathematik, 2, Übungen, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. — **Rodenberg**: Darstellende Geometrie I (mit Richter und Morin), 3, Übungen, 6; Mathematisches Seminar (mit Müller und Salkowski), 2 *g*. — **Oertel**: Grundzüge

der praktischen Geometrie (mit Petzold), 2, Übungen, 3; Praktische Geometrie, Planzeichnen (mit Petzold), 4; Geodäsie I: Praktische Geometrie (mit Petzold), 2, Übungen, 6; Grundzüge der astronomischen Ortsbestimmung, 2. — **Wilke**: Mechanik I: Grundzüge der Mechanik, 4, Übungen, 1; Maschinen-Meßkunde, 2. — **N. N.**: Aeromechanik in ihrer Anwendung auf Motorluftschiffe und Flugzeuge, 1, Übung, 1. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker), 6; Physikalisches Seminar, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen und radiologischen Laboratorium (mit Becker und Ramsauer), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theoretische Optik, 5; Besprechung theoretisch-optischer Fragen, 1 *g*. — **Ramsauer**: Radiologie, Theorie der Kathodenstrahlen mit Demonstrationen, 2. —

Curtius: Experimentalchemie I: Allgemeine Chemie und Metalloide, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Jannasch, Trautz und Müller), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, halbtägig; Chemisches Anfänger-Praktikum für Mediziner, 4. — **Jannasch**: Titrieranalyse, 2; Ausmittelung der Gifte, 1; Gasanalytisches Praktikum (mit Müller), 4; Chemisches Praktikum zur Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 5. — **Knoevenagel**: Technologische Chemie. — **Trautz**: Physikalische Chemie II: Photochemie, chemische Reaktionsgeschwindigkeit und Katalyse, 3; Physikalisch-chemische Besprechung anorganisch- und organisch-chemischer Arbeiten, 2 *g*; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4 bis 6 Wochen. — **Krafft**: Organische Chemie, 4; Praktisch-chemische Arbeiten und Übungen im Laboratorium, tägl. außer Sonnabend, für Anfänger, halbtägig. — **Stollé**: Pharmazeutische Chemie. — **Mohr**: Besprechung neuerer organisch-chemischer Arbeiten, 1. — **Muckermann**: Über neuere Arzneimittel; Repetitorium der Chemie für Pharmazeuten. — **Müller**: Spektralanalyse, 1; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Praktische Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Stäckel: Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1; Krumme Flächen II, 3; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2. — **Perron**: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Partielle Differentialgleichungen, 3; Mathematisches Unterseminar, 1. — **Koenigsberger**: Funktionentheorie, 4; Die Auflösung algebraischer Gleichungen, 1. — **Koehler**: Determinantentheorie, 2. — **Wolf**: Spektralanalyse II, 2 *g*. —

Universität Innsbruck.

v. Schweidler: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Tumlirz**: Theoretische Mechanik II, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g*. — **v. Lerch**: Ausgewählte Kapitel der Physik, 3. — **Hammerl**: Elektrische Energieverteilung: Licht und Kraft, Hochspannungsanlagen, 2 *g*. —

Brunner: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Chemiker und Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten, halbtägig; Chemische Übungen für Mediziner, 6. — **Hopfgartner**: Pharmazeutische Chemie, 5. — **Zehenter**: Chemische Technologie der organischen Stoffe II: Technologie der tierischen Rohstoffe, mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse des Nahrungsmittelchemikers, 2 *g*. —

Gmeiner: Algebra (Fortsetzung), 3; Zahlentheorie, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 2 *g*. — **Zindler**: Differential- und Integralrechnung (Fortsetzung), 5, Übungen, 2 *g*. — **Menger**: Elemente der projektiven Geometrie (Fortsetzung), 2 *g*. —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Auerbach und Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker und Pharmazeuten, 3, c) für Mediziner, 4; Physikalisches Kolloquium; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Auerbach, Straubel und Pauli), tägl. — **Auerbach**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Thermik, 4. event.; Theoretische Optik, 4; Einführung in die Theoretische Physik: Prinzipien und Methoden, 3. — **Straubel**: Geometrische Optik II, 1. — **Pauli**: Experimentalphysik III: Ergänzungen zu Teil I der Hauptvorlesung, für Fortgeschrittene, 2. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 4; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Wolff): a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpraktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpraktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu chemischen Spezialuntersuchungen (mit Schlenk und Schneider), 40. — **Wolff**: Maßanalyse, 1; Elektrolyse und elektrolytisches Praktikum, 2. — **Immendorff**: Grundzüge der anorganischen und organischen Chemie (Experimentalchemie), 5; Chemisches Praktikum für Landwirte: a) großes, tägl., b) kleines, 7; Agrikulturchemisches Seminar für Fortgeschrittene, 14tägig, 2 *g*. — **Vongerichten**: Technologie der Teerfarben und verwandter Industriezweige, mit Exkursionen, 2; Technisch-chemisches Praktikum, ganz- und halbtägig. — **Matthes**: Pharmazeutische Chemie II: Organische Chemie, 3; Untersuchung und Darstellung chemisch-pharmazeutischer Präparate, Ausmittelung der Gifte, 15; Praktische und theoretische Übungen aus dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Theoretische und praktische Übungen in der Sterilisierung der Arzneimittel und Verbandstoffe, Urinuntersuchungen, 3. — **Schlenk**: Chemie der heterozyklischen Verbindungen, 1; Spezielle anorganische Chemie, 2. — **Schneider**: Chemie der Alkaloide, 1. — **Kappen**: Die agrikulturchemischen Untersuchungsmethoden: Boden-, Düngemittel- und Futtermitteluntersuchung, 1; Chemische Technologie der landwirtschaftlichen Nebengewerbe, 1. —

Haußner: Analytische Geometrie der Ebene, mit Übungen im Proseminar, 5; Ausgewählte Teile der Theorie der krummen Flächen, 3; Trigonometrische Reihen, 2; Einleitung in die Algebra, 2; Seminar, 1 *g*; Proseminar, 1. — **Koebe**: Differential- und Integralrechnung, 4, Proseminar, 1 *g*; Projektive Geometrie, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*. — **Frege**: Allgemeine Mechanik, 4; Begriffsschrift, 1 *g*. — **Knopf**: Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen auf der Sternwarte, 2; Praktische Übungen in der Geländeaufnahme: Nivellieren, Feldmessen usw., 2. — **Ambronn**: Benutzung des Polarisationsmikroskops bei histologischen Untersuchungen, 1; Übungen in der Handhabung des Mikroskops und seiner Nebenapparate, 2; Neuere Methoden der wissenschaftlichen Mikroskopie, 1. — **Winkelmann**: Technische Mechanik I: Grundlagen, Stereomechanik, mit Übungen, 5; Höhere Vektoranalysis: Tensoren und Dyaden, 2. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Lehmann: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Verabredung. — **N. N.**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2. — **Schachenmeier**: Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Richter**: Elektromaschinenbau II, 5, III, 3; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium für Vorgeschrittene (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen. — **Schleiermacher**: Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 2; Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Elektro-

technisches Laboratorium I, 6. — **Schwaiger**: Elektromotorische Betriebe, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Nichtstationäre elektrische Vorgänge und Hochspannungstechnik, 1, Übungen, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Teichmüller**: Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie, 1 und 2, Übungen, 2; Elektrische Beleuchtung, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Hausrath**: Instrumente- und Apparatebau, 2; Theoretische Telegraphie, 1; Hochfrequenzmessungen, 1. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographisches Praktikum, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2; Exkursionen, 1 Nachmittag. — **Schultheiß**: Geschichte und Wesen der Witterungsvoraussage, 1. —

Engler: Organische Chemie I, 4; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Chemisches Laboratorium, 5 Tage. — **Bredig**: Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie und ihrer Anwendungen, 1; Demonstrationen technisch-elektrochemischer Prozesse (mit Askenasy), 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, 5 Tage; Physikalisch-chemischer und elektrochemischer Einführungskurs. — **Bunte**: Chemische Technologie I, 2, II, 2; Übungen in der technischen Analyse (mit Eitner), 4, 3 und tägl.; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, 5 Tage; Technologische Exkursionen. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Chemie, 1. — **Askenasy**: Prozesse der elektrochemischen Großindustrie I, 2. — **Dieckhoff**: Anorganische pharmazeutische Chemie, 2; Analytische Chemie I, 2. — **Eitner**: Methoden der technischen Analyse, 2; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I und II, 1, Übungen, 4. — **Koenig**: Chemie der Metalle, 2. — **Reis**: Photochemie II: Wirkungen des Lichtes, 2. — **Rupp**: Chemische und mikroskopische Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln sowie Gebrauchsgegenständen, 2. — **Steinkopf**: Chemie der heterozyklischen Verbindungen I und II, 1; Chemie der Alkaloide, 1. — **Terres**: Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, 1. — **Ubbelohde**: Industrie des Petroleums, 1; Über Kunststoffe, 1. — **N. N.**: Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe II, 2; Übungen in Färberei und Druckerei, 2. —

Disteli: Darstellende Geometrie I und II, 4, Übungen, 4; Konstruktive Übungen der Perspektive, 3. — **Fueter**: Grundlehren der höheren Mathematik, 4; Höhere Mathematik II, 2. — **Heun**: Mechanik I und II, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 *g*. — **Krazer**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Haupt**: Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2; Determinantentheorie, 2. — **Noether**: Stabilitäts- und Schwingungsprobleme, 2; Hydromechanik, 1. — **Wellstein**: Projektionslehre, 2, Übungen, 2. — **N. N.**: Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes I und II, 3, Übungen, 1. — **Haid**: Geodätisches Praktikum, 6 und 3; Größere Vermessungsübungen, 2 Wochen. — **Bürgin**: Katastervermessung I, 2, Übungen, 2; Plan- und Terrainzeichnen, 2 und 4. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik II: Optik, Elektrizität, Magnetismus, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger: a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **Weber**: Thermodynamik, 4; Theorie physikalischer Messungsapparate, mit Übungen, 1; Ausgewählte physikalische Messungen und Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Martienssen**: Die physikalischen Grundlagen der Flugtechnik, 1. —

Diels: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum I, anorganisch (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, II, organisch, tägl., für Mediziner (mit Feist), 4. — **Rügheimer**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiet der physikalischen Chemie, 1 *g*; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Berend**: Repetitorium der organischen Chemie für Mediziner, $^3/_4$. — **Feist**: Chemisch-technische Verwendung der Steinkohle, 1; Kurze Übersicht über die anorganische und organische Chemie, 1. — **Mumm**: Analytische Chemie, 2. — **Stoehr**: Über heterozyklische Verbindungen, 1. — **Preuner**: Einführung in die Elektrochemie, 2; Elektroanalytische Übungen, 2 Wochen. — **Horrmann**: Einführung in die Alkaloidchemie, 1. —

Pochhammer: Einleitung in die Zahlentheorie, 4; Einleitung in die Theorie der Determinanten, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Harzer**: Theorie der Bahnbestimmungen, 3, Übungen, 1. — **Jung**: Analytische Geometrie der Ebene, mit Übungen, 5; Differentialgleichungen, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Kobold**: Niedere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, 2 *g*. — **Toeplitz**: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1 *g*; Geometrische Übungen für mittlere Semester, 3. — **Wilkens**: Ausgewählte Kapitel der Stellarastronomie, 1. — **Neuendorff**: Darstellende Geometrie I, mit Zeichenübungen, 5; Übungen und Vorträge aus der angewandten Mathematik, 1 *g*. —

Universität Königsberg.

Kaufmann: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Physikalische Übungen, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Volkmann**: Elektrodynamik, 4, Ergänzungen und Erläuterungen, mit besonderer Berücksichtigung der Grundbegriffe und Grundsätze der Mechanik, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Radioaktivität und Elektronik, 2, Übungen, 2 *g*. — **Schroeder**: Einführung in die Maschinenkunde II, 2; Landwirtschaftliche Maschinenkunde II, 1; Flugtechnik I, 2; Besichtigung industrieller Anlagen, *g*; Übungen aus dem Gebiete des landwirtschaftlichen Maschinenbaues, *g*. —

Klinger: Allgemeine und unorganische Chemie, 5; Mediziner-Praktikum, 2 Nachmittage; Chemisches Praktikum (mit Blochmann und Eisenlohr), tägl. außer Sonnabend; Besprechung neuerer Arbeiten (mit Blochmann, Eisenlohr und Sonn), 1 *g*. — **Rupp**: Pharmazeutische Chemie, 3; Übungen im pharmazeutisch-chemischen Laboratorium, ganz-, halbtägig und 6; Pharmazeutisch-wissenschaftliches Kolloquium, 1 *g*. — **Zielstorff**: Organische Chemie, für Landwirte, 2; Ernährung der Pflanze: Düngerlehre, 3; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, tägl.; Landwirtschaftliche Exkursionen, 1 Nachmittag, *g*. — **Blochmann**: Technische Chemie der Metalle, 2; Ausgewählte Kapitel aus der analytischen Chemie, 1 *g*. —

Meyer: Analytische Geometrie der Ebene, mit Übungen, 4; Höhere Algebra: Theorie der Gleichungen, 4; Übungen im mathematischen Seminar, *g*; Mathematische Gesellschaft, *g*. — **Battermann**: Geographisch-astronomische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 1 Abend *g*. — **Boehm**: Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 3; Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 4; Anfangsgründe der Differentialgleichungen, 1; Seminar, 1 *g*. — **Kaluza**: Niedere Geodäsie, mit Übungen, 4; Repetitorium der Elementarmathematik, 3; Flächen zweiter Ordnung, 2. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl und Füchtbauer), tägl.; Physikalisches Praktikum (mit Scholl und Füchtbauer), 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Ein-



leitung in die theoretische Physik: Wellen, Diffusion, Potential, 4; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl. — **Bjerknes**: Hydrodynamik, mit Anwendungen auf Luft- und Meeresbewegungen, 2; Selbständige Arbeiten im Geophysikalischen Institut, für Vorgeschrittene (mit Wenger), tägl.; Geophysikalisches Kolloquium (mit Wenger), 2 *g*. — **v. Oettingen**: Geometrisch-perspektivisches Zeichnen, 1 *g*. — **Fischer**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften: Differential- und Integralrechnung, mit Übungen, für Mediziner und Naturwissenschaftler, 3; Allgemeine Gelenklehre (im Anschluß an die Vorlesung Systematische Anatomie): Knochen und Gelenke, 1. — **Scholl**: Wärmekraftmaschinen, 1. — **Marx**: Thermodynamik, 2. — **Haas**: Geschichte der Physik von ihren Anfängen bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, 2 *g*; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene, nach Übereinkunft, *g*. — **Lilienfeld**: Erzeugung und Verwendung tiefer Temperaturen, 1 *g*. — **Wenger**: Die atmosphärischen Störungen, 2 *g*. —

Hantzsch: Anorganische Experimentalchemie, 5, Ergänzung, 1 *g*; Analytisch- und präparativ-chemisches Praktikum (mit Schaefer), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6; Organisch-chemisches Praktikum (mit Reddelien), tägl.; Chemisches Praktikum für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc**: Physikalische Chemie II: Elektrochemie, mit Demonstrationen unter Berücksichtigung der Technik, 3; Chemisches Praktikum für Anfänger: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemisches Praktikum (Photochemisch-photographisches mit Weigert, elektrochemisches und kolloidchemisches mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auch für Mediziner, auf Wunsch Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Böttger), 4 oder 8. — **Paal**: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, analytisch, anorganisch und organisch (mit Sieverts, Deußen, Scheiber und Waentig), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen und Waentig), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologisches Praktikum (mit Deußen und Scheiber), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Sieverts und Waentig), 6, für Vorgerücktere (mit Heller, Deußen, Sieverts, Scheiber und Waentig), tägl.; Chemisch-technisches Praktikum (mit Heller), tägl. — **Stobbe**: Spezielle organische Chemie: Die aromatischen Verbindungen, 2. — **Wagner**: Übersicht über die organischen Verbindungen, 1; Technik der Experimentalchemie und Demonstrationen von Schulversuchen, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Lehrer: Schulversuche, Analyse und Präparate, tägl., Didaktische Besprechungen: Physikalische und chemische Grundbegriffe, mit Lehrübungen, 1 *g*. — **Rassow**: Chemische Technologie, Brenn- und Leuchtstoffe, sowie ausgewählte anorganische Betriebe, 2; Technologische Exkursionen, nach Verabredung *g*; Chemisch-technologisches Praktikum, tägl.; Schieß- und Sprengstoffe, 1 *g*. — **Weigert**: Spektroskopie, 1; Photochemische und photographische Arbeitsmethoden, mit praktischen Übungen, 4. — **Schall**: Ausgewählte Kapitel der elektrochemischen Technik (u. a. Elektrolyse bei Wasserausschluß), 1. — **Böttger**: Elektroanalyse, 1; Übungen in Elektroanalyse unter besonderer Berücksichtigung der Schnellmethoden, 4 *g*. — **Heller**: Chemie der organischen Farbstoffe, 2. — **Sieverts**: Übungen in technischer Gasanalyse, 1. — **Deußen**: Übungen in der Analyse des Harns, für Anfänger und Geübtere, 3; Übungen im Sterilisieren für Pharmazeuten, nach Verabredung. — **Schaefer**: Analytische Chemie unter Berücksichtigung ihrer theoretischen Grundlagen, mit Demonstrationen, 2; Die Wandlungen des Atombegriffs, 1 *g*. — **Reddelien**: Neuere Theorie und Forschungsergebnisse der organischen Chemie, 1. —

Hölder: Bestimmte Integrale, 3; Variationsrechnung, 3; Mathematisches Seminar: Übungen in Integralrechnung, 1 *g*. — **Bruns**: Allgemeine Astronomie, 4; Praktikum zur Instrumentenkunde, nach Verabredung; Praktische Arbeiten in der Sternwarte, nach Verabredung *g*. — **Rohn**: Algebraische Kurven, 4, Übungen, 1 *g*. — **Herglotz**: Algebraische Analysis, 2; Analytische Geometrie der Ebene, 4. — **Blaschke**: Funktionentheorie, 4, Übungen, 14tägig, 2 *g*. —

Universität Marburg.

Richarz: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Übersicht über die Physik für Kriegsteilnehmer, 1; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum (mit Feußner und Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **Feußner**: Theoretische Physik: Analytische Mechanik, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Schulze**: Hydrodynamik und Akustik, 2. — **Take**: Ausgewählte Kapitel aus der Elektrizitätslehre, mit Experimenten, 1; Physikalische Technologie, mit Demonstrationen und Exkursionen, $1^1/_2$. — **Wegener**: Elementarkursus der geographischen Orts- und Zeitbestimmung, 2. —

v. Auwers: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum (mit Fries), tägl. außer Sonnabend, für Vorgerückte, tägl.; Chemische Übungen für Mediziner (mit Strecker), tägl. außer Sonnabend; Praktisch-chemischer Kursus für Mediziner (mit Strecker): Theoretische Einführung, mit Demonstrationen, $^1/_2$, Praktikum, $3^1/_2$; Chemisches Seminar, 14tägig, 2 *g*. — **Keller**: Anorganische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie und Medizin, 6; Nahrungsmittelchemie, allgemeiner Teil: Bestandteile, Abriß der Ernährungslehre, allgemeine Untersuchungsmethoden, 1; Übungen im Sterilisieren, nach Verabredung; Kolloquium mit Übungen über Arzneimittelprüfung, 1 *g*. — **Strecker**: Gewichtsanalyse, 2; Titrieranalyse, 1; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2. — **Flade**: Kolloidchemie, 1; Chemische Technologie III, 2. — **Fries**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie: Chemie der aliphatischen Verbindungen, 3; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Chemisches Repetitorium für Mediziner: Organische Chemie, 1. — **Schmidt**: Praktische Übungen in der analytischen und forensischen Chemie, sowie in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel und selbständige chemische Arbeiten (mit Keller), tägl., Qualitative Analyse, *g*. — **Thiel**: Physikalische Chemie I, 3; Theoretische Übungen über ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1 *g*; Physikalisch-chemisches Praktikum, 6; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Photochemisches und photographisches Praktikum, für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Stuchtey), 2. —

Hensel: Elementare Theorie der Differentialgleichungen und der Vektoranalysis, 3; Funktionentheorie, 4; Mathematisches Proseminar: Theorie und Anwendung der Determinanten, 1 *g*. — **Neumann**: Analytische Geometrie, 4; Analytische Mechanik II, 3, Seminar, 2 *g*. — **v. Dalwigk**: Differentialrechnung, 4; Elliptische Funktionen II, 2; Darstellende Geometrie, mit Übungen, 2; Interpolation, numerisches und graphisches Rechnen, 1 *g*. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik II: Wärme und Elektrizität, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 12. — **Sommerfeld**: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4, Übungen, 2 *g*; Grundlagen der Elektrodynamik, 1. — **Graetz**: Experimentalphysik II: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Die physikalische Kriegstechnik, mit Demonstrationen, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung *g*. — **Koch**: Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, mit Demonstrationen, 2. — **Wagner**: Über Radioaktivität, 1. — **Donle**: Einführung in die theoretische Elektrizitätslehre, 2. —

Willstätter: Organische Experimentalchemie, 5; Einführung in die Chemie, 1 *g*; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium (Unorganische Abteilungen mit Piloty, Vanino und Prandtl, Organische Abteilung mit Dieckmann und Wieland), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Piloty und Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittenere Mediziner (mit Piloty), halb- oder ganztägig. — **Paul**: Anorganische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde: Organische Präparate, 3; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich physikalisch-chemischer, elektrochemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Prandtl**: Spezielle unorganische Experimentalchemie I: 1. bis 4. Gruppe des periodischen Systems, 4; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **Wieland**: Teerfarbstoffe, 3. — **Dieckmann**: Stereochemie, 1 *g*. — **Pummerer**: Explosivstoffe, 1 *g*. — **Meyer**: Physikalisch-chemisches Praktikum, 4; Kolloidchemie, 1. —

Lindemann: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Theorie der Kurven und Flächen im Raume, 5; Theorie der Substitutionen und der höheren algebraischen Gleichungen, 4; Übungen und Vorträge im Mathematischen Seminar, 1½ *g*. — **v. Seeliger**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 4; Praktisch-astronomische Übungen (mit Großmann), nach Verabredung. — **Voß**: Differentialrechnung, 5, Übungen, 2 *g*; Mathematisches Seminar: Übungen und Vorträge, 2 *g*. — **Pringsheim**: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionen-Theorie, 4. — **Brunn**: Elemente der höheren Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung der Forststudenten, 4. — **Hartogs**: Synthetische Geometrie III: Ausgewählte Kapitel, 4. — **Dingler**: Elementarmathematik, mit geschichtlichen und pädagogischen Hinweisen, 4; Einführung in die mathematische Behandlung von Beobachtungsdaten, 2. — **Rosenthal**: Determinanten, für Anfänger, 2; Theorie der trigonometrischen Reihen, 3; Seminar: Übungen über ausgewählte Fragen der höheren Mathematik, für mittlere Semester, 2. —

Technische Hochschule München.

Fischer: Experimentalphysik II: Magnetostatik, Elektrostatik, elektrische Strömung, veränderliches elektromagnetisches Feld, Elektrooptik, 4; Grundzüge der Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts II: Optik, Elektrizität, Magnetismus, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik, 8—30. — **Emden**: Physikalisches Praktikum, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12—30; Flugzeuge, 3. — **Knoblauch**: Technische Meßmethoden, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Verabredung. — **Voit**: Angewandte Physik: Heizung, Lüftung, Akustik der Gebäude, Blitzableiter, 2; Schwachstromtechnik: Telegraphie, Telephonie und drahtlose Telegraphie, 2. — **Heinke**: Einführung in die Elektrotechnik, 2, Übungen, 2; Elektrotechnik für Maschineningenieure, 3; Elektrische Meßtechnik I, 3; Elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik und Photometrie, 4 und 2; Elektrotechnisches Praktikum für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **Ossanna**: Theorie und Konstruktion der elektrischen Maschinen III: Transformatoren und Asynchronmotoren, 4; Elektrotechnisches Praktikum II: Messungen an Maschinen, Umformern und Transformatoren, 4 und 2; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen, 4; Entwerfen von Wechselstrom-Kommutatormotoren, 4. — **Kadrnozka**: Elektrische Anlagen I: Elektrische Beleuchtung, 3, II: Erzeugung und Verteilung elektrischer Arbeit, 2, Übungen: Entwerfen elektrischer Anlagen, 4. — **Urban**: Unterrichtskurse in praktischer Photographie, 1, Praktische Übung, 3. —

Manchot: Allgemeine Experimentalchemie einschließlich der Grundzüge der organischen Chemie, 5; Unorganisches und analytisch-chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere, 10, 20 oder 30; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im unorganischen Laboratorium, nach Verabredung. — **Lipp**: Organische Chemie, 5; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der organischen Chemie, 30. — **Albert**: Chemische Technologie der organischen Arsenverbindung mit besonderer Berücksichtigung ihrer pharmazeutischen Verwendbarkeit, 1. — **Rohde**: Chemie der hydroaromatischen Verbindungen, 2. — **Hofer**: Analytische Chemie der Metalle und Metalloide nebst Gewichts- und Maßanalyse I, 4; Die elektrochemischen Prozesse, 2; Praktikum im elektrochemischen Laboratorium, 10, 20 oder 30; Praktikum in der technischen Gasanalyse, 3. — **Schultz**: Chemische Technologie III: Chemische Großindustrie, 2, IV: Mörtelmaterialien, Glas- und Tonwaren, 2; Praktikum im chemisch-technischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Chemie, nach Verabredung; Chemisches Praktikum für Kandidaten des höheren Zoll- und Steuerdienstes, 3. — **Jacob**: Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, 1. — **Braß**: Ausgewählte Teile der Farbstoffchemie, 1. — **Lintner**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Gärungschemisches Praktikum, bis 30; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im gärungschemischen Laboratorium, nach Verabredung; Grundzüge der organischen Chemie und Einführung in die Technologie und Warenkunde mit besonderer Berücksichtigung der Gärungsgewerbe, 4. —

Faber: Höhere Mathematik II, 6, Übungen, 2. — **v. Dyck**: Höhere Mathematik IV, 2, Übungen, 2; Algebra, 4; Mathematisches Seminar (Kolloquium) (mit Finsterwalder und Liebmann), 2. — **Doehlemann**: Grundzüge der höheren Mathematik II, 4, Übungen, 2; Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4; Synthetische (neuere) Geometrie, 4; Übungen: Flächen 2. Ordnung, 1. — **Liebmann**: Integralgleichungen, 4; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Übungen, 1. — **Lagally**: Mathematische Elastizitätslehre, 3. — **Finsterwalder**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Schmidt**: Vermessungskunde II, 4, Praktikum, 4 und 8; Hauptvermessungsübungen, 2 Wochen. — **Großmann**: Elemente der Astronomie, 2. — **Föppl**: Technische Mechanik I: Einführung in die Mechanik, 4, IV: Dynamik, 3, Übungen, 2; Praktikum im mechanisch-technischen Laboratorium, 2. —

Universität Münster.

Schmidt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik und Wärme, 5; Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 und 6; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Seminar, 14 tägig, 2 *g*. —

Schenck: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum (mit Ley), tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner (mit Kaßner und Ley), 4; Chemisches Kolloquium, nach Verabredung, *g*. — **Salkowski**: Die Metalle: Gruppe VI, VII und VIII des periodischen Systems, 2. — **Kaßner**: Organische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Medizin und Pharmazie, 4; Kolloquium über pharmazeutische Präparate und die Gegenstände des Deutschen Arzneibuchs, 1; Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, mit besonderer Berücksichtigung der Papier- und Zellulosefabrikation und der Zündrequisiten, 1; Über Gifte und deren Nachweis in Untersuchungsobjekten, 1 *g*; Pharmazeutisch-chemische, maßanalytische und toxikologische Übungen im Laboratorium, Darstellung chemischer Präparate, Gasanalyse, Anleitung zur Bearbeitung selbständiger wissenschaftlicher oder technischer Aufgaben, tägl.

außer Sonnabend. — **Ley**: Organische Chemie II, 3. — **Krummacher**: Physiologische Chemie, 2. — **König**: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Chemie, für Fortgeschrittene, tägl. *g*. —

Killing: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1 *g*; Übungen des mathematischen Oberseminars, 2 *g*; Übungen des mathematischen Unterseminars, 2 *g*; Weierstraß und seine Entdeckungen, 2; Synthetische Geometrie, 4. — **Plaßmann**: Analytische Geometrie I, 4; Das Sonnensystem, 2 *g*; Interpolationsrechnung, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, nach Verabredung *g*. — **Schewior**: Technische Mechanik II: Festigkeitslehre, 2, Übungen, 1 *g*; Geodätisches Praktikum, 3; Praxis der Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie, 1; Instrumente der Geodäsie, Topographie und geographischen Ortsbestimmung, 1; Topographische Übungen im Gelände (mit Meinardus), nach Verabredung *g*; Topographische Aufnahmen, mit Einschluß der Routenaufnahmen auf Reisen, 1. —

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Allgemeine Physik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen: a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Weber**: Analytische Mechanik, 3, Übungen, 1; Einleitung in die Optik, 2. —

N. N.: Anorganische Chemie, 5; Übungen im chemischen Laboratorium: a) Großes chemisches Praktikum, auch für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. außer Sonnabend, b) Kleines chemisches Praktikum, 9, c) Übungen für Mediziner und Nahrungsmittelchemiker, 4. — **Stoermer**: Organische Chemie II: Chemie der Benzolderivate, 4; Maßanalyse, 1; Wissenschaftliche chemische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Honcamp**: Agrikulturchemie II: Tierernährung, 2; Agrikulturchemisches Praktikum, tägl. — **Kümmell**: Elektrochemie, 3. —

Staude: Theorie der Kurven und Flächen, 4; Analytische Mechanik, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Universität Straßburg.

Braun: Experimentalphysik I: Mechanik, Molekularphysik, Optik, 5; Physikalische Übungen, 5 oder 10; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Cohn**: Einleitung in die theoretische Physik, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Rohmann**: Elektronen (experimentell), 2. — **Hecker**: Die Arbeitsmethoden der Erdbebenforschung, 1. —

Thiele: Allgemeine Experimentalchemie, organischer Teil, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene (mit Wedekind und Straus), tägl. außer Sonnabend, in der anorganischen Abteilung auch halbtägig; Kolloquium über organische Chemie, 1 *g*. — **Rose**: Chemische Technologie der Schwermetalle, 3; Die seltener gebrauchten Mineralfarben, 1 *g*. — **Wedekind**: Physikalische Chemie, 3; Analytische Chemie I, 2; Gasanalytische Übungen, 2; Physikochemisches und elektrochemisches Praktikum, 4; Kolloquium über Fortschritte der anorganischen Chemie, 14tägig, 1 *g*. — **Straus**: Benzolderivate I, 3. — **Kreutz**: Chemie und Technologie des Weines, Schaumweines und der Branntweine, 1. — **Ruggli**: Synthesen der organischen Chemie, 1. — **Weitz**: Chemie der Komplexverbindungen, 1. — **Oesterle**: Pharmazeutische Chemie und chemische Toxikologie, 5; Arbeiten im pharmazeutischen Institut, tägl. außer Sonnabend; Pharmakognostisch-mikroskopische Übungen, 3; Pharmakochemisches Kolloquium, nach Verabredung, *g*. —

Schur: Differential- und Integralrechnung II, 3; Theorie der Flächen 2. Grades, 2; Übungen des mathematischen Seminars, 1 1/2. — **Wellstein**: Lineare Differentialgleichungen, 3; Axonometrie und Perspektive, 2. — — **Simon**: Nicht-Euklidische Geometrie in elementarer Behandlung, 2. — **Epstein**: Grundbegriffe der Analysis, 2. — **Speiser**: Mechanik, 2. — **Bauschinger**: Einleitung in die Mechanik des Himmels, 4; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte für Fortgeschrittene, nach Verabredung. — **Wirtz**: Erläuterungen und Übungen zur Kartenentwurfslehre, 2. —

Universität Tübingen.

Paschen: Experimentalphysik: Mechanik, Optik, 5; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, halbtägig; Selbständige wissenschaftliche Untersuchungen, ganztägig. — **N. N.**: Theoretische Physik: Einleitung und Theorie der Wärme, 3, Übungen, 1. — **Rosenberg**: Die Astronomie im Schulunterricht und die Einrichtung von Schulsternwarten, mit Demonstrationen, 1; Leitung selbständiger astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. —

Wislicenus: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5, Ergänzungen, 1; Praktische Arbeiten im chemischen Laboratorium für Anfänger und Fortgeschrittene, Voll- und Halbpraktikum, tägl., a) Analytisch-chemisches Praktikum (mit Bülow und Weinland), b) Chemisch-pharmazeutisches Praktikum (mit Weinland), c) Präparative Arbeiten (mit Kliegl), d) Physikalisch-chemisches Praktikum (mit Magnus), 1 Nachmittag, e) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Untersuchungen (mit Bülow, Weinland, Kliegl, Magnus, auf dem Gebiete der physikalischen Chemie), ganztägig; Abgekürztes Praktikum für Mathematiker und Forststudierende (mit Bülow), 2 oder 3 Halbtage. — **Thierfelder**: Physiologische Chemie der Kohlehydrate, Fette und Eiweißstoffe, 2; Praktisch-chemische Übungen für Anfänger I: Qualitative Analyse, 6, II: Quantitative Analyse und physiologisch-chemische Übungen, 6; Physiologisch-chemische Arbeiten für Geübtere, tägl. — **Bülow**: Analytische Chemie II, auch für Anfänger, mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Arbeiten im Chemischen Laboratorium, 3; Aromatische Chemie: Karbozyklische Verbindungen, 1—2. — **Weinland**: Chemie der Arzneistoffe II: Organischer Teil, 1 3/4; Chemie der anorganischen Komplexe, 3/4; Quantitative Untersuchung der Arzneistoffe, 3/4; Nachweis von Giften für gerichtliche Zwecke, 3/4. — **Kliegl**: Zyklische Verbindungen I: Einkernige Benzolderivate, 3. — **Magnus**: Physikalisch-chemisches Kolloquium, 1. — **Brigl**: Chemie der Blut- und Pflanzenfarbstoffe, 1. — **Krais**: Technische Warenkunde, Exkursionen, 5—6. —

v. Brill: Mechanik, 5; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Maurer**: Funktionentheorie, 3; Invariantentheorie, 2; Mathematisches Seminar, 2. — **König**: Analysis I: Differentialrechnung, 3, Übungen, 1; Synthetische Geometrie, 3, Übungen, 1. — **Happel**: Einführung in die Variationsrechnung, 2. —

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Praktische Übungen im physikalischen Institut, 4 bzw. 8, für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. —

Buchner: Organische Experimentalchemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Emmert), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Emmert und Supan), 6; Praktikum für präparative Arbeiten, tägl.; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen (mit Emmert), tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs (mit v. Halban), 2 Wochen; Kolloquium (mit Emmert und v. Halban), 14tägig, 1 1/2 *g*. — **Heiduschka**: Chemische Technologie I, 4; Anorganische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde: Organische Präparate, 3; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 1; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich technisch-chemischer, gerichtlich-chemischer und nahrungsmittelchemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl.

außer Sonnabend. — **Pauly**: Tagesfragen der praktischen Chemie, nach Verabredung, *g*; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Emmert**: Maßanalyse, (Experimentalvorlesung), unter Berücksichtigung der durch das Deutsche Arzneibuch vorgeschriebenen Methoden. —

Rost: Sphärische Astronomie II, mit Übungen auf der Sternwarte, 4; Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Kurven, 4; Proseminar: Vorträge und Übungen aus der Elementarmathematik, 4 *g*; Seminar: Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, nach Verabredung, *g*; Seminar für Versicherungswissenschaft: Einführung in die höhere Mathematik, 2 *g*. — **v. Weber**: Integralrechnung, 4, Übungen, 2 *g*. — **Hilb**: Determinanten, 4; Grundlagen der Geometrie und Arithmetik, 3. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 4, Mathematische Ergänzungen, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 1/2 Tag, für Vorgerücktere, 1/2 Tag, Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Greinacher**: Die elektrischen Ströme in Gasen auf Grund der Ionenlehre, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum, halbtägig. — **Ratnowsky**: Einführung in die theoretische Physik: Mechanik des Massenpunktes, des starren Körpers und Mechanik der Kontinua, 3; Elektromagnetische Lichttheorie, 2; Neuere Probleme der theoretischen Physik, 1. — **Wolfke**: Einführung in die Vektorrechnung der Physik, 2; Wärmestrahlung und Quantentheorie, 2. —

Werner: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisch-analytisches Praktikum für Chemiker, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl., für Naturwissenschaftler, halbtägig. — **Abeljanz**: Quantitative chemische Analyse mit Berücksichtigung der elektrolytischen Methoden, 2; Nahrungsmittelchemie, 1; Anleitung zu chemischen Arbeiten, 1; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Mediziner und Veterinäre, sowie für Naturwissenschaftler, 3 Tage, für Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4 oder 8. — **Pfeiffer**: Aromatische Chemie II: Farbstoffe, 3; Eiweißchemie, 1; Phasenlehre, 2. — **Baudisch**: Chemie, Physiologie und Pathologie des Stoffwechsels, 1. — **Jantsch**: Seltene Elemente, 2. — **Reichinstein**: Galvanische Polarisation, 2. — **Dubsky**: Organische Arbeitsmethoden, 1; Riechstoffe: Chemische Konstitution und Geruch, 1. — **Lifschitz**: Einführung in die mathematische Behandlung chemischer Probleme, 2. —

Zermelo: Einführung in die Funktionentheorie, 4; Elemente der Zahlentheorie, 4; Mathematische Übungen für Vorgeschrittene, 2. — **Weiler**: Darstellende Geometrie II, mit Übungen, 4; Analytische Geometrie II, 4; Synthetische Geometrie, 3. — **Bernays**: Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen, 4; Einführung in die Theorie der Integralgleichungen, 3. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3 Abende; Einleitung in die Astrophysik, 2. —

Technische Hochschule Zürich.

Weiß: Physik II, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4, 6 und 8; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12, 24. — **Schweitzer**: Physik II, 3, Ergänzungen, 1, Repetitorium, 1, Übungen, 1; Experimentalphysik, 4, Repetitorium, 1, Theoretische Ergänzungen, 1; Thermodynamik, 2. — **Piccard**: Physikalische Meßmethoden, 1. — **Wolfke**: Einführung in die Vektorenrechnung der Physik, 2; Wärmestrahlung und Quantentheorie, 2; Wissenschaftliche Grundlagen der Beleuchtungstechnik, 1. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen II, 2; Elektrische Bahnen, 3; Diplomarbeiten in elektrischen Anlagen (mit Kuhlmann und Farny). — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik I, 5, Repetitorium, 1, III, 4, Repetitorium, 1; Elektrotechnisches Laboratorium IIa, 4 und 8. — **Farny**: Elektrische Maschinen II, 3, Konstruktionsübungen, 9. — **Korda**: Angewandte drahtlose Telegraphie und Hochfrequenzmaschinen, 1. — **Tobler**: Schwachstromtechnik II, 1. — **Barbieri**: Photographie II, 1; Photogrammetrie, 1; Photographisches Praktikum, 2; Militärphotographische Übungen, 14 tägig, 3. —

Treadwell: Analytische Chemie II, 2; Chemisch-technische Analyse, 4, Repetitorium, 1; Probierkunde mit Übungen, 2; Analytisches Praktikum, 20, 16 und 10; Chemisches Praktikum, 2 und 4; Analytisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Baur**: Physikalische Chemie I, 2, Repetitorium, 1; Technische Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Boßhard**: Anorganische chemische Technologie II: Alkalien, Chlor, Phosphate, 3, Repetitorium, 1, III: Silikate, 2, Repetitorium, 1; Technologie der Kohlehydrate und der Gärung, 2; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl.; Kriegschemie: Die Anpassung der chemischen Gewerbe an die neuen Verhältnisse, 1. — **Cérésole**: Organische Technologie II: Künstliche organische Farbstoffe, 3, Repetitorium, 1; Fette und Beleuchtungsmaterialien, 2, Repetitorium, 1; Explosivstoffe, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl.; Farbenchemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Constam**: Industrielle Feuerungen, 1. — **Eder**: Chemische Harnanalyse, 1. — **Hartwich**: Pharmazeutische Chemie, 5; Ätherische Öle, 1; Toxikologie, 2; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, 12; Technische Mikroskopierübungen II: Genußmittel und Gewürze, 3; Pharmakognostische Übungen für Vorgerücktere, tägl.; Warenkunde, 1. — **Staudinger**: Organische Chemie, 6, Repetitorium, 1, Spezieller Teil II, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10 und tägl., für Vorgerücktere, tägl. — **Winterstein**: Organische Chemie, 3, Repetitorium, 1; Physiologische Chemie, 2; Anleitung zu dem agrikulturchemischen Praktikum, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 8, für Vorgerücktere, tägl.; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. —

Hurwitz: Zahlentheorie, 4; Mathematisches Seminar (mit Großmann), 2. — **Amberg**: Mathematik der Lebensversicherung II, 2. — **Baeschlin**: Vermessungskunde I, 3, Übungen I, 3, III, 4, Übungen II, 8; Vermessungsübung, 2 Wochen; Große Vermessungsübung, 3—4 Wochen; Konstruieren geodätischer Instrumente, 2; Diplomarbeit im Vermessungswesen, 6 Wochen. — **Beyel**: Darstellende Geometrie, 2; Kegelschnitte, 2. — **Brandenberger**: Einführung in den mathematischen Unterricht II, 2. — **Burger**: Graphische Vervielfältigung, 2. — **Franel**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2. — **Großmann**: Anwendung der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 3; Nichteuklidische Geometrie, 3. — **Hirsch**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Invariantentheorie, 2. — **Keller**: Repetitorium der darstellenden Geometrie: Axonometrie, Kegel-, Rotations- und Schraubenflächen, Flächen II. Grades usw., 2; Theorie der Projektivität mit Anwendung auf die Kurven II. Grades, 1. — **Kienast**: Galoissche Theorie der Gleichungen, 2 *g*. — **Kollros**: Anwendungen der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 3; Geometrie der N-Dimensionen, 2. — **Kraft**: Astatik, 2; Vektoranalysis: Elemente, 1; Geometrische Analysis, 3; Vektoranalysis VI, 2. — **Meißner**: Mechanik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Mechanik der Flüssigkeiten und Gase, 2. — **Polya**: Mathematische Übungen, 2; Einführung in die partiellen Differentialgleichungen, 2. — **de Quervain**: Die wichtigsten geographischen Reiseinstrumente mit Übungen und Exkursionen, 1. — **Rudio**: Anwendungen der höheren Mathematik, 4. — **Weyl**: Flächentheorie, 4; Analysis der Vektorfelder, 2. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3; Einleitung in die Astrophysik, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung mit Übungen, für Grundbuchgeometer, 2. — **Zwicky**: Vermessungskunde, 5; Feldmessen, 8; Brücken- und Wasserbau, 3, Konstruktionsübungen, 3; Kulturtechnik II, 2, Konstruktionsübungen, 2; Ingenieurkunde, 2, Übungen, 4. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. | 1. April 1916. Redaktionsschluß für No. 8 am 8. April 1916. | 17. Jahrgang.

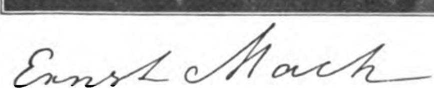
INHALT:

Ernst Mach.

Von A. Einstein.

In diesen Tagen schied von uns Ernst Mach, der auf die erkenntnistheoretische Orientierung der Naturforscher unserer Zeit von größtem Einfluß war, ein Mann von seltener Selbständigkeit des Urteils. Bei ihm war die unmittelbare Freude am Sehen und Begreifen, Spinozas amor dei intellectualis, so stark vorherrschend, daß er bis ins hohe Alter hinein mit den neugierigen Augen des Kindes in die Welt guckte, um sich wunschlos am Verstehen der Zusammenhänge zu erfreuen.





Wie kommt aber ein ordentlich begabter Naturforscher überhaupt dazu, sich um Erkenntnistheorie zu kümmern? Gibt es nicht in seinem Fache wertvollere Arbeit? So höre ich manche meiner Fachgenossen hierauf sagen, oder spüre bei noch viel mehr, daß sie so fühlen. Diese Gesinnung kann ich nicht teilen. Wenn ich an die tüchtigsten Studenten denke, die mir beim Lehren begegnet sind, d. h. an solche, die sich durch Selbständigkeit des Urteils, nicht nur durch bloße Behendigkeit auszeichneten, so konstatiere ich bei ihnen, daß sie sich lebhaft um Erkenntnistheorie kümmerten. Gerne begannen sie Diskussionen über die Ziele und Methoden der Wissenschaften und zeigten durch Hartnäckigkeit im Verfechten ihrer Ansichten unzweideutig, daß ihnen der Gegenstand wichtig erschien. Dies ist fürwahr nicht zu verwundern.

Wenn ich mich nicht aus äußeren Gründen, wie Gelderwerb, Ehrgeiz und auch nicht oder wenigstens nicht ausschließlich des sportlichen Vergnügens, der Lust am Gehirn-Turnen wegen einer Wissenschaft zuwende, so muß mich als Jünger dieser Wissenschaft die Frage brennend interessieren: Was für ein Ziel will und kann die Wissenschaft erreichen, der ich mich hingebe? Inwiefern sind deren allgemeine Ergebnisse „wahr"? Was ist wesentlich, was beruht nur auf Zufälligkeiten der Entwicklung?

Um nun Machs Verdienst zu würdigen, darf man nicht die Frage aufwerfen: Was hat Mach in diesen allgemeinen Fragen erdacht, was kein Mensch vor ihm ersann? Die Wahrheit in diesen Dingen muß immer und immer wieder von kräftigen Naturen neu gemeißelt werden, immer entsprechend den Bedürfnissen der Zeit, für die der Bildner arbeitet; wird sie nicht immer neu erzeugt, so geht sie uns über-

haupt verloren. So ist es schwer, und auch gar nicht so wesentlich, die Fragen zu beantworten: „Was hat Mach gelehrt, was gegenüber Bacon und Hume prinzipiell neu wäre?“ „Was unterscheidet ihn wesentlich von Stuart Mill, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz, was den allgemein erkenntnistheoretischen Standpunkt gegenüber den Einzelwissenschaften anlangt?“ Tatsache ist, daß Mach durch seine historisch-kritischen Schriften, in denen er das Werden der Einzelwissenschaften mit so viel Liebe verfolgt und den einzelnen auf dem Gebiete bahnbrechenden Forschern bis ins Innere ihres Gehirnstübchens nachspürt, einen großen Einfluß auf unsere Generation von Naturforschern gehabt hat. Ich glaube sogar, daß diejenigen, welche sich für Gegner Machs halten, kaum wissen, wieviel von Machscher Betrachtungsweise sie sozusagen mit der Muttermilch eingesogen haben.

Nach Mach ist Wissenschaft nichts anderes, als Vergleichung und Ordnung der uns tatsächlich gegebenen Bewußtseinsinhalte nach gewissen, von uns allmählich ertasteten Gesichtspunkten und Methoden. Physik und Psychologie unterscheiden sich also voneinander nicht in dem Gegenstande, sondern nur in den Gesichtspunkten der Anordnung und Verknüpfung des Stoffes. Als seine wichtigste Aufgabe scheint es Mach vorgeschwebt zu sein, an den von ihm beherrschten Einzelwissenschaften darzutun, wie sich diese Ordnung im einzelnen vollzogen hat. Als Resultate der Ordnungstätigkeit ergeben sich die abstrakten Begriffe und die Gesetze (Regeln) ihrer Verknüpfung. Beide werden so gewählt, daß sie zusammen ein ordnendes Schema bilden, in welches sich die zu ordnenden Gegebenheiten sicher und übersichtlich einreihen lassen. Begriffe haben nach dem Gesagten nur Sinn, sofern die Dinge aufgezeigt werden können, auf die sie sich beziehen, sowie die Gesichtspunkte, gemäß welchen sie diesen Dinge zugeordnet sind (Analyse der Begriffe).

Die Bedeutung solcher Geister, wie Mach, liegt nun keineswegs nur darin, daß sie gewisse philosophische Bedürfnisse der Zeit befriedigen, die der eingefleischte Fachwissenschaftler als Luxus bezeichnen mag. Begriffe, welche sich bei der Ordnung der Dinge als nützlich erwiesen haben, erlangen über uns leicht eine solche Autorität, daß wir ihres irdischen Ursprungs vergessen und sie als unabänderliche Gegebenheiten hinnehmen. Sie werden dann zu „Denknotwendigkeiten“, „Gegebenen a priori“ usw. gestempelt. Der Weg des wissenschaftlichen Fortschrittes wird durch solche Irrtümer oft für lange Zeit ungangbar gemacht. Es ist deshalb durchaus keine müßige Spielerei, wenn wir darin geübt werden, die längst geläufigen Begriffe zu analysieren und zu zeigen, von welchen Umständen ihre Berechtigung und Brauchbarkeit abhängt, wie sie im einzelnen aus den Gegebenheiten der Erfahrung herausgewachsen sind. Dadurch wird ihre allzu große Autorität gebrochen. Sie werden entfernt, wenn sie sich nicht ordentlich legitimieren können, korrigiert, wenn ihre Zuordnung zu den gegebenen Dingen allzu nachlässig war, durch andere ersetzt, wenn sieh ein neues System aufstellen läßt, das wir aus irgendwelchen Gründen vorziehen.

Derartige Analysen erscheinen dem Fachwissenschaftler, dessen Blick mehr auf das Einzelne gerichtet ist, meist überflüssig, gespreizt, zuweilen gar lächerlich. Die Situation ändert sich aber, wenn einer der gewohnheitsmäßig benutzten Begriffe durch einen schärferen ersetzt werden soll, weil es die Entwicklung der betreffenden Wissenschaft erheischt. Dann erheben diejenigen, welche den eigenen Begriffen gegenüber nicht reinlich verfahren sind, energischen Protest und klagen über revolutionäre Bedrohung der heiligsten Güter. In dies Geschrei mischen sich dann die Stimmen derjenigen Philosophen, welche jenen Begriff nicht entbehren zu können glauben, weil sie ihn in ihr Schatzkästlein des „Absoluten“ des „a priori“ oder kurz derart eingereiht hatten, daß sie dessen prinzipielle Unabänderlichkeit proklamiert hatten.

Der Leser errät schon, daß ich hier vorzugsweise auf gewisse Begriffe der Lehre von Raum und Zeit, sowie der Mechanik anspiele, welche durch die Relativitätstheorie eine Modifikation erfahren haben. Niemand kann es den Erkenntnistheoretikern nehmen, daß sie der Entwicklung hier die Wege geebnet haben; von mir selbst weiß ich mindestens, daß ich insbesondere durch Hume und Mach direkt und indirekt sehr gefördert worden bin. Ich bitte den Leser, Machs Werk: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung“ in die Hand zu nehmen und die unter 6. und 7. im zweiten Kapitel gegebenen Betrachtungen („Newtons Ansichten über Zeit, Raum und Bewegung“ und „Übersichtliche Kritik der Newtonschen Aufstellungen“). Dort finden sich Gedanken meisterhaft dargelegt, die noch keineswegs Gemeingut der Physiker geworden sind. Diese Partien sind noch deshalb besonders anziehend, weil sie an wörtlich zitierte Stellen Newtons anknüpfen. Hier einige Rosinen:

Newton: „Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand. Sie wird auch mit dem Namen Dauer belegt.“

„Die relative, scheinbare und gewöhnliche Zeit ist ein fühlbares und äußerliches, entweder

genaues oder ungleiches Maß der Dauer, dessen man sich gewöhnlich statt der wahren Zeit bedient, wie Stunde, Tag, Monat, Jahr."

Mach: „.... Wenn ein Ding A sich mit der Zeit ändert, so heißt dies nur, die Umstände eines Dinges A hängen von den Umständen eines andern Dinges B ab. Die Schwingungen eines Pendels gehen in der Zeit vor, wenn dessen Exkursion von der Lage der Erde abhängt. Da wir bei Beobachtung des Pendels nicht auf die Abhängigkeit von der Lage der Erde zu achten brauchen, sondern dasselbe mit irgendeinem anderen Ding vergleichen können (....), so entsteht leicht die Meinung, daß alle diese Dinge unwesentlich seien. ... Wir sind außerstande, die Veränderungen der Dinge an der Zeit zu messen. Die Zeit ist vielmehr eine Abstraktion, zu der wir durch die Veränderung der Dinge gelangen, weil wir auf kein bestimmtes Maß angewiesen sind, da eben alle untereinander zusammenhängen."

Newton: „Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich."

„Der relative Raum ist ein Maß oder ein beweglicher Teil des ersteren, welcher von unseren Sinnen, durch seine Lage gegen andere Körper bezeichnet und gewöhnlich für den unbeweglichen Raum genommen wird."

Dann folgt eine entsprechende Definition der Begriffe „absolute Bewegung" und „relative Bewegung". Hierauf:

„Die wirkenden Ursachen, durch welche absolute und relative Bewegung voneinander verschieden sind, sind die Fliehkräfte von der Achse der Bewegung. Bei einer nur relativen Kreisbewegung existieren diese Kräfte nicht, aber sie sind kleiner oder größer, je nach Verhältnis der Größe der (absoluten) Bewegung."

Es folgt nun die Beschreibung des wohlbekannten Eimerversuches, welcher die letzte Behauptung anschaulich begründen soll.

Die Kritik, welche Mach diesem Standpunkte zuteil werden läßt, ist sehr interessant; ich zitiere aus derselben einige besonders prägnante Stellen. „Wenn wir sagen, daß ein Körper K seine Richtung und Geschwindigkeit nur durch den Einfluß eines anderen Körpers K' ändert, so können wir zu dieser Einsicht gar nicht kommen, wenn nicht andere Körper A, B, C ... vorhanden sind, gegen welche wir die Bewegung des Körpers K beurteilen. Wir erkennen also eigentlich eine Beziehung des Körpers K zu A, B, C.... Wenn wir nun plötzlich von A, B, C ... absehen, und von einem Verhalten des Körpers K im absoluten Raume sprechen wollten, so würden wir einen doppelten Fehler begehen. Einmal könnten wir nicht wissen, wie sich K bei Abwesenheit von A, B, C ... benehmen würde, dann aber würde uns jedes Mittel fehlen, das Benehmen des Körpers K zu beurteilen, und unsere Aussage zu prüfen, welche demnach keinen naturwissenschaftlichen Sinn hätte."

„Die Bewegung eines Körpers K kann immer nur beurteilt werden in bezug auf andere Körper A, B, C.... Da wir immer eine genügende Anzahl gegeneinander relativ festliegender oder ihre Lage nur langsam ändernder Körper zur Verfügung haben, so sind wir hierbei auf keinen bestimmten Körper angewiesen, und können bald von diesem, bald von jenem absehen. Hierdurch entstand die Meinung, daß diese Körper überhaupt gleichgültig seien."

„Der Versuch Newtons mit dem rotierenden Wassergefäß lehrt nur, daß die Relativdrehung des Wassers gegen die Gefäßwände keine merklichen Zentrifugalkräfte weckt, daß dieselben aber durch die Relativdrehung gegen die Masse der Erde und die übrigen Himmelskörper geweckt werden. Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und massiger und zuletzt mehrere Meilen dick würden ..."

Die zitierten Zeilen zeigen, daß Mach die schwachen Seiten der klassischen Mechanik klar erkannt hat und nicht weit davon entfernt war, eine allgemeine Relativitätstheorie zu fordern, und dies schon vor fast einem halben Jahrhundert! Es ist nicht unwahrscheinlich, daß Mach auf die Relativitätstheorie gekommen wäre, wenn in der Zeit, als er jugendfrischen Geistes war, die Frage nach der Bedeutung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit schon die Physiker bewegt hätte. Beim Fehlen dieser aus der Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik fließenden Anregung reichte auch Machs kritisches Bedürfnis nicht hin, um das Gefühl der Notwendigkeit einer Definition der Gleichzeitigkeit örtlich distanter Ereignisse zu erwecken.

Die Betrachtungen über Newtons Eimerversuch zeigen, wie nahe seinem Geiste die Forderung der Relativität im allgemeineren Sinne (Relativität der Beschleunigungen) lag. Allerdings fehlt hier das lebhafte Bewußtsein davon, daß die Gleichheit der trägen und schweren Masse der Körper zu einem Relativitätspostulat im weiteren Sinne herausfordert, indem wir nicht imstande sind, durch Versuche darüber zu entscheiden, ob das Fallen der Körper relativ zu einem Koordinatensystem auf das Vorhandensein eines Gravitationsfeldes oder auf einen Beschleunigungszustand des Koordinatensystems zurückzuführen sei.

Mach war seiner geistigen Entwicklung nach nicht ein Philosoph, der sich die Naturwissenschaften als Objekt seiner Spekulationen wählte, sondern ein vielseitig interessierter, emsiger Naturforscher, dem die Erforschung auch abseits vom Brennpunkte des allgemeinen Interesses gelegener Detailfragen sichtlich Vergnügen machte. Hiervon zeugen die schier unzählbaren Einzeluntersuchungen aus dem Gebiete der Physik und empirischen Psychologie, die er teils allein, teils zusammen mit Schülern publizierte. Von seinen physikalischen Experimentaluntersuchungen sind diejenigen über die Schallwellen, welche von Geschossen erzeugt werden, am bekanntesten geworden. War auch der dabei verwendete Grundgedanke nicht prinzipiell neu, so zeigten doch diese Untersuchungen von außergewöhnlicher experimenteller Begabung. Es gelang ihm, die Dichteverteilung der Luft in der Umgebung eines mit Über-Schallgeschwindigkeit fliegenden Geschosses photographisch aufzunehmen und so über eine Gattung akustischer Vorgänge Licht zu verbreiten, über welche man vor ihm nichts wußte. Sein populärer Vortrag hierüber wird jedem Freude machen, der an physikalischen Dingen Freude haben kann.

Machs philosophische Studien entspringen einzig dem Wunsche, einen Standpunkt zu gewinnen, von dem aus die verschiedenen wissenschaftlichen Fächer, denen er seine Lebensarbeit gewidmet hatte, als ein einheitliches Streben sich auffassen ließen. Alle Wissenschaft faßt er als Streben nach Ordnung der elementaren Einzelerfahrungen auf, die er als „Empfindungen" bezeichnete. Diese Wortbezeichnung brachte es wohl mit sich, daß der nüchterne und vorsichtige Denker von solchen, die sich nicht eingehend mit seinen Werken befaßten, öfter für einen philosophischen Idealisten und Solipsisten gehalten wurde.

Beim Lesen der Machschen Werke fühlt man angenehm das Behagen, das der Autor beim mühelosen Niederschreiben seiner prägnanten, treffenden Sätze gefühlt haben muß. Aber nicht nur intellektuelles Vergnügen und Freude am guten Stil machen die Lektüre seiner Bücher immer wieder so anziehend, sondern auch die gütige, menschenfreundliche und hoffnungsfrohe Gesinnung, die oft zwischen den Zeilen hervorschimmert, wenn er über allgemein menschliche Dinge redet. Diese Gesinnung schützte ihn auch vor der Zeitkrankheit, von der heute wenige verschont sind, vor dem nationalen Fanatismus. In seinem populären Aufsatze „Über Erscheinungen an fliegenden Projektilen" hat er es sich nicht versagen können, im letzten Absatze seiner Hoffnung auf eine Verständigung der Völker Ausdruck zu geben.

(Eingegangen 14. März 1916.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die statistisch-mechanische Grundlage der allgemeinen Quantentheorie [1]).

Von Th. Wereide.

Wenn die Energie eines physikalischen Systems durch die Werte der Hamiltonschen Koordinate

$$p_1 \ldots p_n \; q_1 \ldots q_n$$

bestimmt ist, so geht man in der Statistik in der Weise vor, daß man diese Koordinaten in einem $2n$-dimensionalen Koordinatensystem zusammenstellt. Der durch die $2n$ Koordinaten definierte $2n$-dimensionale Raum wird dann in überall gleich große Raumteilchen, sogenannte Elementargebiete, geteilt, jedes Raumelement von der Größe

$$d\tau = dp_1 \ldots dp_n \, dq_1 \ldots dq_n.$$

Der Unterschied zwischen der älteren Statistik und der modernen, der Quantentheorie, ist nun einfach der folgende:

In der klassischen Statistik spielt das Element $d\tau$ lediglich die Rolle eines Integrationselementes, und die statistischen Formeln sollen die größte Genauigkeit bekommen, wenn man $d\tau$ unendlich klein macht. Man bekommt dann Formeln, welche in einigen Fällen, z. B. bei der spezifischen Wärme der Gase, vollkommen mit der Erfahrung übereinstimmen, in anderen Fällen dagegen, z. B. im Falle der schwarzen Strahlung, mit den experimentellen Tatsachen in offenbarem Widerspruch sind.

Durch die Quantentheorie wird nun diese Schwierigkeit ganz einfach in der Weise überwunden, daß man in den Formeln der klassischen Statistik das Elementargebiet $d\tau$ nicht unendlich klein macht, sondern ihm eine solche Größe gibt, daß die Formeln mit der Erfahrung übereinstimmen.

Dieser scheinbaren Willkürlichkeit gegenüber dem Element $d\tau$ hat man vergebens versucht eine physikalische Begründung zu geben. Eine solche Begründung wäre die Annahme, daß die Endlichkeit von $d\tau$ auf eine diskon-

1) Zusammengefaßte Darstellung der gleichlautenden Abhandlung in Ann. d. Physik 1916.

tinuierliche Änderung der Koordinaten zurückzuführen wäre in der Weise, daß die Koordinaten $p_1 \ldots q_n$ sich sprungweise um beziehungsweise die endlichen Größen $dp_1 \ldots dq_n$ änderten. Eine solche Annahme ist nun als unhaltbar aufgegeben. Dagegen behaupten noch viele Physiker, daß die Endlichkeit von $d\tau$ mit den klassischen dynamischen Gesetzen in Widerspruch stehen soll, und man diskutiert ernsthaft die Frage, in welcher Weise diese Gesetze zu revidieren sind.

In dem folgenden soll gezeigt werden, daß der erwähnte Widerspruch nicht vorhanden ist. Vielmehr ergibt sich ein endlicher Wert von $d\tau$ als eine Konsequenz der klassischen dynamischen Gesetze, sobald man die Existenz einer Nullpunktsenergie voraussetzt.

Nach der statistischen Mechanik[1]) ist die Entropie eines physikalischen Systems:

$$S = k \log \frac{1}{D} = k \log (W d\tau) = \int^T \frac{dU + p\,dv}{T} \qquad (1)$$

Hier bedeutet W die Zahl der Elemente $d\tau$, welche der Zustandspunkt des Systems durchläuft. Wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustandspunkt sich in einem Element $d\tau$ befindet gleich P ist, so ist

$$D = \frac{P}{d\tau},$$

die sogenannte Wahrscheinlichkeitsdichte. v ist das Volumen des Systems, p der Druck, U seine Energie und T seine absolute Temperatur.

$W d\tau$ bedeutet den durchlaufenen Teil des Zustandsraumes. Nennen wir diesen Raumteil Z. Die Größe dieses Raumteiles ist

$$Z = \sum_1 \ldots \sum_{2n} dp_1 \ldots dp_n\, dq_1 \ldots dq_n,$$

wo die Summation über die durchlaufenen Elemente zu unternehmen ist. In einigen Fällen hängt der Mittelwert einer Koordinate p_i von dem Mittelwert der entsprechenden Koordinate q_i ab. Dann läßt sich das zweidimensionale Elementargebiet $dp_i\, dq_i$ durch ein eindimensionales Gebiet dr_i ausdrücken, und der Zustand des Systems wird durch n unabhängige Koordinaten r bestimmt.

Um eine allgemeine Behandlung zu ermöglichen, werden wir deshalb ganz allgemein die unabhängigen Koordinaten des Systems mit r_1, $r_2, \ldots r_m$ bezeichnen. Das Zustandsvolumen hat also die Form

$$Z = \sum \ldots \sum dr_1 \ldots dr_m$$

und die Dimension

$$[Z] = [\text{Energie} \cdot \text{Zeit}]^n. \qquad (2)$$

1) Diese Zeitschr. 17, 62, 1916.

Der stationäre Zustand des Systems ist dadurch charakterisiert, daß Z seinen Maximalwert erreicht hat.

Da also Z, im Gleichgewichtszustande, eine konstante Größe hat, muß es auf die Form eines Parallelepipeds gebracht werden können, also

$$Z = H_1\, H_2 \ldots H_m,$$

wo H_1, H_2 ... für jede Koordinate charakteristische Konstanten sind, welche ein Maß für die Variationsfähigkeit der Koordinate geben, und welche so gewählt sind, daß sie für jede einzelne Koordinate dem richtigen Mittelwert der Energie entsprechen. Durch diese Transformation haben wir das wirkliche System in ein neues System umgeformt, das mit dem wirklichen insoweit äquivalent ist, als es dieselbe Entropie und dieselbe Energie hat wie das wirkliche System.

Wir werden voraussetzen, daß wenn die Temperatur gegen Null geht, so geht die Energie nicht gegen Null, sondern gegen eine konstante Nullpunktsenergie von endlicher Größe. Dann muß auch das Zustandsvolumen Z gegen einen endlichen Nullpunktswert

$$Z_0 = h_1\, h_2 \ldots h_m$$

gehen, wo h_1, h_2 ... die Nullpunktswerte der Größen H_1, H_2, ... sind.

Es sei U_i der Teil der Energie, welcher von der Koordinate r_i abhängt. Nach der statistischen Mechanik ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Koordinate r_i sich in dem Gebiete dr_i befindet.

$$P_{dr_i} = \frac{e^{-\frac{U_i}{kT}}\, dr_i}{\sum e^{-\frac{U_i}{kT}} dr_i} \qquad (3)$$

wo U_i die Energie ist, welche die Koordinate r_i darstellt, wenn sie sich in dem Gebiete dr_i befindet.

Unsere Aufgabe ist nun, den Mittelwert der Energie U_i zu berechnen. Diese Berechnung wird möglich, sobald wir die Wahrscheinlichkeit P_{dU_i} dafür finden können, daß die Energie U_i sich in dem Gebiete dU_i befindet. Diese Wahrscheinlichkeit wird offenbar gleich der Wahrscheinlichkeit P_{dr_i} vorausgesetzt daß die Energiegebiete dU_i so gewählt werden, daß jedem Gebiete dr_i eindeutig ein bestimmtes Gebiet dU_i entspricht. Es muß bemerkt werden, daß umgekehrt einem gegebenen Gebiete dU_i sehr wohl mehrere[1]), einander äquivalente, Gebiete dr_i entsprechen können.

1) Z. B. in dem Falle eines linearen Planckschen Oszillators. Hier ist $dr_i = dp_i\, dq_i$ und es gibt mehrere solche Elemente, welche derselben Energie entsprechen.

Wenn wir also die Gebiete dU_i in der gesagten Weise festsetzen, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_{dU_i} = \frac{e^{-\frac{U_i}{kT}} dr_i}{\sum e^{-\frac{U_i}{kT}} dr_i}. \tag{4}$$

Über die Größe der Gebiete dr_i oder $d\tau$ wissen wir vorläufig nichts. Es ist während der Ableitung der Formel (3) vorausgesetzt, daß sie überall in dem Zustandsraume denselben Wert haben, aber wir haben bisher keine Bedingung gefunden, welche verhindert daß sie beliebig klein gewählt werden können.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß eine solche Bedingung existiert.

Wir denken uns, daß die Temperatur immer kleiner gemacht wird. Wenn die Temperatur gegen Null geht, so nähert sich die variable Energie U_i dem konstanten Wert U_{i0} und wir erhalten

$$\lim_{T \to 0} P_{dU_i} = \frac{e^{-\frac{U_{i0}}{kT}} dr_i}{e^{-\frac{U_{i0}}{kT}} \Sigma dr_i} = \frac{dr_i}{h_i}.$$

Da dieser Grenzwert der Wahrscheinlichkeit offenbar gleich eins sein muß, so wird

$$dr_i = h_i$$

oder $d\tau = dr_1 \, dr_2 \ldots dr_m = h_1 \, h_2 \ldots h_m = Z_0$,

d. h. wenn die Wahrscheinlichkeitsformel (4) für alle Temperaturen gelten soll, muß man als Elementargebiet das Nullpuuktsvolumen wählen.

Für den Mittelwert der Energie bekommen wir dann

$$\overline{U}_i = U_{i0} + \frac{\sum_0^\infty e^{-\frac{y_i(r_i)}{kT}} y_i(r_i)}{\sum_0^\infty e^{-\frac{y_i(r_i)}{kT}}} \tag{5}$$

wo $y_i = U_i - U_{i0}$

und $r_i = nh_i$, n = ganze Zahl.

Für die Entropie erhält man

$$S = k \log \frac{Z}{h_1 \, h_2 \ldots h_m} + k \log h_1 \, h_2 \, h_m.$$

Das letzte Glied, die Nullpunktsentropie, ist eine Konstante, die für die gewöhnlichen Anwendungen der Entropie keine Rolle spielt. Man kann sie deshalb zweckmäßig weglassen und bekommt dann die Plancksche Entropie

$$S = k \log \frac{Z}{h_1 \, h_2 \ldots h_m} = k \log W, \tag{6}$$

wo W die Zahl von Elementen

$$d\tau = h_1 \, h_2 \ldots h_m$$

ist, welche in dem durchlaufenen Volumen Z enthalten sind, oder, mit anderen Worten, wo W die Zahl von durchlaufenen Zustandspunkten ist, wenn man sich denkt, daß jede Koordinate r_i sich sprungweise um den Wert h_i ändert.

Die Formeln (5) und (6) bilden die Grundlage der Quantentheorie. Somit ist diese Theorie nicht in Widerspruch mit der statistischen Mechanik, sondern vielmehr eine Konsequenz derselben, sobald man eine endliche Nullpunktsenergie voraussetzt. Die scheinbare Diskontinuität ist nur mathematischer Art und hat keine Beseitigung der gewöhnlichen dynamischen Gleichungen zur Folge.

Wendet man die Formel (6) auf das Problem der schwarzen Strahlung an, ergibt sich das Plancksche Strahlungsgesetz.

Der Nullpunktsenergie eines linearen Planckschen Oszillators muß man den Wert $\frac{h\nu}{2}$ zuschreiben, ganz wie Planck es angenommen hat.

(Eingegangen 6. März 1915.)

Über Beobachtungen am Röntgen-Transformator.

Von C. Déguisne.

(Mit Tafel III.)

Neben den mit Unterbrechern betriebenen Röntgen-Induktoren kamen in den letzten Jahren mehr und mehr Hochspannungstransformatoren in Verwendung, die mit Wechselstrom gespeist werden und deren Hochspannung vermittelst eines synchron umlaufenden Schalters in geeigneten Zeitabschnitten auf die Röhre gelegt wird. Der so betriebene Apparat kann im Gegensatz zu der für die erstgenannten Apparate üblich gewordenen Bezeichnung „Röntgeninduktor" sehr wohl kurzweg „Röntgentransformator" genannt werden. Infolge der Eigenart seines Betriebes zeigt sich eine Reihe von interessanten Erscheinungen, von denen im nachfolgenden einige besprochen werden[1]).

Rückwirkung des Sekundärstroms auf den Primärstrom. Zwischen dem Röntgen-Induktor und dem Röntgen-Transformator be-

1) Die im folgenden mitgeteilten Versuchsresultate wurden an einem Transformator mit geradem, offenem Eisenkern von 90 cm Länge und 45 cm^2 Eisenquerschnitt erhalten. Er wurde mir von den Veifa-Werken, Frankfurt a. M. sammt allem Zubehör ihres Reformapparats zur Verfügung gestellt. Hierfür und für das weitgehende Entgegenkommen, mit dem sie auch Umbauten und Abänderungen an der Apparatur auf meinen Wunsch vornahm, möchte ich der Firma, insbesondere deren Direktor, Ing. Dessauer, auch hier verbindlichst danken.



steht hinsichtlich der Energiezufuhr, bzw. der Energiebilanz ein prinzipieller Unterschied. Beim Induktor ist die Energiezufuhr aus dem Primärkreis abgeschlossen und der letztere schon geöffnet, wenn die sekundäre Entladung einsetzt. Der bei der einzelnen Entladung sekundär nutzbare Energiebetrag ist daher durch den vor der Entladung auf der primären Seite im Magnetfeld aufgespeicherten Energievorrat nach oben hin begrenzt. Er ist daher auch im allgemeinen von der Art der sekundären Belastung unabhängig. Beim Transformator dagegen steht während der Entladung die Primärspule mit der Stromquelle in Verbindung. Es kann auch während der Entladung aus der letzteren Energie nachgeschoben werden, und der Betrag der sekundär abgenommenen Energie ist von der Art der Belastung — ob harte oder weiche Röhre, ob eine oder mehrere Röhren — stark abhängig. Diese Abhängigkeit muß sich daher auch im zeitlichen Verlauf der primären Stromstärke und Klemmenspannung bemerkbar machen. In einzelnen Abhandlungen und selbst in Lehrbüchern ist die Ansicht geäußert worden, daß „wegen der kleinen sekundären Stromstärke" eine merkbare Rückwirkung auf den primären Strom nicht stattfindet. Daß diese Rückwirkung aber ganz beträchtlich sein kann, zeigt die Fig. 1[1]), bei der die Kurve *a* den zeitlichen

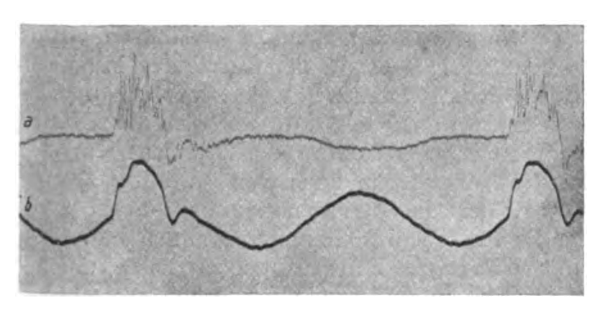


Fig. 1. Entladung über Funkenstrecke von 12 cm. a) Sekundärstrom, 3 mA Mittelwert, b) Primärstrom 14 Amp. eff.

Verlauf des sekundären und Kurve *b* den des primären Stromes wiedergibt. Als Belastung diente eine Funkenstrecke von 12 cm zwischen Kugeln von 4 cm Durchmesser. Der synchron umlaufende Schalter war hier sowie bei allen folgenden Aufnahmen derart angeschlossen, daß er in jeder zweiten Periode die Hochspannung in der Nähe ihres positiven Maximalwertes auf den Belastungsstromkreis legte, und zwar einpolig, während der andere Pol der Hochspannung dauernd mit dem anderen Ende des Belastungskreises verbunden war. Es wurde primär eine Wechselspannung von 46 Perioden und 120 Volt eff. verwendet, wovon durch vorgeschalteten Widerstand oder Spule so viel abgedrosselt wurde, daß an den Klemmen der Primärwicklung ca. 90 Volt eff. herrschten.

Das Magnetfeld. Auch die Beeinflussung des Magnetfeldes durch die sekundäre Entladung darf keineswegs vernachlässigt werden, wie aus Figur 2 hervorgeht. Hier zeigt Kurve *a*

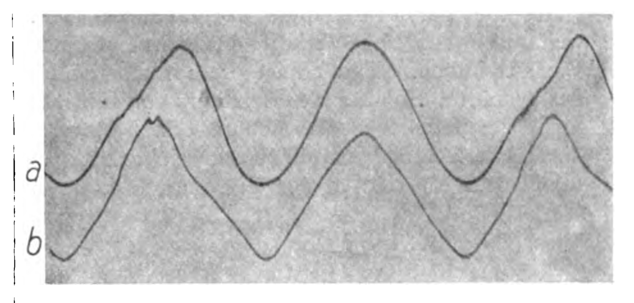


Fig. 2. Entladung über harte Röhre, 1 mA Mittelwert. a) Magnetfeld. b) Primärstrom, 12,5 Amp. eff.

den zeitlichen Verlauf des Magnetfeldes und Kurve *b* denjenigen des Primärstroms. Dabei war die primäre Stromstärke 12,5 Amp. eff. und der Mittelwert der sekundären „nur" 1 mA, mit Drehspulinstrument gemessen. Die Abflachung der Feldkurve im Augenblick der sekundären Entladung kann nicht übersehen werden.

Die sekundäre EMK. Aus dem Verlauf des Magnetfeldes, wie er durch die Kurve *a* der Fig. 2 wiedergegeben wird, geht hervor, daß durch die Entladung die elektromotorische Kraft (EMK) gegenüber der aufgedrückten, annähernd sinusförmig verlaufenden Spannung wesentlich verändert wird. Fig. 3 zeigt den zeitlichen Verlauf der EMK der Sekundärspule während der Ent-

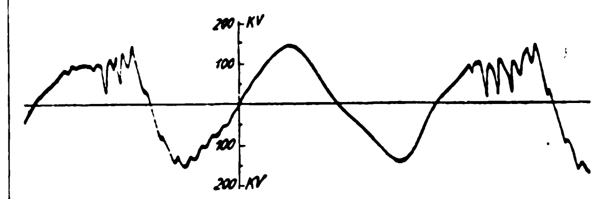


Fig. 3. Entladung über harte Röhre, 1,5 mA Mittelwert. Sekundäre EMK.

1) Diese und die folgenden Kurven wurden mit dem Oszillographen von Siemens & Halske aufgenommen. Die benutzten Schleifen hatten eine Eigenschwingung von 5000 bis 6000 Schwingungen pro Sekunde. Die Dämpfung war etwas kleiner als halb aperiodisch, d. h. der Rückschwingung der sich selbst überlassenen Schleife folgte ein Ausschlag über die Nulllage hinaus von 6—8 Proz. des Anfangsausschlags. Man kann daher erwarten, daß Schwingungen bis zu 2000 pro Sekunde mit einer Genauigkeit von ca. 3 Proz. in der Amplitude und ohne merkbare Phasenverschiebung aufgezeichnet werden. Vgl. Orlich, Wechselstromkurven, und Keinath, ETZ. 1915, S. 633.

ladung und während der entladungsfreien Periode unmittelbar nebeneinander. Die Kurve wurde mittelst einer zwischen Primär- und Sekundärspule liegenden, über die Länge der letzteren gleichmäßig verteilten Wicklung von geeigneter Windungszahl aufgenommen. Ihr Gang zeigt während der Entladung, abgesehen von einzelnen tiefen Einschnitten, eine Abflachung und gegen das Ende der Entladung ein nicht unbeträchtliches Ansteigen über die normalen Werte der Sinuskurve. Die Form und die Größe der Deformation der sekundären EMK. hängt von mehreren Faktoren ab; einmal von der Art der sekundären Belastung, ob weiche oder harte Röhre, ob Funkenstrecke oder metallisch leitender Widerstand, weil hierdurch die Form des sekundären Stromstoßes bedingt wird; dann von der Größe des Widerstandes und der Induktivität, die der Primärspule vorgeschaltet sind, weil diese auf den Verlauf des Primärstromes Einfluß haben. Endlich ist die Phasenstellung des synchron umlaufenden Schalters von Einfluß. Stellt der Schalter den Anschluß erst her, wenn die EMK. ihren Maximalwert erreicht hat, so erhält man die Kurve der Fig. 4a; rückt man

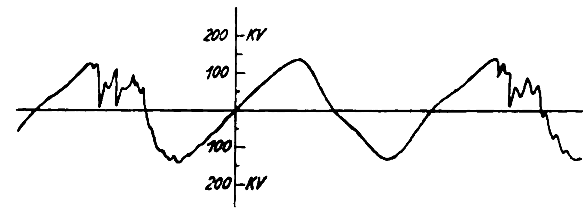


Fig. 4a. Entladung über harte Röhre, 1,5 mA Mittelwert. Sekundäre EMK. bei rückwärts verschobenem Synchronschalter.

den Umschalter aber vor, so daß der Anschluß etwa $^1/_8$ Periode früher eintritt, so entsteht die Kurve der Fig. 4b.

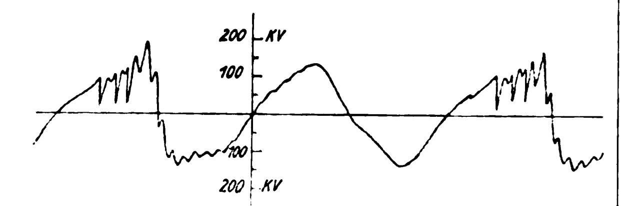


Fig. 4b. Entladung über harte Röhre, 1,5 mA Mittelwert. Sekundäre EMK. bei vorwärts verschobenem Synchronschalter.

Die Klemmenspannung. Die Kurven der Figuren 3 und 4 geben Werte, die der EMK. der Sekundärspule proportional sind. Den beiden Kurven ist der Spannungsmaßstab beigegeben. Dieser wurde erhalten, indem mit einem elektrostatischen Instrument die Effektivwerte der Spannungen in unbelastetem Zustande direkt gemessen wurden. Etwas anders als die EMK. verläuft die Klemmenspannung der Sekundärspule. Sie ist, solange kein Strom entnommen wird, gleich der EMK., sobald aber Strom fließt, kleiner, und zwar zunächst um den Abfall, den der Ohmsche Widerstand der Sekundärspule verursacht. Dieser betrug im vorliegenden Falle etwa 100000 Ohm; die Stromstöße erreichten ca. 20 mA. Der Ohmsche Abfall macht also im Höchstfall etwa 2 kV[1]) aus. Dazu kommt der Abfall, welcher durch die Selbstinduktion der im magnetischen Streufeld liegenden Windungen entsteht und der schätzungsweise den fünffachen Betrag erreichen mag, so daß nach Einsetzen der Entladung die Klemmenspannung um etwa 10 kV unter die EMK. heruntergehen kann. Dieser Betrag bleibt weit zurück hinter dem Abfall, den die EMK. selbst durch die Störung des Magnetfeldes von seiten der sekundären Entladung erleidet und der in den Figuren 3 und 4 in Form von tiefen Einschnitten zu erkennen ist. Die Entladung kann, wie später noch eingehender besprochen wird, in steilen, zackenartigen Stößen verlaufen. Die erwähnten tiefen Einschnitte der EMK.-Kurven fallen zeitlich mit solchen durch die Röhre gehenden Stromstößen zusammen. Dieser starke Absturz der EMK., der 60—80 kV beträgt und die EMK. auf 30—40 kV herabsinken läßt, wird durch die Rückwirkung des Sekundärstroms auf das Magnetfeld verursacht. Tatsächlich sieht man auch in Fig. 2 in der Kurve des Magnetfeldes kurz dauernde Stellen, an denen sie nahezu horizontal verläuft, wo also die EMK. kleine Beträge erreichen muß. Ähnliche Kurven wurden vor kurzem auch von Wehnelt[2]) erhalten, der die Klemmenspannung direkt mit der Braunschen Röhre aufgenommen hat.

Stoßartige Entladungen. Diese tiefen Einschnitte in der Kurve der EMK. entstehen, wenn die Entladung stoßweise verläuft. Sie tut dies nur bei harten Röhren und bei längeren Funkenstrecken. Fig. 5 zeigt den Verlauf der EMK. (Kurve *a*) und des synchron aufgenommenen Sekundärstromes (Kurve *b*); hierbei war die Schaltung derart, daß die Entladung abwechselnd in der einen Periode über Schiefer-

1) Dieser Abfall erreicht hier einen verhältnismäßig hohen Betrag, weil der Widerstand der Sekundärspule sehr hoch ist und weil sekundäre Stromstöße bis zu 20 mA vorausgesetzt sind. Es ist jedoch durchaus unzulässig, bei gewöhnlichen Induktoren, deren Sekundärwiderstand meistens viel niedriger liegt, und für eine Stromstärke von nur 1 oder 0,5 mA den durch den Ohmschen Widerstand verursachten Spannungsabfall mit 10 kV oder noch mehr in Rechnung zu setzen, wie dies vor kurzem durch P. Ludewig, diese Zeitschr. 16, 438—450, 1915, geschehen ist. Bei einem Induktor z. B. mit 50000 Ohm und bei 1 mA beträgt dieser Abfall nur 50 Volt.

2) Wehnelt, Ann. d. Phys. 47, 1112, 1915.

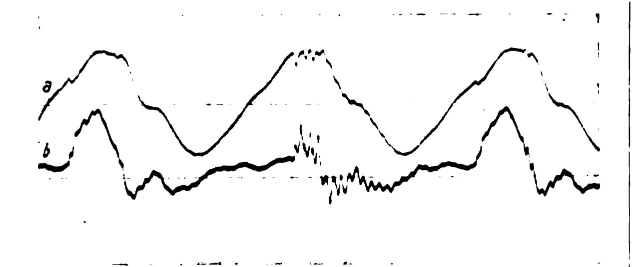


Fig. 5. Entladung abwechselnd über Schieferwiderstand und über Funkenstrecke von 5 cm. a) Sekundäre EMK., b) Sekundärstrom, 1,5 mA Mittelwert.

stäbe, in der andern über eine — hier relativ kurze — Funkenstrecke (ca. 5 cm) ging. Die EMK.-Kurve ist im ersten Fall glatt, im zweiten Fall den über die Funkenstrecke gehenden Stromstößen entsprechend eingeschnitten. Der Strom ist in der Mitte der Sekundärspule an einer hier zugänglich gemachten Unterbrechungsstelle aufgenommen. Jeder rasche Anstieg des Sekundärstroms hat ein augenblickliches Sinken, jeder plötzliche Abfall des Stromes ein Ansteigen der EMK. zur Folge, da der Primärstrom den raschen Schwankungen nicht folgen und die Rückwirkung des Sekundärstroms auf das Magnetfeld nicht ausgleichen kann. Die gleiche Erscheinung, aber stärker ausgeprägt, zeigt Fig. 5a, welche die Entladung durch eine harte Röhre wiedergibt. Der Strom, Kurve *b*, ist in

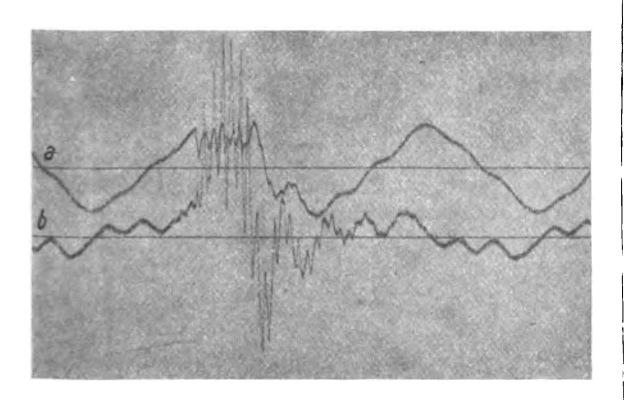


Fig. 5a. Entladung über harte Röhre. a) Sekundäre EMK. b) Sekundärstrom in der Mitte der Sekundärspule, 2 mA Mittelwerte.

der Mitte der Sekundärwicklung aufgenommen und daher — vgl. den folgenden Absatz: Wanderwellen — gegen den tatsächlich durch die Röhre gehenden Strom um den halben Abstand zwischen zwei Zacken in nacheilendem Sinne verschoben. Jeder Stromzacke entspricht ein tiefer Einschnitt in der Kurve der EMK.

Durch den starken Absturz der sekundären EMK. läßt sich das Zustandekommen der stoßartigen Entladung bei harten Röhren und längeren Funkenstrecken ungezwungen erklären. Die Charakteristiken d. h. die den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom wiedergebenden Kurven, die bisher über die Entladung durch Röntgenröhren bekannt geworden sind[1]), scheinen zu ergeben, daß bei zunehmendem Strom die Spannung ein Minimum durchläuft, das bei härteren Röhren der üblichen Bauart bei 35—40 kV und 2 mA, bei weichen Röhren unterhalb 20 kV und unter 0,5 mA liegt. Unterhalb dieser Spannungen setzt der Röhrenstrom aus. Ist der Röntgentransformator derart gebaut, daß beim Einsetzen des Entladungsstroms die sekundäre EMK. unter 40 kV sinkt, so reißt bei harten Röhren der Strom ab, während bei weichen Röhren dies nicht eintritt, wenn die EMK. nicht unter den für sie geltenden Minimalwert der Spannung sinkt[2]). Aus dem Spannungsmaßstab der Figuren 3 und 4 läßt sich, allerdings nur mit ganz roher Annäherung, entnehmen, daß dort die EMK. auf 20—30 kV herabgeht; die Klemmspannung dürfte noch etwa 10 kV tiefer liegen. Das Zustandekommen von Röntgenstrahlung in Form von einzelnen, durch kurze Zeitintervalle getrennten Stößen ist schon mehrfach beobachtet worden, so von Dessauer[3]), von Janus und Voltz[4]). Vgl. hierzu auch Déguisne[5]), Blitzinduktor.

Wanderwellen. Die Rückwirkung des Sekundärstroms auf das Magnetfeld läßt sich beim Röntgentransformator nicht so einfach und eindeutig darstellen wie bei den gewöhnlichen im Licht- und Kraftbetrieb benutzten Wechselstrom-Transformatoren; denn die sekundäre Stromstärke verteilt sich nicht gleichmäßig über die ganze Länge der Wicklung, sondern hat zu gleichen Zeiten an verschiedenen Stellen derselben verschiedene Werte. Die Sekundärwicklung des untersuchten Röntgen-Transformators hat nach Angabe der Fabrikantin 215000 Windungen mit einer Gesamtlänge von 185000 m. Jede Änderung des Strömungszustandes braucht also, um sich von den Klemmen bis zur Mitte der Spule fortzupflanzen, eine Zeit, die gegenüber der Dauer der einzelnen Stromstöße nicht vernachlässigt werden darf. In dem Augenblick, in dem der Röhrenstrom einsetzt, beginnt die Strömung in der Sekundärwicklung gleichzeitig an beiden Enden, und von diesen aus pflanzt

1) A. Wertheimer, Diss. Göttingen 1911 (auch Leipzig bei S. Hirzel), und H. Kröncke, Diss. Göttingen 1913.
2) Vgl. auch H. Kröncke l. c. und P. Ludewig, diese Zeitschr. **16**, 438. 1915.
3) Dessauer, Verh. d. D. Phys. Ges. **11**, Nr. 20, 1909.
4) Janus u. Voltz, diese Zeitschr. **16**, 213, 1915.
5) Déguisne, diese Zeitschr. **15**, 630, 1914.

sich hierauf je eine „Wanderwelle" über die Wicklung bis zum anderen Ende fort, wo die Wellen wieder gleichzeitig, aber nach Ablauf einer gewissen Zeit eintreffen. Zusammen mit der Stromwelle wandert auch eine Spannungswelle, deren Höhe sich aus der Intensität der Stromwelle und dem Wellenwiderstand der Wicklung ergibt. Hat die Strömung im Belastungskreis inzwischen ausgesetzt — dies ist, wie schon erwähnt, bei harten Röhren und bei längeren Funkenstrecken der Fall —, so kann die beim Eintreffen der Wanderwellen entstehende Spannungserhöhung ein erneutes Einsetzen des Röhrenstromes veranlassen. Setzt aber der Strom im äußeren Kreis nicht aus, wie dies bei weichen Röhren oder bei metallischer Leitung (Schieferwiderstände o. a.) der Fall ist, so macht sich das Eintreffen der Wellen an den Klemmen durch ein ruckweises, treppenförmiges Anwachsen des Stromes bemerkbar. Eine Strömung der ersten Art zeigt uns Fig. 6, eine der zweiten Art Fig. 7[1]). Hierbei betrug die Zeit, während welcher der synchron umlaufende Schalter den feststehenden Schaltsegmenten unmittelbar gegenüberstand (mit 2 bis 4 mm Luftstrecke), 0,004 Sekunden. Dies ist gerade die Zeit, während der in Fig. 6 die drei Stromstöße, in Fig. 7 der allmählich ansteigende Strom zustandekommt. Die nachfolgende Strömung verläuft über einen bis zu 10 cm Länge anwachsenden Funken.

Die Geschwindigkeit der Wanderwelle. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wanderwelle läßt sich aus dem zeitlichen Abstand der Zacken und der bekannten Länge der Wicklung berechnen. Aus dem Zeitmaßstab der Fig. 6 entnimmt man z. B. als Abstand zweier Zacken im Mittel 0,0015 Sekunden; die Länge der Sekundärwicklung betrug $18{,}5 \cdot 10^6$ cm. Dies ergibt eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von $1{,}2 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Die Geschwindigkeit der Welle läßt sich auch in der Weise finden, daß man die Stromkurve in der Mitte und am Ende der Wicklung gleichzeitig aufnimmt und so die zeitliche Verschiebung zwischen entsprechenden Punkten der Kurve bestimmt. In dieser Weise wurden die Kurven *a* und *b* der Figuren 6 und 7 erhalten. Die in der Mitte sitzende Oszillographenschleife war geerdet. Die Schleife am Ende der Wicklung samt Erregerbatterie (2 Zellen) war von Erde isoliert. Die Optik der Schleifen war so eingestellt, daß die beiden Lichtpunkte in der Ruhelage auf der photographischen Trommel in einer Erzeugenden des Zylindermantels lagen, daß also senkrecht übereinander liegende Kurvenpunkte gleichen Zeitpunkten entsprechen; die Dämpfung und die Eigenschwingung der Schleifen waren einander möglichst gleich gemacht, so daß ein merkbarer Fehler durch eine Differenz in der Phasenverschiebung beider Kurven nicht vorhanden sein kann. Die mit *a* bezeichneten Kurven wurden in der Mitte, die mit *b* bezeichneten am Ende der Wicklung erhalten. In Fig. 6 bleiben die Zacken der Kurve *a* genau um den halben Zackenabstand hinter denen der Kurve *b* zurück. Daraus ergibt sich der gleiche Wert der Geschwindigkeit wie oben. Aus Fig. 7 entnimmt man für einander entsprechende Punkte beider Kurven eine zeitliche Verschiebung von 0,5 $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ sec. Die Kurven der Fig. 7 wurden erhalten, nachdem die Sekundärwicklung des bisher benutzten Transformators durch Herausnahme von $^1/_3$ seiner Windungen aus der Mitte der Spule auf eine Länge von $12 \cdot 10^6$ cm verringert worden war. Die Welle durchläuft also $6 \cdot 10^6$ cm in $0{,}5$—$0{,}6 \cdot 10^{-3}$ sec und als Geschwindigkeit ergibt sich $1{,}0 - 1{,}2 \cdot 10^{10}$ cm/sec, d. h. ungefähr derselbe oder ein nur wenig kleinerer Wert wie bei der größeren Sekundärwicklung der Fig. 6. Diese Werte dürfen nur als Mittelwerte betrachtet werden; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wanderwelle wird in der Mitte der Spule kleiner sein als an den Enden. Bezeichnet man die Induktivität und die Kapazität der Längeneinheit des Sekundärdrahtes durch $\bar{L}$ und $\bar{C}$, so ist die Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\bar{L} \cdot \bar{C}}}.$$

Für $\bar{L}$ sind aber in der Mitte der Wicklung größere Werte zu erwarten als an den Enden.

Der Wellenwiderstand. Das Verhältnis der Spannung an der Front der Stromwelle zu der Stromintensität sei W (Wellenwiderstand).

Es ist $W = \sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{C}}} = v \cdot \bar{L}$. Setzen wir für $\bar{L}$ — der Größenordnung nach — einen Wert von 10^{-3} Henry ein, so wird $W = 10^7$, d. h. auf jedes Milliampere an der Wellenfront entfällt eine Spannung, deren Größenordnung sich nach 10 kV bemißt.

Reflexion der Welle. Der Strom in der Mitte der Sekundärspule (Kurven *a*) ist gegenüber dem Strom am Anfang (Kurven *b*) nicht nur zeitlich verschoben, sondern auch in seiner Kurvenform verändert. Der letztere Umstand ist auf die mehrfachen Reflexionen zurückzuführen, die die Wanderwelle auf ihrem Wege von den Klemmen bis zur Mitte der Sekundär-

1) Die Figuren 6 u. 7 befinden sich auf Tafel III.

wicklung erleidet. Diese ist aus einer größeren Zahl von scheibenförmigen Spulen aufgebaut; die in der Mitte liegenden Scheiben bestehen aus dünnerem Draht und sind enger gewickelt als die Scheiben an den Enden; sie bieten daher der Welle einen anderen Widerstand, und an jeder Stelle, an der der Wellenwiderstand sich ändert, wird die Welle teilweise reflektiert. Tatsächlich scheinen in Figur 6a im Anstieg der Zacken derartige Reflexionen ausgeprägt zu sein.

Verteilung des Stroms. Bei der stoßförmigen Entladung (Fig. 6) ist die Dauer eines Stromstoßes erheblich kürzer als die Zeit, die die Welle braucht, um von einem Ende der Sekundärwicklung zum anderen zu gelangen. Während also der Kopf der Welle sich noch im Inneren der Wicklung befindet, ist auch schon deren Ende in die Wicklung eingetreten, so daß ein Teil der Sekundärwicklung von Strom durchflossen ist, die davor und die dahinter liegenden Teile aber stromlos sind. Diese eigenartige Verteilung des Strömungszustandes muß

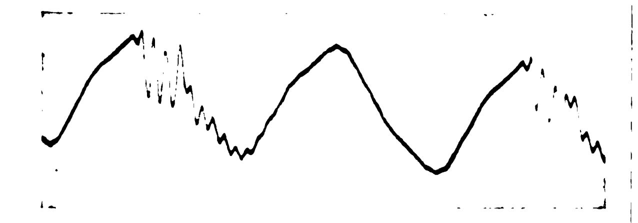


Fig. 8. Entladung über Funkenstrecke von 12 cm. EMK. in einer Prüfspule in der Mitte des Eisenkerns.

sich in der Rückwirkung auf das Magnetfeld des Eisenkerns ebenfalls bemerkbar machen, und zwar in Form einer Gegenmagnetisierung, die sich auf Teile der ganzen Länge des Kerns beschränkt und zusammen mit der Stromwelle über den Eisenkern hinwegläuft. Legt man an verschiedenen, über die ganze Länge verteilten Stellen Prüfwindungen um den Kern, so sind die durch diese Gegenmagnetisierung in ihnen induzierten EMKe. zeitlich gegeneinander verschoben. Dabei ist zu berücksichtigen, daß von jedem Ende der Sekundärwicklung aus gleichzeitig eine Welle nach der Mitte und über diese hinweg nach dem anderen Ende hin läuft. Die in der Mitte des Kerns liegende Prüfwindung wird von den von beiden Seiten herkommenden Wellenköpfen und ebenso von den Wellenenden gleichzeitig getroffen; es addieren sich daher die von ihnen induzierten EMKe. ohne Phasenverschiebung und wenn das Wellenende vom Wellenkopf ungefähr um die halbe Länge der Sekundärwicklung entfernt ist, so entsteht in der Prüfwicklung eine ziemlich ungestört verlaufende Wechsel-EMK., deren Periodendauer gleich der Zeit ist, die die Welle zum Durchlaufen der ganzen Sekundärwicklung braucht. Diese EMK. lagert sich über diejenige, die in der Prüfspule durch das vom Primärstrom herrührende Wechselfeld niedriger Periodenzahl erzeugt wird. Es entsteht dann eine Kurve von der Form der Fig. 8. In den Prüfwindungen, die außerhalb der Mitte liegen, heben sich die von den Wellen induzierten EMKe., da sie verschiedene Phase haben, zum Teil auf, so daß Kurven wie in Fig. 9 entstehen.

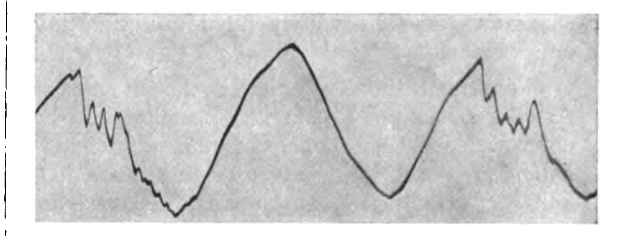


Fig. 9. Wie bei Fig. 8, aber Prüfspule seitlich.

Änderung der Geschwindigkeit. Die überlagerten Schwingungen erhält man ungestört von der Grundschwingung des Primärstroms, wenn man zwei in der Nähe der Mitte des Kerns und beiderseits derselben liegende Prüfwindungen gegeneinander schaltet. Die vom Primärstrom herrührenden EMKe. heben sich dann vollständig auf; die vom Sekundärstrom induzierten EMKe. sind dagegen bei geeignetem Abstand der beiden Prüfwindungen in ihrer Phase nur soweit verschoben, daß eine Resultierende von genügender Amplitude zustande kommt. Vergleiche Fig. 10,

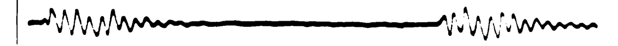


Fig. 10. Wie bei Fig. 8, aber 2 Prüfspulen in der Mitte des Eisenkerns gegeneinander geschaltet.

die mit der gleichen Spannungsempfindlichkeit der Oszillographenschleife aufgenommen worden ist wie die Kurven der Figuren 8 und 9. Auch aus diesen Kurven läßt sich die Zeit, die die Wanderwelle braucht, um die Sekundärwicklung zu durchlaufen, entnehmen. Die Ausmessung ergibt für den Zeitabschnitt, während dessen die Röhre durch den synchron umlaufenden Schalter an den Transformator gelegt wird (0,004 Sek., vgl. Seite 110), einen um 10—15 Proz.

größeren Wert als nach deren Abtrennung, nämlich $1,45 \cdot 10^{-3}$ sec gegenüber $1,25 \cdot 10^{-3}$ sec bei der $18,5 \cdot 10^{6}$ cm langen Sekundärwicklung und 0,95 gegenüber $0,8 \cdot 10^{-3}$ sec bei der um $^{1}/_{3}$ ihrer Windungen verkürzten Wicklung. Die hieraus berechneten Werte für die Wandergeschwindigkeit der Welle sind $1,3 \cdot 10^{10}$ cm/sec während des Anschlusses der Röhre und $1,5 \cdot 10^{10}$ cm/sec nach deren Abtrennung. Ob der kleinere Wert der Geschwindigkeit durch eine Vergrößerung der Induktivität während des Anschlusses der Röhre — die magnetische Induktion des Eisenkerns durchläuft ja dabei kleine Werte — oder durch eine durch den Anschluß der Röhre erfolgte Vergrößerung der Kapazität verursacht wird, läßt sich aus dem mir vorliegenden Material nicht entscheiden.

Die Intensität der Wanderwelle ist von der Art der Belastung abhängig. Besteht diese aus einer weichen Röhre oder aus einem metallisch leitenden Widerstand, so muß die Empfindlichkeit der Oszillographenschleife auf etwa das zehnfache gesteigert werden, um die Induktionswirkung der Welle auf den Eisenkern noch wahrnehmen zu können. Bei der höheren Empfindlichkeit zeigt der Oszillograph noch weitere Schwingungen des Magnetfeldes von der Art der Kurve *a*, in Fig. 11. Kurve *b*

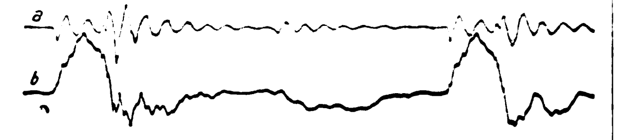


Fig. 11. Entladung über Schieferwiderstand. a) EMK. in der Mitte des Eisenkerns aufgen. wie bei Fig. 10. b) Sekundärstrom, 2 mA Mittelwert, in der Mitte der Sekundärspule aufgen.

gibt den synchron aufgenommenen Sekundärstrom. Kurve *a* wurde in der gleichen Weise wie Fig. 10 erhalten, also mit zwei Prüfwindungen, die in der Nähe der Mitte um den Eisenkern gelegt und gegeneinander geschaltet waren, so daß die Grundschwingung des primären Stroms nicht zum Vorschein kommt. Ihre Periodendauer beträgt bei dem Transformator mit der größeren Windungszahl 0,003 sec, bei der um $^{1}/_{3}$ verkleinerten Sekundärwicklung 0,0022 sec. Sie ist von den Verhältnissen im Primärkreis unabhängig und scheint durch die Kapazität bestimmt zu sein, die die Sekundärwicklung gegen die Primärwicklung hat. Da diese Schwingungen auf die sekundäre Entladung keinen merkbaren Einfluß haben, sind sie hier nicht eingehender untersucht worden.

Der Röntgen-Induktor. Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß die oben angestellten Erörterungen über die Art der Entladung auch für den mit Unterbrecher betriebenen Röntgen-Induktor, insbesondere auch für den Blitzinduktor, Geltung haben. Nach Einsetzen des Sekundärstroms wird die Geschwindigkeit, mit der das Magnetfeld abnimmt, $\frac{d\Phi}{dt}$ (Φ Kraftlinienfluß, t Zeit) erheblich verlangsamt. Wird dabei die sekundäre EMK. bzw. die Klemmenspannung kleiner als die Minimalspannung, bei der die Röhre eine Entladung durchläßt, so setzt der Sekundärstrom wieder aus, $\frac{d\Phi}{dt}$ wird wieder groß, die EMK. steigt wieder an und die weitere Entladung erfolgt stoßweise. Der Abstand der Stöße wird durch die Zeit bedingt, die die Stromwelle braucht, um die Sekundärwicklung zu durchlaufen. Diese beträgt beispielsweise bei einem Blitzinduktor nach Beobachtungen, die der Verfasser in dieser Zeitschrift 1914, Seite 630, zum Teil veröffentlicht hat, 0,00054 sec. Die Länge der Sekundärwicklung des benutzten Blitzinduktors betrug $5,9 \cdot 10^{6}$ cm, so daß sich eine Wellengeschwindigkeit von $0,9 \cdot 10^{10}$ cm/sec daraus berechnet. Die Dauer der Stromstöße kann unter Umständen auch ein Mehrfaches dieser Zeit betragen; sie wird aber bei sehr harten Röhren oder auch bei weniger harten am Schlusse der Entladung, wo die EMK. an und für sich schon kleiner geworden ist als zu Anfang, meist gleich dem einfachen Betrage der genannten Größe sein.

Frankfurt a. M., Institut für angew. Physik der Universität und Laboratorium des Physikal. Vereins.

(Eingegangen 11. März 1916.)

Magnetische Teilchen und rotierende Teilchen.

Von A. Korn.

Die alte Vermutung, daß in magnetischen Teilchen etwas wie eine mechanische Rotation um die magnetische Achse vor sich geht, hat durch neue Versuche erheblich an Wahrscheinlichkeit gewonnen. Früher hatte man nur das Argument aufzuweisen, daß die magnetische Achse der Erde mit ihrer Drehungsachse so

nahe zusammenfällt, und rein theoretisch die Möglichkeit, mit Hilfe der genannten Annahme de Erscheinung der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene polarisierten Lichtes zu erklären; in der jüngsten Zeit sind die Versuche von A. Einstein und W. J. de Haas[1]) hinzugekommen, welche zeigen, daß bei dem periodischen Ummagnetisieren eines magnetisierbaren Stäbchens tatsächlich periodische, mechanische Drehungsmomente auftreten, und die Versuche von S. J. Barnett[2]), welche zeigen, daß magnetisierbare Stäbchen durch rasche Rotationen magnetisiert werden können. Wenn man aus den Einsteinschen Versuchen die Existenz der Ampèreschen Molekularströme folgern will, muß man natürlich eine Unsymmetrie des Verhaltens der positiven und negativen elektrischen Teilchen annehmen; und es wird ja in der Tat von vielen theoretischen Physikern der Neuzeit angenommen, daß bei den Molekularströmen die positiven Teilchen ruhen, während die negativen eine kreisende Bewegung um den positiven Kern ausführen. Würden wir uns die Ampèreschen Molekularströme so vorstellen, wie es früher allgemein üblich war, im besonderen zur Zeit der Weberschen Theorien, so hätte man anzunehmen, daß ebensoviele positive Teilchen in der einen Richtung kreisen, wie negative Teilchen in der anderen, und dann würde sich bei dem periodischen Ummagnetisieren des Stäbchens der Einsteinsche Effekt natürlich nicht ergeben. Man wird daher sicherer gehen, wenn man sagt, durch die Einstein-de Haasschen Versuche wird gezeigt, daß man magnetische Teilchen als um ihre Achse rotierend anzunehmen hat; je nachdem die Rotation in dem einen oder anderen Sinne erfolgt, ist auch über den Richtungssinn der magnetischen Achse zu entscheiden.

In dieser Form war der Beweis der alten Vermutung ein Desideratum der Faraday-Maxwellschen Ideen, erwünscht für die Erklärung der bereits damals bekannten, im wesentlichen ja von Faraday ausgehenden Untersuchungen über die elektromagnetischen Einwirkungen auf das Licht, und man geht wohl nicht fehl, wenn man annimmt, daß Faraday auf Grundlage der genannten, jetzt bewiesenen Vermutung nach einer dem Zeemanschen Phänomen ähnlichen Erscheinung gesucht hat. Man darf wohl sagen, wenn vor der Entwicklung der Lorentzschen Theorie jener experimentelle Beweis einwandfrei erbracht worden wäre, dann hätte die theoretische Elektrizitätslehre eine andere Richtung genommen; nun konnte aber Zeeman seine berühmte Entdeckung mit neuen durch die Lorentzsche Theorie eingeführten Hypothesen in Verbindung bringen, und er konnte bei seiner Erklärung mit Hilfe der Lorentzschen Theorie auf die Annahme mechanischer Rotationen der magnetischen Teilchen ganz verzichten. So gelangte durch günstige, zufällige Konstellation die Lorentzsche Theorie zu einer Art Vorherrschaft über andere Theorien; nunmehr ist aber wohl ein Hinweis darauf, daß man auch ohne die Lorentzschen Hypothesen die elektromagnetischen Wirkungen auf das Licht erklären kann, wieder am Platze[1]).

Ich möchte hier ferner noch auf eine kausale Verknüpfung des Magnetismus mit mechanischen Rotationen aufmerksam machen, eine auf mechanischen Vorstellungen über die elektromagnetischen Erscheinungen beruhende Vermutung, welche ich mit Rücksicht auf den Erdmagnetismus bereits im Jahre 1898 ausgesprochen habe[2]). Nach meinen mechanischen Vorstellungen sind an jeder Stelle des elektromagnetischen Feldes (mechanische) Geschwindigkeiten von der folgenden analytischen Form vorhanden:

$$u = u_0 + u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$v = v_0 + v_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + v_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$w = w_0 + w_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + w_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

wo T eine gegen die Schwingungsdauer der Lichtschwingungen des sichtbaren Spektrums außerordentlich kleine Zeitdauer vorstellt; $u_0 v_0 w_0$ sind als die sichtbaren Geschwindigkeiten zu bezeichnen, $u_1 v_1 w_1$ sind (bei den Bezeichnungen von Hertz) mit X, Y, Z und $u_2 v_2 w_2$ mit L, M, N proportional.

Wenn wir uns nun, entsprechend der Theorie der universellen Schwingungen, gravitierende Teilchen als pulsierende Teilchen denken, also als Teilchen, welche periodisch ihr Volumen

1) A. Einstein und W. J. de Haas, Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme. Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 152, 1915.

2) S. J. Barnett, Phys. Rev. (2) **6**, 171, 1915.

1) Solche Erklärungen des Zeemanschen Phänomens und anderer magnetooptischer Erscheinungen habe ich auf Grund der Rotationshypothese gemeinschaftlich mit K. Stoeckl vor längerer Zeit gegeben: A. Korn und K. Stöckl, Studien zur Theorie der Lichterscheinungen; 1. Das Zeemansche Phänomen. Ann. d. Phys. (4) **8**, 312, 1902; 2. Die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde. Ib. (4) **9**, 1138, 1902; 3. Das Kerrsche Phänomen. Ib. (4) **12**, 875, 1903.

2) A. Korn, Über die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie. Sitz.-Ber. der K. Bayer. Akad. d. Wissensch. **28**, 129, 1898; A. Korn, Sur l'origine du magnétisme terrestre. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. **157**, 1059, 1913.

ändern, so ist ohne Schwierigkeit einzusehen, daß ein gravitierendes Teilchen keine konstante Rotationsgeschwindigkeit haben kann, es muß vielmehr ein gravitierendes Teilchen, wenn es einmal in Rotation versetzt wird, außer einer konstanten Rotationsgeschwindigkeit auch zugleich eine periodische Rotationsgeschwindigkeit besitzen, da sich ja sein Trägheitsmoment um die Drehungsachse infolge der Pulsation periodisch ändert. Die den Pulsationsgeschwindigkeiten der gravitierenden Teilchen entsprechenden Schwingungsgeschwindigkeiten sollen die Phase der

$$u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad w_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

haben, dann haben die periodischen Drehungsgeschwindigkeiten der gravitierenden Teilchen die Phase der

$$u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi, \quad v_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi, \quad w_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi;$$

für rotierende gravitierende Teilchen entstehen elektrische Komponenten

$$X, Y, Z,$$

deren Richtungen in den Breitenkreisen der rotierenden Teilchen liegen und ein Kreisen der positiv elektrischen[1]) Teilchen um die Rotationsachse in dem einen Sinne, der negativ elektrischen Teilchen in dem anderen Sinne zur Folge haben. So wird aus einem rotierenden Teilchen infolge seiner Pulsation ein magnetisches Teilchen.

1) Elektrische Teilchen sind solche, für welche

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \neq 0;$$

das Zeichen dieses Ausdrucks entscheidet darüber, ob man es mit positiven oder negativen Teilchen zu tun hat.

(Eingegangen 14. März 1916.)

Eine Resonanzmethode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten leitender Dielektriken, sowie zur Messung des Phasenfaktors von Rheostatwiderständen.

Von Franz Tank.

Bei der zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten leitender Dielektriken am häufigsten angewandten Nernstschen Methode bietet die Kompensation der Leitfähigkeit manchmal gewisse Schwierigkeiten. Im folgenden soll nun ein Verfahren entwickelt werden, das, bei vielleicht größerer Empfindlichkeit, einer solchen Kompensation nicht bedarf.

Man benützt die Eigenschaft einer parallel in Resonanz geschalteten Selbstinduktion und Kapazität („Stromresonanz"), daß die Resonanz durch einen Parallelwiderstand nicht beeinflußt wird. Sei C der Kondensator mit dem zu unter-

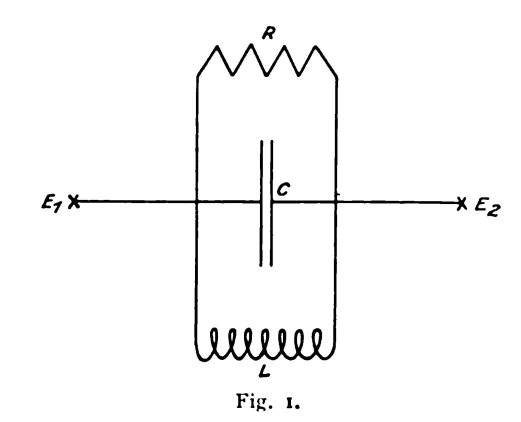


Fig. 1.

suchenden Dielektrikum; dessen Leitfähigkeit entspreche der parallel geschaltete Widerstand R. Schaltet man noch eine Selbstinduktion L parallel, so lautet die Resonanzbedingung dieses Systems für Wechselstrom der Periodenzahl ν $(\omega = 2\pi\nu)$

$$\omega^2 LC = 1.$$

Sie ist also unabhängig von R und damit von der Leitfähigkeit des Dielektrikums.

Ausschlaggebend für die Verwertung dieses Prinzips als Grundlage einer Meßmethode ist die Möglichkeit, die Resonanz mit genügender Schärfe einzustellen. Zu diesem Zwecke in hohem Grad geeignet erweist sich das Wechselstrom-Elektrodynamometer von Sumpner[1]), das auf diese Weise eine neue Verwendungsart erhält. Die Versuchsanordnung ist beistehend (Fig. 2) skizziert.

Die Wechselstromquelle E_1 E_2, die Pole einer kleinen Hochfrequenzmaschine, liefert sowohl den Strom zur Erregung des Dynamometermagneten M, als den Strom im Meßkreis. Letzterer enthält die Selbstinduktion L, zweckmäßig ein Selbstinduktionsnormal, die Versuchskapazität C, und dieser parallel geschaltet einen Drehkondensator D, der zur Einstellung auf Resonanz dient. Der Meßstrom geht durch die Drehspule S des Dynamometers und erzeugt einen Ausschlag, der seiner Phasenverschiebung gegenüber der Spannung proportional ist, wenigstens solange diese Phasenverschiebung klein bleibt; der Resonanz entspricht der Ausschlag Null. Die Drehspule kann nach Bedarf durch den Umschalter U kurz geschlossen werden; zweckmäßig liegt der Pol E_1 an Erde. Die Ablesung geschieht durch Spiegel und Skala.

1) W. E. Sumpner u. W. G. Philipps, Proc. of Phys. Soc. of London 22; Phil. Mag. (6) **20**, 309, 1910; auch F. Tank, Ann. d. Phys. (4) **48**, 307, 1915.

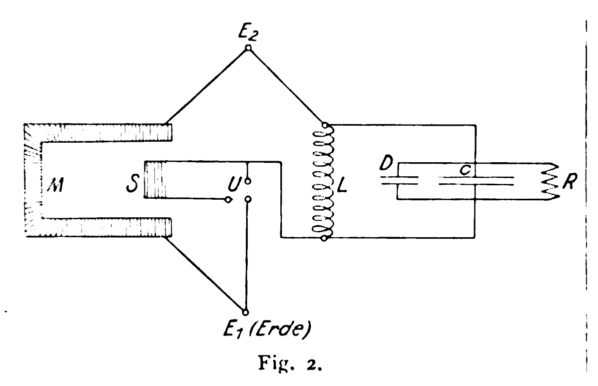


Fig. 2.

Über Empfindlichkeit und Meßgenauigkeit enthält die folgende Tabelle einige Angaben. Es wurde als C ein verlustloser Kondensator bekannter Kapazität gewählt und ihm induktions- und kapazitätsfreie Widerstände verschiedener Größe parallel geschaltet, z. B. Flüssigkeitswiderstände, die durch Salzzusatz in beliebigem Grad leitend gemacht wurden. Aus Kapazität und Parallelwiderstand ist dann der Quotient λ/ε (Leitfähigkeit durch Dielektrizitätskonstante) nach der bekannten Beziehung berechnet worden

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{1}{9 \times 10^5} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}.$$

C ist dabei in Mikrofarad genommen, R in Ohm.

Tabelle 1.

$\nu = 2740$ Per/sek., $L = 1{,}000\,H$, $C = 0{,}003374$ MF

R	λ/ε	σ
∞	0	259
20000	$0{,}13 \times 10^{-8}$	89
10000	$0{,}26 \times 10^{-8}$	41
5000	$0{,}52 \times 10^{-8}$	14,6
1000	$2{,}6 \times 10^{-8}$	0,75

Die Resonanz-Nullstellung läßt sich in der Weise am genauesten ermitteln, daß man dem Drehkondensator verschiedene Einstellungen in der Nähe des Resonanzwertes gibt, die entsprechenden Dynamometerausschläge mißt und die Nulllage graphisch interpoliert. Man erhält dadurch zugleich ein genaues Maß für die Empfindlichkeit der Einstellung. In der Tabelle 1 ist unter σ die Änderung des Ausschlages in Skalenteilen s der Ablesung angegeben, wenn man die Kapazität um 1 Proz. ändert, also

$$\sigma = \frac{\Delta s}{\left(\frac{\Delta C}{C}\right) 100}.$$

Man erkennt, daß die Resonanzeinstellung für einen Kondensator mit nicht leitendem Dielektrikum ($R = \infty$) mit großer Genauigkeit gemacht werden kann, bei vollkommener Konstanz der Frequenz noch besser als $^1/_{10}$ $^0/_{00}$; im allgemeinen werden Frequenzschwankungen der vollen Ausnutzung der Einstellschärfe eine Grenze setzen. Die Empfindlichkeit nimmt jedoch mit wachsender Leitfähigkeit stark ab. Diese Abnahme ist einerseits durch das Überwiegen der Leitfähigkeit gegenüber der Kapazität verursacht, andererseits durch den Spannungsabfall an den Polen der Stromquelle und die dadurch bedingte schwächere Erregung des Dynamometermagneten. Immerhin beträgt für den Quotienten $\lambda/\varepsilon = 2{,}6 \times 10^{-8}$ die Einstellgenauigkeit noch $^1/_3$ Proz., wenn man die Einstellung auf $^1/_4$ Skalenteil als sicher ansieht. Demnach kann z. B. die Dielektrizitätskonstante eines Wassers von der Leitfähigkeit $\lambda = 0{,}6 \times 10^{-5}\, \Omega^{-1}\, \text{cm}^{-1}$ noch mit einem Fehler von 1 Proz. ermittelt werden.

Die Ausführung der Messung zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten kann in verschiedener Weise geschehen, je nachdem man es vorzieht, zur Einstellung der Resonanz die Kapazität oder die Frequenz zu variieren. Aus bekannter Selbstinduktion und Frequenz läßt sich dann mit Hilfe der Resonanzgleichung die Gesamtkapazität C_0 berechnen, woraus die Versuchskapazität sich ergibt zu

$$C = C_0 - D.$$

Man benutzt den Versuchskondensator einmal mit dem Dielektrikum Luft, das andere Mal mit dem zu untersuchenden Dielektrikum. Ist im zweiten Falle die Kapazität bedeutend größer, was bei Substanzen mit hoher Dielektrizitätskonstante eintritt, so vertauscht man das Selbstinduktionsnormal mit einem solchen geeignet kleineren Betrages.

Für ganz sorgfältige Messungen empfiehlt sich zur Elimination der unten noch zu erörternden Fehlerquellen folgendes Substitutionsverfahren (Fig. 3). Durch einen Umschalter W

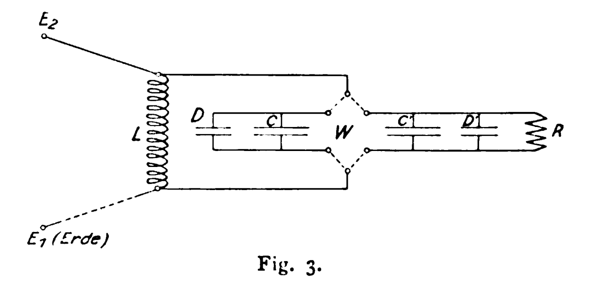


Fig. 3.

wird die Resonanzeinstellung abwechselnd mit dem System der Versuchskapazität CD oder mit einer bekannten Kapazität mit parallel geschaltetem Drehkondensator $C'\,D'$ vorgenommen.

Letzteren schaltet man noch einen variabeln Flüssigkeitswiderstand parallel und gleicht so ab, daß beim Umschalten weder Resonanzeinstellung noch Empfindlichkeit σ sich ändern. Es ist dann genau

$$C + D = C' + D'$$

und der Flüssigkeitswiderstand gleich dem Widerstand des Versuchskondensators. Man erhält so zugleich Kapazität und Leitfähigkeit. Eine Kenntnis der Selbstinduktion oder Frequenz ist nicht nötig; Fehler wegen der Zuleitungen oder falscher Resonanzeinstellung fallen heraus. Die Messung geht sehr rasch und sicher vor sich, wenn man über einen geeigneten Satz von Kapazitäten C', sowie geeichte Drehkondensatoren verfügt. Es ließen sich auf diese Weise die Dielektrizitätskonstanten von Nitrobenzol, von Alkoholen und von destilliertem Wasser gut bestimmen.

Es ist nun noch auf eine Reihe von Umständen aufmerksam zu machen, deren Beachtung zur Erreichung sicherer Resultate notwendig ist.

Vor allem bedarf man eines sehr konstanten und gut sinusförmigen Wechselstroms. Die Hochfrequenzmaschine soll nicht zu kleine sekundäre Leistung haben; sie ist fest zu lagern, der Motor darf nur mit Akkumulatoren angetrieben werden, und man muß auf sorgfältige Reinhaltung der Achsenlager sehen. Der Gang der Maschine erweist sich nicht bei allen Frequenzen als gleich konstant; ein automatischer Tourenregler dürfte unter Umständen gute Dienste leisten. Um die immerhin nicht ganz zu beseitigenden Schwankungen der Ausschläge, die Schwankungen der Frequenz entsprechen, zu eliminieren, ist die Anwendung eines ballistischen Meßverfahrens vorteilhaft. Die Drehspule wird vor der Ablesung durch den Umschalter U (Fig. 2) kurz geschlossen, der Meßstrom direkt zur Erde geleitet. Durch Wenden des Umschalters wird dieser Kurzschluß aufgehoben und man liest den entstehenden ballistischen Ausschlag ab. Zur Berechnung wird das Mittel mehrerer solcher Ausschläge verwendet.

Besitzen die Zuleitungen die Kapazität c, die Selbstinduktion l und den Widerstand r, so wird die Resonanzlage verschoben, und zwar gemäß der genäherten Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta = \omega \left[\frac{l}{r} - r \cdot c \right] + \frac{R^2}{r \cdot \omega L} \left[1 - \omega^2 CL \right] = 0.$$

Dieser Einfluß macht sich bei kleinem R, also großer Leitfähigkeit bemerkbar und muß dann gesondert bestimmt oder nach dem oben angegebenen Substitutionsverfahren eliminiert werden.

Wohl zu beachten ist, daß das Selbstinduktionsnormal Widerstand und Kapazität besitzt[1]). Der Widerstand bedingt die bekannte Erweiterung der Resonanzgleichung zu

$$\omega^2 CL - W^2 \frac{C}{L} = 1,$$

wobei das Korrektionsglied $W^2 \frac{C}{L}$ jedoch selten in Betracht kommt. Bei den ausgeführten Messungen war z. B. $W = 89\ \Omega$, $L = 1{,}000\ H$, $C = 0{,}003374$ MF ($\nu = 2740$), daher $W^2 \frac{C}{L} = 2{,}6 \times 10^{-5}$, was gegen 1 vernachlässigt werden darf. Anders dagegen verhält es sich mit der Kapazität C_L des Selbstinduktionsnormals. Hier kann eine Nichtbeachtung seiner Kapazität große Fehler bedingen, und es scheint sehr erwünscht, daß bei allen in den Handel kommenden Selbstinduktionsnormalien größeren Betrages ihre Kapazität genau angegeben wird. Sie ist nach der Resonanzmethode leicht zu ermitteln. Sind ω und L bekannt, so folgt für die gesamte Resonanzkapazität

$$C_0 = C + D + C_L = \frac{1}{\omega^2 L}$$

und daraus

$$C_L = C_0 - (C + D).$$

Auf diese Weise ergab sich z. B. für ein Selbstinduktionsnormal von 1,000 H (Franke, Hannover)

$$C_L = 0{,}00042 \text{ MF}.$$

Dieser Betrag ist so bedeutend, daß bei einer Frequenz von $\nu = 7750$ das Selbstinduktionsnormal gar nicht mehr als Selbstinduktion wirken würde, sondern mit sich selbst in Resonanz ist.

Einige Fehlerquellen haften dem Sumpnerschen Elektrodynamometer an, wenn es bei hoher Empfindlichkeit verwendet wird. Einerseits induziert das Magnetfeld, in dem die Drehspule hängt, in den Windungen der Spule und im Rahmen derselben Ströme, die unter der Einwirkung dieses Magnetfeldes Drehmomente ergeben können; andererseits kann auch bei abgeschaltetem Magnetfeld ein Strom, der die Drehspule durchfließt, schon ein Drehmoment verursachen. Es resultieren daraus Nullpunktsfehler, die unter Umständen mehrere Prozente ausmachen. Man hat die Drehspule daher möglichst symmetrisch ins Magnetfeld zu hängen, so daß diese verschiedenen Wirkungen sich auf ein Minimum reduzieren, und dann die betreffenden Korrektionen zu bestimmen, indem man die Drehspule durch Wider-

1) Vgl. Orlich, Kapazität und Induktivität. Braunschweig 1909, S. 180



stände verschiedener Größe kurz schließt, ferner ohne das Magnetfeld zu erregen Ströme verschiedener Stärke durch die Drehspule schickt.

Eine weitere Anwendung der Resonanzmethode läßt sich zur Bestimmung des Phasenfaktors von Rheostatwiderständen machen. Die Kenntnis dieses Phasenfaktors ist für präzise Wechselstrommessungen von größter Bedeutung[1]). Er wird wie folgt definiert:

$$T = \frac{l}{R} - R \cdot c,$$

wenn R den Widerstand selbst, l und c seine Selbstinduktion und Kapazität bezeichnen; dabei soll $\omega^2 T^2$ klein gegen 1 sein.

$$\operatorname{tg} \delta = \omega T$$

ist dann die entsprechende Phasenabweichung.

Man ersetzt in der Anordnung Fig. 2 den Versuchskondensator C durch einen Kondensator von möglichst vollkommenen Eigenschaften und stellt mit Hilfe des Drehkondensators Resonanz her; es ergebe dies den Betrag D des Drehkondensators. Schaltet man nun einen Widerstand vom Phasenfaktor T parallel, so erfolgt am Dynamometer ein Ausschlag. Durch Veränderung des Drehkondensators auf den Wert D' kann man die Resonanz wieder herstellen, d. h. den Ausschlag auf Null bringen. Es ist dann

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R}{\omega L} [1 - \omega^2 (C + D') L] + \omega \left[\frac{l}{R} - R \cdot c\right] = 0.$$

Da aber

$$1 - \omega^2 (C + D) L = 0,$$

so folgt

$$R \omega (D - D') = - \omega \left[\frac{l}{R} - R \cdot c\right]$$

oder

$$T = \frac{l}{R} - R \cdot c = -(D - D') R.$$

Man mißt also unmittelbar den Phasenfaktor. Bei größeren Widerständen kommt fast nur die Kapazität c in Betracht; man hat dann

$$c = D - D'.$$

In Tabelle 2 sind als Beispiel die auf diese Weise bestimmten Phasenfaktoren bzw. Kapazitäten einiger nach Chaperon gewickelter Widerstände (Präzisionskurbel-Widerstand von Siemens & Halske) mitgeteilt.

1) Vgl. E. Orlich, Verh. d. D. Phys. Ges. **12**, 949, 1910; Curtis und Grower, Bull. Bur. Stand. **8**, 495, 1912; K. W. Wagner u. A. Wertheimer, diese Zeitschr. **13**, 368, 1912; K. W. Wagner u. A. Wertheimer, ETZ. **34**, 613, 649, 1913; W. Hüter, Ann. d. Phys. **40**, 381, 1913; K. W. Wagner, ETZ. 1914, Heft 46 u. 47.

Tabelle 2.

$\nu = 2740$ Per/Sek., $L = 1{,}000\,H$, $C_0 = 0{,}003374$ MF

R	T	c
2000 Ω	-114×10^{-8} Sek.	0,00057 MF
3000 „	-118×10^{-8} „	0,00059 „
4000 „	-104×10^{-8} „	0,00052 „
5000 „	-90×10^{-8} „	0,00045 „
6000 „	-84×10^{-8} „	0,00042 „
7000 „	-72×10^{-8} „	0,00036 „
8000 „	-76×10^{-8} „	0,00038 „
9000 „	-42×10^{-8} „	0,00021 „

Phasenfaktoren ähnlicher Größenordnung für Chaperonwiderstände findet man auch anderwärts angegeben[1]).

Zusammenfassung: Auf Grund der Eigenschaft, daß die Resonanz einer parallel geschalteten Selbstinduktion und Kapazität unabhängig von einem Parallelwiderstand ist, wird mit Hilfe von Sumpners Elektrodynamometer als resonanzanzeigendem Instrument eine Methode ausgearbeitet die Kapazität von Kondensatoren mit leitendem Dielektrikum zu messen. Eine Kompensation der Leitfähigkeit fällt fort; die Empfindlichkeit dürfte derjenigen der Nernstschen Methode mindestens gleich kommen. Das Verfahren gestattet auch eine Anwendung zur Kapazitätsmessung von Selbstinduktionen, sowie zur Bestimmung des Phasenfaktors von Rheostatwiderständen.

1) Z. B. K. W. Wagner, l. c; W. Hüter, l. c.

Zürich, März 1916. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 18. März 1916.)

Über Schlierenbildung in kolloiden Lösungen und ein Verfahren die Gestalt von Kolloidteilchen festzustellen.

Von H. Dießelhorst und H. Freundlich.

Bei der Fortsetzung unserer Untersuchung über das Vanadinpentoxydsol waren wir zunächst bestrebt, ähnliche Erscheinungen bei anderen Solen aufzufinden. Wir machten nun gleich die Erfahrung, daß die früher beim V_2O_5-sol beschriebene eigentümliche Schlierenbildung in der Tat häufig bei kolloiden Lösungen auftritt, daß sie aber nicht notwendig mit einer merklichen Doppelbrechung verbunden ist. Als dann weiter geprüft wurde, ob und wie diese beiden Erscheinungen zusammenhängen, ergab sich zunächst, daß die Schlierenbildung jedenfalls mit einer Abhängigkeit des Tyndall-Lichtes von der mechanischen Bewegung des Sols verknüpft ist, und dies führte schließlich zur Erkenntnis, daß man aus dem Verhalten

des Tyndall-Lichtes bei der Bewegung einer kolloiden Lösung Schlüsse auf die Gestalt der Kolloidteilchen ziehen könne.

Was man bisher hierüber wußte, ist sehr spärlich. Das Ultramikroskop gibt bekanntlich unmittelbar keine Auskunft, es sei denn, daß die Teilchen so groß sind und die Abweichung von der Kugelgestalt so kraß ist, wie bei dem von uns untersuchten V_2O_5-sol; bei diesem steht die Stäbchenform der Teilchen außer Frage[1]). Bei manchen Solen, die auch mikroskopische Teilchen enthalten, ist wohl der Schluß erlaubt, daß die Submikronen die gleiche Form haben wie die Mikronen. So ist kaum zu bezweifeln, daß die Teilchen in Mastixsolen kugelförmig sind, wenn man die von Perrin[2]) veröffentlichten Bilder der gröberen Teilchen betrachtet. Für die stark absorbierenden Metallsole hat Gans[3]) gezeigt, daß die Absorption des Lichtes stark von der Gestalt der Teilchen abhängen muß. Die für ein rotes Goldsol und für das Silbersol Kollargol beobachteten Absorptionskurven verlaufen so, daß man den Teilchen notwendig weitgehend Kugelform zuschreiben muß.

Theoretischer Teil.

Es mag zunächst kurz theoretisch betrachtet werden, in welcher Weise die Gestalt der Kolloidteilchen das Tyndall-Licht eines in Bewegung befindlichen Sols beeinflussen muß. Über das Wesen des Tyndall-Lichtes auch in seiner Abhängigkeit von der Gestalt der Teilchen ist durch eine Reihe von Arbeiten verschiedener Forscher bereits weitgehend Klarheit verschafft. Die erste von Rayleigh[4]) aufgestellte Theorie bezog sich auf leitende Kügelchen, deren Radius klein gegen die Wellenlänge ist. Sie lieferte bereits die wesentlichsten Erscheinungen, insbesondere die blaue Farbe des Tyndall-Lichtes der kleinsten Teilchen und die Polarisationsverhältnisse im ganzen richtig. Dagegen läßt sich die von J. J. Thomson[5]) unter der Annahme unendlich gut leitender Kugeln durchgeführte Theorie auf das optische Verhalten kolloider Lösungen nicht anwenden, weil bei den Frequenzen der Lichtwellen selbst Metalle nicht als unendlich gut leitend betrachtet werden können. Ebensowenig kann, um die Farben der Teilchen zu erklären, die zuerst nahe liegende Vorstellung aufrecht erhalten werden, daß bei der Einwirkung des elektrischen Lichtvektors die Teilchen als Hertzsche Resonatoren wirkten und durch ihre Eigenfrequenzen zu Resonanzerscheinungen Veranlassung gäben[1]). Solche Resonanzerscheinungen muß man vielmehr in den Atomen des absorbierenden verteilten Stoffes suchen.

Von Mie[2]) wurden diese Verhältnisse vollkommen geklärt, indem er die Theorie auf absorbierende Kugeln ausdehnte und zugleich die Beschränkung auf kleine Radien fallen ließ. Gans[3]) führte die Rechnung für Rotationsellipsoide durch, wieder unter der Beschränkung auf Teilchen, deren Dimensionen klein sind gegen die Wellenlänge.

In diesen Arbeiten wurde nicht nur das Tyndall-Licht, sondern auch die Absorption theoretisch berechnet. Gans gibt allerdings bei den Ellipsoiden nur die Formeln für die natürliche ungeordnete Lage, doch sind die Grundlagen auch für die Berechnung der Wirkung geordneter Teilchen in der Arbeit enthalten. Schaefer und Stallwitz[4]) legen geordnete Zylinder von kleinem Radius und kleinem Abstand (gegen die Wellenlänge) zugrunde. Wiener[5]) hat durch elektrostatische Betrachtungen den mittleren Brechungsindex für ein Medium mit eingebetteten Teilchen verschiedener Form berechnet. Auch die Absorption läßt sich auf Grund seiner Formeln finden.

Zu einer eingehenden experimentellen Prüfung dieser Theorien müßte man die spektrale Verteilung des Tyndall-Lichtes sowie der Absorption und der Brechung messen und müßte auch die optischen Konstanten des Dispersionsmittels und des zerteilten Stoffes einzeln kennen, was bei den von uns untersuchten Solen nicht der Fall ist. Wenn wir aber berücksichtigen, daß wir ein Mittel haben — sei es durch Bewegung oder durch ein magnetisches oder elektrisches Feld — die Teilchen aus der ungeordneten in eine geordnete Lage zu überführen, so lassen sich auch ohne die obigen Voraussetzungen auf Grund rein qualitativer Betrachtungen aus der Veränderung des Tyndall-Lichtes und der Absorption bei der Überführung in die geordnete Lage Schlüsse auf die Gestalt der Teilchen ziehen.

Nach der Theorie von Rayleigh wird das Tyndall-Licht dadurch erzeugt, daß jedes

1) Siehe Dießelhorst, Freundlich und Leonhardt, Elster-Geitel-Festschrift S. 453, 1915; Dießelhorst u. Freundlich, diese Ztschr. 16, 419, 1915.
2) Perrin, Die Atome, übersetzt von Lottermoser S. 88.
3) Ann. d. Phys. 37, 881, 1912; 47, 270, 1915; diese Ztschr. 13, 1185, 1912.
4) Phil. Mag. (4) 41, 107, 274, 447, 1871; (5) 12, 81, 1881; 47, 375, 1899.
5) Recent researches in Electricity and Magnetism S. 437, 1983.

1) Vgl. F. Pockels und F. Ehrenhaft, diese Ztschr. 5, 152, 387, 460, 1904.
2) Ann. d. Phys. 25, 377, 1908.
3) Ann. d. Phys. 37, 881, 1912.
4) Berl. Akad. Ber. 1913, II, 674.
5) Leipz. Ber. 62, 256, 1910.

Teilchen einen Lichtstrahl, auf dessen Bahn es sich befindet, stört und daß diese Störung sich als Licht ausbreitet. Wenn man etwa ein Teilchen in ein Medium von anderer Dielektrizitätskonstante[1]) eingebettet denkt, so kommt die Störung dadurch zustande, daß in dem Teilchen durch den elektrischen Vektor des Lichtstrahls eine andere Polarisation hervorgebracht wird, als in dem Medium ohne das Teilchen vorhanden sein würde. Man kann direkt, wie Gans und Happel[2]) in Ergänzung der Rayleigh-Mieschen Untersuchung gezeigt haben, das von einem Teilchen ausgestrahlte Tyndall-Licht in erster Näherung als von einem oszillierenden elektrischen Dipol hervorgebracht auffassen. Ein solcher Dipol wird ja durch die freien Polarisationsladungen auf der Oberfläche und ev. im Innern des eingebetteten Teilchens gebildet.

Um über den Einfluß der Teilchenform auf das Moment dieses Dipols und damit auf die Tyndall-Strahlung Aufschluß zu gewinnen, denken wir uns das eingebettete polarisierte Teilchen in polarisierte Volumelemente zerlegt, deren jedes einen elementaren Dipol darstellt. Der resultierende Dipol ist dann einfach die (geometrische) Summe der elementaren Dipole. Dabei ist es (auch bei oszillierenden Dipolen, so lange das Teilchen klein ist, gegen die Wellenlänge) ganz einerlei, wie die elementaren Dipole gelagert sind, ob nebeneinander eine Scheibe bildend oder hintereinander ein Stäbchen bildend oder zu einem Würfel oder einer Kugel zusammengestellt. Mit anderen Worten: Die Stärke des resultierenden Dipols und damit die Amplitude der Tyndall-Strahlung ist proportional dem Volumen des polarisierten Teilchens, aber unabhängig von der Form, solange die Stärke der Polarisation, die der elektrischen Feldstärke proportional ist, unverändert bleibt.

Würde also die Polarisation pro Volumeinheit, die ein Stoffteilchen beim Hereinbringen in ein ursprünglich homogenes Feld erfährt, nur von dieser ursprünglichen Feldstärke hervorgebracht, so wäre es ganz einerlei, welche Form und Zerteilung der Stoff besitzt. In Wahrheit wird aber durch die Polarisation des Teilchens und die dadurch auftretenden freien Ladungen eine Änderung des ursprünglichen Feldes auch im Innern des Teilchens bewirkt und die Polarisation hängt von der resultierenden Feldstärke und damit von der Form des Teilchens ab. Bei Hydrosolen werden die Teilchen meist eine größere Dielektrizitätskonstante (Quadrat des Brechungsindex) besitzen, als das Dispersionsmittel, wobei zu berücksichtigen ist, daß starke Absorption im selben Sinne wirkt, wie starke Brechung, indem nicht letztere allein, sondern der aus beiden zusammengesetzte sogenannte „komplexe Brechungsexponent" maßgebend ist. Wenn wir zunächst diesen Fall der größeren Dielektrizitätskonstante des eingebetteten Teilchens voraussetzen, so besteht — ganz ebenso wie bei Einbringung eines Eisenteilchens in ein magnetisches Feld — die Änderung des ursprünglichen Feldes in einer Schwächung. Am geringsten ist diese Feldschwächung bei Teilchen, die in Richtung des elektrischen Vektors langgestreckt sind, bei denen also die freien Polarisationsladungen in großem Abstand sich befinden. Am stärksten wird das Feld geschwächt bei Teilchen, die in Richtung des elektrischen Vektors kurz sind im Vergleich zu den Querdimensionen, die etwa ein Scheibchen bilden, auf dessen Flächen die Polarisationsladungen in kurzem Abstand sitzen, zwischen sich eine starke Schwächung des ursprünglichen Feldes hervorbringend. Bei diesen Teilchen wird also die geringe resultierende Feldstärke auch nur geringe Polarisation und damit schwaches Tyndall-Licht hervorrufen können, während bei den ersteren weit stärkere Polarisation und stärkeres Tyndall-Licht zu erwarten ist.

Hat umgekehrt das eingebettete Teilchen eine kleinere Dielektrizitätskonstante, als das umgebende Medium, so ist die Polarisation im Teilchen geringer, als sie ohne das Teilchen an der Stelle sein würde. An der Grenze zwischen Teilchen und Medium tritt freie elektrische Ladung von entgegengesetztem Vorzeichen auf, wie im vorigen Falle, so daß das ursprüngliche Feld nicht geschwächt, sondern verstärkt wird. Die Verstärkung wirkt dahin, die Polarisation des Teilchens derjenigen zu nähern, die ohne das Teilchen im Medium sein würde, also die Störung zu verringern, hat also dieselbe Wirkung, wie im vorigen Falle die Feldschwächung durch die freie Polarisationsladung. Es gilt allgemein, ob die Dielektrizitätskonstante des Teilchens größer oder kleiner ist als die des Mediums:

Starkes Tyndall-Licht bei Teilchen, die in Richtung des elektrischen Lichtvektors langgestreckt sind und schwaches Tyndall-Licht bei Teilchen, die in Richtung des elektrischen Vektors kurz sind im Vergleich zu den Querdimensionen.

Die Absorption einer kolloiden Lösung kommt zum Teil dadurch zustande, daß das Tyndall-Licht beim Durchgang des Lichtstrahls verloren geht. Für diesen Teil der Absorption gilt ohne weiteres, daß er stark ist, wenn das Tyndall-Licht stark ist. Aber bei

1) Gemeint ist natürlich nicht die statische Dielektrizitätskonstante, sondern das Quadrat des Brechungsindex für die betrachtete Wellenlänge.

2) Ann. d. Phys. **29**, 279, 1909.

der geringen Konzentration der hier in Betracht kommenden kolloiden Lösungen ist das gesamte Tyndall-Licht stets klein gegen das durchgehende Licht, so daß die dadurch bedingte Absorption nur eine geringe, schwer zu konstatierende Lichtschwächung bewirkt. Die bei vielen kolloiden Lösungen tatsächlich vorhandene recht starke Absorption ist, wie Mie[1]) gezeigt hat, wirkliche Absorption, die in den Stoffteilchen (unter Wärmeentwicklung) stattfindet, und der gegenüber der Verlust durch Tyndall-Licht fast verschwindet. Legt man, um eine Anschauung zu bekommen, die Vorstellung zugrunde, die bei metallischen Teilchen wohl zutreffen mag, daß diese wahre Absorption durch die (bei der Frequenz der Lichtstrahlen geltende) elektrische Leitfähigkeit des Stoffes bewirkt wird, so sieht man leicht, daß die Leitungsströme von demselben resultierenden Feld im Teilchen abhängen, wie die Polarisation, und daß sie ebenso dieses resultierende Feld durch Ladung der Grenzflächen zwischen Teilchen und Medium beeinflussen, wenn auch mit einer Phasenverschiebung um eine Viertelperiode. Es müssen also dieselben Teilchenformen und Lagen starke Leitungsströme und damit starke Absorption geben, die auch starkes Tyndall-Licht aussenden. Man kann wohl allgemein annehmen: Starkes Tyndall-Licht und starke Absorption, soweit sie von der Teilchenform oder Lage abhängen, treten stets gemeinsam auf.

Teilchen, die in Richtung des elektrischen Lichtvektors langgestreckt sind, geben starkes Tyndall-Licht und starke Absorption.

Teilchen, die in Richtung des elektrischen Vektors kurz sind im Vergleich zu den Querdimensionen, geben schwaches Tyndall-Licht und schwache Absorption.

Tyndall-Licht und durchgehendes Licht verhalten sich demnach komplementär. Wird durch Lagenänderung der Teilchen beim Fließen das Tyndall-Licht hell, so wird das durchgehende Licht dunkel und umgekehrt.

Man erkennt nach obigen Auseinandersetzungen auch, daß für die das Tyndall-Licht bewirkende Störung dielektrische Polarisation (Brechung) und Leitung (Absorption), wie oben bereits erwähnt wurde, in gleicher Weise — wenn auch mit Phasenverschiebung[2]) wirkend — maßgebend sind.

1) Diese Ztschr. 8, 769, 1907 und Kolloid-Ztschr. 2, 129, 1907; vgl. auch Steubing, Ann. d. Phys. 26, 329, 1908.

2) In der mathematischen Darstellung von Lichtschwingungen pflegt man Phasenverschiebungen wie bei Wechselströmen durch Einführung imaginärer Zahlen zu berücksichtigen. Dem entspricht es, daß in der Zusammensetzung von Brechung und Absorption zum komplexen Brechungsexponenten eine der beiden Größen mit dem imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ versehen wird.

Das Tyndall-Licht wird im allgemeinen senkrecht zum Lichtstrahl beobachtet, so daß durch Lichtstrahl und Beobachtungsrichtung eine bestimmte Ebene festgelegt wird, die wir Beobachtungsebene nennen wollen. Es trägt dann zum Tyndall-Licht wesentlich nur die Komponente des elektrischen Lichtvektors bei, die zur Beobachtungsebene senkrecht steht. Diese wesentliche Komponente meinen wir, wenn wir im folgenden kurz vom elektrischen Vektor sprechen; die unwesentliche, in der Beobachtungsebene liegende Komponente kann experimentell von vornherein durch ein Nikolsches Prisma ausgeschaltet werden.

Ob ein Teilchen starkes oder schwaches Tyndall-Licht ausstrahlt, bzw. stark oder schwach absorbiert, hängt davon ab, ob eine Längsachse oder eine kurze Achse des Teilchens in die Richtung des elektrischen Vektors fällt, ist aber unabhängig von einer Drehung des Teilchens oder des Lichtstrahls und der Beobachtungsrichtung um diese Achse. Es ist also ohne wesentlichen Einfluß, wenn man Lichtstrahl und Beobachtungsrichtung miteinander vertauscht.

Als typische Spezialfälle der Teilchenformen betrachten wir „Stäbchen", „Kugeln" und „Scheiben" und legen zunächst für die Anschauung stäbchenförmige Teilchen zugrunde, d. h. solche, bei denen die eine Achse an Länge die beiden anderen sehr übertrifft. In dem ungeordneten Zustand, der bei einem weder magnetisch noch elektrisch beeinflußten ruhenden Sol der natürliche ist, kann man ähnlich wie es in der kinetischen Gastheorie üblich ist, statt der in allen möglichen Lagen befindlichen Teilchen drei Gruppen von Teilchen in den drei Hauptlagen annehmen. Orientieren wir diese Hauptlagen nach dem Koordinatensystem, das aus Lichtstrahl (Pfeil L in Fig. 1), elektrischem Vektor (in Fig 1 für Fall a senkrecht zur Zeichenebene, für Fall b in der Zeichenebene) und Beobachtungsrichtung gebildet wird. Wir nehmen also eine Hauptlage der Stäbchen parallel dem Lichtstrahl, die zweite parallel dem elektrischen Vektor und die dritte parallel der Beobachtungsrichtung. Die Stäbchen der zweiten Lage senden dann wesentlich mehr Tyndall-Licht aus und absorbieren wesentlich stärker, als die Teilchen in den beiden anderen Lagen[1]).

1) Bei einem dreimal ausgefällten und wieder peptisierten V_2O_5-Sol, dessen Teilchen im Kardioid-Ultramikroskop als ausgesprochen lange (2 bis 3 μ) und dünne Stäbchen erschienen, konnte diese Erscheinung sehr gut beobachtet werden, wenn man das Bild durch ein Nikolsches Prisma betrachtete. Man erblickte dann nur Teilchen, deren Richtungen sich um eine bestimmte Mittellage gruppierten, nämlich diejenige, in der das Prisma den elektrischen Vektor durchließ. Einer Drehung des Nikols folgte die bevorzugte Teilchenrichtung. Senkrecht zu dieser Richtung liegende Stäbchen waren niemals zu sehen.

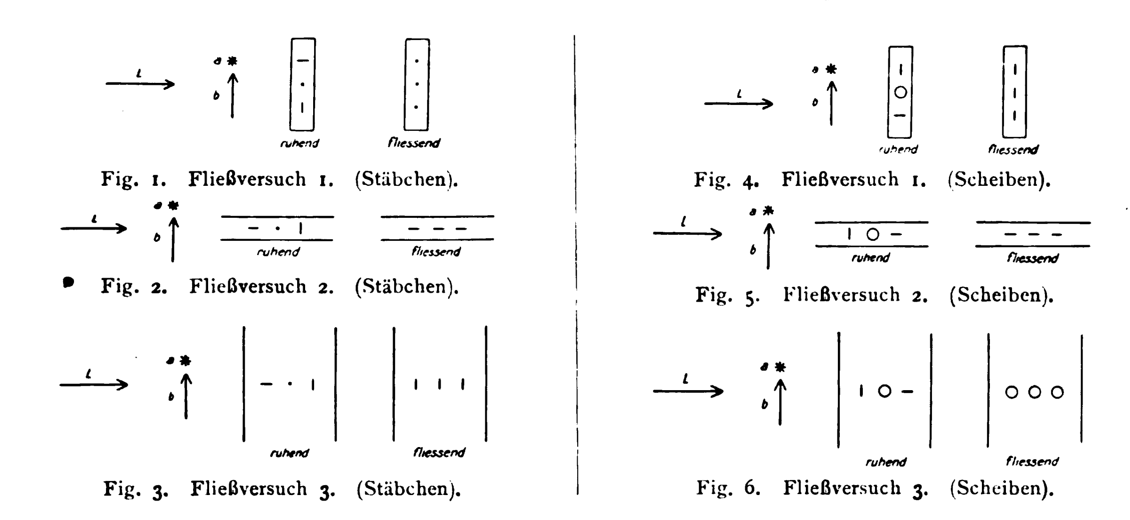


Fig. 1. Fließversuch 1. (Stäbchen).

Fig. 2. Fließversuch 2. (Stäbchen).

Fig. 3. Fließversuch 3. (Stäbchen).

Fig. 4. Fließversuch 1. (Scheiben).

Fig. 5. Fließversuch 2. (Scheiben).

Fig. 6. Fließversuch 3. (Scheiben).

Tabelle 1. Fließversuche.

Fließversuch Nr.	Hauptversuch Nr.	Lichtstrahl	Elektrischer Vektor	Beobachtungsrichtung beim Tyndallversuch	Tyndallversuch		Absorptionsversuch		Kugeln
					Stäbchen	Scheiben	Stäbchen	Scheiben	
1a	—	⊥ Breitseite	‖ Flußrichtung	⊥ Schmalseite	○	○	●	●	keine Änderung
1b	I		⊥ Schmalseite	‖ Flußrichtung	●	○	○	●	
2a	II	‖ Flußrichtung	⊥ Schmalseite	⊥ Breitseite	●	○	○	●	
2b	—		⊥ Breitseite	⊥ Schmalseite	●	●	○	○	
3a	—	⊥ Schmalseite	⊥ Breitseite	‖ Flußrichtung	●	●	○	○	
3b	—		Flußrichtung	⊥ Breitseite	○	○	●	●	

○ bedeutet: Aufhellung; ● bedeutet Verdunklung beim Eintritt des Fließens.

Läßt man nun das Sol fließen, etwa in einem Rohr von rechteckigem Querschnitt mit der Flußrichtung senkrecht zur Beobachtungsebene, so stellen sich die Stäbchen nach unseren früheren Erfahrungen mit ihrer Längsachse in die Flußrichtung, also senkrecht zur Beobachtungsebene, parallel dem elektrischen Vektor, und beteiligen sich sämtlich stark am Tyndall-Licht.

Wegen der Untersuchung scheibenförmiger Teilchen hat der rechteckige Querschnitt des Flußrohrs eine lange und eine kurze Seite. Es sind daher drei Hauptrichtungen am Flußrohr zu unterscheiden: Flußrichtung, Breitseitennormale und Schmalseitennormale. Diese drei Hauptrichtungen des Flußrohrs lassen sich auf sechs verschiedene Weisen mit den drei optischen Hauptrichtungen (Lichtstrahl, elektrischer Vektor, Beobachtungsrichtung) zur Deckung bringen, so daß man sechs verschiedene Fließversuche erhält. Man könnte diese auf drei reduzieren, da nach den theoretischen Auseinandersetzungen nur die Lage des elektrischen Vektors zum Flußrohr maßgebend ist, während eine Vertauschung von Lichtstrahl und Beobachtungsrichtung ohne wesentlichen Einfluß bleibt. Da aber diese Vertauschung doch nicht physikalisch identische Anordnungen ergibt, so wollen wir alle sechs Versuche unterscheiden und nach dem in Tab. 1 gegebenen Schema ordnen. Die sechs Versuche sind hier zu drei Gruppen zusammengefaßt, und zwar aus praktischen Gründen nach der Lage des Lichtstrahls zum Flußrohr. Die Unterfälle a und b entsprechen einem Drehen des Nikols und entsprechender Änderung der Beobachtungsrichtung. Jeder Fließversuch besteht aus einem Tyndallversuch und einem Absorptionsversuch.

Will man auf die Unterscheidung der theoretisch gleichwertigen Versuche mit Vertauschung von Lichtstrahl und Beobachtungsrichtung verzichten, so braucht man nur drei Versuche mit verschiedener Lage des elektrischen Vektors herauszugreifen, z. B. die drei a-Versuche, oder die drei b-Versuche, oder wie es von uns geschah: 1b, 3a und 3b.

An der Hand der Abbildungen 1 bis 6 läßt sich das Resultat der Fließversuche leicht überblicken, wenn man beachtet, daß sich die Stäbchen mit ihrer Längsachse in die Flußrichtung einstellen, die Scheibchen aber mit ihren Ebenen in Flächen gleicher Strömungsgeschwindigkeit, also parallel zur Breitseite des Rohres.

In Tab. 1 ist das nach den Abbildungen sich ergebende Resultat eingetragen, indem für das Tyndall-Licht wie für das durchgehende Licht angegeben ist, ob beim Eintritt des Fließens Aufhellung ○ oder Verdunklung ● erfolgt.

Bei kugeligen[1]) Teilchen kann das Fließen offenbar keine Veränderung des Tyndall-Lichtes noch der Absorption hervorrufen.

Man kann die Tabelle vervollständigen, indem man die relative Anzahl der Teilchen angibt, die sich bei den einzelnen Fließversuchen am Tyndall-Licht und an der Absorption wirksam beteiligen, im Vergleich zu denen, die bei ungeordneter Lage im Ruhezustand wirksam sind. Im Ruhezustand sind wirksam: bei Stäbchen eine der drei Hauptgruppen, also ein Drittel sämtlicher Teilchen, bei Scheiben zwei Drittel, bei Kugeln drei Drittel. Erfolgt bei einem der Fließversuche Aufhellung des Tyndall-Lichtes, also Verdunklung des durchgehenden Lichtes, so sind bei Stäbchen wie bei Scheiben stets sämtliche Teilchen wirksam. Erfolgt Verdunklung des Tyndall-Lichtes, also Aufhellung des durchgehenden Lichtes, so sind stets überhaupt keine Teilchen wesentlich wirksam.

Hiernach kann man erwarten, daß die Aufhellungen des Tyndall-Lichtes und Verdunklungen des durchgehenden Lichtes bei Stäbchen ausgeprägter sind als bei Scheiben, und bei letzteren die Verdunklungen des Tyndall-Lichtes und Aufhellungen des durchgehenden Lichtes ausgeprägter als bei Stäbchen. Viel wesentlicher aber wird es sein, wie weit sich die Teilchen den typischen Grenzformen nähern, d. h. wie sehr eine Dimension im Vergleich zu den beiden anderen bevorzugt bzw. unausgebildet ist.

Wenn man die Vorstellung zugrunde legt, daß bei größeren senkrecht vom Lichte getroffenen Scheibchen eine Art direkter Schattenwirkung eintritt, muß die Verdunklung durch Scheiben beim Absorptionsversuch besonders stark sein.

Man kann bei den Absorptionsversuchen entweder auf den Unterschied zwischen Ruhe und Fließen oder auch auf die Änderung achten, die beim Übergang von a zu b stattfindet. Dieser Übergang läßt sich durch einfaches Drehen des polarisierenden Nikols ausführen.

Aus der Tabelle ersieht man, daß nur zwei von den sechs Fließversuchen ein Kriterium zur Unterscheidung zwischen Stäbchen und Scheiben liefern. nämlich die Versuche 1b und 2a, die wir darum auch als Hauptversuch I und Hauptversuch II bezeichnen wollen. Es sind die beiden Versuche, bei denen der elektrische Vektor senkrecht auf der Schmalwand des Flußrohres steht, die also nach den früheren Ausführungen theoretisch gleichwertig sind. Man erkennt leicht, daß Stäbchen und Scheiben während des Fließens nur senkrecht zur Schmalwand verschiedene Achsen haben, nämlich Stäbchen eine kurze und Scheiben eine lange, während in der Flußrichtung beide Formen lange Achsen und senkrecht zur Breitseite beide kurze Achsen haben. Der elektrische Vektor kann also nur senkrecht zur Schmalwand bei beiden verschiedene Wirkung ausüben.

Zur Unterscheidung kugeliger und nichtkugeliger Teilchen ist man nicht auf die Fließversuche angewiesen. In der einfachsten Weise kann man diese Prüfung anstellen, wenn man die Flüssigkeit in einen rechteckigen Glastrog füllt und bei der Beobachtung des Tyndall-Lichtes mit einem Glasstab rührt. Treten Schlieren auf, so sind die Teilchen sicher nicht kugelförmig. Ist keine Spur von Schlieren zu bemerken und das Sol nicht zu stark verdünnt, so kann man auf „kugelige“ Gestalt schließen. Die Prüfung scheint in dieser Form außerordentlich scharf zu sein.

Diese Schlieren im Tyndall-Licht kommen offenbar dadurch zustande, daß beim Rühren der Flüssigkeit Strömungen verschiedener Richtung entstehen und daß nichtkugelige Teilchen sich in jeder Strömung je nach der Richtung der Stromlinien anordnen. Da bei diesen die Stärke des Tyndall-Lichtes von der Richtung abhängt, in der sich die Flüssigkeit bewegt, so werden die Schwärme der Teilchen in Strömungen verschiedener Richtung verschieden starkes Tyndall-Licht aussenden und benachbarte Strömungen verschiedener Richtung werden sich voneinander abheben. So kommen die Schlieren zustande, die also nur bei nichtkugeligen Teilchen entstehen können.

Wir müssen nun noch kurz darauf eingehen, inwiefern die Veränderung des Tyndall-Lichtes und der Absorption beim Fließen sowie die Schlierenbildung beim Rühren mit der früher von uns am V_2O_5-Sol beobachteten Doppelbrechung verknüpft ist, d. h. inwiefern dieselben Ursachen, nämlich die regelmäßige Lagerung der Teilchen, die eine oder beide Erscheinungsgruppen zur Folge haben.

Bei kugeligen Teilchen hat man die Doppelbrechung ebensowenig wie die Schlierenbildung zu erwarten. Dagegen möchte man bei stäbchenförmigen Teilchen zunächst allgemein die Betrachtungen gelten lassen, die früher[1]) von uns angestellt wurden: Werden die Teilchen durch die Strömung gitterförmig angeordnet, so

1) Es mag erlaubt sein, diesen Ausdruck zu gebrauchen, auch wenn die Teilchen etwa polyedrisch wären; es soll zunächst nur heißen, daß die drei Achsen so gut wie gleich lang sind.

1) Elster-Geitel-Festschrift S. 456, 1915.

verhält sich ein Stück des fließenden Sols wie die Platte eines optisch einachsigen Kristalls, die so geschnitten ist, daß die Längsseite der Stäbchen der optischen Achse parallel ist. Ebenso wird man auch bei der parallelen Lagerung von Scheibchen die Analogie zu einem einachsigen Kristall mit der Achse senkrecht zur Scheibenebene voraussetzen. Man möchte also beim Auftreten der Veränderung des Tyndall-Lichtes und der Absorption bei den Fließversuchen sowie bei der Schlierenbildung allemal auch eine Doppelbrechung erwarten.

In einem wesentlichen Punkt hinkt nun allerdings der zweifellos berechtigte Vergleich mit einer Kristallplatte: Beim Kristall, wohl auch beim flüssigen, beteiligen sich alle Moleküle an der Beeinflussung des durchgehenden Lichtes, demgemäß an der Doppelbrechung; bei dem Sol dagegen haben wir eine verhältnismäßig kleine Zahl wirksamer Teilchen in einem Überschuß unwirksamer Flüssigkeitsmoleküle. Der Betrag der Doppelbrechung wird verhältnismäßig viel kleiner sein als bei Kristallen.

Noch ein weiterer Umstand ist zu berücksichtigen. Nach der eben erwähnten Betrachtung rührt die Doppelbrechung des Lichtes daher, daß längliche oder auch scheibenförmige Teilchen gitterförmig geordnet die Ausbreitung des Lichtes in der einen Richtung anders beeinflussen als in der dazu senkrechten. Die Moleküle der Teilchen brauchen danach nicht anisotrop zu sein; man hat gewissermaßen einen länglichen Bau aus würfelförmigen Bausteinen. Es ist aber auch die andere Möglichkeit gegeben, daß die Moleküle selbst anisotrop sind, wobei dann der längliche oder scheibenförmige Bau der Kolloidteilchen ein Ausdruck für diese Anisotropie ist. Aller Voraussicht nach wird die Doppelbrechung im letzteren Fall weit stärker sein als im ersteren und sich noch unter Umständen bemerkbar machen, bei denen die Doppelbrechung der ersten Art nicht mehr zu erkennen ist.

Wie wir nochmals hervorheben wollen, muß die Beeinflussung des Tyndall-Lichtes in kolloiden Lösungen mit nichtkugeligen Teilchen beim Fließen und die Schlierenbildung beim Rühren im allgemeinen viel deutlicher sein als die Veränderung der Absorption und die Doppelbrechung, weil die gesamte Tyndall-Lichtmenge durch eine Umlagerung der Teilchen stark beeinflußt wird, ohne daß fremdes Licht die Erscheinung überdeckt. Die Beeinflussung des Tyndall-Lichtes nichtkugeliger Teilchen durch Strömung muß stets erfolgen, sobald überhaupt Tyndall-Licht da ist, d. h. sobald der zerteilte Stoff sich in seinen optischen Eigenschaften vom umgebenden Medium unterscheidet. Dagegen brauchen Veränderungen der Absorption und Doppelbrechung in kleineren Schichtdicken noch nicht auffällig hervorzutreten, wenn nur die Dielektrizitätskonstante (Quadrat des Brechungsindex) beim zerteilten Stoff anders ist als bei dem umgebenden Medium. Sie werden erst dann deutlich oder auffällig werden, wenn der zerteilte Stoff an sich bereits absorbierend bzw. doppelbrechend ist.

Experimenteller Teil.

Zu den Fließversuchen diente ein Ausflußrohr, das aus zwei Teilchen bestand; in dem einen Teil war die Flußrinne eingeschliffen — 8 mm breit, 0,7 mm tief — und zwar war sie durchaus blank geschliffen, so daß man das Licht sowohl durch die Breitseite wie durch die Schmalseite senden konnte. Der zweite Teil war einfach eine geschliffene rechteckige Glasplatte, die aufgelegt wurde. Waren beide Teile feucht, so genügte der Gummischlauch an dem einen Ende und ein Gummiring, um das Rohr dicht zu halten. Anfangs wurde zu den Fließversuchen ein ähnliches Rohr benutzt, aber mit einem quadratischen Querschnitt statt eines rechteckigen; mit diesem ließen sich die Fließversuche 1 und 3 nicht unterscheiden.

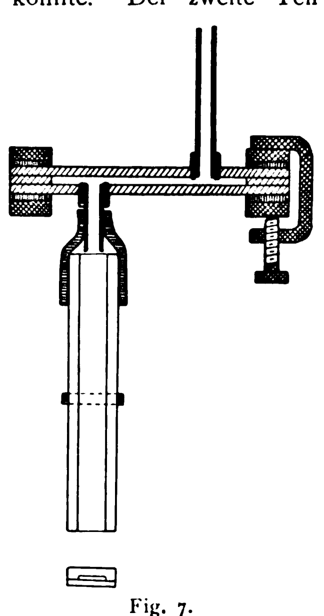


Fig. 7.

Das Flußrohr wurde durch einen Gummischlauch mit einem Stückchen runden Glasrohr verbunden und dieses mit Gummidichtung in das Loch einer runden geschliffenen Glasplatte eingesetzt, die uns früher[1]) zu Versuchen mit dem V_2O_5-sol gedient hatte. Die zwei damals auch gebrauchten Glasringe trennten diese Platte von der zweiten gleichen Glasplatte; in deren versetzte Öffnung mündete das Rohr der Hebervorrichtung, die ja gleichfalls schon in den eben erwähnten Versuchen verwandt worden war. Glasplatten und -ringe wurden wiederum durch Klammern dicht gehalten, die auf Metall- und Gummiringe drückten. Fig. 7 zeigt die ganze Anordnung bis auf die Hebervorrichtung, die dieselbe war, wie sie in Fig. 1 auf S. 420 der

1) Diese Zeitschr. 16, 420, 1915.

eben genannten Abhandlung abgebildet ist. Zur Beleuchtung diente eine Bogenlampe. Ihr Licht fiel horizontal durch ein Nikolsches Prisma auf eine Blende, die dann durch eine Linse im Flußrohr abgebildet wurde.

Das Flußrohr stand senkrecht. Man brauchte es nur mit dem Gummischlauch um 90° zu drehen, um den horizontalen Lichtstrahl nach Belieben auf die Breitseite oder auf die Schmalseite auftreffen zu lassen.

Mit dieser Anordnung konnten sämtliche Fließversuche 1 und 3 ohne weiteres angestellt werden, insbesondere die drei theoretisch verschiedenen: 1b, 3a und 3b. Für die Tyndallversuche 2 hätte man den Lichtstrahl mit einem Spiegel von oben durch die Glasplatte in das Flußrohr lenken und in den beiden horizontalen Richtungen beobachten müssen. Für die Absorptionsversuche 2 war der Apparat überhaupt nicht zu brauchen, weil der Lichtstrahl unten aus dem Flußrohr nicht frei wieder austreten konnte. Wir begnügten uns vorläufig[1]) mit den Versuchen 1 und 3, benutzten also als Kriterium nur den Hauptversuch I, dem ja der Hauptversuch II theoretisch äquivalent ist.

Bei den Absorptionsversuchen wurde mit einer Linse hinter dem Ausflußrohr ein Bild der durchflossenen Schicht auf eine weiße Fläche geworfen und auf eine etwaige Aufhellung oder Verdunklung geachtet. Bisweilen war die Schichtdicke zu klein, um eine genügende Absorption zu geben. Dann brachte man je einen Spiegel auf jeder Seite des Rohrs an und zwang das Licht, seinen Weg mehrfach durch die fließende Flüssigkeit zu nehmen.

Will man die Schlierenbildung recht deutlich sehen, so bringt man, wie bereits oben besprochen, das Sol in einem rechteckigen Leyboldschen Trog in das Licht einer Bogenlampe derart, daß das Licht parallel zur Längsseite des Troges hindurchgeht, und rührt in der Flüssigkeit mit einem Glasstab, während man das Tyndall-Licht betrachtet. Man kann dabei das Licht mit einem Nikol polarisieren und mit Hilfe eines Spaltes eine scharfe Lichtbahn ausschneiden. Oft genügt die Beobachtung bei seitlich einfallendem zerstreutem Tageslicht.

Auf Doppelbrechung wurden die Sole einfach in der Weise geprüft, daß man sie in einem ebensolchen Trog zwischen gekreuzte Nikols brachte und in der Flüssigkeit mit einem Glasstab rührte.

1) Wir denken bald über einen Apparat berichten zu können, der sämtliche Fließversuche in einfacher Weise auszuführen gestattet und dabei einige Übelstände der hier gebrauchten Einrichtung, wie die Verwendung von Gummischlauch und überflüssige oder schädliche Schichtdicken in der Längsdurchsicht des Rohres, vermeidet.

I. Sole mit kugeligen Teilchen.

Wie bereits S. 118 erwähnt wurde, kann man jetzt schon sicher annehmen, daß in den drei folgenden Solen kugelige Teilchen vorhanden sind: im Mastixsol auf Grund des mikroskopischen Bildes gröberer Teilchen nach den Erfahrungen Perrins; im roten, durch Reduktion erhaltenen Goldsol und im bekannten Silbersol Kollargol, weil nach den Untersuchungen von Gans die Absorptionskurven dieser kolloiden Lösungen weitgehend mit denen übereinstimmen, die man bei kugeligen Teilchen zu erwarten hat. Auch nach unserem Prüfungsverfahren verhielten sie sich durchaus so, wie man bei der Anwesenheit kugeliger Teilchen verlangen muß: einmal nicht die geringste Änderung im Tyndall-Licht bei den Fließversuchen; man konnte nach dem Aussehen des Lichtes nicht erkennen, ob die Flüssigkeit sich bewegte oder nicht. Keine Andeutung von Schlierenbildung oder Doppelbrechung, auch keine Veränderung in der Absorption beim Fließen. Es sei noch bemerkt, daß das rote Au-sol durch Reduktion einer $AuCl_3$-lösung mit Azetylen bereitet worden war. Ferner, daß nur mit dem Mastix- und mit dem Au-sol die ganzen Versuche sorgfältig durchgeführt wurden. Beim Kollargol begnügten wir uns nachzuweisen, daß Schlierenbildung und Doppelbrechung durchaus fehlte. Im allgemeinen ist ja die Frage, ob die Teilchen kugelig sind oder nicht, allein schon durch das Fehlen oder Vorhandensein der Schlieren entschieden.

Es wurden noch folgende Sole untersucht, deren Teilchen als kugelig anzunehmen sind, weil jede Änderung des Tyndall-Lichtes beim Fließen, Schlierenbildung und Doppelbrechung fehlte: Platinsol (durch Zerstäuben nach Bredig gewonnen), $Al(OH)_3$-sol (nach Crum), das in der gewohnten Weise hergestellte As_2S_3-sol.

II. Sole mit scheibenförmigen Teilchen.

Leider fehlte es uns an einem Sol, dem wir zuverlässig scheibenförmige Teilchen zuschreiben durften, und an dem wir demgemäß zunächst die Theorie prüfen konnten. Am ehesten entsprach unseren Wünschen ein wässeriges Graphitsol der Firma E. de Haën, das als Zwischenprodukt bei der technischen Herstellung des Graphit-Schmieröls Kollag auftritt und von dem einen von uns (Freundlich) auf Wunsch der genannten Firma näher untersucht wurde. Dies Sol enthielt vor allem reichlich Submikronen, daneben aber auch in größerer Menge Mikronen bis zu einem Durchmesser von etwa 6 μ[1]). Man konnte unter dem

1) Diese Mikronen hatten eine lebhafte Brownsche

Mikroskop bei einer Vergrößerung von etwa 1200 erkennen, daß diese Mikronen nichtkugelig waren, sondern mehr flach, schüppchenförmig. Sie waren allerdings recht unregelmäßig gestaltet, es waren auch Teilchen da, die sich der Stäbchen- oder Würfelform näherten. Immerhin kann man wohl mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, daß auch die Submikronen weitgehend schüppchenförmig sind, also der gesuchten Scheibenform sich nähern.

Zu den nachfolgenden Versuchen diente ein Graphitsol dieser Art, das sehr kräftig geschlemmt worden war, so daß es nur wenige Prozent Mikronen auf die Gesamtzahl der Teilchen enthielt. Um diese noch möglichst zu entfernen, wurde das Sol durch ein Papierfilter filtriert.

Die Schlierenbildung war recht stark, das Sol enthielt also zweifellos nichtkugelige Teilchen, wie man ja auch aus den mikroskopischen Beobachtungen schließen mußte. Eine Entscheidung über Scheiben- oder Stäbchenform können erst die Fließversuche bringen. Bei den Tyndallversuchen wurde folgendes beobachtet: Bei 3b (Tab. 1) eine deutliche Aufhellung, bei 1b und 3a keine merkliche Änderung der Helligkeit.

Die Antwort ist nicht eindeutig. Wollte man aus dem Resultat von 1b, also Hauptversuch I nach Tab. 1 auf eine Mischung schließen, deren Individuen sich teils dem scheibenförmigen, teils dem stäbchenförmigen und ev. auch dem kugeligen Grenzfall nähern, so müßte man doch beim Tyndallversuch 3a unter allen Umständen eine Verdunklung erwarten.

Nun sind aber die Tyndallversuche 1b und 3a in der Form, wie sie mit dem hier benutzten noch unvollkommenen Apparat angestellt werden mußten, nicht rein. Das von der beleuchteten Schicht ausgestrahlte Tyndall-Licht muß erst eine ziemlich beträchtliche Schichtdicke des Sols durchdringen, bevor es zum Auge gelangt. In dieser Schicht erleidet es eine Absorption. Da nach Tabelle 1 bei Fließversuch 3a der elektrische Vektor senkrecht zur Breitseite steht und das Tyndall-Licht in der Flußrichtung zum Auge gelangt, so ist der Versuch in Wahrheit eine Kombination aus Tyndallversuch 3a und Absorptionsversuch 2b. Die Resultate Verdunklung und Aufhellung können sich kompensieren. Ebenso ist Tyndallversuch 1b mit Absorptionsversuch 2a verbunden; man erhält wieder Kompensation von Aufhellung und Verdunklung bei Stäbchen wie bei Scheiben. So ist das negative Resultat der beiden Versuche verständlich. Außerdem ist zu bedenken, daß Tyndallversuch 3b mit dem konzentrierten Sol angestellt werden konnte; zu den Versuchen 3a und 1b dagegen mußte das Sol mehrfach verdünnt werden. Seine Absorption ist sehr stark, und bei dem unverdünnten Sol dringt das Tyndall-Licht nicht mehr durch. Die Verdünnung ist natürlich nicht günstig; auch die Schlieren, wie Tyndallversuch 3b, sind in dem verdünnten Sol weniger gut zu erkennen.

Deutlicher zugunsten einer Mischung scheibenförmiger und stäbchenförmiger Teilchen sprachen die Absorptionsversuche. Hier ergab beim Graphitsol Absorptionsversuch 1a eine merkliche Verdunklung, dagegen 1b, also Hauptversuch I, eine recht geringe Verdunklung. Bei diesen Versuchen wurde, wie oben beschrieben, mittels zweier Spiegel das Licht mehrfach durch das fließende Sol hindurchgeschickt.

Man könnte das Resultat des Absorptionsversuches 1b dahin deuten, daß die Teilchen dicke Scheiben wären, die wenig von der Kugelgestalt abwichen. Dem widerspricht aber das deutliche Resultat des Absorptionsversuches 1a und der Tyndallversuche 1a und 3b sowie die starke Schlierenbildung. Es bleibt nur die Annahme einer Mischung, die hauptsächlich aus Scheiben mit beigemengten Stäbchen und ev. kugeligen Teilchen besteht. Dies ist in Übereinstimmung mit dem oben beschriebenen mikroskopischen Befund.

Doppelbrechend war das Sol in erkennbarem Maße nicht.

Wir kamen weiter zum Ergebnis, daß auch das alte, aktive Eisenhydroxydsol, an dem wir das Majoranaphänomen und die Doppelbrechung früher[1]) eingehend untersucht haben, eher scheiben- als stäbchenförmige Teilchen enthält. Die starke Doppelbrechung spricht schon dafür, daß seine Teilchen jedenfalls nichtkugelig sind. Es ist demgemäß auch eine Schlierenbildung vorhanden. Sie ist allerdings verglichen mit der vieler anderer Sole recht schwach und eigentlich nur an einem sehr konzentrierten Sol — 49,4 g Fe_2O_3 i. L. — deutlich zu erkennen. Dementsprechend waren auch die Fließversuche nicht ganz eindeutig. Wohl gab Tyndallversuch 3b mit diesem konzentrierten Sol eine Aufhellung. Aber für die Tyndallversuche 3a und 1b mußte man, wie beim Graphitsol, wegen der starken Lichtabsorption das Sol etwa auf das 10fache verdünnen, und dieses verdünntere Sol gab bei den Tyndall-

Bewegung und ließen überraschend deutlich und schön die Perrinsche Erscheinung erkennen, d. h. die regelmäßige Änderung von Teilchenzahl und Teilchengröße mit der Höhe gemäß der hypsometrischen Formel. In der tiefsten Flächenhöhe, auf die man einstellen konnte, waren sehr viele und die größten Teilchen vorhanden. Mit steigender Flächenhöhe nahm Zahl und Größe ganz regelmäßig ab.

1) Elster-Geitel-Festschrift S. 467 u. folg.

versuchen 3a und 1b keine Änderung der Helligkeit. Dies läßt sich zwar, wie beim Graphitsol, durch die Verknüpfung mit den Absorptionsversuchen 2 erklären, beweist aber nichts Positives, zumal auch die Schlieren nur noch undeutlich zu sehen waren und die Aufhellung beim Tyndallversuch 3b sich nicht mehr sicher erkennen ließ. Die Absorptionsversuche führten gleichfalls zu keinem ganz scharf geprägten Ergebnis. Absorptionsversuch 1a ergab eine Verdunklung, wenn die Flüssigkeit durch Blasen rasch durch das Rohr getrieben wurde. Absorptionsversuch 1b ergab auch dann keine deutliche Veränderung. Das Resultat läßt wieder auf Mischung von Scheiben und Stäbchen schließen. Auch der Umstand, daß es von den Kristallen des Fe_2O_3 heißt[1]), sie seien rhomboedrisch und neigten dazu, in Platten, selten auch in Säulen zu kristallisieren, läßt sich vielleicht zugunsten scheibenförmiger Teilchen mit beigemengten Stäbchen in unserem $Fe(OH)_3$-sol deuten; man wird ja doch wohl die Teilchen in einem alten Sol als den Kristallen sehr nahe stehend betrachten dürfen.

Vielleicht weichen die Teilchen überhaupt wenig vom kugeligen Typus ab. Jedenfalls stehen damit eine Reihe früherer Erfahrungen in Einklang. Wir mußten z. B. immer wieder betonen[2]), daß sich das $Fe(OH)_3$-sol viel schwerer mechanisch beeinflussen ließe, als das V_2O_5-sol.

Es begegnet uns hier zum erstenmal der Fall, daß die Doppelbrechung weitgehend unabhängig ist von den Erscheinungen, die sonst durch die Abweichung der Teilchenform von der Kugelgestalt bedingt sind: beim Graphitsol keine Doppelbrechung trotz starker Abweichung von der Kugelgestalt, die sich sicher in den deutlichen Schlieren äußert und aus dem mikroskopischen Befunde folgt; beim $Fe(OH)_3$-sol kräftige Doppelbrechung, obwohl alle sonstigen Umstände dahin deuten, daß die Abweichung von der kugeligen Gestalt gering ist. Dies spricht doch sehr dafür, daß für diese Doppelbrechung der anisotrope Bau der Moleküle, die die $Fe(OH)_3$-teilchen zusammensetzen, wesentlich ist, nicht bloß die anisotrope Gestalt der Teilchen an sich. Zu dem gleichen Ergebnis waren Cotton und Mouton[3]) gelangt, auf Grund der Abhängigkeit der Doppelbrechung des $Fe(OH)_3$-sols von der magnetischen Feldstärke. In diesem Zusammenhang ist beachtenswert, daß die Teilchen des $Fe(OH)_3$-sols das Licht zum Teil zwar stark absorbieren, aber doch durchsichtig sind, die des Graphitsols sind dagegen sehr lichtundurchlässig.

Ein verhältnismäßig junges $Fe(OH)_3$-sol, das wir noch untersuchten, zeigte weder Schlieren noch eine Veränderung des Tyndall-Lichtes beim Fließen; dagegen war die Doppelbrechung zwar schwach, aber sicher erkennbar. Auch dies steht im Einklang mit den eben entwickelten Anschauungen. Die anisotropen Moleküle bedingen schon eine deutliche Doppelbrechung, obwohl die von ihnen hervorgerufene Abweichung von der Kugelgestalt zu gering ist, um sich an den anderen Erscheinungen bemerkbar zu machen.

III. Sole mit stäbchenförmigen Teilchen.

Zu sehr glatten, eindeutigen Ergebnissen führten die Versuche an Solen mit stäbchenförmigen Teilchen. Wir hatten ja in dem mehrfach erwähnten Vanadinpentoxydsol eine kolloide Lösung, auf die wir uns zuverlässig beziehen konnten: das ultramikroskopische Bild hatte sicher gelehrt, daß seine Teilchen stäbchenförmig sind. Wir haben schon in den früheren Arbeiten[1]) ausführlich gezeigt, daß die Schlierenbildung, die Abhängigkeit der Absorption vom Fließen und die Doppelbrechung durchaus im Einklang mit der besonderen Gestalt der Teilchen stehen. Es fehlten nur Versuche über die Abhängigkeit des Tyndall-Lichtes von der Bewegung des Sols. Diese Fließversuche stimmten nun vollkommen mit der Theorie überein: Tyndallversuch 3b kräftige Aufhellung, Tyndallversuch 1b und 3a starke Verdunklung schon bei ganz geringen Stromgeschwindigkeiten. Es ist dies also eine gute Bestätigung unserer Theorie[2]). Beim V_2O_5-sol beobachtet man offenbar alle Erscheinungen, die man auf Grund der Stäbchenform der Teilchen erwarten möchte.

Wir fanden nun noch ein weiteres Sol mit gut stäbchenförmigen Teilchen, nämlich ein Wolframsäuresol, das nach einem Verfahren von Lottermoser[3]) gewonnen worden war. Eine Lösung von Na-wolframat wurde mit einem Überschuß von Salzsäure versetzt. Zunächst entsteht ein umfangreicher, weißer Niederschlag von Wolframsäure. Wäscht man durch Ab-

1) Naumann-Zirkel, Elemente der Mineralogie S. 476 u. folg., 1907.

2) Elster-Geitel-Festschrift S. 470; diese Zeitschr. 16, 422, 1915.

3) Ann. d. chim. et d. phys. 11, 327, 1907.

1) loc. cit. S. 118.

2) Man könnte fragen, warum sich hier die Störung durch die Absorption des Tyndall-Lichtes beim Beobachten in der Flußrichtung nicht geltend macht, wie wir es bei dem Graphitsol angenommen haben. Hier ist jedenfalls zu beachten, daß bei Stäbchen das Tyndall-Licht in den fraglichen Versuchen 1b und 3a stets verdunkelt wird und daß diese Verdunklung bei der ausgeprägt typischen Stäbchenform des V_2O_5-sols so stark ist, daß selbst völlige Beseitigung der Absorption die alte Helligkeit nicht wieder herstellen kann.

3) van Bemmelen-Gedenkbuch S. 154, 1910.



hebern aus, so nimmt der Niederschlag mehr und mehr an Volum ab, er bildet schließlich nur einen ganz geringen gelben Satz auf dem Boden des Gefäßes[1]). Wenn dieser immer wieder in Wasser aufgerührt wird, so peptisiert er sich schließlich zum Teil. Man erzielt so, wie Lottermoser schreibt, „ein gelbes, im auffallenden Licht stark getrübtes Sol, welches nur sehr langsam das Kolloid, das nur einen ganz kleinen Raum einnimmt, absetzt und beim Umschütteln im auffallenden Licht einen seidenartigen Glanz, wie von einer Unzahl feiner Blättchen herrührend, zeigt".

Die letztbeschriebene Erscheinung ist nun nichts anderes als unsere Schlierenbildung. Wir benutzten, um möglichst von gröberen Teilchen frei zu sein, ein viel verdünnteres Sol als Lottermoser, das vor der Benutzung mehrere Monate lang abgestanden hatte; es erschien im durchfallenden Licht kaum trübe, im auffallenden bläulich. Trotzdem war die Schlierenbildung, wenn wir sie in der oben geschilderten Weise suchten, überraschend stark und schien fast mit der unscheinbaren Trübung des Sols im Widerspruch zu stehen.

Waren danach schon die Teilchen desselben nichtkugelig, so führten die Fließversuche zur Annahme stäbchenförmiger Teilchen: Tyndallversuch 3b gute Aufhellung, Tyndallversuch 3a und 1b starke Verdunklung.

Die Absorption war zu gering, um eine etwaige Änderung derselben beim Fließen erkennen zu lassen.

Im Ultramikroskop war sicher zu unterscheiden, daß die Teilchen des Sols nichtkugelig waren: sie erschienen verhältnismäßig groß, funkelten ausgesprochen, wie man es auch vielfach bei den Teilchen des V_2O_5-sols beobachtet hatte[2]). Geradezu lange Stäbchen, wie bei einigen von den V_2O_5-solen wurden nicht gefunden.

Das Wolframsäuresol zeigte aber keine Andeutung von Doppelbrechung[3]).

Wir haben hier also ein zweites, besonders auffallendes Beispiel, wie weitgehend die Doppelbrechung von den anderen Erscheinungen, die von einer nichtkugeligen Gestalt der Kolloidteilchen herrühren, unabhängig ist. Das Wolframsäuresol stimmt fast Punkt für Punkt mit dem V_2O_5-sol überein: Funkeln der Teilchen unter dem Ultramikroskop, starke Schlierenbildung, die gleiche Änderung des Tyndall-Lichtes bei den Fließversuchen, aber es fehlt die Doppelbrechung. Wie in dem oben besprochenen Fall des $Fe(OH)_3$ und Graphitsols möchte man wieder annehmen, daß beim V_2O_5-sol die Moleküle, die die Teilchen aufbauen, anisotrop sind[1]), beim Wolframsäuresol nicht, oder doch viel weniger. Bei diesem letzteren möchte man deshalb auch mit empfindlicheren Methoden oder konzentrierterem Sol nach der Doppelbrechung suchen, die allein von der stäbchenförmigen Gestalt der Teilchen herrührt[2]).

Es ist vielleicht für die grundsätzliche Erklärung der Doppelbrechung beachtenswert, daß die V_2O_5-teilchen wie die ebenfalls doppelbrechenden $Fe(OH)_3$-teilchen gefärbte, aber recht durchsichtige Sole geben; sie sind also weitgehend lichtdurchlässig, wenn sie auch einige Strahlenarten stark absorbieren[3]). Das konzentriertere, nicht doppelbrechende Wolframsäuresol dagegen wird von Lottermoser als sehr trübe beschrieben, und ist nur schwach gelb gefärbt; auch das nicht doppelbrechende Graphitsol ist, wie oben bemerkt, sehr undurchsichtig.

Zusammenfassung.

1. Es wurde die Beziehung zwischen dem Tyndall-Licht und der Gestalt der Kolloidteilchen theoretisch erörtert. Dabei ergab sich folgendes: Bei kugeligen Teilchen kann sich das Tyndall-Licht bei einer Bewegung des Sols nicht ändern, wohl aber bei nichtkugeligen

1) Man gewinnt bereits ohne quantitative Versuche den Eindruck, als ob sich die Ausscheidung der Wolframsäure nach dem Zusammengießen der Wolframatlösung mit der Salzsäure autokatalytisch vollzieht, ebenso der Übergang des ersten umfangreichen, flockigen Niederschlags in den feinen Bodensatz. Der erste Vorgang entspricht wahrscheinlich der gleichfalls autokatalytisch verlaufenden Bildung des $Fe(OH)_3$ bei der Hydrolyse des $Fe\,Cl_3$ (siehe C. L. Wagner, Wien. Monatshefte **34**, 95, 1913). Bei dem zweiten hat man vielleicht die wiederum autokatalytisch sich vollziehende Vergröberung der Teilchen, wie sie Freundlich u. Schucht (Ztschr. f. phys. Chem. **85**, 660, 1913) bzw. Freundlich u. Hase, Ztschr. f. phys. Chem. **89**, 417, 1915, beschrieben haben.

2) Elster-Geitel-Festschrift S. 455.

3) Eine frühere Angabe von uns, daß dies Sol doppelbrechend sei (diese Ztschr. **16**, 422, Anmerkung 3, 1915), ist falsch. Der Irrtum rührt daher, daß damals das frisch bereitete Sol benutzt wurde, in dem auch gröbere Teilchen aufgeschwemmt waren; diese können durch Reflexion eine Aufhellung bei der Bewegung der Flüssigkeit zwischen gekreuzten Nikols bedingen. Als die gröberen Teilchen sich völlig abgesetzt hatten, war nicht die geringste Doppelbrechung zu beobachten. Dieselbe Vorsichtsmaßregel ist beim Graphitsol zu beachten.

1) Ist hiernach jedes einzelne Kolloidteilchen doppelbrechend, so wird doch das Sol im ungeordneten Zustand nicht doppelbrechend sein, weil keine Richtung bevorzugt ist. Wird durch ein Teilchen eine Lichtkomponente relativ zur anderen verzögert, so ist stets ein anderes Teilchen da, das diesen Unterschied rückgängig macht.

2) Vgl. Schaefer u. Stallwitz, Berl. Akad. Ber. 1913, II., S. 674.

3) Noch in einem anderen Fall konnte diese Vermutung bestätigt werden. Durch Herrn Dr. Loewe in Göttingen wurde uns in dankenswerter Weise ein Kephalin-Sol mit Tetrachlorkohlenstoff als Dispersionsmittel zur Verfügung gestellt, an dem er Schlierenbildung und Doppelbrechung beim Rühren hatte konstatieren können. Auch dieses Sol ist gefärbt und für gelbes Licht ziemlich durchlässig.

Teilchen, und zwar tritt bei diesen je nach den Versuchsbedingungen eine Verstärkung oder Schwächung des Tyndall-Lichts ein. Es lassen sich Fließversuche anstellen, mit deren Hilfe man scheiben- und stäbchenförmige Teilchen unterscheiden kann.

2. Eine Folge der Änderung des Tyndall-Lichtes bei einer Bewegung des Sols ist die Bildung von Schlieren, die man beim Umrühren der Flüssigkeit und einer Betrachtung im auffallenden bzw. seitlich einfallenden Licht beobachtet. Sie treten nur bei nichtkugeligen Teilchen auf.

3. Weiter ergibt sich die Abhängigkeit der Lichtabsorption von der Bewegung des Sols. Bei kugeligen Teilchen kann keine Änderung der Absorption eintreten, dagegen ist dies bei nichtkugeligen Teilchen der Fall, und man kann wiederum wie bei Nr. 1 durch analoge Fließversuche scheiben- und stäbchenförmige Teilchen unterscheiden. Das durchgehende Licht verhält sich stets komplementär zum Tyndall-Licht.

4. Eine merkliche Doppelbrechung ist mit den unter 1—3 beschriebenen Erscheinungen nicht notwendig verbunden. Man muß voraussichtlich eine schwache Doppelbrechung, die theoretisch allein aus der anisotropen Gestalt der Teilchen bei geordneter Lage folgt, von der viel stärkeren sondern, die durch den anisotropen Bau der Moleküle, die die Teilchen zusammensetzen, bedingt ist.

5. Es wurden die unter 1 und 3 erwähnten Fließversuche angestellt und durch Prüfung auf Schlierenbildung ergänzt. Danach enthielten

I. Kugelige Teilchen:
- Silbersol (Kollargol),
- Goldsol (rotes, durch Reduktion mit Azetylen erhalten),
- Platinsol (durch Zerstäuben nach Bredig),
- $Al(OH)_3$-sol (nach Crum),
- As_2S_3-sol,
- Mastixsol.

Vom Silber-, Gold- und Mastixsol war dies schon nach früheren Versuchen von Gans und Perrin anzunehmen.

II. Scheibenförmige Teilchen, vermischt mit länglichen und ev. kugeligen Teilchen:
- Graphitsol (technisches Präparat der Firma de Haën),
- $Fe(OH)_3$-sol (stark gealtertes Präparat, Teilchen wahrscheinlich wenig von der kugeligen Gestalt abweichend).

III. Stäbchenförmige Teilchen, dem typischen Grenzfall nahe kommend:
- Vanadinpentoxydsol,
- Wolframsäuresol (nach Lottermoser).

Die Resultate stimmen mit dem mikroskopischen und ultramikroskopischen Befund überein, soweit hieraus Schlüsse gezogen werden konnten.

6. Eine starke Doppelbrechung zeigten bloß das Vanadinpentoxydsol und das alte $Fe(OH)_3$-sol, dagegen war beim Wolframsäure- und Graphitsol keine zu beobachten. Es spricht dies stark zugunsten der Auffassung, daß die Doppelbrechung wesentlich durch den anisotropen Bau der Moleküle bedingt ist, die die Teilchen zusammensetzen, weniger durch die anisotrope Gestalt der Teilchen selbst.

Braunschweig, Physikal. und Physik.-chem. Institut d. H. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 21. März 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Flüssige Kristalle und anisotrope Flüssigkeiten.

Von W. Voigt.

(II. Teil.)

9. Die Schwarmhypothese.

Wie schon S. 77 bemerkt, haben die ersten Bearbeiter des Gegenstandes, die Vertreter der „Kristallhypothese", die trüben doppeltbrechenden Schmelzen als Aggregate aus kleinen Elementen von regelmäßig anisotroper Struktur aufgefaßt, wobei indessen auf die parallele Orientierung der Moleküle größeres Gewicht gelegt wurde, als auf eine Raumgitterstruktur. Bei Strömungsbewegungen mußten dann diese Raumelemente sich deformieren, oder umordnen, eventuell zeitweilig und teilweise durch ungeordnete Zustände hindurchgehen. Diese Vorstellung ist zu theoretischen Folgerungen, welche eine quantitative Prüfung durch die Beobachtung gestatteten, kaum benutzt worden.

Bose[1]) hat versucht, eine Abänderung der genannten Vorstellung fruchtbar zu machen. Er gibt vorerst (— nicht definitiv, wie unten zu zeigen —) die Annahme einer Raumgitterbildung (und damit auch den Namen „flüssige Kristalle") auf und führt die Anisotropie ausschließlich auf die Parallelorientierung der (nach Vorländer) langgestreckten Moleküle in einzel-

1) E. Bose, diese Zeitschr. 9, 708, 1908.



nen Raumelementen zurück; dabei legt er den Molekülen aber eine Art von Wärmebewegung bei, auf die sich die Grundsätze der kinetischen Gastheorie anwenden lassen. Damit soll die „Flüssigkeit" der betr. Substanzen verständlich gemacht werden — was auch der von Bose bevorzugte Name „anisotrope Flüssigkeiten" besonders zum Ausdruck bringt.

Nach Bose sind also in den trüben Schmelzen jeweil Raumelemente mit „Schwärmen" parallel orientierter Moleküle erfüllt und verhalten sich demgemäß optisch anisotrop; da die verschiedenen Schwärme im allgemeinen regellos wechselnde Orientierung haben, auch wohl durch Bereiche mit völlig ungeordneten Molekülen getrennt sind, so erklärt sich dadurch die optische Trübung des Aggregates. Kein Schwarm hat einen dauernden Bestand; jeder ist infolge der Wärmebewegung im Zu- oder Abnehmen begriffen. Sinkender Temperatur entspricht eine Vermehrung und Vergrößerung, steigender eine Verminderung und Verkleinerung der Schwärme. Die Klärung wird eintreten, wenn die ganz überwiegende Zahl der Schwärme klein gegen die mittlere Wellenlänge des Lichtes geworden ist.

Die letztere Feststellung bezeichnet sofort die eine große Schwierigkeit der Schwarmhypothese; sie bietet keine bestimmte Grenze zwischen dem anisotropen und dem isotropen Zustand und scheint sich hierdurch zu einer Reihe von sichern Beobachtungen in bedenklichem Gegensatz zu befinden, selbst in Gebieten, wo manche Gründe die Hypothese zu empfehlen scheinen.

Man wird z. B. Bose zugeben können, daß der Zunahme der Schwärme an Zahl und Größe eine Vergrößerung der Dichte entsprechen mag, weil die ungeordneten Moleküle für ihre Wärmebewegung mehr Raum in Anspruch nehmen, als parallel geordnete; aber der Verlauf der Dichte-Temperaturkurve, die im Bereiche des Klärungspunktes meist eine ganz ausgeprägte Stufe zeigt, hindert doch in der größeren Dichte der *a*-Phase ein Argument für die Hypothese zu sehen.

Die anscheinende Stetigkeit der Kapillaritäts- und Dielektrizitätskonstanten ist natürlich mit der Schwarmhypothese wohl verträglich; aber hier besteht auch kein erkennbarer Unterschied zwischen ihr und der älteren Vorstellung, die dem regelmäßig kristallinischen Verhalten etwas näher liegt. Dagegen wird man kaum zugeben, daß bezüglich der Erklärung der Struktur der in § 2 besprochenen „Individuen" und der in § 3 behandelten homogenen Schichten, die Bosesche Vorstellung irgend etwas Besonderes leistet. In der Tat hat sich die letztere, wie sich zeigen wird, unter dem Druck der Tatsachen allmählich so gewandelt, daß sie sich schließlich von der älteren kaum mehr merklich unterscheidet.

10. Einige durch die Schwarmhypothese veranlaßte Beobachtungen.

Die Schwarmhypothese hat seinerzeit bei Physikern, die der ursprünglichen Lehmannschen Vorstellung kristallinischer Flüssigkeiten Bedenken entgegensetzten, mehrfach Geneigtheit gefunden. Aber auch diese konnten sich die Schwierigkeit, aus ihr eine unstetige oder quasiunstetige Änderung für die physikalischen Eigenschaften der Substanz bei Überschreitung des Klärungspunktes abzuleiten, nicht verhehlen. Eine mit dieser Schwierigkeit in Beziehung stehende Beobachtung hat Nernst[1]) angestellt. Er schloß, daß wenn die Klärung der Flüssigkeit durch allmählich abnehmende Größe der Schwärme zustandekäme, dann die Klärung vom roten Ende des Spektrums beginnen und von da nach dem violetten Ende fortschreiten müßte. Indessen gaben die nach verschiedenen Methoden angestellten Beobachtungen nicht das kleinste Anzeichen eines solchen Verhaltens.

Die nächste Folgerung hieraus mußte offenbar die Vorstellung sein, daß die Schwärme bei der Klärung, obwohl noch von merklicher Größe, doch plötzlich, etwa infolge einer eintretenden Labilität, zerfallen. Nernst vermeidet, einen solchen Vorgang kinematisch zu deuten, und zeigt nur, daß thermodynamisch eine solche Annahme zu keinem Widersinn führe.

Eine Vorstellung von der Größe, welche die Schwärme in der *a*-Phase von Anisaldazin, *p*-Azoxyanisol und *p*-Azoxyanisolphenetol besitzen, hat in Veranlassung der Nernstschen Beobachtungen Bose[2]) zu gewinnen versucht. Er spricht auf Grund seiner Untersuchung die Ansicht aus, daß die kleinsten am Klärungspunkte neben der klaren Phase noch stabilen Schwärme einen Durchmesser von rund $^1/_{300}$ mm besitzen, daß aber die Schmelze nahe diesem Punkt auch viel größere Schwärme enthalte, derart, daß der Mittelwert jenen Minimalwert beträchtlich überrage. Da hiernach bei den Nernstschen Beobachtungen die Schwarmgröße ein großes Vielfaches der Wellenlängen des sichtbaren Spektrums betrug, so ist der Ausfall jener Versuche ohne weiteres verständlich.

Dafür macht sich aber nach demselben das Bedürfnis nach einer befriedigenden Deutung des Klärungsvorganges nur um so stärker gel-

1) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie **16**, 702, 1910.
2) E. Bose, diese Zeitschr. **12**, 60, 1911.

tend; denn der Bosesche Befund stellt doch eben die Existenz einer physikalischen Unstetigkeit fest. Eine solche Deutung ist indessen von Bose nicht geliefert worden.

Dagegen hat dieser Forscher unternommen[1]), die von ihm befürwortete Vorstellung durch neue, angemessen erfundene Beobachtungen einer möglichst direkten Prüfung zu unterwerfen. Wie S. 83 bemerkt, ergaben die Untersuchungen über innere Reibung nach der Ausflußmethode das überraschende Resultat, daß für die trübe Phase die Ausflußzeiten meist, und zwar beträchtlich, kleiner sind, als für die klare. Dies würde kinematisch dahin zu deuten sein, daß die mittleren freien Weglängen in den Schwärmen kleiner sind, als in einem Bereich vollkommener Unordnung, und wird verständlich, wenn man das S. 81 erwähnte Resultat der Beobachtung heranzieht, nach dem die Moleküle einer in einem Kapillarrohr strömenden Flüssigkeit sich der Rohrachse merklich parallel zu richten scheinen.

Nun ist bekannt, daß bei wachsendem Druck der normale Strömungszustand innerhalb eines Rohres schließlich labil wird und dann einem ungeordneten, turbulenten Zustand Platz macht. Wenn es also gelänge, die Turbulenz so zu steigern, daß die Ungeordnetheit sich auf Bereiche von der Größe der Schwärme erstreckte, so sollte man nach Bose erwarten, daß dann die innere Reibung in der trüben Phase der in der klaren angenähert werden könne. Versuche, die Bose in der angegebenen Richtung mit Anisaldazin angestellt hat, haben nun in der Tat eine Steigerung der Ausflußzeiten für die trübe Phase relativ zu denen für die klare Phase ergeben, so daß der quasiunstetige Sprung beim Klärungspunkt geringer wurde. Dies Experiment ist unzweifelhaft sehr bemerkenswert, wenn es auch befremden möchte, daß bei der geringen Größe der Schwärme direkt unterhalb des Klärungspunktes die Turbulenz eine so viel größere Wirkung auf die Zerstörung der Schwärme üben sollte, als die Wärmebewegung zu tun vermag, der die Schwärme, wie die dort bestehende Trübung zeigt, zu widerstehen vermögen.

11. Wirkung eines Magnetfeldes auf eine anisotrope Flüssigkeit.

Die S. 79 erwähnte Beobachtung Lehmanns, daß suspendierte Tropfen einer anisotropen Flüssigkeit sich in einem Magnetfeld mit der ausgezeichneten Achse den Kraftlinien parallel stellen, legte die Vermutung nahe, daß Analoges auch für die homogenen Elemente der trüben Schmelzen, d. h. also für die Boseschen Schwärme gelten möchte. In diesem Falle müßte die Trübung bei Einwirkung eines Magnetfeldes geringer werden, ev. verschwinden.

1) E. Bose, diese Zeitschr. **10**, 32, 1909.

Die ersten Beobachtungen hierüber sind von Bose[1]) angestellt worden. Sie ergaben bei Anisaldazin und einigen anderen Substanzen für Beobachtung parallel zu den Kraftlinien einen außerordentlich starken Effekt. Schichten von 0,5 bis 4 mm Dicke wurden schon bei Einwirkung eines Feldes von 600 Gauß nach einiger Zeit, bei einem solchen von 1000 Gauß fast augenblicklich klar. Diese Kräfte genügten also zu merklich vollständiger Paralleldrehung aller Schwärme oder Elemente.

Entsinnt man sich der außerordentlich geringen drehenden Wirkungen, die die stärksten Felder sonst auf die Moleküle von normalen Flüssigkeiten ausüben, und die sich in der magnetischen Doppelbrechung[2]) geltend machen, so mag der enorme Effekt bei den anisotropen Flüssigkeiten zunächst befremden. Indessen liegen in beiden Fällen doch wesentlich verschiedene Verhältnisse vor. Bei den normalen Flüssigkeiten steht jedes Molekül unter der vollen, die Ordnung fortwährend wieder zerstörenden Wirkung der Wärmebewegung in seiner Umgebung; bei den anisotropen üben die Moleküle desselben Elementes oder Schwarmes um so geringere störende Wirkungen aufeinander aus, je inniger sie miteinander verknüpft sind; ein Widerstand erwächst (abgesehen von der größeren Trägheit) im wesentlichen nur von der Wechselwirkung mit den Molekülen der angrenzenden Elemente. Selbstverständlich sprechen aber diese Beobachtungen nicht gegen die „Kristallvorstellung“, sondern eher für dieselbe, da nach ihr die inneren Widerstände eines Elementes bei der Parallelrichtung wohl noch kleiner sind, als nach der Schwarmhypothese.

Sehr überraschend erscheint ferner, daß Bose bei Beobachtungen normal zu den Kraftlinien auch für viel stärkere Felder keine merkliche klärende Wirkung auffinden konnte. v. Wartenberg[3]), der die Boseschen Versuche mit konvergentem Licht wiederholte und dabei in longitudinaler Richtung die charakteristischen Interferenzringe einachsiger Kristalle beobachtete, nahm, als er die Substanz in einem Röhrchen der Wirkung des Magnetfeldes aussetzte, in transversaler Richtung gleichfalls keine Abnahme, sondern vielmehr eine Zunahme der Trübung

1) E. Bose, diese Zeitschr. **12**, 60, 1911.
2) A. Cotton und N. Mousson, zuerst C. R. **145**, 229, 870, 1907; daran schließend viele andere Abhandlungen. Theorie von Langevin, Le Radium, **9**, 249, 1910.
3) H. v. Wartenberg, diese Zeitschr. **12**, 837, 1911.

wahr. Diese Wahrnehmung ist von Mauguin bei seinen ausführlichen Beobachtungen nicht bestätigt worden; v. Wartenberg[1]) führt sie nachträglich auf eine Fehlerquelle (mangelnde Reinigung des Röhrchens) zurück, deren Wirksamkeit aber doch zweifelhaft erscheint.

Mauguin[2]) benutzte zunächst Schichten von *p*-Azoxyanisol von 1—2 mm Dicke, in denen also die orientierende Wirkung der begrenzenden Glasplatten nur oberflächlich zur Geltung kam. Bei Anwendung eines Feldes von 2500 Gauß normal zur Schicht erhielt er die Resultate seiner Vorgänger; ein gleiches Feld parallel zur Schicht lieferte die normale Doppelbrechung einer parallel zur optischen Achse orientierten Kristallplatte, im konvergenten Licht also die bekannten Hyperbeln. Sodann ließ Mauguin das parallele Feld auf eine Schicht von so geringer Dicke wirken, daß innerhalb derselben anfänglich eine vollständige Orientierung normal zur Begrenzung stattgefunden hatte. Hier stellte sich durch das Feld eine Neigung der Molekülachsen ein, deren Größe mit dem Felde zunahm, so daß die Schicht einer Kristallplatte mit wechselnder Orientierung gegen die optische Achse äquivalent war. Übrigens ließ sich dabei auch durch ein Feld von 7000 Gauß keine vollständige Orientierung parallel zur Schicht bewirken.

Vieth[3]) hat gefunden, daß die orientierenden Wirkungen des Magnetfeldes sich auch während des Entstehens der anisotrop-flüssigen Phase geltend machen und zu einer Vergrößerung der homogenen Elemente oder Schwärme führen.

Es bedarf kaum des erneuten Hinweises, daß die in diesem Abschnitt beschriebenen Beobachtungen über innere Reibung und über magnetische Orientierung mit der (eigentlichen) Emulsionshypothese in vollem Widerspruch stehen, während sie zwischen der Kristall- und der Schwarmhypothese keine Entscheidung treffen.

12. Messung von elektrischen Leitfähigkeiten.

Hatten die im Vorstehenden beschriebenen Beobachtungen Mauguins zum ersten Male die Untersuchung der physikalischen Eigenschaften von homogenen Schichten eröffnet, deren Molekülachsen gegen die Begrenzungen geneigt sind, so waren doch wesentlich neue Resultate dabei nicht gewonnen worden. Dagegen haben neueste Untersuchungen Svedbergs[1]) bedeutungsvolle Fortschritte in dieser Richtung erzielt. Das Mittel der Ausrichtung der Individuen einer trüben Schmelze bzw. einer *a*-Phase kann, wie oben erörtert, dazu dienen, größere Bereiche der Substanz einem regelmäßigen Kristall mehr oder weniger gleichwertig zu machen; hierdurch war denn die Möglichkeit gegeben, Beobachtungsmethoden über manche vektorielle physikalische Eigenschaften, die früher nur auf feste Kristalle angewendet waren, für flüssige zu verwerten.

Svedberg hat die elektrischen Leitfähigkeiten von sehr verdünnten Lösungen verschiedener Elektrolyte (Chlorwasserstoff, *α*-Dinitronaphtolkalzium, später auch Pikrinsäure, Trinitroresorzin, Oxynaphtholsäure) in *p*-Azoxyanisol und -phenetol, sowie in Anisaldazin gemessen; die bez. reinen Substanzen besaßen zu große Widerstände, um genauen Messungen zugänglich zu sein. Es ist klar, daß durch die Einführung dieser Beimengungen das Problem an Einfachheit und damit an Kraft der Aufklärung über die Natur der „flüssigen Kristalle" verliert; immerhin verdienen die Untersuchungen ein großes Interesse, da sie bisher die einzigen von nicht-optischem Charakter sind, die eine physikalische Eigenschaft eines flüssigen Kristalles in ihrer Abhängigkeit von der Richtung klargestellt haben. Die Resultate geben wiederum einen Beitrag zur Widerlegung der Emulsionshypothese; sie sind dagegen ebenso vereinbar mit der Schwarmhypothese (zu der Svedberg sich bekennt), wie mit der älteren (Lehmannschen) Vorstellung.

Der Grundgedanke der Svedbergschen experimentellen Anordnung (von deren ausführlicher Beschreibung hier natürlich abgesehen werden muß) ist der folgende. Ein zylindrisches Gefäß mit der Schmelze, die durch einen Thermostaten auf beliebiger konstanter Temperatur erhalten wird, befindet sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, derart, daß die magnetischen Kraftlinien, horizontal und untereinander merklich parallel, das Gefäß senkrecht zu seiner Achse durchsetzen. Bei Erregung des Magneten findet (je nach der Feldstärke) eine mehr oder weniger vollständige Parallelrichtung der Individuen der Schmelze statt. Bei den großen Dimensionen des Gefäßes bedurfte es eines Feldes H von über 5000 Gauß, um eine merklich vollkommene Ausrichtung zu bewirken; doch war schon bei 2000 Gauß die Wirkung einer Steigerung des Feldes gering. In die Schmelze war ein Paar paralleler Elektroden aus Platin vertikal eingetaucht, zwischen

1) H. v. Wartenberg, l. c. 1230.
2) Ch. Mauguin, C. R. **152**, 1680, 1911; diese Zeitschr. **12**, 1011, 1911.
3) G. Vieth, diese Zeitschr. **12**, 546, 1911.

1) Th. Svedberg, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik **9**, No. 9, 1913; Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **12**, 139, 1915; Ann. d. Phys. **44**, 1121, 1914; **49**, 437, 1916.

denen der elektrische Strom — zur Vermeidung der Polarisationserscheinungen Wechselstrom — verlief. Dies Elektrodenpaar war um eine vertikale Achse drehbar, derart, daß die magnetischen Kraftlinien in allen möglichen Neigungen durch die Schicht zwischen den Elektroden hindurchgeleitet werden konnten. In hinreichend starken Feldern, wo die Ausrichtung innerhalb der Schmelze merklich vollständig war, wurde auf diese Weise eine Platte aus einem homogenen flüssigen Kristall, von konstanter Dicke und meßbar veränderlicher Orientierung der Beobachtung zugänglich gemacht.

Bei einer solchen Anordnung gibt die Messung die Leitfähigkeitskonstante in der Richtung normal zu den Elektroden (nicht die Widerstandskonstante, die bei einem Kristall keineswegs etwa das Reziproke der ersteren ist). Bezeichnet α den Winkel dieser Richtung gegen die magnetischen Kraftlinien, und damit gegen die Hauptachse des (einachsigen) flüssigen Kristalles, und sind l, l_0, l_1 die Leitfähigkeitskonstanten für die Richtungen α, o und $\frac{1}{2}\pi$, dann gilt, wenn es sich um einen normalen, dem Ohmschen Gesetz folgenden Leitungsvorgang handelt, die Beziehung

$$l = l_0 \cos^2 \alpha + l_1 \sin^2 \alpha.$$

Svedberg hat eine Beobachtungsreihe über das Verhalten einer Lösung von Chlorwasserstoff in p-Azoxyphenetol mitgeteilt, welche die Vergleichung mit dieser Formel gestattet. Es ist von prinzipiellem Interesse, daß die gemessenen Zahlen sich dem theoretischen Gesetz vollständig fügen[1]). Hierdurch ist bewiesen, daß die durch das Magnetfeld homogenisierte Substanz bezüglich der (elektrolytischen) Leitfähigkeit einem homogenen einachsigen Kristall durchaus äquivalent ist.

Gleichfalls interessant, wenn auch wohl nicht von ähnlicher prinzipieller Bedeutung, sind die Resultate Svedbergs über die Abhängigkeit der Quotienten

$$l_0/\bar{l}, \quad l_1/\bar{l}, \quad l_0/l_1$$

(unter $\bar{l}$ die Leitfähigkeit im ungeordneten Zustande verstanden) von der magnetischen Feldstärke. Der Verlauf dieser Funktionen, welche nach der Beobachtung sich sämtlich größer als Eins finden[2]), ist dem des Momentes bei ferromagnetischen Metallen ähnlich; erst ein schwaches, dann ein stärkeres Ansteigen, schließlich die asymptotische Annäherung an einen Grenzwert.

Bei schwachen Feldern nimmt die Leitfähigkeit nicht sofort den definitiven Wert an, sondern u. U. nur sehr allmählich. Bei einer der oben genannten Lösungen wurde für $H = 340$ der Endzustand erst nach einer Minute merklich vollständig erreicht.

Was die Abhängigkeit der Quotienten

$$l_0/\bar{l}, \quad \bar{l}/l_1, \quad l_0/l_1,$$

von der Temperatur unterhalb des Klärungspunktes angeht, so ließ dieselbe sich durch Kurven darstellen, die mit dem Wert Eins und mit unendlichen Differentialquotienten im Klärungspunkte beginnen, bei abnehmenden Temperaturen langsamer ansteigen; doch gestättet die Beobachtung natürlich keinen eindeutigen Schluß auf das Verhalten am Klärungspunkte selbst. Die Kurven könnten auch bei einer anderen Ordinate als Eins und mit anderen Steigungen beginnen.

Verschiedene Elektrolyten in verschiedenen Lösungsmitteln ergaben auffallend parallelen Verlauf der Leitfähigkeit ihrer Lösungen; es kann aber auf diesen für unsere Zwecke sekundären Punkt hier nicht eingegangen werden. Dagegen mag, als wesentlicher, die Beobachtung erwähnt werden, daß ein elektrisches Feld analog wie ein magnetisches auf die Individuen einer trüben Schmelze orientierend einwirkt. Dies signalisierte sich bei den ersten Beobachtungen dadurch, daß bei (stark) wachsendem Potentialfall die Stromstärke etwas schneller zunahm, als dem Ohmschen Gesetz entsprach. Messungen der hierbei eintretenden Veränderungen der Leitfähigkeit sind natürlich nur in der Richtung parallel dem Feld möglich, da das Feld nur durch Anlegung von Spannung an die Elektroden hervorgerufen werden kann; sie bieten auch wegen gewisser Fehlerquellen beträchtliche Schwierigkeiten. Svedberg schließt aus seinen Beobachtungen auf eine ähnliche Abhängigkeit der Wirkungen von der elektrischen Feldstärke, wie sie oben bezüglich der magnetischen geschildert ist.

Wie S. 81 berichtet, orientieren sich zwischen sehr nahen Platten die Moleküle von p-Azoxyphenetol und -anisol spontan mehr oder wenig vollständig normal zu den Platten. Svedberg hat konstatiert, daß diese Orientierung sich auch durch eine Veränderung der Leitfähigkeit (im Sinne von $\bar{l}$ nach l_0 hin) wirksam erweist. Ferner hat er über die Einwirkung eines Magnetfeldes auf eine elektrisch oder mechanisch teilweise ausgerichtete Schicht Beobachtungen ausgeführt. Es kann hierauf aber ebensowenig eingegangen werden, wie auf die von

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. **50**, 1916 (im Druck); die theoretische Verwertung, die Svedberg selbst von seinen Beobachtungen macht, ist nicht richtig.

2) Auffallenderweise liegt $\bar{l}$ nicht, wie man erwarten möchte, in der Nähe von $(l_0 + 2l_1)/3$, sondern ist beträchtlich kleiner.

Svedberg angestellten Überlegungen zur kinetischen Theorie der elektrolytischen Leitung in flüssigen Kristallen. Es mag nur bemerkt werden, daß, wenn man die Moleküle der letzteren Substanzen mit Vorländer als langgestreckt, und mit Bose unter dem Bilde von Rotationsellipsoiden betrachtet, dann das Auftreten einer größeren elektrolytischen Leitfähigkeit l_0 parallel den Hauptachsen, verglichen mit der dazu normalen l_1, unmittelbar einleuchtet. —

In der letzten S. 131 zitierten Arbeit untersucht Svedberg speziell die Änderung der Leitfähigkeiten für reines p-Azoxyanisol und -phenetol und für daraus gebildete Lösungen beim Überschreiten des Klärungspunktes, ohne Einwirkung eines richtenden Magnetfeldes. Die gewonnenen Resultate haben eine beträchtliche Unsicherheit infolge des Umstandes, daß die Beobachtungen bei steigender und bei fallender Temperatur meist auf etwas, in einzelnen Fällen der i-Phase sogar auf sehr stark verschiedene Zahlen führten. Es mag dies damit zusammenhängen, daß Körper mit sehr geringen Leitfähigkeiten in ihrem Verhalten durch minimale Beimengungen, etwa auf Zersetzung beruhend, beträchtlich beeinflußt werden.

Für die reinen Flüssigkeiten ergaben sich die Leitfähigkeiten innerhalb der a- und der i-Phase nur wenig mit der Temperatur variierend; im Klärungspunkt zeigte sich beim Übergang in der Richtung $i \rightarrow a$ ein deutlicher Sprung im Sinne einer Abnahme der Leitfähigkeit um 20—30 Proz. Dies ist besonders deshalb bemerkenswert, weil nach S. 83 auch die innere Reibung einen Sprung in diesem Sinne aufweist; wenn die elektrolytische Leitfähigkeit mit der Beweglichkeit der Substanz wüchse, hätte sich das entgegengesetzte Verhalten darbieten müssen.

Bei den Lösungen fanden sich viel stärkere Temperaturabhängigkeiten und damit im Zusammenhang stärkere Sprünge im Klärungspunkte. Ob diese Sprünge reell sind, oder ob nur ein Sehrgroß- bzw. Unendlichwerden des Differentialquotienten vorliegt, entscheiden natürlich die Beobachtungen hier ebensowenig, wie in früheren Fällen; doch versteht sich besonders bei den reinen Flüssigkeiten der beobachtete Verlauf am ungezwungensten im Sinne einer wirklichen Unstetigkeit.

13. Theoretische Verwertung der Schwarmhypothese.

Die Vereinbarkeit der Schwarmhypothese mit einer Reihe von Erscheinungen, die auch im Vorstehenden Ausdruck gefunden hat, veranlaßte Bose[1]) zu dem Versuche einer weiteren theoretischen Verfolgung der bez. Vorstellungen.

In erster Linie sucht er sich ein Urteil über die etwaige Größenordnung des Sprunges der inneren Reibung zu bilden, die aus der Schwarmhypothese für den Übergang aus der a- in die i-Phase folgen würde.

Als Ausgangspunkt dient ihm dabei die aus der kinetischen Theorie der Gase bei Annahme kugelförmiger Moleküle gewonnene Beziehung, wonach der Reibungskoeffizient der Geschwindigkeit der Moleküle direkt, ihrem Querschnitt q aber indirekt proportional ist. Diese Beziehung wird auf eine normale Flüssigkeit mit ellipsoidischen Molekülen in dem Sinne angewandt, daß als Querschnitt das Mittel aus den drei Hauptschnitten des Ellipsoides eingesetzt wird. Dies erscheint als eine wohl zulässige Übertragung. Bei der Strömung der anisotropen Flüssigkeit denkt Bose (in Übereinstimmung mit der S. 81 erwähnten Erfahrungstatsache) alle Moleküle parallel der Stromrichtung orientiert und die Energieübertragung nur in der Richtung normal zur Strömung stattfindend, derart, daß hier, im Falle die Moleküle als Rotationsellipsoide gelten dürfen, für den Querschnitt q einfach die Größe des Meridianschnittes eingesetzt werden darf. Bezeichnet man mit A die große, in die Stromrichtung fallende, mit a die kleine, dazu normale Halbachse, so würde hieraus sich für das Verhältnis der Reibungskoeffizienten beiderseits des Klärungspunktes ergeben

$$\frac{R_a}{R_i} = \frac{2Aa\pi + a^2\pi}{3Aa\pi} = \frac{2A + a}{3A}.$$

Bei Molekülen, die sich als Rotationsellipsoide behandeln lassen, würde hiernach wegen $A > a$ die Ungleichung folgen

$$1 > \frac{R_a}{R_i} > \frac{2}{3}.$$

Diese Beziehung wird von der Beobachtung zwar in relativ vielen Fällen bestätigt, aber doch nicht allgemein; Bose findet sich daher gedrängt, die Möglichkeit von Molekülen des Typs dreiachsiger Ellipsoide in Betracht zu ziehen. Solchen Molekülen muß dann bei den Reibungsversuchen nach der Strömungsmethode die ganz spezielle Orientierung mit der größten Achse in der Richtung der Strömung, mit der kleinsten Achse in der Richtung des Radius des Kapillarrohres beigelegt werden, und das scheint eine nicht unbeträchtliche Belastung der Betrachtung mit Hypothesen. In der Tat, wenn direkt über dem Klärungspunkt die Ausströmung die Moleküle völlig ungeordnet läßt, so ist einigermaßen

1) E. Bose, diese Zeitschr. **10**, 230, 1909.



schwer zu verstehen, wie sie direkt unterhalb des Klärungspunktes zu einer so äußerst speziellen Orientierung führen soll, um so schwerer, je mehr man orientierende Kräfte zwischen den Molekülen (im Sinne der Kristallhypothese) ausschließt.

Man wird diesem Versuch einer kinetischen Deutung des Verhältnisses der inneren Reibung für die *i*- und die *a*-Phase nach Geschmack größeres oder geringeres Interesse beilegen; er ist als bisher einziger immerhin bemerkenswert, und irgend etwas Ähnliches wird gewiß in Wahrheit die Ursache der Erscheinungen sein. Jedenfalls aber ist die Heranziehung der Beobachtung Vorländers über die Möglichkeit zweier *a*-Phasen zur Stütze der Hypothese der dreiachsigen Ellipsoide nicht zulässig. Bose denkt sich, wie gesagt, in der $a_{/}$-Phase die Moleküle eines Schwarmes nur mit der größten, in der $a_{//}$-Phase mit allen drei Achsen parallel orientiert. Aber dieser Betrachtungsweise hat die spätere Entdeckung von Körpern mit drei und vier *a*-Phasen jede Grundlage entzogen. —

Weiter stellt Bose eine Überlegung an, welche das S. 80 beschriebene Orientieren der Moleküle einer zwischen zwei Glasplatten befindlichen Schmelze nach der Richtung der Normalen verständlich machen soll. Er ersetzt hierzu jedes Molekül durch zwei gleiche auf einer Achse liegende Attraktionszentren und berechnet die Arbeit, die nötig ist, um ein mit vier solchen Molekülen gefülltes und an einer Glasplatte liegendes Quadrat aus der Position, wo die Moleküle übereinander parallel zur Platte liegen, in die dazu normale Lage zu drehen. Wie von vornherein zu erwarten, ergibt sich, daß je nach dem Gesetz der von der Platte ausgehenden Kraft sowohl die eine, als die andere Orientierung die stabile sein kann.

14. Annäherung der Schwarm- an die Kristallhypothese.

Von prinzipieller Bedeutung ist, daß Bose[1]) sich durch die eingeführte Annahme der Äquivalenz der Moleküle mit zwei auf ihrer Achse liegenden Attraktionszentren gedrängt fühlt, für die in seiner Hypothese vorausgesetzten Schwärme schließlich eine Art einfacher Gitterstruktur zuzulassen. Die Moleküle sollen innerhalb eines Schwarmes nämlich nicht nur parallel orientiert sein, sondern auch mit ihren Attraktionszentren gewisse gesetzmäßige Lagen gegen die umgebenden einnehmen. Ja, es erscheint Bose nach seinen Überlegungen „zweifellos, daß die anisotropen Flüssigkeiten Fälle darstellen, in denen die Natur den komplexen Prozeß des direkten Auftretens fester Kristalle aus der Schmelze heraus gewissermaßen in einzelne Etappen zerlegt vorführt, so daß die Einzelheiten, auf die es bei der Bildung fester Kristalle ankommt, gewissermaßen gesondert studiert werden können". „Der Grund, weshalb im allgemeinen der komplexe Vorgang sich in seinen Teilen gleichzeitig abspielt, dürfte", wie Bose ausführt, „in dem geringen Formfaktor der Moleküle liegen, der zur Folge hat, daß richtungsgeordnete Schwärme . . . erst stabilisiert werden können, wenn die Annäherung der Moleküle soweit fortgeschritten ist, daß zugleich ein Einschnappen in ein ziemlich starres Raumgitter stattfindet".

Es ist klar, daß mit dieser Entwicklung die Schwarmhypothese in eine Form gelangt ist, wo sie sich von den ersten Lehmannschen Vorstellungen kaum mehr merklich unterscheidet. Denn auch Lehmann behauptet nicht das Vorhandensein derselben Gattungen von Raumgittern in der flüssigen und der festen Phase und legt das Hauptgewicht auf die ungestörte physikalische Wirkung der Eigenschaften der Moleküle, die durch deren Parallelorientierung ermöglicht wird.

Natürlich ist mit dieser Annäherung der beiderseitigen Hypothesen die fundamentale Schwierigkeit noch nicht gelöst, auf die wiederholt hingewiesen worden ist. Die Begleiterscheinungen der Verwandlung der isotrop- in die anisotropflüssige Phase und umgekehrt scheinen bestimmt auf einen unstetigen Vorgang im Innern der Substanz hinzudeuten. Die Schwarmhypothese, auch in ihrer letzten Ausbildung, stellt einen solchen bestimmt nicht dar, — sie bedarf also noch irgendeiner Ergänzung durch die Annahme des Eintritts einer an eine bestimmte Temperatur geknüpften Unstetigkeit. Da nun nach den S. 86 erörterten Beobachtungen das Molekulargewicht bei den genannten Übergängen erhalten zu bleiben scheint, so liegt wohl die Vorstellung eines innermolekularen Vorganges am nächsten. Man könnte sich bei Substanzen mit nur einer *a*-Phase etwa einfachst denken, daß infolge der innern thermischen Bewegungen die Moleküle der betreffenden Substanzen erst von einer gewissen Temperatur abwärts jene gestreckte Struktur mit einer hinreichenden Steifigkeit verbinden, so daß erstere sich nun konstitutionell in der Bildung von Schwärmen oder Individuen geltend macht. Bei Substanzen mit mehreren *a*-Phasen müßte man dann — falls dieselbe Molekulargröße für alle nachgewiesen wäre — soviel Konstitutionsänderungen zulassen, als ihren Umwandlungen entsprechen. Mit dem Verschwinden irgendwelcher Freiheitsgrade der Moleküle würde eine geringe Änderung der spezifischen

1) E. Bose, l. c.

Wärme infolge der Umwandlung wohl vereinbar sein.

Gibt man hiermit das Vorhandensein einer Art von Raumgitterstruktur in den „flüssigen" Kristallen zu, so trennt dieselben (im direkten Widerspruch mit dem obigen Zitat von Bose) trotzdem noch ein weiter Abstand von den „festen" Kristallen. Die durch v. Laue angeregten Beobachtungen haben gelehrt, daß die Bausteine der festen Kristalle nicht die Moleküle, sondern die Atome sind. Daß in den anisotropen Flüssigkeiten aber die Moleküle die Bausteine darstellen, darf nach den S. 86 erörterten Beobachtungen wohl als festgestellt gelten. Ferner haben die Untersuchungen, die van der Lingen[1]) nach der Laueschen Methode an magnetisch ausgerichteten Schichten von *p*-Azoxyanisol durchgeführt hat, keine Andeutung von Interferenzen gegeben. Diese anisotrope Flüssigkeit besitzt also entweder überhaupt kein durch Röntgenstrahlen abbildbares Raumgitter der Moleküle, oder dasselbe ist derart in steter Umordnung begriffen, daß das bez. Interferenzbild völlig diffus wird. Damit ist ein prinzipieller Gegensatz zwischen anisotropen Flüssigkeiten und Kristallen bezeichnet, der vielleicht geeignet ist, den alten Widerstand gegen die Vorstellung der „flüssigen Kristalle" zu versöhnen. Denn ein geordnetes Aggregat von Molekülen kann neben ähnlichen sehr wohl auch wesentlich andere physikalische Eigenschaften haben, als ein solches von Atomen. Zwischen den letzteren wirken die „chemischen" Kräfte, denen wir ganz andere Gesetzmäßigkeiten und in molekularen Entfernungen viel größere Stärke beizulegen Ursache haben, als den zwischen den Molekülen wirksamen „physikalischen". So ist es begreiflich, daß die Atomaggregate eminent formbildend sind, die Molekülaggregate in viel geringerem Maße.

1) J. St. van der Lingen, Ber. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 913, 1913.

Hiermit scheint ein prinzipieller Unterschied zwischen den festen Kristallen und den anisotropen Flüssigkeiten festgestellt, der für die Auffassung von großer Wichtigkeit ist, und dessen Betonung vielleicht zur Klärung der ganzen Frage beizutragen vermag.

Verlangen wir von einem Kristall ganz allgemein, daß seine Bausteine die chemischen Atome sind, und daß diese sich in ein regelmäßiges Raumgitter ordnen, so sind die hier behandelten Körper keine Kristalle und verdienen besser den Namen anisotroper Flüssigkeiten. Damit ist wohl vereinbar, daß sie sich in vieler Hinsicht physikalisch wie Kristalle verhalten. Aber es bleibt in jedem Falle der fundamentale Gegensatz bestehen, daß zwischen ihren Bausteinen „physikalische", zwischen denen der eigentlichen Kristalle „chemische" Kräfte wirken, deren Gesetzmäßigkeiten und Stärkeverhältnisse allem Anschein nach vollkommen verschieden sind. Auf der geringen Polarität und der gesamten Schwäche der physikalischen Kräfte beruht offenbar außer der geringen Tendenz zur Formbildung auch die leichte Verschiebbarkeit der einen, aus dem ausgeprägt polaren Charakter und der größeren Stärke der chemischen Kräfte folgt neben der energischen Formbildung die relative Starrheit der anderen Körperart.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

W. Fahrion, Neuere Gerbemethoden und Gerbetheorien. IV u. 145 Seiten. Sammlung Vieweg, Heft 28. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1915. M. 3.20

Man beobachtet häufig, daß diejenigen technischen Verfahren, die schon seit altersher von den Menschen ausgeübt worden sind, am wenigsten und am langsamsten wissenschaftlich angegriffen und durchdrungen werden. So ist z. B. von allen optischen Instrumenten, welche der Mensch nötig hat, die Brille erst in allerneuester Zeit der wissenschaftlichen Durcharbeitung unterzogen worden.

Ähnlich steht es auf dem Gebiete der angewandten physikalischen Chemie mit dem Prozeß der Ledergerbung. Bis vor nicht langer Zeit hat man sie handwerksmäßig nach den bis in vorgeschichtliche Zeiten zurückgehenden primitiven Vorschriften ausgeübt. Aber seit einigen Jahrzehnten ist es auch hier anders geworden. Man hat angefangen die Gerbeprozesse als chemische und physikalische Vorgänge zu studieren und ist dementsprechend denn auch bald zu neuen und schon heute sehr wichtigen Gerbeverfahren gekommen; ja es scheint, als ob diese Entwicklung in der neueren Zeit ein beschleunigtes Tempo annehmen wollte. Das Gebiet interessiert in gleicher Weise die Physiker und die Chemiker, wenn auch manche es für den neuen Wissenschaftskomplex der Kolloidchemie in Anspruch nehmen wollen. Das vorliegende Buch stellt in übersichtlicher und wertvoller Weise alles zusammen, was bisher an wissenschaftlichen Erfahrungen über die verschiedenen Gerbeprozesse bekannt geworden ist. Der Verfasser steht seiner Entwicklung nach der chemischen Seite des Problems näher, hat aber auch seiner physikalischen Seite nach Möglichkeit Rechnung getragen.

Der Krieg hat uns die ungeheuere Bedeutung zum Bewußtsein gebracht, die gerade der Lederherstellung im Wirtschaftsleben zukommt. So kommt das Buch gewiß gerade zur rechten Zeit, um auch das wissen-

schaftliche Interesse an dem bisher ein wenig vernachlässigten Gebiete zu beleben. H. Th. Simon.

F. Poske, Didaktik des physikalischen Unterrichts. gr. 8. X u. 428 Seiten mit 33 Figuren. Leipzig, B. G. Teubner. 1915. Geb. M. 12.—.

Das zur Reihe der „Didaktischen Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen" gehörende, ausgezeichnete Werk zeigt, daß es der Feder eines Mannes entsprungen ist, der im Besitze der reichsten und reifsten Erfahrung den Vorzug hatte, mehr als ein Vierteljahrhundert hindurch die Fäden des gesamten physikalischen Unterrichts an höheren Schulen in seiner Hand zusammenlaufen zu sehen. — Wem es darauf ankommt, seinen Unterricht wirklich zu vertiefen, ihn gedankenreich und inhaltsvoll zu gestalten, der wird in Poskes Meisterwerk überall Anregung finden. Weit davon entfernt, bloße Rezepte für eine geschickte Ausgestaltung des Unterrichts zu geben, weiß der Verfasser die inneren Kernpunkte, das wirklich geistig Wertvolle, für die Entwicklung des Schülers Entscheidende hervorzuheben und in den Vordergrund seiner Darstellung zu bringen. Dazu befähigt ihn vor allem seine durch eingehende philosophische Studien gewonnene Meisterschaft in der Behandlung didaktischer Probleme auf erkenntnistheoretischer Grundlage. Das zeigt sich namentlich in dem allgemeinen Teile, in welchem zunächst die Ziele und Aufgaben des physikalischen Unterrichts einer sorgfältigen Untersuchung unterzogen und die Methoden der Physik, Wert des Experiments, Beobachtungsvermögen, Problembildung, Wert der Hypothese und ähnliches besprochen werden. Es berührt sehr wohltuend, jeden Schematismus hierbei überwunden zu sehen, und nicht minder ist die Meinung des Verfassers zu begrüßen, daß es keine universelle, für alle Zweige der Physik gültige Methode geben kann, sondern daß diese sich dem jeweiligen Stoffgebiete anzupassen habe. — Auf eine kurze Besprechung der Gliederung des Unterrichts folgt dann eine Untersuchung über den Wert der Schülerübungen, wobei der Verfasser sich erfreulicherweise gegen den einseitig praktischen, amerikanischen Standpunkt in der Wahl der Aufgaben ausspricht. Nachdem die Beziehungen zwischen mathematischer und experimenteller Behandlung des Unterrichts in vortrefflicher Weise dargelegt worden sind, gelegentlich welcher der Verfasser der modernen mathematischen Reformen zur Hebung des Funktionsbegriffes freundlich gedenkt, geht er dann zur speziellen Ausgestaltung des Lehrstoffes auf der Unter- und Oberstufe über. Der Gegensatz in der Behandlung beider Stufen wird trefflich gezeichnet, der reiche Stoff selbst in der ausgiebigsten Weise durchgesprochen. Es kann nicht Aufgabe dieses kurzen Hinweises sein, dem Verfasser in seinen lichtvollen Darlegungen im einzelnen zu folgen. Wir wünschen dem ausgezeichneten Werke, das berufen scheint, auf das segensreichste zu wirken, den vollen Erfolg. Behrendsen.

C. Doelter, Die Farben der Mineralien, insbesondere der Edelsteine. gr. 8. IV u. 96 Seiten mit 2 Abbildungen. (Sammlung: „Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik", Heft 27). Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1915. M. 3.—.

Das Buch berührt sich mit demjenigen des Verf. über „Das Radium und die Farben" (vgl. d. Referat in dieser Zeitschr. **12**, 78, 1911), doch legt es mehr Gewicht auf die natürlichen Farben der Mineralien gegenüber den künstlich hervorgebrachten und berücksichtigt naturgemäß auch die Literatur seit 1910.

Doelter hält die Mineralpigmente für chemische Elemente und für anorganische Verbindungen, und zwar für solche, die mit dem gefärbten Minerale mindestens ein chemisches Element gemeinsam haben. Die ionisierende Wirkung von außen kommender β- oder γ-Strahlen soll in der Natur ein farbiges Ion von der Mineralverbindung abspalten, welches das Pigment darstellt; letzteres wird andererseits für kolloidal erklärt derart, daß es je nach seinem Verteilungsgrad verschieden gefärbte Varietäten einer Mineralart bewirkt. Es ist schwer verständlich, wie sich gleichgeladene Ionen zu kolloidalen Teilchen zusammenballen sollen. Läßt man aber statt des Verteilungsgrades die Ionenkonzentration variieren, so wird man hiermit wiederum zwar verschiedene Farbenintensität, aber kaum die so verschiedene Färbung der roten, gelben, grünen und violetten Flußspate erklären können.

Das Pigment solcher Flußspate ist nach Doelter wahrscheinlich Ca.

Die Farben der grünen und blauen Ultramarine führt Verf. auf kolloiden Schwefel zurück, der in verschiedener Dispersität der Verbindung $(NaAlSiO_4)_6 \cdot Na_2S$ bzw. einer etwas kieselsäurereicheren Substanz beigemischt sein soll. Auch in den blauen Schwerspaten und Coelestinen vermutet Doelter kolloiden Schwefel. Die durch Erhitzen erzielten Farbenänderungen sind zuweilen vom Außenmedium abhängig; so wird gelber brasilianischer Topas, in Stickstoff erhitzt, lila, in Schwefeldampf erhitzt, grün.

Überraschend ist es, wenn Rosenquarz durch Röntgenstrahlen gebräunt, durch „ultraviolette" Strahlen aber entfärbt wird, da auch Röntgenstrahlen ultraviolett sind. Die braune Farbe des Rauchquarzes betrachtet Doelter als „Sättigungsfarbe" im Gegensatz zu der Tönung des ungesättigten Rosenquarzes, dessen Pigment das gleiche wie dasjenige des Rauchquarzes sei; die Sättigungsfarbe kann durch Bestrahlung nicht satter, d. h. nicht homogener gemacht werden. Für jede Pigmentart ist also eine ihr eigentümliche Sättigungsfarbe anzunehmen.

Die von Doelter mittels Kathodenstrahlen hervorgerufene Blaufärbung von Steinsalz soll mit der Farbe des natürlichen blauen Steinsalzes identisch sein, während die von Siedentopf durch Glühen in Na-Dampf bewirkte Blautönung für andersartig erklärt wird; trotzdem vermutet Doelter Na als Pigment des blauen Steinsalzes.

Die Frage, ob gemäß Obigem im blauen Steinsalz ein Überschuß von Na über Cl, im farbigen Flußspat ein Überschuß von Ca über F vorhanden ist, hat Verf. nicht erörtert.

Während homogene Pigmentierung ganzer großer Kristalle oft durch β- oder γ-Strahlen verursacht ist, sind die kleinen „pleochroitischen Höfe" in Biotit, Cordierit usw. durch die wenig weit wirkenden α-Strahlen verursacht (J. Joly, O. Mügge, G. Hövermann).

Die synthetischen Edelsteine seien nicht immer gleich pigmentiert wie die natürlichen, auch wenn sie die gleiche Tönung zeigen; so enthalten die künstlichen Rubine etwa 2,5 Proz. Cr_2O_3, die natürlichen dagegen viel geringere Mengen.

Es wäre m. E. wünschenswert, wenn die künstlichen Färbungsversuche an Mineralien mehr systematisch und mehr quantitativ fortgesetzt würden. Einige bereits vorliegende Messungen hat Verf. leider nicht ziffernmäßig wiedergegeben; so Wülfings Feststellung

eines Gewichtsverlustes von Rauchquarz beim Erhitzen und Entfärben. Wülfings Ermittelung von abweichendem Brechungsindex des violetten Weardaler Flußspates und der Konstanz dieses Brechungsindex bei Erhitzungsentfärbung; die Dichte-Bestimmungen von Brauns an natürlichen und synthetischen Rubinen; die Messungen Hövermanns betr. Änderung optischer Konstanten von Hornblende und Cordierit infolge von α-Bestrahlung.

Das Buch ist reichhaltig und anregend; aber vielfach ist es lediglich Kritik, wozu es anregt. „Zahlen entscheiden", sagte der Physiker Benzenberg.

Johnsen.

W. Brunner, Dreht sich die Erde? Mathematische Bibliothek 17. 8⁰. 53 S. m. 19 Figuren im Text und auf einer Tafel. Leipzig, B. G. Teubner. 1915. M. —.80

Die bekannten Beweise für die Drehung der Erde knüpfen sämtlich an das Trägheitsgesetz an[1]) und sie zeigen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der betreffenden Versuche, daß die Erde in einem Tage eine Umdrehung vollführt gegenüber einem Bezugssysteme, für welches das Trägheitsgesetz gilt. Dieses System fällt also, soweit es alle diese verhältnismäßig rohen Bestimmungen festzulegen gestatten, mit demjenigen zusammen, auf welches die Astronomen die siderische Umdrehungszeit der Erde beziehen, das also gegenüber der Fixsternwelt fest liegt. Von den genannten Beweisen bespricht der Verf. zunächst eingehend die östliche Abweichung frei fallender Körper von der Vertikalen. Er leitet auf leicht verständlichem Wege den mathematischen Ausdruck für den Betrag dieser Abweichung ab und teilt die Ergebnisse der verschiedenen Beobachtungsreihen mit, wobei namentlich die Wiedergabe der Fallpunktsfiguren ein recht willkommenes Anschauungsmittel bildet. Zur höchsten Vollkommenheit wurden diese Versuche ausgebildet durch den Jesuitenpater J. G. Hagen, Direktor der vatikanischen Sternwarte, der dieselben mit Hilfe einer großen Atwoodschen Fallmaschine ausführte. Es folgt dann die elementare Besprechung des Foucaultschen Pendels, des konischen Pendels und des Gyroskops. Da das vorliegende Buch namentlich für Lehrer und Schüler bestimmt ist, hätte Referent einen Hinweis auf die Abplattung der Erde und die Abnahme der Schwere mit der geographischen Breite für nützlich gehalten. Denn die schon von Newton richtig gedeutete Beobachtung Richers über die Verkürzung des Sekundenpendels in Cayenne ist nicht nur historisch der früheste der in Rede stehenden Beweise, sondern wohl auch der anschaulichste von allen. Mit den allereinfachsten Hilfsmitteln — selbst wo nicht einmal ein Zentrifugalapparat vorhanden sein sollte — kann man die Abplattung eines Drahtmodells infolge der Drehung leicht zeigen. Den Schluß des sonst recht empfehlenswerten Bändchens bildet ein Abschnitt über die ablenkende Kraft der Erdrotation, wie sie sich namentlich in der Bewegung der Passatwinde und in der Drehungsrichtung der Zyklone äußert.

1) Neben diesen käme noch die tägliche Aberration in Betracht.

J. Hartmann.

G. Kerschensteiner, Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Neue Untersuchungen zur alten Frage. 8. XII u. 141 Seiten. Leipzig, B. G. Teubner. 1914. Geheftet M. 3.—, gebunden M. 3.60.

Nicht Kenntnisse, sondern Erkenntnis, das ist das Thema der interessanten und geistvollen Untersuchung des philosophisch geschulten Verfassers über die wichtigsten Fragen des Unterrichts, nicht allein des naturwissenschaftlichen, wie es der Titel vermuten läßt. Mit scharfen Waffen kämpft K. gegen jede äußerliche Vielwisserei und legt den Kernpunkt eines guten Unterrichts lediglich in die geistige Zucht des Denkens. Die dabei in Frage kommenden Denkverfahren werden einer sorgfältigen Analyse unterzogen und an eingehend behandelten Beispielen (Übersetzungen aus alten und neueren Sprachen, Erforschung physikalischer und chemischer Vorgänge) wird gezeigt, daß im Grunde bei sprachlicher wie bei naturwissenschaftlicher Behandlung des Unterrichts, wenn sie gründlich und in die Tiefe gehend ist, dieselben Denkoperationen in Anwendung kommen. Eine Reihe weiterer Erörterungen dienen dazu, die besonderen geistigen Werte naturwissenschaftlicher Studien zu ermitteln, als da sind Beobachtungsvermögen, Sinn für Kausalität, moralische Erziehungswerte u. dergl., Untersuchungen, die den Verfasser auch auf die Frage führen, ob die Naturgesetze auch für das menschliche Handeln eine Wertenorm ergeben, wobei der Ostwaldsche „energetische Imperativ" sowie Unolds Ideen über die Grundgesetze des organischen Lebens einer Kritik unterzogen werden. So anregend Kerschensteiners Anschauungen auch in ihrer Durchführung sind, so viel Richtiges und Vollwertiges sie auch geben, so verwickeln sie sich doch in ein von dem Verfasser selbst empfundenes Dilemma. Ohne Anweisung kann der Schüler die Gesetze der Natur nicht ergründen, die Anweisung aber schließt die „freie Vermutung" aus, auf die der Verfasser so großen, ja allen Wert legt, da sie allein zur Entwicklung des Denkvermögens führt. Auch verleitet ihn die Furcht vor der „Seuche des Enzyklopädismus" zu einem ganz extremen Standpunkte, der in der Verneinung des Erwerbes positiver Kenntnisse überhaupt gipfelt.

Behrendsen.

Ausschuß für Einheits- und Formelgrößen (AEF).

Einführung der Einheits- und Formelzeichen des AEF bei der Königlich preußischen Bauverwaltung.

Die Kgl. preußischen Minister der öffentlichen Arbeiten und für Handel und Gewerbe haben durch den nachfolgend abgedruckten Erlaß den Gebrauch der Einheits- und Formelzeichen des AEF den nachgeordneten Behörden empfohlen.

Dem Erlaß war das Taschenblatt des AEF beigefügt, welches alle bis jetzt festgesetzten Einheits- und Formelzeichen[1]) enthält; auf dieses Blatt bezieht sich der letzte Satz des Absatzes I und der vorletzte Absatz des Erlasses.

1) Abdruck siehe „ETZ" 1914, S. 1021. Vgl. auch diese Zeitschr. **14**, 167, 1913 u. **16**, 40, 1915.

Berlin, den 23. II. 1916. Strecker.



Der Minister
der öffentlichen Arbeiten.

III. 1776. A. B. } M. d. ö. A.
I 15 D. 13307.
III. 5350. } M. f. H. u. G.
I. 8143.

Berlin W. 66, den 25. Januar 1916.
Wilhelmstraße 79.

Der Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen — genannt AEF — hat es sich zur Aufgabe gesetzt, in die Mannigfaltigkeit der Formelzeichen, der Bezeichnungen von Maßeinheiten und der dazu gehörigen Abkürzungen Ordnung und Klarheit zu bringen. Die bisher von ihm bearbeiteten endgültigen Vorschläge sind in dem in dreifacher Ausfertigung beigefügten Blatt enthalten.

Da der Ausschuß an mich, den Minister der öffentlichen Arbeiten, mit der Bitte herangetreten ist, die Anwendung der von ihm vorgeschlagenen Einheits- und Formelzeichen zu fördern, ersuchen wir, diesem Wunsche des Ausschusses nach Möglichkeit zu entsprechen.

Nur auf zwei Punkte sei besonders hingewiesen:

Erstens: Der Ausschuß schlägt vor, für die Maße Quadratmeter, Quadratzentimeter, Kubikmeter usw. die Abkürzungen m^2, cm^2, m^3 usw. zu verwenden. Dies beruht auf Beschlüssen des Internationalen Maß- und Gewichtskomitees vom Jahre 1880 und 1885, stimmt aber mit den für Deutschland geltenden amtlichen Vorschriften nicht völlig überein. Laut Beschluß des Bundesrates vom 14. Dezember 1911 (s. Bekanntmachung des Reichskanzlers vom 17. Januar 1912) sind für obige Werte die Abkürzungen qm oder m^2, qcm oder cm^2, cbm oder m^3 usw. anzuwenden.

Im Verkehr mit der Bevölkerung, auch z. B. in Kostenanschlägen, Massenberechnungen usw., die in die Hände von Unternehmern gelangen können, sind bis auf weiteres die ersten Bezeichnungen, im innern amtlichen Verkehr sowie in wissenschaftlichen Ausarbeitungen, statistischen Rechnungen u. dergl. tunlichst die Zeichen m^2, cm^2 usw. zu verwenden.

Zweitens: In Satz IV der Vorschläge des AEF steht: „Die technische Einheit der Leistung heißt Kilowatt". Bei Befolgung dieses Satzes könnte somit die bisher übliche Einheit der Pferdestärke nicht mehr angewendet werden.

Wenn es auch richtig erscheint, der allgemeinen Einführung der neuen Einheit Kilowatt möglichst die Wege zu ebnen, da sie an sich mehr Berechtigung hat als die Pferdestärke, so wird es sich doch in vielen Fällen nicht ermöglichen lassen, die Einheit der Pferdestärke plötzlich abzuschaffen. Letztere ist daher in Fällen, wo es zweckmäßig oder erforderlich erscheint, einstweilen beizubehalten.

Zweckmäßig kann es z. B. sein, bei Berechnung oder beim Ankauf feststehender Dampfmaschinen, von Lokomobilen oder von Schiffsmaschinen mit der alten Einheit zu rechnen, in Rücksicht darauf, daß diese z. Zt. noch in weiten Kreisen gebräuchlich ist; erforderlich ist es dagegen beispielsweise bei Führung der Dampfmaschinen-Statistik, die seit jeher auf die Einheit der Pferdestärke zugeschnitten ist.

Weitere Blätter, die die Sätze und Zeichen des Ausschusses enthalten, sind — soweit erforderlich — auf dortige Kosten zu beschaffen; die Bezugsquelle ist am Schlusse des Blattes angegeben. Die Verhandlungen des AEF, die über alle Einzelheiten seiner Arbeit Auskunft geben, sind bei Julius Springer, Berlin, erschienen.

Abdrucke dieses Erlasses sind beigefügt.

Der Minister der öffentlichen Arbeiten.
In Vertretung: Frhr. v. Coels.

Der Minister für Handel und Gewerbe.
Im Auftrage: v. Meyeren.

An
die Herren Oberpräsidenten
in Danzig, Breslau, Magdeburg, Hannover, Coblenz und Münster i. W. (Strombau- bzw. Kanalverwaltung),
die Herren Regierungspräsidenten
(bei Potsdam auch Verwaltung der Märkischen Wasserstraßen),
den Herrn Polizeipräsidenten in Berlin,
die hiesige Königliche Ministerial-, Militär- und Baukommission,
die Königlichen Kanalbaudirektionen
in Hannover und Essen sowie an
die Königlichen Eisenbahndirektionen und
das Königliche Eisenbahnzentralamt.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Dr. phil. **E. Everling**, wiss. Mitarbeiter der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Adlershof, wurde bei Kriegsbeginn als Freiballonführer nach Thorn eingezogen, machte als Fesselballonbeobachter die Kämpfe an der Bzura und Rawka mit und ist zur Zeit als Vizefeldwebel bei der Prüfanstalt und Werft der Fliegertruppen in Adlershof tätig.

Tagesereignisse.

Benekesche Preisstiftung. Die philosophische Fakultät der Universität Göttingen hat die folgende Aufgabe gestellt: „Die chemischen Vorgänge, welche bei der Umwandlung des Blutfarbstoffes in Gallenfarbstoffe und weiter in Harn- und Kotfarbstoffe vor sich gehen, sind in exakter Weise klarzulegen und durch ausreichend begründete Strukturformeln zu erklären." Bewerbungsschriften sind bis zum 31. August 1918 an die Fakultät einzureichen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Die Privatdozenten an der Universität Tübingen Dr. Hans Rosenberg (Physik und Astronomie) und Dr. Alfred Magnus (Chemie) zu a. o. Professoren ebendaselbst, der ord. Professor für technische Chemie an der Washington Universität Seattle Dr. Henry Kreitzer Benson zum Direktor des neuen Bureau of Industrial Research.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Adolf Thomälen der Titel Professor, dem ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Marburg Dr. Franz Richarz, dem ord. Professor der Pharmazeutischen Chemie an der Universität Breslau Dr. Johannes Gadamer, dem Abteilungsvorsteher am Geodätischen Institut bei Potsdam Professor Emil Borrass und dem Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam Professor Dr. Johannes Wilsing der Titel Geh. Regierungsrat.

Ehrungen: Der Preis der Otto-Vahlbruch-Stiftung ist von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen im Betrage von je 6000 Mark dem ord. Professor für Organische Chemie an der Universität Stockholm, Dr. Hans von Euler-Chelpin, für seine Arbeiten über die Wirkungsweise der Fermente und seine Untersuchungen über die Chemie der Gärung, und dem a. o. Prof. für chemische Technologie an der Universität München Dr. Heinrich Wieland für seine Arbeiten über unge-



sättigte organische Radikale, für seine Untersuchungen über tierische Gifte und seine Studien über biologisch wichtige Oxydationsvorgänge zuerkannt worden.

Gestorben: Der Chemiker Dr. Josef Messinger in Budapest, der frühere Privatdozent der Chemie an der Universität Bern, Kantonschemiker Dr. Eugen Vinassa in Lugano.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1916.

Technische Hochschule Brünn.

Jaumann: Allgemeine und technische Physik, $3^1/_2$; Theoretische Physik, $1^1/_2$; Physikalisches Praktikum für Chemiker und Maschinenbauer (mit Lohr), 3, für Bauingenieure (mit Szarvassi), 3. — **Szarvassi**: Physikalische Grundlagen der drahtlosen Telegraphie, 2; Meteorologie und Klimatologie, 3. — **Lohr**: Physik, 4. — **Zickler**: Elektrotechnische Messungen, 2; Elektrische Beleuchtungsanlagen, 3; Elektrotechnisches Praktikum I, für Anfänger, 4, III: Speziell für Elektrotechniker (mit Niethammer), 8, Ausarbeitung, 8. — **Niethammer**: Bau elektrischer Maschinen I, 3; Projektierung elektrischer Anlagen, einschließlich elektrischer Arbeitsübertragung, 2; Elektrische Bahnen, 1; Elektrotechnische Konstruktionsübungen I, 2, II, 8. — **Siegel**: Verwertung von Prüfungsergebnissen an elektrischen Maschinen für den Dynamobau, 1. —

Hönig: Organische Chemie I, 5; Chemische Übungen III: Organisch-chemische Übungen, 20; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 3. — **Frenzel**: Analytische Chemie I: Allgemeiner Teil, 2; Chemische Übungen Ib, 22, IIb: Physikalisch-chemische Übungen, 5; Grundzüge der Elektrochemie, 2; Elektrochemisches Praktikum, 3; Physikalische Chemie I, 3. — **Gröger**: Enzyklopädie der technischen Chemie, $1^1/_2$. — **Ulrich**: Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der aromatischen Verbindungen, 1; Chemische Technologie organischer Stoffe II 2, 5; Mikrochemische Arbeitsmethoden, 1; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie II, insbesondere der Farb- und Faserstoffe, II, 25; Spezielle chemische Technologie der Faserstoffe, 1; Grundzüge der Textilchemie, 1. — **Knöpfer**: Synthese organischer Verbindungen, 2. — **Donath**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe I, 3; Chemische Technologie organischer Stoffe I, 3; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie I 2 (mit Margosches), 20. — **Margosches**: Chemische Technologie III: Anleitung zu technisch-chemischen Untersuchungen, 2; Chemische Technologie der organischen Kolloide, 2. —

Waelsch: Mathematik Ib, 2, Korrepetitionen, 1; Darstellende Geometrie II, 5, Übungen (Konstruktives Zeichnen), 6. — **v. Schrutka**: Mathematik II 1, 3, Korrepetitionen, 1; Mathematische Näherungsmethoden, 4, Übungen, 1; Potentialtheorie, 2 (verlegbar). — **Tietze**: Elemente der höheren Mathematik, 4, Korrepetitionen, 1; Variationsrechnung, 2. — **Benze**: Mathematische Statistik, 2. — **Fanta**: Versicherungsmathematik II, 2, Übungen, 1; Reformen im Rechnungswesen von Versicherungsanstalten, 1. — **Tranquillini**: Technisches Zeichnen I: Elemente des Hochbaues, 2, Übungen, 4. — **Löschner**: Technisches Zeichnen II: Plan- und Geländezeichnen, Übungen, 2; Plan- und Geländezeichnen: Situationszeichnen, Übungen, 4; Niedere Geodäsie, 2; Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie, mit Übungen, 1; Vermessungsübungen II, 12; Sphärische Astronomie, 2. — **Musil**: Technisches Zeichnen: Maschinenzeichnen, 6. — **Steiner**: Elemente der niederen Geodäsie, 2, Übungen, 3. — **N.N.**: Mechanik I: Einleitung in die Mechanik, Statik in analytischer und graphischer Behandlungsweise, 5, Übungen, 2. — **Lechner**: Analytische Mechanik, 2. — **Bortsch**: Elemente der Mechanik und Festigkeitslehre I, 4. —

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik II: Elektrizität II, Optik, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20. — **Toepler**: Theoretische Physik III: Elektrizität und Magnetismus, 4, Übungen, 1 *g*. — **Luther**: Photographisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene, 4 und 8; Selbständige Arbeiten im wissenschaftlich-photographischen Institute, 2 und 4, ferner ganz- und halbtägig. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik I, 3; Theorie des Wechselstromes I, 2; Elektrotechnisches Praktikum I, 4; Elektrotechnische Übungen für Geübtere I, 8; Selbständige Arbeiten im Elektrotechnischen Institut, 20; Praktikum für Schwachstromtechnik, insbesondere drahtlose Telegraphie I und II, 3; Selbständige Arbeiten im Institut für Schwachstromtechnik, 10 oder 20. — **Kübler**: Elektromaschinenbau I, 2, III und Kolloquium, 2; Übungen im Elektromaschinenbau für Elektroingenieure, 12, für Maschinen- und Fabrikingenieure, 4; Versorgung der Städte mit elektrischer Arbeit, 1. — **Möllering**: Telegraphie und Telephonie, 3. —

F. Foerster: Anorganische Experimentalchemie, 6; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, quantitative Analyse, technische Titriermethoden, Gasanalyse, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Elektrochemie, 12; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, ganztägig. — **v. Meyer**: Organisch-technische Chemie, 3; Synthetische Methoden der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Farbenchemie (mit v. Walther), 12; Praktikum für Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), halbtägig; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), ganztägig. — **König**: Chemie und chemische Technologie der organischen Farbstoffe, 4. — **v. Walther**: Einzelkapitel über Theorien der organischen Chemie, 2. — **Thiele**: Wasser und Abwasser, 1; Anorganisch-chemisches Praktikum, 4. — **Dietz**: Die chemische Technologie der Mörtel und Zemente, 1; Die chemische Technologie des Glases, 1. —

Krause: Höhere Mathematik III, 3; Seminaristische Übungen (mit Naetsch), 14 tägig, 1; Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Seminaristische Übungen für Physiker (mit Naetsch), 1 *g*. — **Helm**: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 2; Analytische Mechanik, 3; Versicherungstechnisches Seminar, 1 *g*, Übungen, 2. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie I, 3, Übungen, 4; Geometrische Konstruktionen, 1; Synthetische Geometrie, 3, Übungen, 2 *g*; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1 *g*. — **Naetsch**: Sphärische Trigonometrie, 2; Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 3; Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen, 2. — **Pattenhausen**: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Seminaristische Übungen, 1; Höhere Geodäsie (Fortsetzung), 2, Seminaristische Übungen, 1; Sphärische Astronomie I, 2, Seminaristische Übungen, 1; Vorübungen zum Planzeichnen für Vermessungsingenieure (Schriftzeichnen), 2; Planzeichnen II, für Bauingenieure, 2, für Vermessungsingenieure, 4; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Triangulierungsübungen, 4; Geodätisches Praktikum I, 4, II, 4; Geodätisches Praktikum für Architekten, 4; Größere Geländeaufnahmen, 2 Wochen. — **Grübler**: Technische Mechanik II: Statik einschließlich graphischer Statik, 6, Übungen, 2; Graphostatische Übungen, 2. —

Universität Graz.

Radakovic: Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Schenkl**: Elektrodynamik, 3. — **Streintz**: Maße und Meßmethoden der Elektrizität, 2. — **Rosenberg**:

Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. —

Scholl: Organische Experimentalchemie, für Mediziner und Pharmazeuten, 5; Chemische Übungen für Anfänger (mit Skrabal), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Chemische Übungen für Vorgeschrittene, tägl. — **Kremann**: Physikalische Chemie II, 3; Physikalisch-chemisches Rechnen, 2; Physikalisch-chemisches, elektrochemisches und metallographisches Praktikum, 20. — **Skrabal**: Maßanalyse, 2; Chemie der Metalle, 3; Harnanalyse, 2; Praktikum aus anorganischer und analytischer Chemie für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. — **v. Hemmelmayr**: Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie: Technologie der Silikate, mit Besichtigung von Fabrikanlagen, 2; Experimentierübungen (chemische Schulversuche), für Lehramtskandidaten, 2. —

v. Dantscher: Analytische und projektivische Geometrie der Ebene, 5; Mathematisches Seminar I, 2 *g*. — **v. Daublebsky**: Differential- und Integralrechnung (Fortsetzung), 2; Funktionentheorie, 3; Elementarmathematik II, 2; Mathematisches Seminar II. 2 *g*. — **Streißler**: Darstellende Geometrie, 3. — **Erell**: Statistische Mechanik (Fortsetzung), 3. — **Hillebrand**: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 5; Kalendariographie, 1 *g*. —

Technische Hochschule Prag.

Tuma: Experimentalphysik: Elektrostatik, Stationäre Elektrizitätsströmungen, Magnetische Wirkungen des elektrischen Stromes, Magnetische Induktion, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Thermodynamik, 3; Physikalisches Praktikum, 6. — **Puluj**: Allgemeine Elektrotechnik, 3, Praktische Übungen, 4; Ausgewählte Kapitel der Wechselstrom-Elektrotechnik, 2. —

Hönigschmid: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie (anorganisch, quantitativ), 2; Übungen im anorganisch-chemischen und analytischen Laboratorium I und II, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Geübtere, tägl. außer Sonnabend. — **N. N.**: Organische Chemie, 5; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl. - **Storch**: Chemie der Metalle und technische Metallgewinnung: II. und III. Gruppe des periodischen Systems, 2; Die wissenschaftlichen Grundlagen der Maßanalyse, 1; Physikalische Chemie II: Thermochemie, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, 15; Elektrochemische Prozesse der Industrie, 3, Übungen, 4. — **Ditz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe II, 6; Übungen im anorganisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Georgievics**: Chemische Technologie organischer Stoffe II, $6^1/_2$; Übungen im organisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Harpf**: Technologie des Schwefeldioxydes, 1. — **v. Gintl**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2; Praktische Übungen in der Ausführung von Heizgasuntersuchungen, 1; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, 2, Übungen, 8; Gasanalyse mit praktischen Übungen, 1; Gerichtlich-chemische Untersuchungen mit Demonstrationen, 1. — **Auerwinkler**: Photographie, 1, Übungen, 4. — **Herzog**: Technische Mykologie, Übungen, 6; Agrikulturchemische Arbeitsmethoden, 1; Biochemische Analyse, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl. —

Carda: Mathematik I, 4, Übungen, 2; Elemente der höheren Mathematik, 2, Übungen, 1. — **N. N.**: Mathematik II, 4, Übungen, 2, für Handelslehrkandidaten, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Rosmanith**: Versicherungsmathematik I, 3, IIa, 1, IIb, 2; Politische Arithmetik, 2. — **N. N.**: Darstellende Geometrie, 3, Konstruktive Übungen, 5 und 4; Ausgewählte Kapitel aus der darstellenden und projektiven Geometrie, 3, Übungen, 4. — **Grünwald**: Ausgewählte Abschnitte aus der Bewegungslehre starrer Körper, 2. — **Pöschl**: Allgemeine Mechanik, 4, Repetitionen, 1, Graphische Übungen, 2; Hydromechanik, 3, Übungen, 1; Besondere Probleme aus dem Gesamtgebiete der Mechanik, 2. — **Haerpfer**: Elemente der niederen Geodäsie, Übungen, 4; Theorie der Kartenprojektionen, 1; Die Nomographie in der Geodäsie, 1. — **Adamczik**: Niedere Geodäsie, $4^1/_2$, Übungen, 6; Grundzüge der sphärischen Astronomie, 3, Übungen, 2; Anwendungen der Geodäsie auf Kulturtechnik, 2, Übungen, 2; Geodätisches Rechnen I, 2, II, 2. —

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik: Elektromagnetismus, Induktion, Akustik, Optik, Elektrooptik, 4; Theoretische Physik (als Einleitung: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik), 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Handfertigkeits-Praktikum in Physik, für Vorgeschrittene, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, ausgewählte Kapitel, 1. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen, 1, Übungen, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente (mit Brandegger), 1, Übungen, 6; Dynamobau I (mit Brandegger), Seminar, 1, Übungen, 6, II, 2; Elektrische Apparate, 1; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen (mit Brandegger), 8; Projektieren elektrischer Anlagen (mit Brandegger), 1, Übungen, 4; **Emde**: Gleichstromtechnik I, 2, Übungen, 8, II, 2, Übungen, 4. — **Herrmann**: Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, Übungen, 8, II, 1, Übungen, 4; Schwachstromtechnik II, 2, Übungen, 4; Drahtlose Telegraphie, 2, Übungen, 4. —

Gutbier: Technische Chemie I: Anorganisch-chemische Großindustrie, 4; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie (mit Schmidt und Huber), tägl. außer Sonnabend. — **Küster**: Organische Experimentalchemie, 5; Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2; Toxikologie, 1; Übungen im Laboratorium für organische Chemie, organisch-chemische Technologie und Pharmazie (mit Bauer), tägl. außer Sonnabend. — **Grube**: Physikalische Chemie, 3; Metallurgie, 1; Übungen im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie, tägl. außer Sonnabend. — **Kauffmann**: Farbenchemie, unter besonderem Eingehen auf die Chemie mehrkerniger Benzolderivate, 2; Chemische Tagesfragen aus Wissenschaft und Technik, mit Exkursionen, 1. — **Schmidt**: Analytische Chemie, 2; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 2. —

Haller: Trigonometrische Übungen, 2. — **Kutta**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2, III, 3 bzw. 4, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2. — **Wölffing**: Krümmungstheorie, 3; Variationsrechnung, 1 *g*. — **Mehmke**: Darstellende Geometrie (mit Stübler) I, 3, Übungen, 4, II, 1, Übungen, 2; Vektorenrechnung (mit Stübler), 3, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1. — **Stübler**: Mathematische Geographie, mit Übungen, 2; Synthetische Geometrie, 3. — **Kommerell**: Zahlentheorie, 2. — **N. N.**: Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität, 2. — **Roth**: Perspektive, 2. — **Kriemler**: Technische Mechanik, 6, Übungen, 6. — **v. Hammer**: Praktische Geometrie II: Vermessungskunde für Bauingenieure, 5, Messungsübungen, 12; Ausarbeitung der Messungen zur praktischen Geometrie, 2; Geodätische Schlußübungen für Bauingenieure, 12 Tage; Übungen zur höheren Geodäsie, 2; Übungen in praktischer Geometrie (mit Heer), 8. — **N. N.**: Aerostatik und Aerodynamik, 2. — **Baumann**: Flugzeuge und ihre konstruktiven Einzelheiten, 2; Ausführliche Behandlung wichtiger Fragen des Kraftfahrzeugbaus, 2; Motoren für Land-, Wasser- und Luftfahrzeuge, 2. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

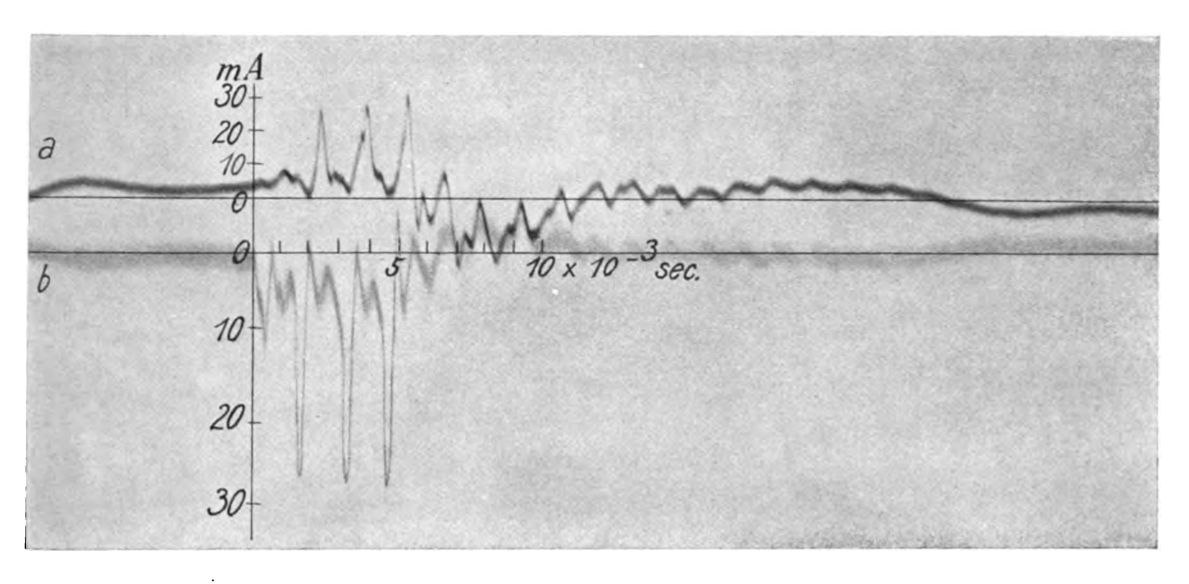


Fig. 6. Entladung über harte Röhre, 1 mA Mittelwert. Sekundärstrom a) in der Mitte, b) am Anfang der Sekundärspule.

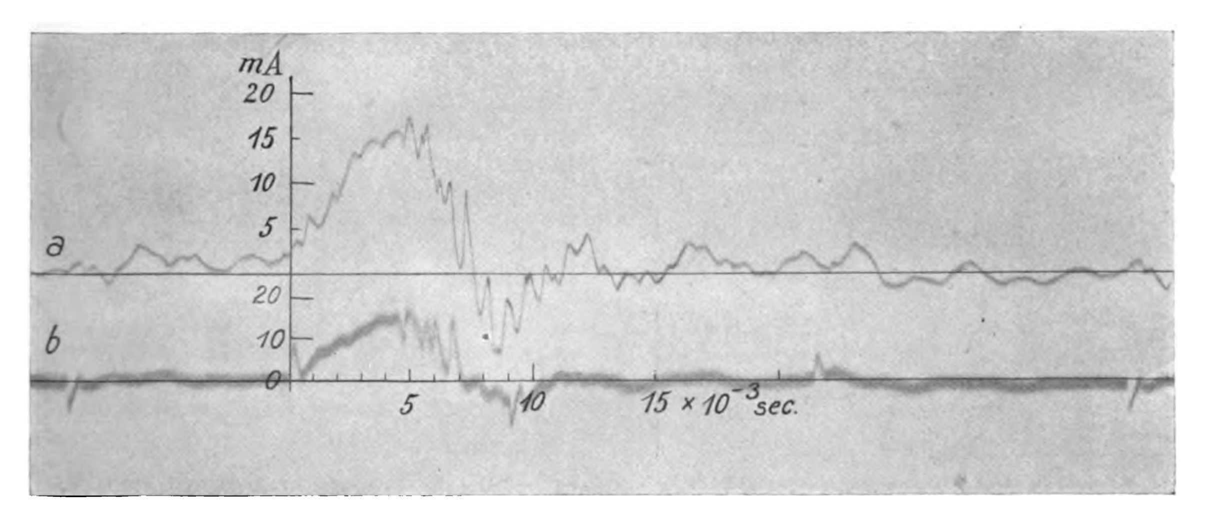


Fig. 7. Entladung über weiche Röhre, 2 mA Mittelwert. Sekundärstrom a) in der Mitte, b) am Anfang der Sekundärspule.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8. | 15. April 1916. Redaktionsschluß für No. 9 am 22. April 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

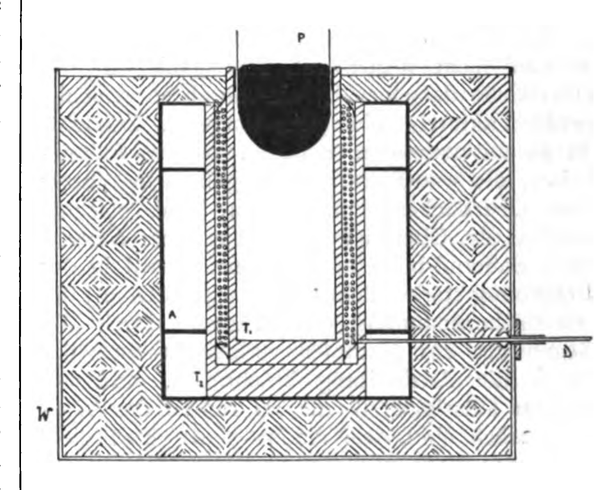
Ein elektrischer Ofen zum Dauerbetrieb der Gaedeschen Diffusionspumpe.

Von E. Rüchardt.

Für den Dauerbetrieb der sonst so vorzüglich arbeitenden Diffusionspumpe ist die Heizung mit einem Bunsenbrenner wenig geeignet. Schwankungen des Gasdruckes und der störende Einfluß jedes Luftzuges macht ein häufiges Regulieren und fortwährendes Überwachen notwendig. Nach einigen Versuchen in anderer Richtung wurde schließlich eine elektrische Heizung gewählt. Obwohl der konstruierte Ofen nichts wesentlich Originelles enthält, sondern lediglich dem speziellen Zwecke angepaßt ist, dürfte eine kurze Beschreibung am Platze sein, da es nicht sofort gelang, die Aufgabe völlig zweckentsprechend zu lösen.

Die Figur zeigt den fertigen Ofen im Schnitt.

Um einen Tonzylinder T_1 von 12 cm Höhe und 5 cm Durchmesser ist eine dünne Lage Asbestpappe mit Wasserglas geklebt und darauf Konstantandraht von 0,7 mm Dicke in Windungen mit gleichmäßigem Abstand gewickelt. Die Zwischenräume sind mit feuerfestem Kitt (5 Teile Schamotte, 5 Teile Glaspulver, 1 Teil Borax mit Wasser zu einem Brei verrührt) ausgestrichen. Nach dem Erhärten wurde eine Lage Asbestpappe aufgeklebt und eine zweite Lage Draht darüber gewickelt, die wieder mit Schamottekitt befestigt und mit Asbestpappe beklebt wurde. Ein zweiter Tonzylinder T_2 umschließt den ersten genau passend. Eine genügende Wärmeisolation nach außen erreichte ich endlich durch Umschließung des Ofens mit einem Luftmantel und lockerer Asbestwolle. A ist ein Zylinder aus Asbestpappe mit Zwischenwänden, Boden und Deckel, der nur die Ofenöffnung freiläßt, W ein zylin-



drisches Gefäß aus Weißblech von 17 cm Höhe und 20 cm Durchmesser. Der Zwischenraum zwischen dem Luftmantel und den Wänden des äußeren Gefäßes ist locker mit Asbestwolle ausgestopft. Der obere Rand des Heizkörpers ist innen mit einem Streifen dünner Asbestpappe beklebt, an dem der erhitzte Glasteil P der Pumpe sanft anliegt. Ein ringförmiger Deckel

aus dicker Asbestpappe schließt den Ofen nach oben ab. Der Widerstand beträgt 18 Ohm und ist für den Betrieb mit der 70-Volt-Batterie des Instituts berechnet. Während der Anheizperiode, die natürlich etwas länger ist als bei der Heizung mit offener Flamme, ein kleiner Nachteil, der bei langer Betriebsdauer keine Rolle spielt, kann ohne Vorschaltwiderstand mit 4 Amp. geheizt werden. Ich habe dann versuchsweise 3 Stunden lang, ohne zu regulieren, mit einer Stromstärke von 2,9 Amp. gearbeitet, wobei die Temperatur des *Hg*-Dampfes 117° betrug und innerhalb eines Grades konstant blieb. Da jede Gefahr für die Pumpe ausgeschlossen ist, ist keinerlei Überwachung notwendig. Die außerordentliche Konstanz der Pumpgeschwindigkeit dürfte bei Vakuumarbeiten besonders für langdauernde Spektralaufnahmen mit Durchströmungsanordnungen von Vorteil sein. Steht keine so konstante Stromquelle zur Verfügung, so dürfte es nicht schwer sein, einen automatischen Stromregulator anzubringen.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 23. März 1916.)

Über die Ausbreitung reiner und gemischter Flüssigkeiten auf Wasser.

Von Agnes Pockels.

I. Kohlenwasserstoffe.

Die Ausbreitung eines Tropfens einer mit Wasser nicht mischbaren Flüssigkeit auf der Oberfläche desselben ist ein von vielen verschiedenen Faktoren abhängiger Vorgang. Zunächst ist zu unterscheiden zwischen solchen Flüssigkeiten, die wie Öl auf dem umgebenden Wasser eine Oberflächenlösung bilden, und solchen, welche die Oberflächenspannung des Wassers nicht dauernd beeinflussen. Ferner wird in der Umgebung stark flüchtiger Flüssigkeiten oft die Oberflächenspannung des Wassers durch die Gegenwart des Dampfes verkleinert und dadurch die Ausbreitung beschränkt, und bei solchen Flüssigkeiten, die im Innern des Wassers löslich sind, wie Anilin, muß auch hierdurch das Verhalten modifiziert werden.

Zu den unwirksamen, d. h. keinen Lösungsstrom gebenden Körpern gehören die gesättigten Kohlenwasserstoffe. Es sei γ_1 die Oberflächenspannung des Wassers, γ_2 diejenige der anderen Flüssigkeit und γ_{12} die Spannung der Grenzfläche beider, so breitet sich ein Tropfen einer unwirksamen Flüssigkeit auf reiner Wasseroberfläche aus, wenn

$$\gamma_1 > \gamma_2 + \gamma_{12}$$

ist, und falls die Wasseroberfläche verunreinigt war, kommt er zum Stillstand, sobald durch ihre Verkleinerung

$$\gamma'_1 = \gamma_g = \gamma_2 + \gamma_{12}$$

geworden ist. Die Messung dieser Gleichgewichtsspannung γ_g einer flach ausgebreiteten Schicht mit der Kohäsionswage bietet zugleich ein bequemes Mittel dar, um die Grenzflächenspannung γ_{12} einer Flüssigkeit gegen Wasser zu ermitteln[1]).

Von den gebräuchlichen flüssigen Kohlenwasserstoffen nun breiten sich Benzin und gewöhnliches Petroleum zu dünnen, farbengebenden Schichten aus; das bestgereinigte amerikanische Petroleum (sogenanntes Kaiseröl) dagegen und flüssiges auf heißes Wasser getropftes Paraffin bleiben linsenförmig stehen. Bei den letzteren ist also die Gleichgewichtsspannung oder $\gamma_2 + \gamma_{12}$ größer als die normale Oberflächenspannung des Wassers bei derselben Temperatur. Mit diesem Verhalten der verschiedenen Petroleumsorten stimmt die Beobachtung von W. B. Hardy[2]) überein, daß γ_{12} bei Kohlenwasserstoffen mit zunehmender Reinigung durch fraktionierte Destillation immer größer wird. Es scheint danach wohl möglich, daß chemisch einheitliche gesättigte Kohlenwasserstoffe sich niemals ausbreiten würden.

II. Verschiedene flüchtige Flüssigkeiten.

Benzol würde sich, da $\gamma_2 + \gamma_{12} < \gamma_1$ ist, über die ganze Oberfläche ausbreiten, wenn nicht die Adsorption seines Dampfes an der Wasseroberfläche dies verhinderte, durch welche γ_1 bis auf 0,88 seines normalen Wertes erniedrigt wird. Auf der bereits mehrfach benützten Oberflächenrinne[3]) kann man mittels aufgestreuten Kohlenpulvers beobachten, wie der flüssigen Benzolschicht ein dem Lösungsstrom des Öles analoger Dampfstrom vorauseilt und sie bald in farbloser Schicht zum Stillstand bringt. Farben erscheinen dann erst bei fortgesetzter Verdunstung, vielleicht infolge zunehmender Konzentration gelöster Verunreinigungen, doch drängt der Dampf diese dünnen Schichten immer wieder zurück und löst sie in Tröpfchen auf. Sobald alles verdampft ist, ist γ_1 wieder normal.

Hat man eine dicke Benzolschicht auf einer kleinen Wasseroberfläche und dehnt diese aus, so zerreißt die Schicht schon, ehe Interferenzfarben erscheinen. Immerhin breitet sie sich auf einem offenen Wassergefäße flach genug

1) A. Pockels, Wied. Ann. 67, 668, 1899.
2) W. B. Hardy, Proc. Roy. Soc. (A) 88, 303, 1913.
3) A. Pockels, Nature 43, 437, 1891; Ann. d. Phys. 8, 856, 1902.

aus, um bei der Bestimmung von γ_g die Berührungswinkel der Oberflächen vernachlässigen und $0,88 = \gamma_g$ in relativem Maß setzen zu dürfen; unter einer luftdicht aufliegenden Glasplatte hingegen zieht sich Benzol, sobald der Dampf gesättigt ist, zu linsenförmigen Tropfen zusammen.

Ähnlich wie Benzol verhält sich Äthyläther. Derselbe wird noch energischer durch seinen Dampfstrom von der reinen Wasseroberfläche verdrängt, breitet sich daher niemals zu Farben aus und steht auf einer anomalen Oberfläche ruhig in dicker Schicht bei einer Gleichgewichtsspannung von 0,42 der normalen.

Auch Anilin ($\gamma_g = 0,71$) und Schwefelkohlenstoff ($\gamma_g > 1$) breiten sich auf frischer Wasseroberfläche nicht aus; bei diesen kann auch nicht der Dampfstrom die Ursache hiervon sein, da derselbe nur schwach ist und ebenso wie bei gereinigtem Petroleum γ_1 gar nicht merklich erniedrigt, was man daran sieht, daß er nur auf normaler Oberfläche zur Entwicklung gelangt. Die Erniedrigung von γ_1 in der Umgebung eines Anilintropfens hängt augenscheinlich mit seiner Löslichkeit im Wasser zusammen.

III. Fette und Fettsäuren.

Bei diesen Flüssigkeiten wirkt der Ausbreitung die Bildung einer Oberflächenlösung entgegen. Die Sättigungsspannung derselben, welche sich auf kleinen Oberflächen fast augenblicklich herstellt und γ_s heißen möge, spielt hier eine ähnliche Rolle, wie die Dampfanomalie beim Benzol.

Beobachtet wurden: Ölsäure, Stearinsäure (beide von Kahlbaum bezogen) und gereinigtes Olivenöl, nach dem früheren Verfahren durch Schütteln mit absolutem Alkohol hergestellt[1]). Stearinsäure konnte natürlich nur bei hoher Temperatur beobachtet werden; sie wurde auf Wasser von etwa 75° C getropft.

Alle drei Flüssigkeiten breiten sich auf reiner Wasseroberfläche nicht aus. Auf relativ großer Fläche führt der Tropfen im ersten Augenblick eine kurze Ausdehnungsbewegung aus, der aber sofort Einschnürung und Zusammenziehung zu Linsen folgt. Es ist also für die genannten Flüssigkeiten $\gamma_s < \gamma_g$.

Die Sättigungsspannungen wurden mit der schon bei den früheren Untersuchungen benutzten geeichten Hilfswage[2]) durch das Abreißgewicht eines kleinen geglühten Platindrahtringes bestimmt. Bei den Fettsäuren darf nur sorgfältig destilliertes Wasser genommen werden, besonders bei Stearinsäure, die sonst auf der Wasseroberfläche sofort eine die Messung unmöglich machende starre Haut erzeugt. Außerdem geben sowohl Ölsäure- als Stearinsäuretropfen auf Leitungswasser infolge chemischer Bindung fortdauernde Lösungsströme, so daß die Sättigungsspannung hier nicht als erreicht gelten kann.

Im Folgenden sind die erhaltenen Zahlenwerte zusammengestellt, und zwar sowohl in relativem Maß bezogen auf die normale Oberflächenspannung des Wassers bei 20° C als Einheit als auch die aus diesen berechneten absoluten Werte in dyn/cm, die Oberflächenspannung des Wassers = 74,85 dyn/cm angenommen.

Flüssigkeit	t	Relativ		dyn/cm	
		γ_s	γ_g	γ_s	γ_g
ger. Öl	0—10°	0,833	0,85	62,35	63,62
„	30°	0,826		61,83	
„	60—65°	0,811		60,70	
„	75°	0,800		59,88	
„	85—90°	0,786		58,83	
Ölsäure	12,5°	0,59	0,63	44,16	47,15
„	75°	0,52 >	0,52	38,92 >	38,92
Stearinsäure	75°	0,47 >	0,55	35,18 >	41,17

γ_g ließ sich nur näherungsweise ermitteln.

Man sieht zugleich, daß γ_s mit steigender Temperatur abnimmt, doch viel langsamer als die Normalspannung des Wassers γ_1, so daß die maximale Anomalie, die eine wirksame Substanz hervorzubringen vermag, auf kaltem Wasser größer ist als auf heißem.

Bei Ölsäure ist $\gamma_s = 0,59$ derjenige Wert, über welchen die Spannung durch Ausdehnen der Oberfläche nicht erhöht werden konnte, so lange auf ihr ein Ölsäuretropfen schwimmt. Beim Verkleinern konnte sie etwas erniedrigt werden, jedoch nicht unter 0,54.

IV. Mischungen und Lösungen.

Mischt man nun zwei Flüssigkeiten, welche sich jede für sich allein nicht ausbreiten, zum Beispiel gereinigtes Petroleum mit gereinigtem Olivenöl oder Stearinsäure, Paraffin mit Ölsäure oder auch Öl mit Ölsäure, so breitet sich die Mischung zu einer Interferenzfarben gebenden Schicht aus. Der Grund ist, daß durch Zusatz einer wirksamen Substanz zu einer unwirksamen oder schwächer wirksamen γ_{12} und damit γ_g stark erniedrigt wird, während das ebenfalls erniedrigte γ_s der umgebenden Wasseroberfläche nicht sogleich erreicht wird.

Das Verhalten solcher Mischungen wurde an dem Beispiel Öl—Petroleum eingehender studiert. Zu 10 cm³ gereinigten Petroleums wurde gereinigtes Provenceröl in Tropfen von

1) A. Pockels, Nature **50**, 223, 1894.
2) Wied. Ann. **67**, 677, 1899.

$^1/_{25}$ cm^3 zugesetzt. Ein Zusatz von 1 Tropfen Öl bewirkte schon Farbenausbreitung; mit zwei Tropfen zerriß die Schicht bei Farben zweiter Ordnung, mit drei Tropfen im Rot erster Ordnung, mit 6 Tropfen im Grau.

Diese in allen Teilen der Schicht zugleich plötzlich auftretende Zerreißung bedeutet, daß γ_g, welches bei Lösungen beim Dünnerwerden der Schicht wächst, $>\gamma_1$ geworden ist. Kommt aber wegen begrenzter Oberfläche die Ausbreitung der Schicht vor der allgemeinen Zerreißung zum Stillstand, so bilden sich in ihr allmählich Löcher durch den Lösungsstrom des Öles, noch bei sehr beträchtlicher Dicke. Bei starkem Ölgehalt, z. B. 1 Teil Öl auf 7 Teile Petroleum tritt die Löcherbildung bereits vor der plötzlichen Zerreißung ein, und zwar zunächst am Rande, worauf die Schicht in einzelne Tröpfchen zerfällt. Bei gleichen Teilen Öl und Petroleum war der Zerfall sehr schnell, die Ausbreitung gering. Die Mischung verhielt sich wie schwach verunreinigtes Öl.

Die Ausbreitung hat also bei einer bestimmten Konzentration ein Maximum, und ebenso verhielt es sich mit Mischungen von Paraffin mit gereinigtem Öl oder Ölsäure. Daß jede Öl—Petroleummischung sich nach der anfänglichen Ausbreitung wieder von der Wasseroberfläche zurückzieht, indem sie in Tröpfchen zerfällt, beweist, daß die Sättigungsspannung, d. h. die tiefste Spannung, welche der Wasseroberfläche durch die betreffende Lösung erteilt werden kann und bei welcher sie keinen Lösungsstrom mehr gibt, stets kleiner ist als die Gleichgewichtsspannung derselben Lösung. Indessen schien nach auf der Oberflächenrinne angestellten Versuchen γ_s immer nahe mit derjenigen Spannung zusammenzufallen, bei der ein frisch aufgesetzter Tropfen im ersten Augenblick keine Ausbreitung zeigte. Durch Beobachtung dieser anomalen Spannungen ergab sich folgende Abhängigkeit der Sättigungsspannung von der Konzentration, letztere in Tropfen von je $^1/_{25}$ Kubikzentimeter auf 10 Kubikzentimeter ausgedrückt.

γ_s ist die Spannung in relativem Maß und $\triangle$ die Differenz zwischen derselben und der normalen oder die Anomalie.

Tr	γ_s	$\triangle$	Tr	γ_s	$\triangle$
0	1,00		4	0,892	0,108
$^1/_2$	0,956	0,044	8	0,865	0,135
1	0,920	0,08	12	0,845	0,155
2	0.908	0,09	16	0,830	0,170
3	0,900	0,10	20	0,830	0,170
4	0,892	0.11			

Bei 16 Tropfen also einer Konzentration von 6,4 Proz. war also γ_s bereits ebenso klein wie beim reinen Öl. Daß trotzdem ein auf eine frische Oberfläche gesetzter Tropfen der Lösung sich zunächst ausbreitet, erklärt sich nur durch den langsameren Lösungsstrom, infolgedessen die umgebende Wasseroberfläche einige Zeit braucht, um sich mit Öl zu sättigen, während dies bei reinem Öl fast augenblicklich geschieht.

Die beschriebenen Mischungen stellen gewissermaßen eine Nachahmung der natürlichen Öle dar, welche dieselben Ausbreitungs- und Kontraktionserscheinungen zeigen. Diese Öle enthalten bekanntlich stets mehr oder weniger freie Fettsäure, durch deren Vorhandensein γ_g beträchtlich erniedrigt wird. Das fettsäurehaltige Öl breitet sich daher auf einer mit reinem Öl gesättigten Wasseroberfläche, wie sie zunächst in seiner Umgebung entsteht, aus, zieht sich jedoch wieder zurück, sobald durch den langsameren Lösungsstrom der Fettsäure das der Konzentration derselben entsprechende erniedrigte γ_s' erreicht wird. Hierauf beruht die Entstehung und Vergrößerung der Löcher in den Ölschichten, wie dies bereits 1894 von mir erläutert wurde[1]). Um γ_s' zu erreichen, muß man eine große Menge Öl auf das Wasser bringen; bei geringer Ölmenge genügt die in demselben enthaltene freie Fettsäure oft nicht, um γ_s' hervorzubringen. Dann gehen von frisch aufgesetzten Tropfen noch Lösungsströme aus, während diejenigen der älteren Tropfen sich erschöpft haben.

War eine Wasseroberfläche ganz mit ungereinigtem Öl bedeckt, so ist sie nach dem Zerfall der Ölschicht überhaupt nicht mit Öl, sondern nur mit den stärker wirkenden Bestandteilen desselben verunreinigt.

Es erschien mir nicht überflüssig, diese Auffassung der Ölausbreitung hier nochmals zu erörtern, da sie bisher nur wenig bekannt geworden zu sein scheint. Man könnte ja auch, wenn man meine Hypothese der Oberflächenlösung nicht annehmen will, die Erscheinungen so deuten, daß eine den Öltropfen zunächst umgebende „schwarze" Ölschicht nachher durch eine schwarze Ölsäureschicht verdrängt wird wegen des kleineren γ_g der letzteren. Man hat es dann nur mit Gleichgewichtsspannungen zu tun, stößt jedoch auf die Schwierigkeit, daß γ_g für eine äußerst dünne Schicht kleiner sein muß als für eine dicke derselben Flüssigkeit, während es nach aller sonstigen Erfahrung bei abnehmender Schichtdicke wächst. Überdies dürfte es nicht leicht sein, den Einfluß der Konzentration einer Lösung auf die definitive Spannung der durch sie verunreinigten Ober-

1) Nature 50, 223, 1894; auch Wüllner, Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. I, 1198.

fläche sowie die Wirkung von Spuren fester Stoffe zu erklären.

Daß nicht für jede Lösung einer wirksamen Substanz in Öl oder Petroleum das definitive $\gamma_s < \gamma_g$ ist, zeigen unter andern die früher untersuchten harzhaltigen Öle[1]), die sich zu sehr dünnen Schichten ausbreiten und nur dann zerreißen, wenn durch fortgesetzte Verringerung der Dicke γ_g größer als das γ_s des reinen Öles bzw. bei Petroleum größer als γ_1 wird. Bei diesen und überhaupt allen zu Interferenzfarben ausgebreiteten Flüssigkeiten ergaben die Messungen der Gleichgewichtsspannung, daß dieselbe außer von der chemischen Natur und Konzentration der in ihnen enthaltenen Stoffe auch in hohem Maße von der Schichtdicke, besonders im Bereich der Interferenzfarben, sowie von der nach der Ausbreitung verflossenen Zeit abhängt. Es soll hier jedoch nicht nochmals auf diese Beobachtungen eingegangen werden.

Dafür möge noch ein Versuch erwähnt werden, der den Einfluß gelöster Substanzen auf die Ausbreitungsfähigkeit des Benzols beweist. Auf eine unter gesättigtem Benzoldampf stehende, im übrigen reine Wasseroberfläche wurde unter rascher Verschiebung der bedeckenden Glasplatte ein Tröpfchen Benzol gebracht. Dasselbe breitete sich nur wenig aus, um sich nach Wiederherstellung des Verschlusses bald zu einer kleinen Linse zusammenzuziehen. Wurde jedoch statt des reinen Benzols solches genommen, in dem etwas Stearin- oder Ölsäure gelöst war, so bedeckte der Tropfen unter Farbenerscheinung die ganze Oberfläche und zerfiel dann in zahlreiche kleine Tröpfchen. Reine Ölsäure breitete sich unter gesättigtem Benzoldampf nicht aus, so wenig wie reines Benzol, wohl aber die Mischung von beiden.

Zeigen nun alle die besprochenen Fälle, daß Mischung mehrerer Stoffe im allgemeinen die Ausbreitung auf Wasser befördert, so scheint dies doch bei chemisch nahestehenden Substanzen nicht der Fall zu sein, da sowohl das bestgereinigte Petroleum und Paraffin Gemenge verschiedener Kohlenwasserstoffe als auch die mit Alkohol gereinigten Öle Gemenge verschiedener Fette sind. Auch wurde durch Lösung von Paraffin in Benzol die Ausbreitung des letzteren nicht merklich verstärkt.

Es ist überhaupt ziemlich wahrscheinlich, daß nur solche Substanzen das γ_g einer Flüssigkeit stark verkleinern, welche auch γ_s verkleinern, also wirksame Stoffe sind.

Schließlich kann wohl die Vermutung ausgesprochen werden, daß keine vollkommen reine chemisch einheitliche Flüssigkeit, die mit Wasser nicht mischbar ist, sich auf diesem zu dünnen kohärenten Schichten ausbreiten wird.

(Eingegangen 25. März 1916.)

1) Wied. Ann. **67**, 668, 1899.

Eine Anordnung zur Demonstration einiger Gesetze des radioaktiven Zerfalls.

Von Paul Ludewig.

Bei der Besprechung der Gesetze des radioaktiven Zerfalls wird man im Unterricht bei einem genügend vorgebildeten Zuhörerkreis die mathematischen Beziehungen durch Kurvendarstellung hinreichend veranschaulichen können. Einem Laien-Zuhörerkreis wird sich aber durch dieses Hilfsmittel ein eingehendes Verständnis nicht vermitteln lassen. Im folgenden soll eine Anordnung beschrieben werden, mit welcher man das Wesen des radioaktiven Gleichgewichts und einiger anderer Vorgänge beim radioaktiven Zerfall direkt vor Augen führen kann. Sie wird auch im Hochschulunterricht die Kurvendarstellung wirksam ergänzen können.

Der Zerfall einer radioaktiven Substanz geht nach einem Exponentialgesetz vor sich und zwar in der Weise, daß von der Anzahl N_0-Moleküle zur Zeit Null nach t Sekunden nur noch

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

vorhanden sind, worin λ die Zerfallskonstante bedeutet. Um die sich auf diese Formel gründenden Gesetze zu demonstrieren, braucht man eine Anordnung, bei der die zu verschiedenen Zeitpunkten vorhandene Substanzmenge dem gleichen Gesetze gehorcht. Sie wurde in einfacher Weise dadurch hergestellt, daß aus einem Glaszylinder durch ein im Boden befindliches Loch Wasser ausfließen gelassen wurde. Die Höhe der Wassersäule gibt dann ein Maß für die vorhandene Substanzmenge. Fig. 1 zeigt

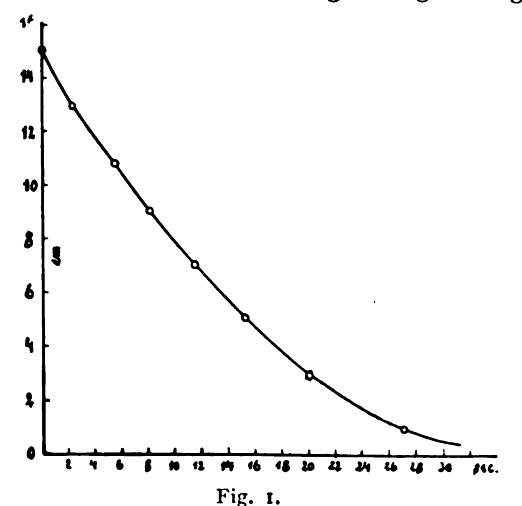


Fig. 1.

die Abhängigkeit der Flüssigkeitshöhe von der Zeit bei einem Lochdurchmesser von 2 mm. Die entstehende Kurve entspricht nicht genau dem Exponentialgesetz. Die ganze Anordnung vermag daher die Gesetze nicht quantitativ genau wiederzugeben, die qualitative Übereinstimmung ist aber so gut, wie sie bei einem Demonstrationsapparat nur verlangt werden kann.

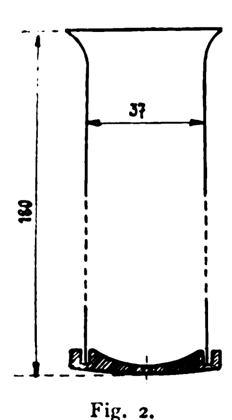


Fig. 2.

Die verwendeten Glasröhren (Fig. 2) hatten einen lichten Durchmesser von 3,7 cm und eine Länge von 18 cm. Sie sind oben etwas geweitet, um sie bequem in Holzgabeln einhängen zu können. Die untere Öffnung der Röhren ist mit einer Hartgummiplatte geschlossen, und zwar sind die Röhren in die Hartgummiplatte mit Siegellack eingekittet. Die Hartgummistücke sind auf der Unterseite ein wenig gewölbt, damit das Wasser immer in der Mitte abtropft.

Um möglichst übersichtliche Verhältnisse zu erhalten, mußte aus den drei Zerfallsreihen eine Zerfallsfolge ausgewählt werden, bei der die Halbwertszeiten von derselben Größenordnung sind. Dies ist in der Zerfallsreihe des Radiums zwischen der *Ra Em* und dem *Ra D* der Fall, wenn man von der Verzweigung absieht. Diese Zerfallsfolge wurde daher dem Apparat zugrunde gelegt.

Den äußeren Aufbau[1]) zeigen die Fig. 3—5 und 7 und 8. Aus einem aufrechtstehenden Holzbrett ragen vier Holzgabeln heraus, in welche die vier Glasröhren eingehängt werden. Die Glasröhre *Ra A* besitzt im Boden ein relativ weites, *Ra B* ein enges, und *Ra C* ein mittelgroßes Loch, während der Boden von *Ra D*, der großen Halbwertszeit entsprechend, geschlossen ist.

Die Figuren 3—5 veranschaulichen den Fall, daß zur Zeit Null nur eine bestimmte Menge von *Ra A* vorhanden ist, und zeigen in welcher Weise sich die Mengeverhältnisse der aufeinanderfolgenden Produkte *Ra B*, *Ra C* und *Ra D* zeitlich ändern. Die Rechnung ergibt für diesen Fall die Kurven *A B C D* der Fig. 6[2]).

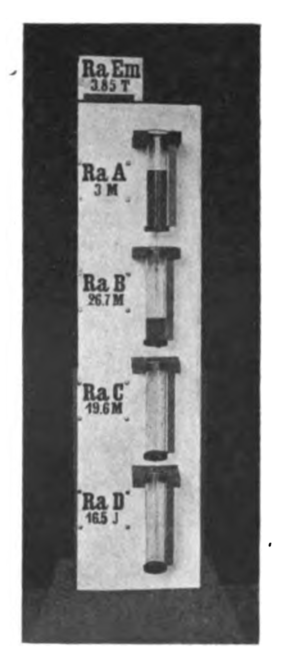




Fig. 3.

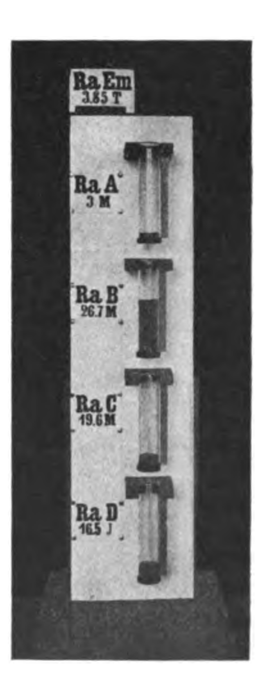


Fig. 4.

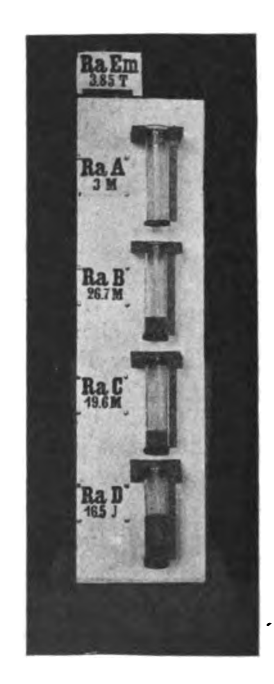


Fig. 5.

1) Der Apparat kann von der Modellwerkstatt der Kgl. Bergakademie zu Freiberg i. S. bezogen werden.

2) Diese Figur und Fig. 9 sind dem Buch: E. Rutherford, Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen, Handbuch der Radiologie Bd. II, Leipzig 1915 entnommen.

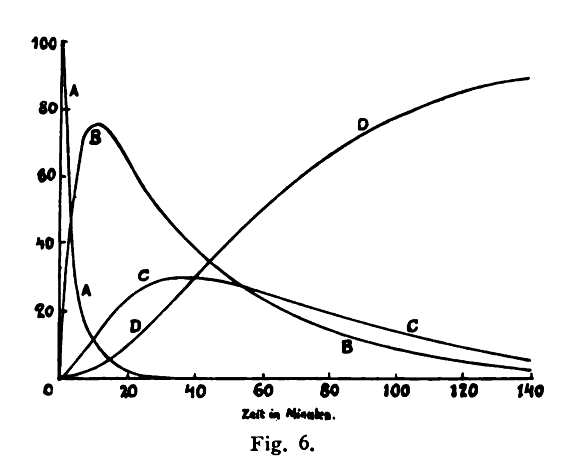


Fig. 6.

Vergleicht man diese Kurven mit den Flüssigkeitshöhen in den Figuren 3—5, so sieht man die gute qualitative Übereinstimmung. Fig. 3 ist aufgenommen kurz nach dem Beginn des Versuchs, Fig. 4, als *Ra A* fast verschwunden ist und Fig. 5 etwas nach dem Maximum von *Ra C*. Man sieht, wie *Ra A* sehr schnell ausfließt, *Ra B* ein scharf ausgeprägtes, *Ra C* ein flaches Maximum hat und wie allmählich *Ra D* die ganze Flüssigkeitsmenge in sich aufnimmt. Die ganze Dauer des Versuches beträgt etwa 3 Minuten. Das Wasser ist mit Kaliumpermanganat gefärbt.

Die Anordnung nach Fig. 7 und 8 dient zur Demonstration des Begriffes des radioaktiven Gleichgewichts. Eine Flasche mit Ablaufhahn stellt eine große Menge *Ra Em* dar. Da ihre Halbwertszeit sehr groß im Vergleich zu derjenigen von *Ra A*, *Ra B* und *Ra C* ist, so kann man annehmen, daß die Menge von *Ra Em* während der Dauer des Versuchs nicht merklich abnimmt. Man muß daher das Wasser in dieser Flasche durch Zugießen immer auf demselben Niveau halten. Durch einen Vorversuch stellt man fest, wie weit man den Hahn zu öffnen hat, um im Gleichgewichtszustand brauchbare Flüssigkeitshöhen zu erhalten. Vor dem Beginn des Versuches hat man das Wasser aus *Ra A*, *Ra B* und *Ra C* vollkommen ausfließen zu lassen. An Stelle der Glasröhre bei *Ra D* ist ein größeres Gefäß eingesetzt, welches nach hinten einen Ablauf hat.

Fig. 7 zeigt den Zustand nicht lange Zeit nach dem Öffnen des Hahnes. Das Gleichgewicht ist hier noch nicht erreicht. Es entspricht dieser Zustand dem eines unreifen Radiumpräparats.

Bei Fig. 8 ist das Gleichgewicht eingetreten. Man sieht wie von *Ra A* mit seiner kurzen Halbwertszeit nur wenig, von *Ra B* mit seiner langen Halbwertszeit viel Substanz vorhanden ist, während *Ra C* seiner mittelgroßen Zerfallszeit entsprechend eine Substanzmenge von mittlerer Größe anzeigt.

Noch ein Drittes läßt sich mit der Anordnung zeigen, nämlich der Fall, daß zunächst die primäre Quelle *Ra Em* die Materie *Ra A* in konstantem Betrage so lange liefert, bis Gleichgewicht eingetreten ist, und daß dann die primäre Quelle plötzlich entfernt wird. Die Rechnung ergibt, daß die Mengen von *Ra A*, *Ra B* und *Ra C* zeitlich den Kurven der Fig. 9 entsprechend abnehmen. Beim Versuch wartet

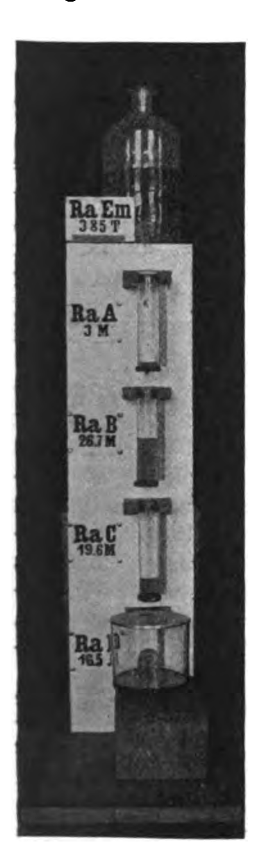


Fig. 7.

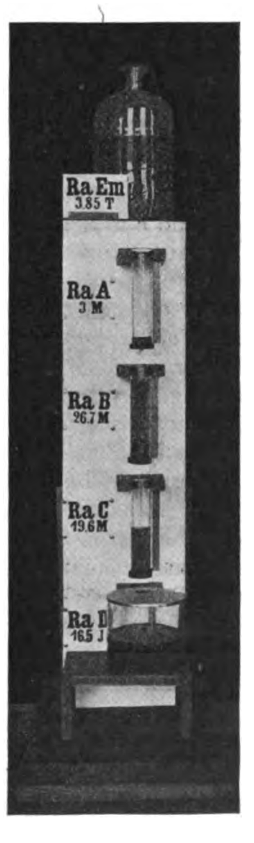


Fig. 8.

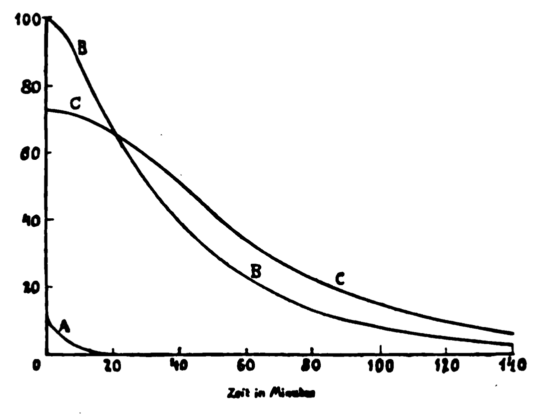


Fig. 9.

man, bis (siehe Fig. 8) das Gleichgewicht eingetreten ist und schließt dann den oberen Hahn. Der zeitliche Verlauf der Flüssigkeitshöhen entspricht den Kurven in Fig. 9.

Freiberg i. S., Physikalisches Institut der Bergakademie.

(Eingegangen 25. März 1916.)

Zur Theorie des Starkeffekts.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Paul S. Epstein.

1. Schon kurze Zeit nach der ersten Starkschen Veröffentlichung wurden Versuche unternommen, den von ihm entdeckten Effekt mit Hilfe des Bohrschen Atommodells theoretisch zu deuten. Nach dem ersten qualitativen Versuch von Warburg[1]) faßte Bohr[2]) selbst diese Aufgabe an und gelangte vor kurzem zu einer Formel, welche die stärksten p-Komponenten gut darstellt.

Parallel damit wurden die Grundlagen für die Behandlung des Bohrschen Modells in Arbeiten von Sommerfeld[3]) und Planck[4]) ausgebaut. Besonders die Abhandlungen des ersteren enthalten Quantenansätze, welche eine vollständig präzise Untersuchung eines jeden vorgegebenen Falles gestatten. Diese Ansätze haben sich bereits in seinen Händen für die Erklärung der Feinstruktur von optischen und Röntgenlinien vorzüglich bewährt. Sommerfeld hebt hervor, daß diese Prinzipien auch auf den Starkeffekt anwendbar sind und ein Anwachsen der Komponentenzahl mit der Nummer der Serienlinien, wie es wirklich beobachtet wurde, erwarten lassen.

Diese Umstände haben den Verfasser ermutigt, das Problem des Starkeffekts bei der Balmerserie des Wasserstoffs ausführlich zu behandeln. Die Einzelheiten der Theorie bleiben einer späteren Publikation vorbehalten; es sei hier nur erwähnt, daß es sich um eine konsequente Anwendung und Weiterbildung der von Sommerfeld gegebenen Grundlagen handelt.

2. Das Resultat der Theorie besteht in der folgenden einfachen Formel für die Verschiebung der Komponenten aus der Gleichgewichtslage

1) E. Warburg, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 1259, 1913.

2) N. Bohr, Phil. Mag. **27**, 506, 1914; **30**, 404, 1915.

3) A. Sommerfeld, Münchener Berichte, S. 425 ff., 459, 1915.

4) M. Planck, Berliner Berichte, S. 909, 1915; Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. **17**, 407, 438, 1915.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{3h}{8\pi^2 e\mu c} E Z, \\ Z &= \{(m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2) - \\ &\quad (n_1+n_2+n_3)(n_1-n_2)\}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei bedeuten die Buchstaben: h das Plancksche Wirkungsquantum ($6{,}55 \cdot 10^{-27}$), e die Elementarladung ($4{,}69 \cdot 10^{-10}$), μ die Masse des Elektrons $\left(\frac{e}{\mu} = 5{,}25 \cdot 10^{17}\right)$ und c die Lichtgeschwindigkeit. m und n sind positive ganze Zahlen[1]), und zwar entsprechen die Summen $m_1+m_2+m_3$ und $n_1+n_2+n_3$ den Ordnungszahlen der Balmerschen Serie, so daß stets gilt

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2, \quad (2)$$

wogegen $m_1+m_2+m_3$ für jede Linie der Serie gleichfalls konstant ist, aber für die verschiedenen Linien H_α, H_β, H_γ, H_δ usw. die bzw. Werte

$$m_1 + m_2 + m_3 = 3, 4, 5, 6, \cdots \quad (3)$$

annimmt.

Darüber hinaus beschränken wir die Auswahl noch weiter durch die Forderung[2]), daß bei den spektralen Übergängen die Quantenzahlen einzeln nicht zunehmen dürfen, eine Bedingung die sich u. a. bei der Diskussion der Röntgenspektren bewährt hat, nämlich

$$n_1 \leqq m_1, \quad n_2 \leqq m_2, \quad (4)$$

die wir noch durch die dritte Forderung

$$n_3 \leqq m_3 \quad (5)$$

ergänzen.

Bekanntlich gehen die Bohrschen Ansätze in ihrer gegenwärtigen Form nur auf die Verhältnisse in den stationären Zuständen ein, während deren das Elektron nicht strahlt, nicht aber auf die Vorgänge während der Strahlung selbst. Deshalb gestattet die Theorie vorläufig keine direkten Aussagen über die Intensität und Polarisation der Komponenten. Umgekehrt kann man aber erwarten, aus der Kenntnis der Anfangs- und Endbahnen durch Vergleich mit den experimentell beobachteten Verhältnissen zu bestimmten Regeln über Schwingungsrichtung und Lichtstärke zu gelangen. In der Tat lassen sich in bezug auf die Polarisation gewisse Regelmäßigkeiten erkennen, ein ganz zuverlässiges Prinzip, das von keiner Komponente durchbrochen wird, ließ sich indessen noch nicht aufstellen[3]). Deshalb wird im folgen-

1) Die geometrische Bedeutung dieser „Quantenzahlen" ist eine andere als die derselben Buchstaben bei Sommerfeld. Sie hängen mit den letzteren auf ziemlich komplizierte Weise zusammen.

2) A. Sommerfeld, l. c., S. 448.

3) Inzwischen hat sich für die Schwingungsrichtungen die folgende empirische Regel ergeben, welche anscheinend streng gültig ist: geradzahlige Differenzen $m_3 - n_3$ ergeben p-Polarisation, ungeradzahlige

den von einer Zuordnung der Komponenten zu einer bestimmten Polarisationsrichtung vorläufig abgesehen.

3. Somit zeigt uns Formel (1), daß die Verschiebungen der Komponenten, in Schwingungszahlen $\left(\nu = \frac{1}{\lambda}\right)$ gemessen, Multipla einer konstanten der Feldstärke E proportionalen Entfernung sind und (nach der Struktur des Ausdrucks (1) für Z) in bezug auf die Ruhelage symmetrisch liegen. Wird E in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ gemessen, so hat die Konstante den Zahlenwert

$$\Delta\nu = 6{,}60 \cdot 10^{-5}\, E \cdot Z. \tag{6}$$

In Wellenlängen erhält man

$$\Delta\lambda = -\lambda^2 \Delta\nu = 6{,}60 \cdot 10^{-5} \lambda^2\, E \cdot Z. \tag{7}$$

Für die Linie H_α ist $\lambda = 6562{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm, für E setzen wir den von Stark angegebenen Wert $E = 104000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ ein. Es folgt

$$\Delta\lambda = 2{,}94\, Z\ \text{Å}. \tag{8}$$

Tabelle I gibt den Vergleich der Resultate der Rechnung mit der von Stark[1]) beobachteten Feinzerlegung. In der ersten Kolumne sind alle unter Berücksichtigung der Bedingungen (2) bis (5) möglichen Absolutwerte von Z eingetragen.

Tabelle I (H_α-Linie).

Berechnet		Beobachtet von J. Stark	
Z	$\Delta\lambda$	p-Komp. $\Delta\lambda$	s-Komp. $\Delta\lambda$
5	14,7 Å	—	—
4	11,7	11 5	—
3	8,8	8,8	—
2	5,9	6,2	—
1	2,9		2 6
0	0		0

Entsprechend erhält man aus Gleichung (7) für H_β $\left(\lambda = 4861{,}3\ \text{Å},\ E = 104000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}\right)$

$$\Delta\lambda = 1{,}61 \cdot Z\ \text{Å}. \tag{9}$$

Tabelle II (H_β-Linie).

Berechnet		Beobachtet von J. Stark	
Z	$\Delta\lambda$	p-Komp. $\Delta\lambda$	s-Komp. $\Delta\lambda$
12	19,4 Å	19,4	19,3
10	16,1	16,4	16,4
8	12,9	13,2	13,2
6	9,7	10,0	9,7
4	6,5	6,7	6,6
2	3,2	3 3	3,4
0	0	0	0

s-Polarisation. Auch in den Intensitäten läßt sich eine Gesetzmäßigkeit erkennen, welche u. a. auf das Auftreten der überzähligen (eingeklammerten) Komponenten unserer Tabellen Licht wirft. Dadurch sind auch die Erörterungen des § 4 zum Teil überholt. (Anmerkung in der Korrektur.)

1) J. Stark, Gött. Nachr. 1914, S. 427.

Herr Stark übernimmt für den von ihm angegebenen Absolutwert des elektrischen Feldes (der übrigens aus der Aufspaltung der H_β-Linie bestimmt ist) keine Garantie, wir hatten indessen keine Veranlassung, ihn im Falle der H_α- und H_β-Linien abzuändern. Dagegen ergeben die Komponenten von H_γ und H_δ eine genügend genaue Äquidistanz nur dann, wenn man für das Feld die Werte $E = 102000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$, bzw. $E = 108000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ $\left(\text{an Stelle von } 104000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}\right)$ zugrunde legt. Es könnte ja sein, daß diese Linien vorwiegend in einem andern Teil des nicht ganz homogenen Feldes emittiert wurden.

Unter dieser Voraussetzung $\left(E = 102000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}\right)$ ergibt sich nach (7) für H_γ ($\lambda = 4340{,}5$ Å)

$$\Delta\lambda = 1{,}33\, Z. \tag{10}$$

In Tabelle III haben wir als letzte Kolumne noch die von Stark angegebenen Intensitäten verzeichnet. Die eingeklammerten Ordnungszahlen werden von unserem Auswahlprinzip nicht zugelassen.

Tabelle III (H_γ-Linie).

Berechnet		Gemessen von J. Stark		
Z	$\Delta\lambda$	p-Komp. $\Delta\lambda$	s-Komp. $\Delta\lambda$	Intensität
21	28,0	29,4		1 (fraglich)
(20)	—		26,3	1,1
18	23,9	23,9		10,9
(17)	—		22,8	1
16	21,3	—	—	
15	20,0	19,9		7,2
13	17,3		17,3	6,1
12	16,0	15,9		2,0
11	14,4	—	—	
10	13,3		13,3	4,3
9	12,0	—	—	
8	10,6	10,6		1
7	9,3		9,7	1,2
6	8,0	—	—	
5	6,7	6,6		1,5
4	5,3	—	—	
3	4,0		3,9	3,6
2	2,7	2,7		1,6
1	1,3	—	—	
0	0		0	7,2

Entsprechend liefert H_δ ($\lambda = 4101{,}7$ Å) unter Zugrundelegung des Wertes $E = 108000 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ nach (7)

$$\Delta\lambda = 1{,}19\ \text{Å}, \tag{11}$$

was zur Tabelle IV führt.

Tabelle IV (H_γ-Linie).

Berechnet Z	$\Delta\lambda$	Gemessen von J. Stark p-Komp. $\lambda\Delta$	s-Komp. $\Delta\lambda$	Intensität
32	38,1	37,5		1 (fraglich)
(30)	(35,7)		34,8	1 (fraglich)
28	33,4	33,4		7,2
26	30,9		30,4	1,3
24	28,6	28,6		2,8
22	26,2		25,8	2,4
20	23,8	24,2		1,1
18	21,3		21,3	2,0
16	19,1	19,6		1,2
14	16,7		17,2	1
12	14,3	14,4		1,5
10	11,9		11,9	2,1
8	9,5	9,6		1,2
6	7,3		7,4	3,2
4	4,8	5,2		1
2	2,4		2,4	1,3
0	0	—	—	

4. Um die Bewertung der mitgeteilten Ergebnisse zu erleichtern, wollen wir einen Absatz der Starkschen Arbeit[1]) wörtlich anführen: „... es ist mit der Möglichkeit zu rechnen, daß außer den beobachteten wenig intensiven Komponenten noch weitere Komponenten vorkommen, welche noch lichtschwächer sind und darum in meinen Spektrogrammen unterbelichtet blieben. Mit Sicherheit möchte ich diesen Fall bei der Linie H_α vermuten ..... Was die Linien H_β, H_γ, H_δ betrifft, so ist ihre Komponentenzahl wohl annähernd richtig, immerhin können auch bei ihnen noch weitere sehr wenig intensive Komponenten vorkommen und, auch hiervon abgesehen, muß ich einige der für sie im nachstehenden angegebenen Komponenten als fraglich bezeichnen, da sie entweder nur zweifelhaft schwach herauskamen, oder da sie in den Gitterspektrogrammen am Orte möglicher Geister liegen."

Hiernach ist die Übereinstimmung in den Tabellen I, II, IV eine ganz überraschend gute. Es scheint, daß Stark die Vollständigkeit seiner Messungsergebnisse, soweit sie sich auf die Linien H_α, H_β, H_δ beziehen, unterschätzt hat. In den experimentellen Zerlegungen fehlt bei H_α und H_δ nur je eine einzige von den theoretisch möglichen Lagen, während bei H_β die Übereinstimmung eine vollständige ist. Die durch unsere Theorie nicht gegebene, von Stark selbst angezweifelte Komponente 34,8 der Tabelle IV, welche sich überhaupt nicht in das allgemeine Schema einfügt, wird man wohl als nicht reell ansehen dürfen. Etwas größere Abweichungen der beobachteten Komponenten von der berechneten Lage treten bei H_δ (wie auch bei H_γ) nur in den sehr lichtschwachen, schwer zu messenden Komponenten auf.

Weniger erfreulich ist die Sachlage bei der Linie H_γ. Auf den negativen Befund des Experiments für einzelne theoretisch mögliche Komponenten ist nach obigem kein großes Gewicht zu legen. Sehr störend ist aber das Auftreten zweier Komponenten, welche den theoretisch nicht vorgesehenen Multipla $Z = 17$ und $Z = 20$ entsprechen. Diese Linien sind zwar die schwächsten aller s-Komponenten, jedoch von Stark nicht als fraglich bezeichnet. Es ist durchaus nicht leicht einzusehen, warum das durch die Ungleichungen (4) und (5) gegebene Auswahlprinzip, welches sich in den übrigen Serienlinien, wie auch in den Sommerfeldschen Anwendungen so gut bewährt hat, gerade in diesem Punkte versagt. Die Theorie kann indessen an Hand des experimentellen Materials noch manches lernen, und die im übrigen erzielten Resultate berechtigen zu der Hoffnung, daß die Zusammenarbeit von Rechnung und Beobachtung auch diese letzte Unklarheit beseitigen wird.

Wir glauben, daß die mitgeteilten Ergebnisse einen neuen schlagenden Beweis für die Richtigkeit des Bohrschen Atommodells liefern, dessen Überzeugungskraft sich auch die reservierteren Fachgenossen kaum entziehen können werden. Es scheint, daß die Leistungsfähigkeit der Quantentheorie in ihrer Anwendung auf dieses Modell an das Wunderbare grenzt und noch lange nicht erschöpft ist.

München, den 26. März 1916.

(Eingegangen 29. März 1916.)

1) J. Stark, l. c., S. 434.

Bemerkung über die Konstante der Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers.

Notiz zu der gleichnamigen Abhandlung des Herrn W. W. Coblentz.

Von Walther Gerlach.

1. Herr W. W. Coblentz[1]) hat in dieser Zeitschrift Versuche über die Konstante des Stefan—Boltzmannschen Strahlungsgesetzes mit einem von meinem Resultate abweichenden Ergebnis veröffentlicht, obgleich seine Methode sich eng an die anschließt, mit der ich die gleiche Konstante gemessen habe[2]). Wenngleich die Versuche des Herrn Coblentz noch nicht abgeschlossen und somit seine Resultate noch keine endgültigen sind, sei es doch gestattet, kurz auf einen Punkt seiner Mitteilung hinzuweisen, der in direktem Widerspruch zu verschiedenartigen Versuchen von mir steht.

2. Schon in dem kritisch wertvollen zusam-

1) Diese Zeitschr. 15, 762, 1914.
2) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 38, 1, 1912.

menfassenden Bericht im Jahrbuch der Elektronik[1]) weist Coblentz darauf hin, daß er einen Punkt meiner Anordnung für bedenklich hält: Die Wärmeableitung an den beiden Stromzuführungsstellen zu dem Meßstreifen, an denen auch die Potentialdrähte zur Messung der im Streifen abgelagerten elektrischen Energie angebracht waren. Coblentz vermutet also eine andere Temperaturverteilung bei Strahlungs- und Stromheizung des Streifens. Ich hatte daraufhin Versuche angestellt[2]), welche — nach dem bei Wärmeleitungsmessungen schon verwandten Prinzip — Einflüsse durch Endableitung dadurch aufdecken sollten, daß dieselbe Strahlung einmal mit einem langen, dann mit einem kurzen Streifen absolut gemessen wurde. Ein eventueller Fehler hätte bei der damals verwandten Anordnung bei der Messung mit dem kleinen Streifen (8 mm lang) etwa 5 mal größer als bei Verwendung des großen Streifens (27 mm lang) sein müssen. Ich fand jedoch bis auf 1 Proz. — die Meßgenauigkeit betrug $1^1/_2$ Proz. — übereinstimmende Werte mit beiden Anordnungen, auch bei verschieden großen Strahlungsintensitäten. Offenbar hat Herr Coblentz diese kurze Bemerkung übersehen.

3. Coblentz ändert bei seinen Strahlungsmessungen die von mir angewandte Methode insofern ab, als er nicht die im ganzen Streifen abgelagerte elektrische Energie mißt, sondern nur die in der Mitte; er erreicht das durch Potentialdrähte, die etwa 3 mm auf jeder Seite von der Zuleitung entfernt auf dem Streifen angebracht sind, und deren Entfernung voneinander die Längsdimension der Empfängerfläche definiert. Ich habe mit meiner Thermosäule die Versuche wiederholt. Der Streifen aus Manganin, etwa 8 μ dick, ist 3,2 cm lang, in etwa 3—4 mm Abstand von jeder Zuleitungsstelle sind mit einer Spur Weichlot Potentialdrähte aus 20 μ-Platindraht angebracht, ebensolche direkt an den Auflageflächen des Streifens auf den Kupferzuführungen. Sodann wurde der Streifen elektrolytisch platiniert. Der Streifen wird elektrisch geheizt mit Strömen zwischen 0,01 und 0,1 Ampere, entsprechend den bei den absoluten Strahlungsmessungen verwandten Strömen. Die Spannung am ganzen Streifen und an dem durch die Potentialdrähte gegebenen mittleren Teil sind mit Dießelhorsts Kompensationsapparat gemessen. Ich finde das in Betracht kommende Verhältnis $\frac{ie}{F}$ für alle Strombelastungen innerhalb 1 Proz. konstant und damit auch die Strahlungsmessungen unabhängig von der Art der elektrischen Messung; die Fehlergrenze ist durch die bei der Flächenmessung erreichte Genauigkeit gegeben.

1) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **10**, 340, 1913.
2) W. Gerlach, Ann. d. Phys. **42**, 1163, 1913.

4. Es sei bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, daß auch absolute Messungen im höchsten Vakuum dieselben Werte ergeben wie in Luft von Atmosphärendruck, und das sowohl bei horizontaler wie vertikaler Stellung der Thermosäule (Genauigkeit dieser Versuche etwa 2—3 Promille), allerdings nur, wenn die Schwärzung mit Platinmohr bewirkt ist[1]). Eine Fehlerquelle durch Wärmeableitung an den Enden und verschiedenartige Temperaturverteilung im Streifen sollte sich aber auch hier bemerkbar machen. Auch bei Strahlungsintensitäten, die im Verhältnis von 1 : 40 stehen, bleiben die absoluten Angaben dieselben. Ich erhalte aus neuen, demnächst zu veröffentlichenden Messungen zwischen 300° abs. und 700° abs.

$$\sigma = 5{,}85 \times 10^{-12} \text{ Watt cm}^{-2} \text{ grad}^{-4}$$

in guter Übereinstimmung mit meinem früheren Wert 5,90. Ferner stimmen die absoluten Messungen über die Gesamtstrahlung der Hefnerlampe von Ångström[2]), Coblentz[3]) und mir[4]) innerhalb der erreichbaren Genauigkeit überein, während die Abweichung des Coblentzschen σ-Wertes ($\sigma = 5{,}61 \times 10^{-12}$) von meinem Wert außerhalb dieser Fehlergrenze liegt.

5. Wodurch der niedrige Wert der Coblentzschen Konstanten bedingt ist, kann ich nicht angeben. Zweifellos liegt aber noch ein sehr bedenklicher Punkt in seiner Anordnung, so lange die absoluten Angaben seiner Thermosäule nicht der Spaltbreite vor dem Streifen, d. h. also der bestrahlten Streifenfläche proportional sind. Diese Proportionalität war bei mir streng erfüllt, wenn die Spaltbacken nicht zu nahe am Streifen lagen. Vielleicht ist in Coblentz' Anordnung noch eine störende Wärmeableitung durch eine der vielen Blenden innerhalb der Thermosäule vorhanden.

Zusammenfassung: Die Abweichung des Coblentzschen Wertes der σ-Konstante von meinem Wert hat ihren Grund nicht in der Wärmeableitung an den Streifenenden, wie a) durch direkte Kontrollversuche, b) durch Messungen mit langen und kurzen Streifen, c) durch Messungen im Vakuum gezeigt wird.

1) Diesbezügliche Versuche werden in einiger Zeit in den Ann. d. Phys. veröffentlicht werden.
2) K. Ångström, Phys. Rev. **17**, 302, 1903; diese Zeitschr. **3**, 257, 1902.
3) W. W. Coblentz, Bull. Bur. Stand. **11**, 87, 1914.
4) W. Gerlach, diese Zeitschr. **14**, 577, 1913.

Tübingen, Phys. Institut der Universtät, März 1916.

(Eingegangen 1. April 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Flüssige Kristalle und anisotrope Flüssigkeiten.

Von W. Voigt.

(Schluß.)

15. Brechungsindizes und Doppelbrechung.

Auf einzelne merkwürdige optische Eigenschaften der anisotropen Flüssigkeiten ist im Vorstehenden beiläufig bereits hingewiesen worden, weil die bez. Erscheinungen zur Aufklärung der Konstitution und des allgemeinen physikalischen Verhaltens jener Körper dienen konnten. Das Erscheinungsgebiet ist aber so reich und außerdem in neuster Zeit so fruchtbar, auch messend, bearbeitet worden, daß eine einigermaßen systematische Darstellung desselben angezeigt erscheint.

Wir beginnen mit den Beobachtungen, die sich auf die Verhältnisse der Brechungsindizes, speziell der Doppelbrechung beziehen.

Hier sind die ersten, orientierenden Messungen von Lehmann[1]) angestellt worden. Bei denselben war die zu untersuchende Substanz in dem Raum zwischen einer ebenen Glasplatte und einer Linse von großem Krümmungsradius geschmolzen, so daß sie eine Schicht von radial langsam variierender Dicke bildete. Zwischen gekreuzten Polarisatoren zeigte sie im trüben Zustande diffuse Doppelbrechungsringe, die darauf beruhten, daß die Individuen (§ 3), obwohl ungeordnet, doch durch ihr Zusammenwirken einen Gangunterschied hervorriefen. Diese Ringe ließen sich dadurch klären, daß die Linse auf der Unterlage in konstanter Richtung hin- und hergeschoben wurde, und dadurch die Elemente im wesentlichen untereinander und zur Unterlage parallel orientiert wurden. Lehmann fand durch Ausmessung von Ringradien bei bekannter Krümmung der Linse für die Differenz der Hauptbrechungsindizes bei *p*-Azoxyanisol und -phenetol 0,33, etwa ebensoviel, als er aus Beobachtungen über das scheinbare Verschwinden von Tropfen (in der zweiten Hauptlage), die in Flüssigkeiten von wechselnden Brechungsindizes suspendiert waren, geschlossen hatte.

Dieser große Wert der Doppelbrechung ist sehr merkwürdig und liefert ein neues Argument gegen die Emulsionshypothese, selbst in der Form, daß die in der isotropen Schmelze suspendierten Teilchen winzige feste Kriställchen wären; den letzteren müßten nämlich dann offenbar Doppelbrechungen von bei festen Körpern ganz unerhörten Beträgen beigelegt werden.

Die Feststellung Vorländers[1]), daß sich Schichten der von ihm entdeckten neuen anisotropen Flüssigkeiten zwischen Glasplatten mit ihren Elementen so vollkommen untereinander parallel und normal zur Plattenebene orientieren lassen, daß sie einer einachsigen Kristallplatte normal zur Hauptachse optisch äquivalent werden, gaben den optischen Untersuchungen jener Substanzen einen entscheidenden Anstoß; denn es wurden nunmehr alle Methoden anwendbar, die bei Kristallplatten zum Ziele führen.

Vorländer vertrat die Ansicht, daß sich die (nach S. 86 lineär ausgedehnten) Moleküle in jenen Schichten zu Fäden oder Stäbchen ordneten, und man kann in der Tat mit einem solchen Bilde vorteilhaft operieren. Eine Frucht der durch diese Vorstellung angeregten und mit Hauswaldt durchgeführten Untersuchungen ist ein Atlas mit photographischen Aufnahmen im konvergenten polarisierten Lichte[2]). Derselbe zeigt bei Anwendung gekreuzter Nikols erhaltene prachtvolle Interferenzringe mit dunklem Kreuz, wie sie vollkommner durch keine Platte aus einem festen Kristall herstellbar sind. Bei einfallendem zirkular-polarisierten Licht ergaben sich jene bekannten Deformationen der Interferenzringe, aus denen man auf den Charakter der Doppelbrechung der Substanz schließen kann.

Die Ringe entsprechen durchweg einachsigen Kristallen. Wenn also die Moleküle keine rotatorische Symmetrie um die Richtung normal zur Schicht besitzen, so ist jedenfalls ihre Orientierung derart ungeordnet, daß die resultierende Wirkung für Bereiche von der Größenordnung einer Wellenlänge jene Symmetrie besitzt. Der Charakter der Doppelbrechung ist in der überwiegenden Zahl der Fälle positiv.

Eine besondere Stütze für seine Stäbchentheorie sieht Vorländer in der Tatsache, daß es durch geeignete Behandlung (Kompression) der Schichten gelang, die Interferenzerscheinungen in einer solchen Weise zu deformieren, wie dies einer Knickung der Stäbchen, d. h. einer zur Mittelebene der Schicht symmetrischen Neigung gegen die Normale entspricht.

Die Vorländerschen Entdeckungen gaben Sommerfeldt[3]) Veranlassung, zuerst die Po-

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. **18**, 796, 1905.

1) D. Vorländer, Zeitschr. f. phys. Chem. **61**, 169, 1907.

2) D. Vorländer und H. Hauswaldt, Nov. Act. Ac. Leop. Carol. **90**, 107, 1909.

3) E. Sommerfeldt, diese Zeitschr. **9**, 234, 1908.

larisationsringe im konvergenten Lichte zur Bestimmung von Doppelbrechungen zu benutzen. Die beobachteten Substanzen Kalium- und Ammoniumoleat ergaben aber ziemlich diffuse Ringe und überdies relativ kleine Doppelbrechungen.

Sehr bedeutungsvolle Messungen über Brechungsindizes verdankt man Dorn und Lohmann[1]). Dieselben betrafen zwei der Vorländerschen[2]) Substanzen (Äthoxybenzalamin-α-Methylzimtsäureäthylester und -Äthylzimtsäureäthylester) und benutzten einerseits das Prinzip des Abbeschen Refraktometers, um absolute Werte von Brechungsindizes n_o des ordentlichen Strahles zu erhalten, andererseits (da der außerordentliche Strahl wegen seines hohen Brechungsindex n_e die Anwendung dieser Methode nicht durchaus gestattete) die Beobachtung der Polarisationsringe zur Kontrolle der Gesetze und zur Bestimmung einiger Zahlen für die Doppelbrechung.

Es ist bekannt, daß die Abbesche Methode an den Grenzwinkel der Totalreflexion für eine zwischen zwei Prismen aus hochbrechendem Glase eingeschlossene Flüssigkeitsschicht anknüpft. Bei dem Operieren mit einer anisotropen Flüssigkeit wurden zunächst deren Elemente in früher erörterter Weise normal zur Schicht orientiert und die Schicht dadurch in eine Platte eines einachsigen Kristalles verwandelt. Die Grenzen der totalen Reflexion sind durch die Geschwindigkeiten parallel der Begrenzung, hier also durch diejenigen normal zur optischen Achse der Schicht bestimmt; ihre Beobachtung lieferte daher unmittelbar die Werte der Hauptbrechungsindizes n_o und n_e. Gegenüber der Methode der Interferenzringe hat die Abbesche nicht nur den Vorteil, n_o und n_e einzeln zu liefern; sie besitzt auch den weiteren Vorzug, die u. a. nicht ganz einfache Messung der Dicke der benutzten Schicht zu vermeiden.

Die von Dorn und Lohmann untersuchten Substanzen erregen besonderes Interesse dadurch, daß sie je zwei anisotrop flüssige Phasen liefern. Die Messungen mit dem Abbe-Refraktometer erstreckten sich über das ganze Existenzbereich beider Phasen und lieferten besonders bei der zweitgenannten Substanz höchst merkwürdige Temperaturabhängigkeiten. Bei der i-Phase mit sinkender Temperatur stark ansteigende n_o, beim ersten Umwandlungspunkt ein unstetiger sehr bedeutender Abfall, weiter in der a_I-Phase stetiges Sinken, beim zweiten Umwandlungspunkt ein kleinerer Sprung, darauf folgend in der a_{II}-Phase sehr starkes stetiges Fallen. Bei der erstgenannten Substanz ist nur in der Phase a_{II} der Verlauf abweichend, nämlich anfänglich schwach fallend, dann ähnlich steigend.

Die Beobachtungen im konvergenten Licht zwischen Polarisatoren bezogen sich nur auf die a_{II}-Phase; sie hatten in erster Linie den Zweck, zu konstatieren, daß das Gesetz der Farbenringe der Theorie für homogene Kristallplatten folgt, so daß also die untersuchten Schichten sich auch bei schiefem Einfall wie Kristallplatten verhielten. Die Übereinstimmung erwies sich als sehr weitgehend; die Ausrichtung der Moleküle normal zur Schicht mußte also als ziemlich vollständig angesehen werden.

Die wenigen gewonnenen Zahlen für die Doppelbrechung liegen im Bereich der von Lehmann gefundenen.

Eine spätere Arbeit von Dorn[1]) vervollständigt diese Resultate besonders durch Bestimmung von n_e für die a_I-Phase bei verschiedenen Temperaturen nach der Abbe-Methode. Der Verlauf fand sich von dem für n_o durchaus abweichend; bei dem ersten Umwandlungspunkt ein sprungweises und darnach innerhalb der a_I-Phase ein stetiges Ansteigen mit fallender Temperatur, derart, daß hierbei die Doppelbrechung stark zunahm. Beobachtungen von Cholesterylpropionat ergaben nicht völlig konstante Verhältnisse.

In gleicher Richtung wie die Dornschen Arbeiten zielt der eine Abschnitt einer umfassenden Untersuchung Stumpfs[2]) über den von Vorländer hergestellten p-Cyanbenzalaminozimtsäure-akt-amylester, der nur eine gut zugängliche a_{II}-Phase besitzt. Der Verlauf war dem zuletzt beschriebenen ganz analog, indessen hatte hier n_o einen größeren Wert als n_e; die Substanz war also negativ-einachsig. Auf das besondere Interesse, das ihre überaus starke optische Aktivität bietet, wird unten hingewiesen werden.

Die Beobachtungen Dorns an Cholesteryl-Verbindungen sind von Kreide[3]) zur Klarstellung der störenden Ursachen fortgesetzt worden.

An die Interferenzringe im konvergenten Licht knüpften auch Beobachtungen von Mauguin[4]) an; sie lieferten für die (positive) Doppelbrechung von p-Azoxyphenetol bei Na-Licht den Wert

1) E. Dorn u. W. Lohmann, Ann. d. Phys. **29**, 533, 1909.
2) D. Vorländer, Ber. d. D. Chem. Ges. **31**, 2033, 1908.

1) E. Dorn, diese Zeitschr. **11**, 777, 1910.
2) F. Stumpf, Diss. Gött. 1911; Ann. d. Phys. **37**, 351, 1912.
3) W. Kreide, diese Zeitschr. **14**, 979, 1913.
4) Ch. Mauguin, C. R. **151**, 686, 1910.

0,37, der in der Nähe der ersten orientierenden Bestimmung von Lehmann liegt.

Mit einem Refraktometer hat auch Gaubert[1]) gearbeitet bei Beobachtungen, die in erster Linie den Einfluß eines Zusatzes von *p*-Azoxyanisol und -phenetol zu Derivaten von Cholesterin betrafen. Die reinen Substanzen zeigten in der $a_{/}$-Phase negative, in der $a_{//}$-Phase positive Doppelbrechung, übrigens von nur geringem Betrag. Die Zusätze, von denen, wie oben viel benutzt, nur eine *a*-Phase bekannt ist, wirkten aber in beiden Fällen im Sinne einer Vergrößerung der Doppelbrechung, die bei der (negativen) $a_{/}$-Phase ziemlich gering, bei der (positiven) $a_{//}$-Phase beträchtlicher ist. Für die letztere folgte die Änderung ungefähr der sonst bei Mischkristallen häufig bestätigten Mischungsregel; in der ersteren versagt die Regel natürlich von vornherein und die bez. Wirkung ist überhaupt sehr schwer verständlich.

16. Aktivität und Dichroismus.

Auf die Fähigkeit der anisotropen Flüssigkeiten, in der Konfiguration suspendierter Tröpfchen die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, hat bereits Lehmann[2]) aus seinen bez. frühesten Beobachtungen geschlossen; er war aber geneigt, diese Wirkungen von denen der gewöhnlichen Aktivität zu unterscheiden und auf spezielle Schichtenstruktur zu deuten. Ebenso ist ihm die Eigenschaft des Dichroismus nicht entgangen, und er hat sie auf analoge Weise zu erklären versucht.

Des Folgenden wegen mag die Erwähnung der bez. Beobachtungen in § 3 noch etwas vervollständigt werden. Suspendierte Tröpfchen von *p*-Azoxyphenetol in der ersten Hauptlage zeigten zwischen gekreuzten Nikols das dunkle Kreuz der einachsigen Kristalle, daneben eine abwechselnde Tönung (weiß und gelb) der dadurch begrenzten Quadranten. Diese Tönung blieb bestehen, wenn der Analysator oder der Polarisator entfernt wurde, verschwand aber natürlich beim Fehlen beider. Hieraus ergibt sich, daß bei Benutzung von Polarisator oder Analysator allein in der gleichen Orientierung die Quadrantenfärbung mit vertauschten Quadranten auftritt.

Eine Methode zugleich zu Demonstration und angenäherter Messung der Drehung der Polarisationsebene sah Lehmann[3]) in der Herstellung einer anisotropen Schmelze von *p*-Azoxyphenetol zwischen Glasplatte und Glaslinse in der S. 152 beschriebenen Weise, aber bei absichtlicher Verhinderung einer regelmäßigen Ausrichtung der Moleküle. Zwischen gekreuzten Polarisatoren waren dann helle und dunkle Ringe wahrzunehmen, die den Schichtdicken mit Drehungen $h\pi$ entsprachen; durch Drehung von Polarisator oder Analysator nahmen die Ringdurchmesser ab oder zu. Daneben machte sich infolge des Dichroismus eine Art Quadrantenfärbung geltend, die aber von der bei Tropfen beobachteten wesentlich abwich. Es erschienen z. B. bei Beobachtung mit nur einem Nikol dunklere (gelbe) Büschel, welche in ihren zentralen Teilen die Polarisationsrichtung als Symmetrielinie hatten und bei Benutzung nur des Analysators oder nur des Polarisators in gleicher Lage übereinstimmten, während die äußeren Teile beim Wechsel der Polarisatoren sich änderten. Auch diese merkwürdige Erscheinung führt Lehmann auf komplizierte Struktur der Schichten zurück. Wir kommen auf ihre vermutliche Erklärung unten zurück.

Die Untersuchungen bezüglich Aktivität und Dichroismus erhielten einen neuen Anstoß durch die Entdeckung, daß eine Reihe der Vorländerschen Substanzen beide Eigenschaften in bei festen Kristallen ganz unerhörter Stärke besitzt[1]). Während Quarz in der Dicke von 1 mm für mittlere Farben die Polarisationsebene um etwa 25° dreht, bewirken Anisalaminozimtsäure- und Anisalamino-α-methylzimtsäure-akt-amylester unter gleichen Umständen Drehungen von rund 4000°, Cyanbenzalaminozimtsäure-akt-amylester sogar von rund 12000°. Infolge hiervon zeigen dünne normal orientierte Schichten der Substanzen zwischen gekreuzten Polarisatoren im konvergenten Licht das dunkle Kreuz einachsiger Kristalle nur in Andeutungen in den äußern Ringen, und zwar gelegentlich in lebhaften Farben; das letztere erklärt sich dadurch, daß wegen starker Dispersion der Drehung die Kreuzarme für verschiedene Farben verschieden weit nach innen reichen. Außerdem tritt infolge des Dichroismus ausgeprägte „Quadrantenfärbung" auf und bleibt auch bestehen, wenn ein Polarisator entfernt wird. Der Vorländer-Hauswaldtsche Atlas (s. S. 152) enthält eine Anzahl schöner Aufnahmen bei einfallendem linearen und auch bei zirkularpolarisiertem Licht (Airysche Spiralen).

Die Erscheinungen sind (bei vergrößerter Deutlichkeit natürlich) in allem Wesentlichen dieselben, die Lehmann bei Tropfen von *p*-Azoxyphenetol beobachtet hat; es liegt nahe an-

1) P. Gaubert, C. R. **153**, 573, 1158, 1911.
2) O. Lehmann, Flüssige Kristalle, 62; s. auch diese Zeitschr. **11**, 575, 1910.
3) O. Lehmann, Ann. d. Phys. **18**, 808, 1905.

1) M. E. Huth, Diss. Halle 1909; bes. S. 28 u. f.; D. Vorländer und H. Hauswaldt, Abh. Leop. Carol. **90**, 107, 1909; D. Vorländer und M. E. Huth, Zeitschr. f. phys. Chem. **83**, 723, 1913.



zunehmen, daß in dieser letzteren Anordnung die Brechung an der Oberfläche der Tröpfchen das einfallende nahe parallele Licht derart konvergent gemacht hat, daß ein ähnlicher Strahlengang entstanden ist, wie bei einer planen Schicht im Polarisationsmikroskop.

Huth[1]) hat eine Anzahl von Bestimmungen der spezifischen Drehung durch Messungen an planparallelen Schichten ausgeführt. Die Resultate stimmen untereinander sehr wenig überein; indessen spricht diese Tatsache keineswegs gegen die Regelmäßigkeit des Vorganges an sich. Es ist bekannt, daß bei einachsigen Kristallen das Drehungsvermögen rapide abnimmt, wenn man in Richtungen mit wachsender Neigung gegen die Hauptachse beobachtet. Andererseits ist klar, daß die Orientierung der Moleküle einer anisotropen Substanz normal zur Schicht Zufälligkeiten unterworfen sein wird. Erscheinungen, die sehr stark von dem Grade dieser Orientierung abhängen, werden sich demgemäß schwer in voller Konstanz erzielen lassen.

Interessant ist, daß es nach Huth Substanzen mit zwei anisotrop-flüssigen Phasen gibt, von denen die eine aktiv ist, die andere nicht. Eine solche Eigenschaft ist ohne die Annahme einer wesentlichen Umgestaltung des Moleküles bei dem Übergang aus der einen in die andere Phase nicht zu verstehen. —

Eine tiefgreifende Untersuchung der durch Aktivität und Dichroismus bedingten Erscheinungen hat (auf meine Veranlassung) Stumpf[2]) an der zweiten *a*-Phase von *p*-Cyanbenzalaminozimtsäure-akt-amylester (daneben auch an einer Mischung dieser Substanz mit Cyanbenzalanisidin) durchgeführt. Die erste von ihm gelöste Aufgabe war eine Messung der spezifischen Drehung der Polarisationsebene für alle Farben des sichtbaren Spektrums bei verschiedenen Temperaturen. Dazu wurde ähnlich, wie durch Lehmann geschehen, eine Schicht der Substanz zwischen einer Glasplatte und einer Linse eingeschlossen, aber in ihr nach Erreichung der trüben Phase durch wiederholtes Andrücken der Linse möglichst vollständig die Ausrichtung der Elemente bewirkt. Es zeigten sich dann im parallelen Licht zwischen Polarisatoren Ringe, deren Durchmesser außerordentlich stark mit der Farbe wechselten. Die hierdurch zum Ausdruck kommende große Dispersion der Drehung hängt damit zusammen, daß die eine der beiden in der Schicht fortgepflanzten zirkularen Wellen im gelben Teile des Spektrums einen starken Absorptionsstreifen besitzt, derart, daß sie dort schon bei Schichten von geringer Dicke merklich vollständig vernichtet wird. Mit diesem Absorptionsstreifen hängt eine starke Reflexion der betreffenden Welle zusammen, die sich in glänzenden Schillerfarben zirkular polarisierten Lichtes kundtut[1]). In der Umgebung des Absorptionsstreifens ist das durch die Schicht tretende Licht nicht lineär, sondern elliptisch polarisiert; es wird demgemäß durch den Analysator bei keiner Dicke ausgelöscht, und für die bezüglichen Farben erscheinen nur matte Ringe, die einer Orientierung der größeren Ellipsenachse normal zum Analysator entsprechen; für die Farben des Streifens fehlen die Ringe ganz, weil von ihnen nur eine zirkulare Welle aus der Schicht austritt.

Da, wie schon oben bemerkt, bei allen Beobachtungen an dünnen Schichten infolge der nicht stets vollständigen Orientierung der Elemente normal zur Schicht schwer eine genügende Gleichwertigkeit verschiedener Schichten zu erzielen ist, so war es nötig, um Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, möglichst viele Beobachtungen an einer und derselben, möglichst unveränderten Schicht anzustellen. Dies war so erreichbar, daß mit Hilfe der Photographie der Verlauf der Drehung durch die Schicht für alle Farben bei jeder erzielten Temperatur mit einem Male festgehalten und die Ausmessung an den Photogrammen vorgenommen wurde.

Zu diesem Zwecke wurde aus dem beschriebenen Ringsystem durch einen aufgelegten Spalt ein feiner diametraler Streifen ausgeschnitten und das Bild desselben bei Zwischenschaltung eines Prismas photographiert. Die dunkeln Ringe für die verschiedenen Farben stellten sich dann als dunkle Streifen dar, welche in zwei zur Spur des Ringzentrums symmetrischen Systemen das Spektrum durchzogen; der Abstand zweier symmetrischen Streifen an einer Stelle des Spektrums entsprach dabei direkt dem Durchmesser des Ringes für die entsprechende Farbe. Die Messung mehrerer Durchmesser für dieselbe Farbe gestattete zu kontrollieren, daß die Schicht in größerer Ausdehnung merklich homogen, die Ausrichtung der Moleküle merklich gleichförmig war. Indem diese Operation bei verschiedenen Temperaturen ausgeführt wurde und die Ringdurchmesser für eine Reihe von Farben gemessen wurden, gelang es, die Rotationsdispersion der untersuchten Phase in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur abzuleiten.

Von den Resultaten sei hier nur hervorgehoben, daß der Absolutwert der Drehung

1) M. E. Huth, Diss. Halle 1909.

2) F. Stumpf, Diss. Gött. 1911; Ann. d. Phys. **37**, 351, 1912.

1) S. dazu auch F. Giesel, diese Zeitschr. **11**, 192, 1910; O. Lehmann, ebenda 575.

mit abnehmender Temperatur sehr stark anstieg, was ein gleiches Verhalten für die zirkulare Doppelbrechung ergibt — in Übereinstimmung mit dem nach S. 153 für die lineäre Doppelbrechung in transversaler Richtung Gefundenen. Ferner, daß die Drehung zwischen gelb und violett das positive Vorzeichen hat, bei Annäherung an den Absorptionsstreifen stark wächst, in demselben nach dem oben Gesagten wegen der Absorption der einen Welle nicht zustande kommt, aber dann auf der roten Seite des Streifens mit einem großen negativen Werte beginnt und dieses Vorzeichen bei abnehmender Stärke weiter beibehält.

Dies letztere Resultat ist nicht durchaus überraschend. Verschiedene Beobachtungen[1]) haben schon vor längerer Zeit gezeigt, daß ein Absorptionsstreifen auf den Verlauf der natürlichen Rotationsdispersion in der Weise einwirkt, daß die Drehung auf seiner einen Seite vergrößert, auf der andern verkleinert wird. Doch hielten sich hier diese Einwirkungen in so mäßigen Grenzen, daß dabei kein Vorzeichenwechsel der Drehung eintrat. Dieser Vorzeichenwechsel führt aber zu einer merkwürdigen Konsequenz, auf die unten eingegangen werden wird.

Stumpf hat auch die Absorptionsverhältnisse für die beiden in der Schicht fortgepflanzten zirkularen Wellen messend untersucht und für die negativ rotierende im Absorptionsstreifen eine enorm starke Schwächung nachgewiesen; eine Schicht von 9,4 μ Dicke reduzierte die Intensität auf den ca. 135. Teil. Die positiv rotierende Welle erfuhr ebenda nur eine ganz unbedeutende Schwächung und ließ überhaupt im ganzen Spektrum keinen Absorptionsstreifen erkennen. Es würde von großem theoretischen Interesse sein, einen solchen Streifen außerhalb des sichtbaren Spektrums nachzuweisen; denn nach der Elektronentheorie der Absorption und Dispersion würde es durchaus ungewöhnlich erscheinen, daß eine bestimmte Gattung von Elektronen nur zirkular polarisierte Wellen von einem Rotationssinn dämpfte.

Abschließend sei über eine sehr interessante, indirekt mit der Aktivität zusammenhängende Beobachtung berichtet, die von Vieth[2]) mitgeteilt ist. Nach Symmetrie ist zulässig, daß bei einem natürlich drehenden Körper die magnetische Drehung der Polarisationebene verschieden ausfällt, je nachdem der Strahl parallel oder entgegen der Richtung der Kraftlinien verläuft oder, anders ausgesprochen, je nachdem sich die magnetische Drehung der natürlichen additiv oder subtraktiv verbindet[1]). Nach der Theorie wird dies durch Glieder zweiter Ordnung bezüglich der drehenden Effekte bedingt, und es wäre darnach zu erwarten, daß die Drehung χ, die bei nichtaktiven Körpern durch eine lineäre Funktion der Feldstärke H dargestellt wird, bei aktiven noch ein quadratisches Glied enthält. Fig. 2 stellt durch die mit $i\,i$ bezeichnete Gerade den Verlauf für einen inaktiven, durch den Bogen $a\,a$ denjenigen für einen aktiven Körper dar.

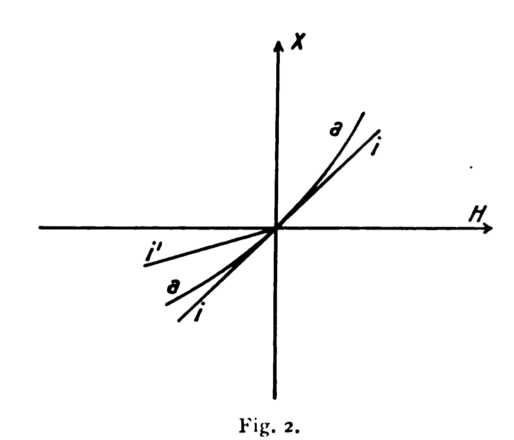


Fig. 2.

Vieth hat, durch diese Bemerkung veranlaßt, den sehr stark aktiven von Vorländer dargestellten Anisalamino-α-Methylzimtsäure-akt-amylester auf seine magnetische Aktivität untersucht. Das Resultat ging dahin, daß allerdings eine Dissymmetrie der Drehung bei Umkehrung des Feldes besteht, daß sie aber nicht den erwarteten, durch die Kurve a dargestellten Verlauf hat, sondern durch die gebrochene Gerade $i'\,i$ (von links nach rechts) gegeben ist. Die hierdurch ausgedrückte Unstetigkeit des Verlaufes von χ bei dem Zeichenwechsel von H kann nun aber kaum eine direkte Wirkung der natürlichen Aktivität der Substanz sein, in der kein erkennbarer Grund für einen solchen „Knick" liegt. Man wird eine derartige Unstetigkeit wohl nur auf eine sprungweise Konstitutionsänderung der Substanz deuten können, die sich beim Richtungswechsel des Magnetfeldes, auch wenn letzteres eine sehr geringe Stärke hat, vollzieht. Daß in anisotropen Flüssigkeiten Felder von geringer Stärke bereits vollständig orientierend wirken, ist S. 130 erörtert; es liegen also Wahrnehmungen vor, die eine solche Vorstellung stützen. Welcher Art die Konstitutionsänderungen sind, die eine Um-

1) S. insbesondere A. Cotton, Ann. de Chim. et de Phys. (7) 8, 347; Journ. de Phys. (3) 5, 237, 290; Thèse, Paris 1896.

2) G. Vieth, diese Zeitschr. 11, 526, 1910.

1) W. Voigt, Magnetooptik, Leipzig 1908, S. 10.

kehrung der Feldrichtung begleiten, ist gegenwärtig noch nicht zu sagen.

17. Schwingungsformen.

Eine dritte Beobachtungsreihe Stumpfs[1]) bezieht sich auf die Polarisationsverhältnisse von Wellen, die sich in schiefen Richtungen innerhalb der Schicht fortpflanzen, d. h. also schief gegen die optische Achse. Die hierbei gefundenen Resultate verdienen ganz besonderes Interesse. Die in den vorigen beiden Abschnitten besprochenen Erscheinungen stellten in der Hauptsache nur Steigerungen von Vorgängen dar, die bei festen aktiven Kristallen längst bekannt waren. Hier handelt es sich aber um Erscheinungen, die zwar nach der Theorie bei letzteren Körpern auch stattfinden müssen, die aber hier infolge der geringen Stärke von Aktivität und Dichroismus absolut unwahrnehmbar sind, und somit an den anisotropen Flüssigkeiten überhaupt zum erstenmal wahrgenommen worden sind.

Bei durchsichtigen aktiven einachsigen Kristallen sind die Polarisationsgesetze überaus einfach. In jeder Richtung pflanzen sich zwei elliptisch polarisierte Wellen fort. Die Schwingungsellipsen beider Wellen haben ihre Achsen parallel und normal zum Hauptschnitt, sind bei gekreuzter Lage einander ähnlich und werden in entgegengesetzten Richtungen umlaufen. Die große Achse der ordentlichen Polarisationsellipse liegt parallel, die der außerordentlichen normal zum Hauptschnitt. (Für die Ellipsen der elektrischen Schwingung gilt das Entgegengesetzte.) Für die Richtung parallel der optischen Achse ist das Achsenverhältnis k Eins, die Ellipsen sind Kreise. Mit wachsendem Neigungswinkel ϑ nimmt k erst sehr schnell, dann langsam ab und erreicht in der zur Achse normalen Richtung ein von Null verschiedenes Minimum[2]).

Vorhandener Dichroismus modifiziert diese Gesetzmäßigkeiten, besonders wenn zugleich die Aktivität groß ist, beträchtlich. Theoretische Ansätze für die Behandlung absorbierender aktiver Kristalle auf Grund der Elektronentheorie der Dispersion und Absorption sind vorhanden[3]) und ergeben die nachstehend zusammengestellten Folgerungen[4]); aber sie scheinen noch unvollständig zu sein, insbesondere auch die Abhängigkeit der Erscheinungen von der Farbe nicht zuverlässig zu geben.

Die Schwingungsellipsen sind nach diesen Theorien nicht mehr nach dem Hauptschnitt orientiert, sondern aus dieser Lage für beide Wellen um den gleichen Winkel in entgegengesetzten Richtungen herausgedreht; dieser Drehungswinkel φ wechselt in komplizierter Weise mit der Fortpflanzungsrichtung. Die Elliptizität $k = \operatorname{tg}\psi$ kann mit wachsendem Neigungswinkel ϑ relativ langsam abnehmen und bei Fortpflanzung normal zur optischen Achse noch beträchtliche Werte haben.

Es ist von prinzipieller Bedeutung, daß die von der Theorie signalisierten singulären Erscheinungen sich an anisotropen Flüssigkeiten zum ersten Male haben nachweisen lassen. Einzelheiten wollen sich allerdings der Theorie noch nicht recht fügen, aber es ist zu hoffen, daß gerade ihre Verfolgung zu einem fruchtbaren Ausbau der Theorie führen wird.

Die Stumpfschen Beobachtungen sind nach einer von Airy herrührenden Methode der „elliptischen Polarisatoren" durchgeführt. Bei dieser ist der Analysator mit dem Polarisator zusammen in meßbarer Weise drehbar gemacht und mit jedem Nikol ist ein gleiches Glimmblättchen verbunden. Die Polarisatorkombination wird so eingestellt, daß sie Licht von verlangter Elliptizität austreten läßt, die Analysatorkombination so, daß sie diese Schwingungen auslöscht. Schaltet man zwischen beide Systeme ein Medium, in dem sich Schwingungen von eben dieser Elliptizität fortpflanzen, dann kann man durch gemeinsame Drehung beider Systeme auf die Intensität Null einstellen und aus dieser Einstellung auf die Orientierung der bez. in dem Medium fortgepflanzten Schwingungsellipse schließen. Sind die in dem Medium fortgepflanzten Schwingungen von anderer Elliptizität, so ist eine Dunkeleinstellung unmöglich.

Stumpf hat nun eine Schicht der zu untersuchenden Substanz zwischen Glasplatten eingeschlossen und in einem Temperaturbad aus einer geeigneten Flüssigkeit um eine vertikale Achse drehbar befestigt, derart, daß das einfallende Licht die Platte in wechselnder Richtung durchsetzen konnte. Es wurde dann in dem elliptischen Polarisator eine Elliptizität willkürlich eingestellt und darauf durch gleichzeitige Drehung des Polarisators und der Platte eine Nullstellung gesucht; auf diese Weise ergab sich zugleich der Einfallswinkel, bei welchem die betreffende Ellipse in der Schicht sich fortpflanzt, und die Orientierung der letzteren. Mit diesen Messungen wurde eine orientierende Bestimmung der Absorption der beiden elliptischen Wellen verbunden.

Was die Resultate der Beobachtungen angeht, so läßt der gefundene Verlauf der Ab-

1) F. Stumpf, l. c.
2) S. dazu W. Voigt, Gött. Nachr. 1913, S. 177.
3) Siehe W. Voigt, Wied. Ann. **69**, 297, 307, 1899; Ann. d. Phys. **18**, 646, 1905; P. Drude, Lehrbuch der Optik, Leipzig 1912, S. 389 u. f.
4) Besonders untersucht von C. Försterling, Gött. Nachr. 1912, S. 217.

sorptionen als Funktion der Fortpflanzungsrichtung noch am wenigsten Gesetzmäßigkeiten erkennen. Festgestellt erscheint, daß die Absorption der negativ rotierenden Welle zwischen $\vartheta = 0^0$ und $\vartheta = 45^0$ ein Maximum passiert, während die positive Welle ein solches nicht zeigt. Das ist ein unerwartetes Ereignis.

Die Elliptizität $k = \operatorname{tg} \psi$ erreichte von Eins (Kreis) ansteigend erst etwa bei $\vartheta = 45^0$ sehr kleine Werte (langgestreckte Ellipse). Für die Drehung φ der Ellipsen bestätigte sich das Resultat der Theorie, wonach die Größe für die + und die — rotierende Schwingung die gleiche, der Sinn der entgegengesetzte sein sollte. Die Abhängigkeit des Winkels φ von der Fortpflanzungsrichtung ϑ erwies sich als stark mit der Farbe wechselnd; im allgemeinen strebte mit wachsendem ϑ die Lage der großen Ellipsenachse der elektrischen Schwingung für die +-Welle dem Hauptschnitt, für die —-Welle der dazu normalen Lage zu. Die —-Welle hat also den Charakter der ordentlichen.

Von besonderem Interesse ist, daß der Drehungswinkel φ den Wert 45^0 erreichte und überschritt. Bei $\varphi = 45^0$ fallen die Ellipsen der +- und der —-Welle völlig zusammen und unterscheiden sich nur durch Rotationssinn und Absorption.

Es mag zum Schluß noch auf eine merkwürdige Folgerung aufmerksam gemacht werden, zu welcher die Kombination der Resultate der letzten drei Abschnitte leitet.

Hier ist soeben gezeigt, daß für das ganze sichtbare Spektrum die — rotierende Welle als die ordentliche zu betrachten ist. In § 15 ist erörtert, daß in der Richtung normal zur Hauptachse $n_e > n_o$ ist, d. h. also bei Rücksicht auf den Rotationssinn $n_+ > n_-$. Dagegen ist in § 16 bemerkt, daß für parallel zur Hauptachse fortschreitendes Licht die Drehung auf der violetten Seite des Absorptionsstreifens positives, auf der roten Seite negatives Vorzeichen habe, daß also im ersteren Bereich $n_+ < n_-$, im letzteren $n_+ > n_-$ gelte. Im ersteren Spektralbereich muß hiernach beim Übergang von $\vartheta = 0$ zu $\vartheta = 90^0$ die Differenz $n_+ - n_-$ ihr Vorzeichen wechseln. Dies setzt die Existenz eines Winkels $\vartheta = \bar{\vartheta}$ voraus, für den $n_+ = n_-$ ist, also der „flüssige Kristall" eine Zone fehlender Doppelbrechung oder einen Kegel von optischen Achsen besitzt. Die Möglichkeit eines solchen Vorkommens war schon früher aus der Theorie geschlossen[1]); es ist erfreulich, daß der Fall einmal wirklich von der Natur dargeboten worden ist.

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1903, S. 166.

18. Allgemeine optische Gesetzmäßigkeiten für aktive dichroitische Kristalle.

Was die Erklärung der im Vorstehenden beschriebenen optischen Erscheinungen aus der Theorie angeht, so kann es sich hier natürlich nur um Andeutungen handeln[1]). Besonders wesentlich erscheint dabei der Nachweis, daß die S. 154 erwähnten, scheinbar in sich widerspruchsvollen Beobachtungen über Quadrantenfärbung und Ähnliches, mit größter Wahrscheinlichkeit auf eine einfache Zusammenwirkung der beiden direkt nachweisbaren Eigenschaften der bez. Substanzen in der a-Phase zurückgeführt werden können: ihre Aktivität und ihren Dichroismus. Denn damit entfällt die Nötigung, so wie Lehmann getan hat, komplizierte Hypothesen ad hoc über die Konstitution der Tropfen und Schichten jener Phasen einzuführen, und der Zustand der a-Phasen rückt dadurch in die Nähe desjenigen der regelmäßig kristallisierten Materie.

Wie schon S. 157 bemerkt, ist es nicht ganz sicher, ob die gegenwärtig vorhandenen allgemeinen theoretischen Ansätze für die Darstellung der Eigenschaften aktiver dichroitischer, insbesondere einachsiger Kristalle bereits erschöpfend sind. Man wird daher vielleicht zurzeit am passendsten gewisse Parameter derselben als unbekannte, bzw. aus der Beobachtung zu bestimmende Funktionen der Schwingungsfrequenz, d. h. also der Farbe betrachten. Auch ist es für unsere Zwecke am bequemsten, das Gesetz der Abhängigkeit dieser Parameter von der Fortpflanzungsrichtung im Kristall offen zu lassen. Dann kann man als allgemeines Resultat der Theorie das folgende hinstellen.

Versteht man unter A und B die komplexen Komponenten des (z. B. magnetischen) Schwingungsvektors normal und parallel zum Hauptschnitt, unter $\mathfrak{n}$ den sogenannten komplexen Brechungsindex, der mit dem reellen Brechungsindex n und dem Absorptionsindex $\varkappa$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$$

verbunden ist, unter r einen das Maß der Aktivität des Kristalles bildenden Parameter, unter $\mathfrak{n}_e$ und $\mathfrak{n}_o$ die speziellen Werte von $\mathfrak{n}$ für die außerordentliche und die ordentliche Welle bei verschwindendem r, so gilt in einer für die meisten Zwecke ausreichenden Annäherung

$$B\left(\frac{1}{\mathfrak{n}^2} - \frac{1}{\mathfrak{n}_e^2}\right) = i\frac{r}{\mathfrak{n}}A, \qquad A\left(\frac{1}{\mathfrak{n}^2} - \frac{1}{\mathfrak{n}_o^2}\right) = -i\frac{r}{\mathfrak{n}}B. \tag{4}$$

1) Ausführlicher W. Voigt, Gött. Nachr. 1916.

Dabei sind $\mathfrak{n}_o$, $\mathfrak{n}$, und r Funktionen der Farbe und der Fortpflanzungsrichtung.

Diese Formeln bestimmen zwei Wurzeln $\mathfrak{n}$ und B/A, die durch die Indizes 1 und 2 unterschieden werden mögen. Bildet man aus (4)

$$\frac{1}{\mathfrak{n}_o^2}-\frac{1}{\mathfrak{n}_e^2}=i\frac{r}{\mathfrak{n}}\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right) \tag{5}$$

und ignoriert in dem stets kleinen Glied rechts den Unterschied zwischen den beiden Wurzeln $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ für $\mathfrak{n}$, so ergibt sich

$$\frac{B_1}{A_1}\cdot\frac{B_2}{A_2}=1, \tag{6}$$

und dies sagt uns, daß die Schwingungsformen der Wellen 1 und 2 Ellipsen sind mit um gleiche Winkel in entgegengesetzten Richtungen aus den Richtungen von A und von B herausgedrehten großen Achsen. Dies ist das S. 156 benutzte Resultat.

Solange $\mathfrak{n}_o-\mathfrak{n}_e$ klein ist neben $\mathfrak{n}_o+\mathfrak{n}_e$, z. B. immer für Richtungen in der Nähe der optischen Achse, kann man setzen

$$\frac{1}{\mathfrak{n}_e^2}=p^2+q,\quad \frac{1}{\mathfrak{n}_o^2}=p^2-q \tag{7}$$

und q als klein neben p^2 ansehen. Ist auch r klein neben p^2, dann kann man für $\mathfrak{n}^2$ als angenäherten Wert bilden

$$\frac{1}{\mathfrak{n}^2}=p^2\pm\sqrt{q^2+r^2p^2} \tag{8}$$

und mit Hilfe hiervon auch für B/A

$$B(\pm\sqrt{q^2+r^2p^2}-q)=irpA. \tag{9}$$

Da für sehr kleine Winkel ϑ der Fortschreitungsrichtung gegen die optische Achse q verschwindet, r aber nicht, so kann man dort die noch rohere Annäherung bilden

$$\frac{1}{\mathfrak{n}^2}=p^2\pm rp,\quad B(\pm rp-q)=irpA \tag{10}$$

oder

$$\mathfrak{n}=n(1-i\varkappa)=\frac{1}{p}\left(1\pm\frac{r}{2p}\right),\qquad \frac{B}{A}=\pm i\left(1\pm\frac{q}{rp}\right). \tag{11}$$

Diese Formeln ergeben, wie in dem vorausgesetzten speziellen Fall die Parameter p, q, r in den Ausdrücken für n, $n\varkappa$ und B/A zusammenwirken.

Findet die Fortpflanzung der Wellen parallel der optischen Achse statt, so ist $q=0$, also $B/A=\pm i$, d. h. die Schwingungsellipsen degenerieren zu Kreisen. Soll, wie dies nach Beobachtungen von Stumpf (S. 156) u. U. stattfindet, hierbei für eine Farbe die eine Welle sehr viel stärker absorbiert werden, als die andere, so muß nach (11) von den imaginären Teilen

$$\left|\frac{1}{p}\left(1-\frac{r}{2p}\right)\right|_i \quad\text{und}\quad \left|\frac{1}{p}\left(1+\frac{r}{2p}\right)\right|_i$$

der eine viel größer sein als der andere.

19. Theorie der Quadrantenfärbung.

Um nun zu dem eigentlichen Problem, der Erklärung der Quadrantenfärbung und ihrer Eigenheiten, zu gelangen, wollen wir zwecks einfacher Rechnung die im konvergenten Licht beobachtete ebene Platte von der Dicke l durch ein Stück einer Kugelschale von gleicher Dicke aus dem Kristall ersetzen, die vom Zentrum aus beleuchtet wird. Dies gibt den Vorteil, daß nur mit normalem Einfall operiert zu werden braucht, und doch verschiedene Fortpflanzungsrichtungen im Kristall in analoger Weise auftreten, wie bei dem eigentlichen Problem.

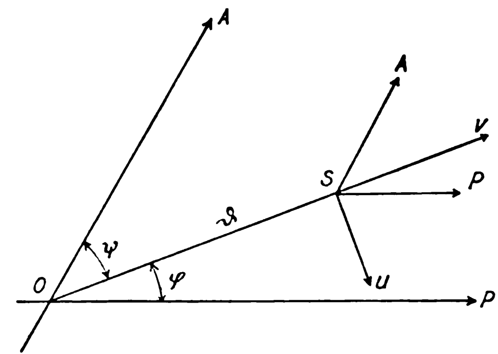


Fig. 3.

In der Figur 3 stelle O die Spur der optischen Achse, S diejenige des betrachteten Strahles in der Neigung ϑ gegen die optische Achse dar. A und P mögen die Polarisationsebenen von Analysator und Polarisator darstellen, v den Hauptschnitt, u die dazu normale Richtung, so daß v der Polarisation des ordentlichen, u derjenigen des außerordentlichen Strahles bei fehlender Aktivität entspricht.

Ist P die zu P parallele Schwingung, so sind die Komponenten nach u und v bei

$$\cos\varphi=c,\quad \sin\varphi=s$$

gegeben durch

$$u=Ps,\quad v=Pc. \tag{12}$$

Diese Schwingungen sind nun in zwei elliptische von der oben besprochenen Art zu zerlegen. Setzen wir für die eine

$$v/u=B/A=ik,$$

für die andere

$$v/u=B/A=1/ik,$$

wobei k komplex ist $= k_1 + i k_2$, so gibt dies

$$u = ((s - ikc) + ik(c - iks))\frac{P}{1 + k^2}, \quad (13)$$

$$v = (ik(s - ikc) + (c - iks))\frac{P}{1 + k^2}.$$

Diese zwei Wellen erfahren nun beim Durchgang durch die Schicht verschiedene Verzögerungen und Schwächungen, die sich durch Anbringung komplexer Faktoren α und β an den bez. Schwingungskomponenten ausdrücken lassen. Man erhält so für die austretenden Schwingungen

$$u_1 = (\alpha(s - ikc) + ik\beta(c - iks))\frac{P}{1 + k^2}, \quad (14)$$

$$v_1 = (ik\alpha(s - ikc) + \beta(c - iks))\frac{P}{1 + k^2}.$$

Hiervon nimmt nun der Analysator eine Komponente

$$A = - u_1 s_1 + v_1 c_1$$
$$= \{-\alpha(s - ikc)(s_1 - ikc_1)$$
$$+ \beta(c - iks)(c_1 - iks_1)\}\frac{P}{1 + k^2}, \quad (15)$$

wobei

$$c_1 = \cos\psi, \quad s_1 = \sin\psi,$$

und die beobachtbare Intensität wird gemessen durch das Modulquadrat:

$$I = |A|^2. \quad (16)$$

Dieser Ausdruck ist sehr kompliziert und soll nicht ausführlich hergesetzt werden. Seine Form ist die folgende

$$I = |P|^2\{F^2 R + G^2 S$$
$$+ 2FG(U\cos\Delta + V\sin\Delta)\}; \quad (17)$$

dabei bezeichnen F und G die reellen Schwächungskoeffizienten der beiden elliptischen Wellen in der Schicht, also Exponentialgrößen mit Exponenten, die bzw. mit $-ln_1\varkappa_1$ und $-ln_2\varkappa_2$ proportional sind; Δ ist die Phasendifferenz zwischen beiden Wellen, also eine mit $l(n_1 - n_2)$ proportionale Größe; R, S, U, V sind Funktionen von s, c, s_1, c_1, d. h. also von φ und ψ in Fig. 3.

Die mit $\cos\Delta$ und $\sin\Delta$ proportionalen Glieder stellen Anteile von I dar, die mit dem wachsenden Neigungswinkel ϑ gegen die optische Achse O (und auch mit wachsender Dicke l) periodisch wechseln, also Interferenzringe um O ausdrücken. Sind diese Ringe (wie bei den Lehmannschen Tropfenbeobachtungen), nicht wahrnehmbar, etwa wegen der Dicke der Schicht und der Inhomogenität des benutzten Lichtes, so bedeutet dies, daß die bez. Glieder unmerklich sind und vernachlässigt werden können. Für gekreuzte Nikols ist $s = c_1$, $c = s_1$ und daher $R = S$; hier wird

$$I = \frac{|P|^2}{|1 + k^2|^2}(F^2 + G^2)(s^2 + |k|^2 c^2 + 2sck_2)\cdot$$
$$(c^2 + |k|^2 s^2 + 2sck_2), \quad (18)$$

wobei $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$. Nahe der optischen Achse ist k_1 wenig von Eins verschieden, dazu bei mäßiger Absorption k_2 klein. Hier gilt dann in roherer Annäherung

$$I = \frac{|P|^2}{|1 + k^2|^2}(F^2 + G^2)(1 + 2sck_2)^2; \quad (19)$$

darin drückt das Glied $2sck_2 = k_2 \sin 2\varphi$ die Verschiedenwertigkeit des ersten und dritten Quadranten gegenüber dem zweiten und vierten aus, d. h. eben die Quadrantenfärbung bei gekreuzten Nikols.

Die Fälle, daß nur der Analysator oder nur der Polarisator benutzt wird, kann man aus (17) gewinnen, indem man davon den (doppelten) Mittelwert in bezug auf φ oder ψ bildet. Die so gewonnenen Ausdrücke $\bar{I}_a$ und $\bar{I}_p$ sind identisch bis auf die Vertauschung von φ mit ψ. Dies sagt nach Fig. 3 aus, daß in dem einen Falle die Intensitätsfolge bei positivem Umlauf um die optische Achse dieselbe ist, wie im andern bei negativem. In der Annäherung von (19) wird

$$\bar{I}_p = |P|^2 \frac{1 + |k|^2}{|1 + k^2|^2}(F^2 + G^2)(1 + 2sck_2) \quad (20)$$

analog $\bar{I}_a$. Der Unterschied gegen (19) liegt nur darin, daß der letzte Faktor jetzt in erster Potenz auftritt; dies ist aber bez. der Symmetrieverhältnisse belanglos. Man sieht, daß, wenn Polarisator und Analysator die in (18) bzw. (19) vorausgesetzte Lage haben und man den einen von ihnen entfernt, dann die Quadrantenfärbung sich nicht ändert, daß aber, wenn man die Erscheinungen bei paralleler Orientierung von Polarisator und Analysator vergleicht, dann die Quadranten ihre Rolle wechseln. Dies sind nun genau die von Lehmann an Tropfen gemachten Wahrnehmungen.

Was die hiermit anscheinend sich widersprechenden Wahrnehmungen bei dünnsten Schichten und normaler Inzidenz angeht, wo die Symmetrieverhältnisse der Tönung ganz andere waren, so hat man, um zu ihrer Deutung zu gelangen, nur in (17) die Phasendifferenz Δ so klein zu nehmen, daß $\cos\Delta$ mit Eins vertauscht werden darf. Bei schwachem Dichroismus liefert dann der Ausdruck für $\bar{I}_p$

$$\bar{I}_p = \frac{P^2}{|1 + k^2|^2}\{F^2 + G^2 + 2FGk_2(c^2 - s^2)\sin\Delta\} \quad (21)$$

und das Analoge für $\bar{I}_a$. Dies zeigt, daß jetzt die Polarisationsrichtung und die dazu Normale Symmetrielinien der Tönung sind, und daß

letztere bei Vertauschung von Analysator und Polarisator in gleicher Orientierung sich nicht ändert. Bei wachsender Dicke der Schicht und somit wachsendem Δ gehen diese Symmetrieverhältnisse aber verloren. Damit sind auch die Beobachtungen Lehmanns an Schichten zwischen einer Glasplatte und -linse von S. 154, ohne Zuhilfenahme komplizierter Hypothesen, aus Aktivität und Dichroismus allein gedeutet.

20. Schluß.

Das Ergebnis der vorstehenden Übersicht kann man m. E. dahin zusammenfassen, daß eine weitgehende Analogie der Eigenschaften zwischen den anisotropen Flüssigkeiten und den wirklichen Kristallen nicht bestritten werden kann. Es darf als sicher bezeichnet werden, daß die Moleküle jener Flüssigkeiten die Fähigkeit haben, sich innerhalb kleiner Bereiche spontan, innerhalb ausgedehnterer durch äußere Einwirkungen mit einer ausgezeichneten Achse zueinander parallel zu orientieren, während die zu jener Achse normalen Richtungen die Tendenz zu paralleler Orientierung bisher nirgends erkennen lassen. Ob mit der Parallelrichtung die Anordnung der Moleküle in eine Art von Raumgitter verbunden ist, läßt sich zurzeit noch nicht mit Sicherheit sagen. Die geordneten Bereiche zeigen die optischen Eigenschaften optisch einachsiger Kristalle, und es genügt, um alle, auch die zuvor bei festen Kristallen nicht wahrgenommenen Erscheinungen an ihnen zu erklären, die Inrechnungsetzung der zirkularen Doppelbrechung (Aktivität) und des Dichroismus, die beide direkt nachweisbar sind. Auch bez. der elektrischen Leitfähigkeit ist die Gleichwertigkeit mit einachsigen Kristallen festgestellt.

Die Wärmebewegung scheint die parallele Orientierung der Moleküle in den geordneten Bereichen nur wenig zu stören; sie muß dort also von den in Gasen stattfindenden merklich abweichen. Ist ein Raum aber von zahlreichen geordneten Elementarbereichen mit verschiedener relativer Orientierung erfüllt, so werden sich in den Zwischengrenzen andauernd störende Wechselwirkungen abspielen, die eine Veränderung der Elementarbereiche bewirken, namentlich auch, wenn die Substanz in Bewegung ist.

Da die Existenz einer anisotrop-flüssigen Phase zwischen zwei festen Temperaturen begrenzt ist, so muß bei Überschreitung einer dieser Grenztemperaturen eine molekulare Änderung vor sich gehen, die jeweil diejenige molekulare Konstitution zur Folge hat, die sich in den neuen Eigenschaften ausdrückt. Von der Natur dieser Änderungen ist uns noch nichts bekannt. Die Variation der physikalischen Eigenschaften bei Überschreitung einer Grenztemperatur ist vermutlich unstetig und befindet sich anscheinend mit den Gesetzen der Thermodynamik für Einstoffsysteme im Einklang.

Eine scharfe Abgrenzung der anisotropen Flüssigkeiten gegen die Kristalle ist darin zu finden, daß die Bausteine der letzteren die Atome, die der ersteren die Moleküle sind. Damit hängt zusammen die verschiedene Art der formbildenden oder Kohäsionskräfte in beiden. Zwischen den Atomen des Kristalles haben wir die starken und energisch polaren Kräfte wirksam zu denken, welche auch die chemischen Verbindungen zusammenhalten; zwischen den Molekülen der anisotropen Flüssigkeit wirken schwächere und minder ausgeprägt polare, dergleichen sich z. B. in dem extremen Falle, daß die Wärmebewegung jede Orientierung aufhebt, in einfachster Form bei den Kapillarerscheinungen betätigen. Auf der speziellen Natur dieser molekularen Kräfte, im Gegensatz zu den atomistischen, beruht die „Flüssigkeit", die jene Substanzen in verschiedenstem Grade erkennen lassen; einerseits in der verschiedenen Konsistenz und Zähigkeit, andererseits in der Fähigkeit in isolierten und suspendierten kleinen Massen ganz verschiedene Formen von der Kugel bis zum Polyeder annehmen zu können. Indessen zwingt uns eben diese Kontinuität der Eigenschaften dazu, auch in den Fällen, wo die polyedrische Form vorhanden ist, eine prinzipielle Verschiedenheit von den festen Kristallen anzunehmen.

Göttingen, Anfang März 1916.

(Eingegangen 12. März 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Hermann Diels, Antike Technik. 6 Vorträge. gr. 8. VIII u. 140 Seiten mit 50 Textbildern und 9 Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1914. Geheftet M. 3.60, gebunden M. 4.40.

Der Verfasser hat die sehr lesenswerte, aus 6 einzelnen Vorträgen entstandene Arbeit in dem Gedanken veröffentlicht, das Altertum in seiner realistischen Seite der Jetztzeit näher zu bringen. Was geboten wird, ist ja nicht durchweg neu, sind doch die physikalisch-technischen Errungenschaften eines Heron, Ktesibios und Vitruv schon seit langen Jahren uns



geläufig. Indessen ist die Darstellung durch die Verknüpfung mannigfaltiger Beziehungen des antiken Lebens so reizvoll, daß wir das Buch sehr lebhaft begrüßen müssen. Hat doch der als hochgeschätzter Philologe bekannte Verfasser den großen Vorteil vor dem technischen Fachmann, nicht nur die Quellenschriften und die neuesten Literaturzugänge völlig zu beherrschen, sondern auch überall an geschichtliche und kulturhistorische Fakta anknüpfen zu können; in das spezifisch Technische sich hineinzufinden, bietet ja keine Schwierigkeiten. Nach einer geschichtlichen Übersicht über die Träger antiker Technik und Physik folgen dann einzelne Spezialgebiete, von denen namentlich die Abschnitte über antike Türen und Schlösser sowie über die antike Chemie (keine Chemie in unserem Sinne!) wegen des Reizes der Neuheit mir die wertvollsten zu sein scheinen. Behrendsen.

F. Knapp, Physikalische Schülerübungen auf der Unterstufe. Ein Hilfsbuch für Übungsleiter und Schüler. gr. 8. IX und 157 Seiten mit 92 Abbildungen. Wien, A. Hölder. 1914. Geh. M. 2.—, geb. M. 2.40.

Warum der Verfasser ein Übungsbuch speziell für die Unterstufe herausgibt, ist nicht recht einzusehen, da doch der Schwerpunkt physikalischer Übungen zweifellos in die Oberstufe zu verlegen sein dürfte. Das an und für sich recht brauchbare Buch ist im übrigen so inhaltsreich, daß es mit wenigen Zusätzen auch für die gesamte Schulzeit verwendbar wäre. Mit der Anordnung kann man sich insofern nicht einverstanden erklären, als die Übungen in der Mechanik an das Ende gerückt sind, die doch als Grundlage aller physikalischen Betätigung vorweg genommen werden müßten. Sollte der Lehrplan der österreichischen Schulen so inkonsequent verfahren, so müßte dagegen opponiert werden und gerade durch die Schülerübungen dem so entstandenen Mangel abgeholfen werden. Das Knappsche Buch klingt etwas an das bekannte Hahnsche Werk an; schon die Tabellen und Arbeitsschemen erinnern an dieses. Die vielleicht überhaupt zu detaillierten Arbeitsanweisungen sind unnötigerweise in Frageform gegeben und dürften dadurch die Tätigkeit des Lehrers beeinträchtigen, denn das Buch soll (was doch eigentlich nur im äußersten Notfalle geschehen sollte) auch in die Hand der Schüler gegeben werden. Hinsichtlich der Apparatur hätte der Verfasser genauere Anweisung geben müssen, was nur ganz vereinzelt geschieht. Behrendsen.

Jahrbuch der Naturwissenschaften 1913—1914. Neunundzwanzigster Jahrgang. Unter Mitwirkung von Fachmännern herausgegeben von Joseph Plaßmann. Lex. 8°. XVIII u. 445 S. mit 96 Bildern auf 10 Tafeln und im Text. Freiburg i. Br., Herdersche Verlagshandlung. 1914. Geb. M. 8.—.

Von den 400 Aufsätzen, welche dieser Jahrgang enthält, werden den Physiker besonders die Artikel aus dem Gebiete der Physik, der Meteorologie und der Luftschiffahrt interessieren. Das erstgenannte Kapitel ist allerdings reichlich kurz ausgefallen (21 Artikel auf 25 Seiten), es enthält aber schöne Abbildungen der Wilsonschen Versuche zur Sichtbarmachung der Bahnen der radioaktiven Strahlen, photographische Aufnahmen des Nordlichtspektrums und stereoskopische Blitzlichtaufnahmen. Das Kapitel „Meteorologie" enthält Aufsätze über die Entstehung der „oberen Inversion", das Feldberg-Observatorium, die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre, die Ausdehnung des Wetterdienstes, Zusammenhang weit voneinander entfernter Gebiete u. a. m. Besonders wertvoll erscheinen die Artikel von Perlewitz über Luftschiffahrt: Die Luftfahrt in Deutschland, die Verwendung der Luftfahrzeuge, der Freiballon, das Luftschiff, Zeppelin-Luftschiffe, Parseval-Luftschiffe, die Luftschiffahrt im Ausland, Luftschiffhäfen und Luftschiffhallen, die Sorge für die Sicherheit in der Luftfahrt. Interessant ist jetzt auch die auf Tafel 8 wiedergegebene Karte von Europa mit all den Gebieten, deren Überfliegen allen Luftfahrzeugen verboten ist. Auch sonst noch findet sich in den übrigen Kapiteln (Mineralogie, Zoologie, Botanik, Medizin, Industrie, Land- und Forstwirtschaft) manch interessanter Aufsatz, so daß auch der Laie, der sich für die Fortschritte der Naturwissenschaft interessiert, meist auf seine Rechnung kommen dürfte. Allerdings würde es sich aber empfehlen, die einzelnen Artikel noch weit mehr mit Literaturnachweisen zu versehen, da es ohne diese nur schwer möglich ist, sich noch eingehender mit den betreffenden Themen zu beschäftigen. Dies gilt insbesondere für das Kapitel „Industrie". R. Lucas.

Ign. G. Wallentin, Praktische Methodik des physikalischen Unterrichts. gr. 8. X u. 223 Seiten. Wien, A. Pichlers Witwe & Sohn. 1914. Geh. M. 4.10, geb. M. 4.50.

Auch in Österreich hat man begonnen eine Serie schulmethodischer Schriften in einheitlicher Ausgestaltung und vom gemeinsamen Standpunkte aus herauszugeben. Das vorliegende Werk ist der neunte Band dieser Sammlung. Es darf beanspruchen, dem Lehrer der Physik ein wertvolles Hilfsmittel zu sein, hat sich doch der Verfasser schon durch sein 1892 erschienenes Lehrbuch der Elektrizitätslehre als ein trefflicher Kenner der Experimentalphysik bekannt gemacht.

In einer Einleitung (13 S.) werden allgemeine didaktische Fragen des Physikunterrichts kurz aber mit sicherem Urteil behandelt, und zwar wesentlich im Anschluß an die Forderungen der bekannten „Meraner Lehrpläne". W. tritt hier sehr energisch für Schülerübungen in der Physik ein, die übrigens in Deutschland nicht so spärlich, wie er angibt, sondern recht ausgiebig abgehalten werden. Dann folgt eine ausgiebige Behandlung und Darstellung der speziellen Aufgaben des Unterrichts für die Unter- wie Oberstufe mit sorgfältiger Angabe der experimentellen Hilfsmittel und der einschlägigen Literatur. Wallentin tritt in sehr zu billigender Weise für möglichst experimentelle Gestaltung des Physikunterrichts auch auf der Oberstufe ein. Schwierigere und doch nicht zu entbehrende mathematische Darlegungen verweist er in die mathematische Lehrstunde. Behrendsen.

H. Stanley Allan, Photo-Electricity, the liberation of electrons by light, with chapters on fluorescence, phosphorescence and photochemical actions and photography. VII u. 221 S. London, Longmans, Green and Co. 1913.

Das Buch gibt eine gute Einführung in das Gebiet der Photoelektrizität, dessen weitumfassende Be-

deutung immer mehr zutage tritt. Den ersten Teil bildet eine historische Übersicht, die sich in der Würdigung fremder, insbesondere der deutschen Arbeiten einer anerkennenswerten Objektivität befleißigt. Sodann werden nacheinander behandelt: Die Emission negativer Elektronen im Vakuum, die Geschwindigkeit der Elektronen, der photoelektrische Strom in Gasen bei verschiedenen Drucken, photoelektrische Substanzen: feste Stoffe, Flüssigkeiten, Gase und Dämpfe; der Temperatureinfluß auf die photoelektrische Entladung, der Einfluß der Natur des Lichtes auf die photoelektrische Entladung: Lichtquellen, Lichtintensität, Polarisation und Wellenlänge; Theorien des photoelektrischen Effekts, photoelektrische Ermüdung, Fluoreszenz und Phosphoreszenz, photochemische Wirkungen und Photographie.

Die Darstellung ist von großer Anschaulichkeit und Klarheit, die benutzten Versuchsanordnungen werden in ausgezeichneten schematischen Zeichnungen wiedergegeben. Bei den raschen Fortschritten auf dem Gebiete bedarf das Buch bereits der Ergänzung, die in der Schrift von Pohl und Pringsheim über die lichtelektrischen Erscheinungen auch schon in willkommenster Form vorliegt.

Das Kapitel über den Zusammenhang zwischen photoelektrischem Effekt und photochemischen Vorgängen gibt zu verschiedenen Einwänden Anlaß. Bei einer Anzahl photochemisch stark empfindlicher Substanzen hat sich der photoelektrische Effekt nicht nachweisen lassen oder — was bedenklicher ist — wenn er gefunden wurde, zeigte es sich, daß andere Wellenlängen die Ursache für die eine und für die andere Wirkung waren. Die Verhältnisse liegen hier jedenfalls verwickelter als die Darstellung des Buches sie erscheinen läßt.

A. Coehn.

Robert Kremann, Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen. Sammlung Vieweg, Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik, Heft 19. 8. VIII u. 71 S. mit 20 Textabbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1914. M. 2.40.

Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen bildet ein Problem von theoretischem Interesse und technischer Bedeutung. Die einfachste Vorhersage über das zu Erwartende aus der Kenntnis der elektrolytischen Gleichgewichtspotentiale der verschiedenen Metalle genügt schon nicht mehr, sobald die Notwendigkeit vorhanden ist, statt der normalen Metallsalze solche komplexer Natur zu verwenden. Hier tritt mit der Zerfallsgeschwindigkeit des Komplexes ein nicht auf einfache Weise zu berücksichtigendes Glied zu dem Ansatz hinzu. Ein weiteres wird durch die von der Natur des Kathodenmaterials abhängenden Überspannungserscheinungen geliefert. Endlich macht sich die depolarisierende Wirkung geltend, welche bei der gleichzeitigen Abscheidung zweier Metalle bzw. der Abscheidung eines Metalles in dünner Schicht auf einem anderen durch die Bildung fester Lösungen oder Verbindungen auftritt. Der Verfasser gibt im theoretischen Teil eine vortreffliche Übersicht über die hier in Betracht kommenden Momente und diskutiert im speziellen Teil eine ansehnliche Anzahl von bereits praktisch durchgearbeiteten Fällen.

A. Coehn.

W. Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. 7. u. 8. verbesserte Auflage. gr. 8. VIII u. 394 S. mit 430 in den Text gedruckten Abbildungen, einer Spektraltafel, 620 Aufgaben und zahlreichen Übungen für das Schülerpraktikum. Stuttgart, Fr. Grub. 1915. Geb. M. 3.60.

Gegenüber der an dieser Stelle (Bd. 13, S. 910) besprochenen 5. und 6. Auflage des Donleschen Lehrbuches zeigt die hier vorliegende Doppelauflage nur wenige Veränderungen. Allerdings ist eine Verschiebung in der Anordnung des Hauptgebietes und eine Änderung in der Numerierung der Paragraphen und Aufgaben eingetreten, da die bisher im Nachtrage zur Mechanik gegebene Bewegungslehre mit der Mechanik, und zwar im Anschluß an die Statik fester Körper, vereinigt wurde, jedoch ist der Inhalt der einzelnen Abschnitte bis auf kleine Ergänzungen und Verbesserungen derselbe geblieben. Neu ist in den gegenwärtigen Aufgaben im wesentlichen nur die durch den Vordruck „Übungen" und durch Raumlinien gekennzeichneten Aufgaben für Schülerübungen.

R. Lucas.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Verliehen: Dem etatsmäßigen Professor für Mechanik an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Hans Lorenz der Titel Geh. Regierungsrat.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor für Farbenchemie und Färberei an der Universität Leeds Arthur G. Green, der Abteilungsvorsteher am Kaiser Wilhelm-Institut für Kohlenforschung in Mülheim-Ruhr Professor Dr. Siegfried Hilpert (jetzt als wissenschaftlicher Beirat rheinischer Firmen in Bonn).

Gestorben: Der ord. Professor für Organische Chemie und Organisch-chemische Technologie an der Technischen Hochschule Dresden Geh. Hofrat Dr. Ernst v. Meyer, der a.o. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Paul Rohland.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1916.

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik II, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Licht- und Wärmestrahlung, 1; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen, 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Försterling**: Elektromagnetische Lichttheorie, 3 g; Wissenschaftliche Grundlagen der Photographie, 1. — **Rößler**: Elektrotechnik I, 4, Laboratorium I, 4, II, 2, Laboratorium II und III, 9, IV, für Fortgeschrittene, tägl.; Projektierung elektrischer Anlagen, 4; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 1, Übungen, 4. — **Grix**: Elektrische Bahnen, 2, Übungen, 4; Berechnung elektrischer Leitungsnetze, 2. — **Roth**: Elektrotechnische Meßkunde für Elektrotechniker, 2. — **Föttinger**: Ausgewählte Kapitel aus der Physik der technischen Strömungserscheinungen, 1; Propeller für Wasser- und Luftfahrzeuge, 2; Schiffsturbinen, 1; Entwerfen von Propellern für Wasser- und Luftfahrzeuge, 2; Entwerfen von Dampfturbinen, 4; Kraftanlagen für Schiffe,



1; Entwerfen von Schiffskesseln, 6. — **Horn**: Schwingungserscheinungen auf Schiffen, 2. —

N. N.: Anorganisch-chemische Technologie I, 3, II, 3, III: Technische Elektrochemie, 1; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium, tägl. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie II, 2; Organisch-chemische Technologie I, 3, II, 3; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, tägl.; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, tägl. — **v. Wartenberg**: Physikalische Chemie I und II, 3; Chemisches Kolloquium, 2; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Jellinek**: Qualitative chemische Analyse, 2. — **Claasz**: Methoden der organischen Synthese, 2. —

v. Mangoldt: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 1; Einführung in die höhere Mathematik, 5. — **Lorenz**: Einführung in die Mechanik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2 *g*. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 3. — **Sommer**: Höhere Mathematik I, mit Übungen, 6, Übungen, 1. — **Brunn**: Himmelsmechanik I: Bewegung der Schwerpunkte, 2. — **Grammel**: Grundzüge der Mechanik, 2; Anwendungen des Kreisels, 2. — **Eggert**: Geodäsie I, 2, II, 2; Praktische Übungen im Feldmessen, 4: Geodätisches Praktikum I, 2, II, 2; Geographische Ortsbestimmung, 2. — **Plank**: Wärmemechanik, 2; Dynamik der Maschinen, 3, Übungen, 2; Maschinenlaboratorium I, 4, II, 4. — **Rieppel**: Motoren für Land-, Wasser- und Luftfahrzeuge, 2, Übungen, 3, für Elektrotechniker, 2. —

Akademie Posen.

Wörner: Chemische Übungen, für Anfänger, 2, für Vorgeschrittene, 2. — **Könnemann**: Ausgewählte Kapitel der Physik der Erde, 1. —

Universität Prag.

Lampa: Experimentalphysik II: Spezieller Teil unter Berücksichtigung der Anwendungen, 5; Physikalisches Praktikum II (Fortsetzung), 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Spitaler**: Atmosphärische Elektrizität, 3; Erdmagnetismus, 2. — **Frank**: Theorie der Wärmestrahlung, 3; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Relativitätstheorie, 2 *g*. — **Wagner**: Theorie der photographischen Bilderzeugung, 1. —

Meyer: Organische Chemie, 5; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. — **Rothmund**: Physikalische Chemie II, 4; Physikalisch-chemisches Praktikum, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Kirpal**: Chemische Großindustrie, mit Exkursionen, 3. — **Hönigschmid**: Analytische Chemie für Mediziner, 3. — **Morgenstern**: Alkaloide, 2. — **Sigmund**: Die Enzyme und ihre Bedeutung in der Physiologie und Technik, 1. —

Pick: Analytische Geometrie (Fortsetzung), 2; Elemente der Zahlentheorie, 3; Mathematisches Seminar: Übungen, 2 *g*. — **Kowalewski**: Ausgewählte Kapitel der Integralrechnung, 3; Determinantentheorie, 2; Übungen für Anfänger, 1. — **Funk**: Partielle Differentialgleichungen (Fortsetzung), 3. — **Scheller**: Übungen im Beobachten auf der Sternwarte, 2. —

Universität Wien.

Lecher: Experimentalphysik für Lehramtskandidaten und Mediziner, 5; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Exner**: Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. — **Meyer**: Radioaktivität, 3. — **Ehrenhaft**: Grundzüge der Maxwellschen Elektrizitätstheorie und Elektronentheorie, Optik, 5. — **Haschek**: Physikalische Beobachtungen und ihre Grenzen, 2. — **Kohl**: Thermodynamik: Grundzüge der Theorie der Stromleitung und -bildung im Elektrolyten, 2. — **Przibram**: Theorie der Röntgenstrahlung, 1. — **Hess**: Ausgewählte Kapitel aus der Elektrizitätsleitung in Gasen, 2. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 6 Wochen; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20. —

Wegscheider: Anwendungen der Differential- und Integralrechnung in der Chemie, 5; Chemische Übungen für Anfänger, tägl. außer Sonnabend; Arbeiten im I. chemischen Laboratorium für Vorgeschrittene, tägl. — **Herzig**: Pharmazeutische Chemie, 5; Übungen aus pharmazeutischer Chemie für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. — **Franke**: Anleitung zur Ausführung chemisch-wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Chemie II: Organische Chemie, 5; Chemische Übungen für Anfänger und für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Analytische Chemie (im Anschluß an die chemischen Übungen für Mediziner), 2. — **Vortmann**: Arbeiten für Vorgeschrittene. — **M. Kohn**: Repetitorium der organischen Chemie, 2. — **Abel**: Chemische Gleichgewichtslehre, 2. —

Escherich: Bestimmte Integrale (Fortsetzung), 5; Elementar-Mathematik, 1; Proseminar für Mathematik, 1 *g*; Seminar für Mathematik, 2 *g*. — **Wirtinger**: Übungen zur Elementarmathematik, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*; Mathematisches Proseminar, 1 *g*. — **Mack**: Kurs über darstellende Geometrie, 3. — **Furtwängler**: Differential- und Integralrechnung II, 5, Übungen, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*; Seminar, 2 *g*. — **Oppenheim**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Über periodische Lösungen im Dreikörperproblem, 3; Über ellipsoidische und ringförmige Gleichgewichtsfiguren, 2. — **G. Kohn**: Analytische Geometrie (Fortsetzung), 4, Übungen, 1 *g*; Kurven dritter Ordnung, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik II: Öffentliche und private Versicherung, 5; Übungen, $1^1/_2$ *g*. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik II, 3. — **Roth**: Mehrdimensionale Geometrie (Fortsetzung), 2. — **Groß**: Potentialtheorie, 3; Bestimmte Integrale, Übungen. — **Radon**: Der Fouriersche Integralsatz, 2. — **v. Hepperger**: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen (Fortsetzung), 4. — **Schram**: Kalendariographie und Zeitrechnung verschiedener Völker, mit Rücksicht auf Historiker, 1. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. | 1. Mai 1916. Redaktionsschluß für No. 10 am 6. Mai 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Frage der Elektrizitätsladungen, welche die der Elektronen unterschreiten.

(Entgegnung auf die Antwort des Herrn Harvey Fletcher, diese Zeitschrift **16**, 316, 1915.)

Von Fritz Zerner.

In einem Aufsatz in dieser Zeitschrift[1]) wurde nachgewiesen, daß der nach der Ehrenhaftschen Methode an submikroskopischen Metallpartikeln gefundene Widerspruch der Resultate der Berechnung für Radius und Ladung aus den Widerstandsgesetzen einerseits und aus der Theorie der Brownschen Bewegung andererseits auch an kleinen Ölkügelchen statthat, und daß nach beiden Berechnungsarten auch an nichtmetallischen Materieteilchen sich Unterschreitungen des hypothetischen Elementarquantums und Abweichungen von demselben ergeben. Gelegenheit dazu boten die Messungen von Millikan und Fletcher[2]), aus welchen diese ein unteilbares Elektrizitätsatom von $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh. feststellen zu dürfen glaubten.

Die Autoren hatten jedoch ihr Zahlenmaterial keineswegs einer die wichtigen Fragen erschöpfenden Bearbeitung unterzogen. Dadurch nämlich, daß ich bei den Partikeln, die von Millikan und Fletcher bloß auf Grund der Brownschen Bewegung berechnet worden waren, nach dem Widerstandsgesetz den Radius bzw. die Ladung rechnete, und umgekehrt bei jenen, welche sie nach dem Widerstandsgesetz berechnet hatten und bei welchen die Größe der Schwankung dies als korrekt zuließ, in Anwendung der Einstein-Smoluchowskischen Theorie der Brownschen Bewegung aus den statistischen Abweichungen der Fall- bzw. Steigzeiten von ihrem Mittelwerte, das Produkt aus dem Gewicht dieses Teilchens in die Loschmidtsche Zahl Nmg und das Produkt der vom Partikel getragenen Ladung in die Loschmidtsche Zahl Ne, welches nach der Elektronentheorie das elektrochemische Äquivalent niemals unterschreiten dürfte, sondern $96{,}7 \cdot 10^3$ Coulomb oder Multipla dieser Größe betragen müßte, ermittelte, gelang es mir zu zeigen, daß auch bei ihnen der nunmehr von Fletcher bestrittene Widerspruch der Resultate auftritt und daß sich nach beiden Methoden Unterschreitungen des Elementarquantums auch an den Messungen dieser Autoren feststellen lassen.

Seither hat die Sachlage noch insoweit eine weitere Klärung erfahren, als optische Untersuchungen Ehrenhafts[1]) (Bestimmung der Teilchengröße aus der Farbe des seitlich von dem Teilchen abgebeugten Lichtes) die Ergebnisse der Widerstandsgesetze erneuert auf unabhängigem Wege bekräftigten. Ferner haben Erörterungen von Schrödinger[2]), v. Smoluchowski[3]) und Konstantinowsky[4]) Fletchers Formel der Brownschen Bewegung als unrichtig erwiesen und die alte Berechnungsweise als theoretisch streng korrekt bestätigt.

In meiner vorzitierten Abhandlung hatte ich gezeigt, daß ein von Millikan und Fletcher nach dem Widerstandsgesetz berechnetes Ölpartikel nach der Brownschen Bewegung nur

1) F. Zerner, diese Zeitschr. **16**, 10, 1915.
2) R. A. Millikan, Phys. Rev. **32**, 350—397, 1911; H. Fletcher, Phys. Rev. **33**, 81—110, 1911.

1) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914; **16**, 227, 1915.
2) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **16**, 289, 1915.
3) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **16**, 318, 1915.
4) D. Konstantinowsky, diese Zeitschr. **16**, 369, 1915.

ca. $^2/_3$ des elektrochemischen Äquivalents ergibt. Fletcher sucht nun diesen meinen Einwand zu entkräften, und aus der bezüglichen Serienmessung erneuert ein Ne zu $96{,}7 \cdot 10^3$ Coulomb zu berechnen. Doch diese Berechnung hält einer kritischen Prüfung nicht stand; denn erstens benützt er dazu seine in Phys. Rev. 1914 angegebene, nunmehr als unrichtig erkannte Formel, zweitens behandelt er die beiden Serien der Fallzeiten, deren erste zu einem Ladungswert, deren zweite zu einem anderen Ladungswert des Partikels gehört, gesondert, wozu keine Veranlassung vorliegt, da nach den Ergebnissen aller Autoren[1]) die Unabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit im Schwerefelde von der Ladung erwiesen ist, und drittens eliminiert er aus den Zeitmessungen dieses Partikels (publiziert diese Zeitschr. **12**, 161—163, Phys. Rev. **32**, 394, 1911, diese Zeitschr. **12**, 205, 1911, Tabelle 3) einzelne Zeiten, was eine weitere Änderung des Resultats zu seinen Gunsten verursacht. Demnach entbehrt Fletchers Angabe, daß der aus vier Werten von Ne, die, nebenbei bemerkt, untereinander Schwankungen von 200 Proz. aufweisen, gemittelte Betrag von $Ne = 96{,}7 \cdot 10^3$ Coulomb ist, somit von dem aus der Elektrolyse gewonnenen nur um 2 Promille abweicht, jeder Grundlage, da in korrekter Weise gerechnet, sich Ne zu ca. $^2/_3$ dieses Wertes ergibt, ein Resultat, das mit einem Fehler von 7 Proz. behaftet ist[2]).

In meiner eingangs zitierten Arbeit hatte ich ferner, wie erwähnt, Öltröpfchen, die Fletcher in einer Abhandlung über die Brownsche Bewegung veröffentlichte, nach dem Widerstandsgesetz von Stokes-Cunningham berechnet. Auch hier ergaben sich bei einem Teile derselben starke Unterschreitungen des sogenannten Elementarquantums, die in der Natur der Erscheinung begründet sind.

In seiner Erwiderung betont Fletcher, „daß der Hauptzweck dieser Arbeit war, die Gleichungen der Brownschen Bewegung zu verifizieren.... Aus diesem Grunde wurden keinerlei Vorsichtsmaßregeln getroffen, um Staubteilchen auszuschließen, weil alle die unsicheren Größen, wie Dichte des Teilchens, Gleitung an seiner Oberfläche usw. nicht in die Gleichung für Ne eingehen." Dieser nachträglichen Mitteilung Fletchers steht aber ein wörtliches Zitat aus der in Rede stehenden Veröffentlichung dieses Autors (Phys. Rev. **33**, 93, 1911, Zeile 16 von unten) entgegen[3]). „Alle Luft, die in das Messinggefäß strömt, wird ein Gefäß zu passieren genötigt, daß mit Schwefelsäure getrocknete Glaswolle enthält. Auch ist das Innere des großen Gefäßes sorgsam geölt, so daß sowohl die Luft, die in den Zerstäuber geblasen wird, wie auch die Luft im Gefäße trocken und staubfrei ist." Überdies sind in der zitierten Publikation die Partikel vom Autor durchaus ausdrücklich als Tröpfchen (drops) bezeichnet. Es kann mir niemand zum Vorwurfe machen, wenn ich die ursprünglichen, unmittelbar bei den Versuchen veröffentlichten Meßprotokolle für maßgebender gehalten habe als eine Behauptung, daß gerade jene von ihm gemessenen Tropfen, an welchen ich die Unterschreitungen errechnete, Staub gewesen seien, die nach fünf Jahren erst durch den Umstand hervorgerufen wurde, daß den Autoren an ihren eigenen Messungen die bekannten Unterschreitungen nachgewiesen wurden.

Wenn man der Berechnung nachgeht, die Herr Fletcher anstellt, so ergibt sich überdies, daß in seinen Voraussetzungen das gewünschte Resultat bereits als Annahme enthalten ist, eine Tatsache, die Herrn Fletcher wohl nicht entgangen sein dürfte.

Da durch das Widerstandsgesetz Ladung und Dichte des Partikels mit der gemessenen Fallgeschwindigkeit in funktionelle Beziehung gebracht sind, kann man bei definiertem Material aus Fallgeschwindigkeit, Steiggeschwindigkeit und Spannung des elektrischen Feldes die Ladung des Partikels erschließen. Das ist der reguläre Vorgang. Fletcher geht nun den umgekehrten Weg: er setzt die Ladung der Tropfen zu $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh. willkürlich voraus und ermittelt durch Zurückrechnen die Dichte, die jeder einzelne Tropfen unter dieser Voraussetzung gehabt haben müßte. Dabei erhält er für jeden Tropfen eine andere und sehr geringe Dichte unter 0,5. Der Umstand, daß mit Hilfe der auf solchem Wege erschlossenen Dichte die Ladung des Partikels mit dem gewünschten Wert $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh. sich ergibt, kann durchsichtigerweise nicht als Beweis der „unteilbaren" Elementarladung gelten.

Einer weiteren Diskussion seiner Arbeit 1911 sucht der Autor also vorzubeugen, indem er die an den dort publizierten Tröpfchen nachweisbaren Unstimmigkeiten der Resultate allein dem Mangel an experimentellen Vorkehrungen seinerseits zuschreibt, und diese Behauptung durch Heranziehung von Millikans[1]) Messun-

1) Gerade R. A. Millikan und H. Fletcher haben dies in ihren Arbeiten benutzt und bewiesen.

2) Vgl. neuerdings E. Schrödinger l. c. Fehlerschätzung.

3) Im Text: All of the air, which goes into the vessel, is made to pass through the vessel which contains glass wool moistend with sulphuric acid. Also the interior of the large vessel is thorougly oiled, so that the air with which the atomizer is blown and also the air contained in the vessel is dry and dust-free.

1) Phys. Rev. **2**, 134, 1913.



gen an Öltröpfchen zu stützen versucht, die, wie er sagt, nach den gemachten Erfahrungen unter bedeutend sorgfältigeren Vorsichtsmaßregeln betreffs Reinigung und Trocknung gemacht wurden, als die anderen Arbeiten[1]).

Es muß aber auch dieser dritte Versuch Fletchers, eine prinzipielle Übereinstimmung der nach den beiden Methoden errechneten Bestimmungsgrößen zu erweisen, als mißlungen bezeichnet werden, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Ich habe in meiner Abhandlung in dieser Zeitschrift[1]) eine Größe ϱ eingeführt, welche gleich ist der dritten Wurzel aus dem Produkte der Loschmidtschen Zahl N und dem aus der Brownschen Bewegung ermittelten Gewichte mg des Einzelpartikels, nämlich jener Größe, die sich direkt aus den Messungen ergibt. Es ist also:

$$\varrho^3 = N m g_{Br} = \frac{2RT}{\mathfrak{E} \cdot \overline{\lambda^2}} \cdot v, \qquad (1)$$

somit ist die Größe $\varrho = \sqrt[3]{N m g_{Br}}$ unabhängig von irgendwelcher Voraussetzung über Struktur und Material des Teilchens, sowie über den Wert der Loschmidtschen Zahl. Wären nun die beiden zur Berechnung solcher beobachteten Partikeln herangezogenen Theorien in ihren Resultaten miteinander völlig übereinstimmend, so müßte sich das aus der Brownschen Bewegung ermittelte Gewicht des Partikels numerisch gleich ergeben seinem aus der Stokes-Cunninghamschen Widerstandsformel berechneten Gewichte:

$$m g_{St} = \frac{4 a^3 \pi \sigma g}{3}. \qquad (2)$$

Dann wäre die Größe ϱ proportional dem Radius a des Partikels und bei allen Partikeln desselben Materials der Quotient $\frac{\varrho}{a}$ eine Konstante.

Es bietet somit die Berechnung von $\frac{\varrho}{a}$ durch ihre Konstanz beziehungsweise Inkonstanz ein Kriterium für die Gleichheit beziehungsweise den Widerspruch der nach den beiden Rechnungsverfahren ermittelten Resultate; dabei ist jedoch als selbstverständlich vorausgesetzt, daß einerseits das ϱ bzw. $\overline{\lambda^2}$ bloß aus den statistischen Abweichungen der Zeiten von ihrem Mittelwert infolge der Brownschen Bewegung, andererseits der Radius a aus dem Mittelwerte der Fallgeschwindigkeit im widerstehenden Mittel, also bloß nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetz jeweils an ein und demselben Partikel berechnet werden muß.

Fletcher hat nun an den erwähnten Partikeln Millikans unter Verwendung der Beziehung:

$$N m g = N e \frac{\mathfrak{E} v}{v + v'} = \varrho^3 \qquad (3)$$

worin v die Fallgeschwindigkeit im Schwerefelde, v' die Steiggeschwindigkeit im elektrischen Felde bedeuten, die Größe $\frac{\varrho}{a} = 1{,}315$ ermittelt, und fand diese bis auf Promille konstant. Aus dieser Konstanz schloß er auf eine Identität der Resultate aus Brownscher Bewegung und Widerstandsgesetz.

Konnte nun eine derartig präzise Übereinstimmung bei der Schwierigkeit der in Betracht kommenden Versuche bereits ein Mißverständnis vermuten lassen, so kann man sich durch Nachrechnen und durch Beurteilung der Auswahl der in der Tabelle l. c. S. 316 zur Berechnung verwendeten Daten überzeugen, daß der genannte Autor dort, wo er ein Kriterium für Widerspruch oder Übereinstimmung zweier Theorien aufstellen will, tatsächlich nur von Größen Gebrauch macht, die für eine Methode, nämlich die des Widerstandsgesetzes maßgebend sind; d. h. er rechnet nur auf Grund des Widerstandsgesetzes, denn in seiner Tabelle kommt nur das Widerstandsgesetz vor. Er führt nämlich anscheinend in die Formel (3) für das elektrochemische Äquivalent Ne einen konstanten Durchschnittswert ein, der dem $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ entspricht, während nach obigen Erörterungen logischerweise für jedes Partikel das zugehörige Ne auf Grund der Abweichungen nach der Brownschen Bewegung errechnet und eingesetzt werden müßte. Somit zieht er die für die Brownsche Bewegung jedes Einzelpartikels charakteristische Größe $\overline{\lambda^2}$ gar nicht in Rechnung und beraubt dadurch das Kriterium seines Sinnes.

Überdies ist es vollkommen klar, daß sich bei diesen hier herangezogenen Partikeln (Millikan 1913) die Brownsche Bewegung gar nicht feststellen läßt. Denn diese Tröpfchen sind so groß und zeigen so geringe Brownsche Bewegung, daß bei seiner Versuchsanordnung die Stoppfehler der gemessenen Zeiten von der Größenordnung ihrer Abweichungen vom Mittelwert sind. Also hat Herr Fletcher die Brownsche Bewegung bei diesen Partikeln auch nicht berechnen können.

Dagegen ist dies bei den Beobachtungen Eyrings[1]), die dieser in Fletchers Laboratorium an Öltröpfchen in Wasserstoff anstellte und aus deren Brownscher Bewegung er das Ne berechnete, nicht der Fall und dieselben

1) Hierzu ist nur wieder zu bemerken, daß Millikan selbst in dieser Arbeit nirgends von besonders sorgfältigen Vorsichtsmaßregeln spricht.

1) F. Zerner, diese Zeitschr. **16**, 10, 1915.

1) F. C. Eyring, Phys. Rev. 412, 1915.

geben neuerdings Material zur Feststellung eines Widerspruchs der Rechenresultate. Wie die Tabelle beweist, ergibt die Verwendung des Widerstandsgesetzes fast bei allen Teilchen Unterschreitungen des angeblichen Elementarquantums.

Tabelle.

Nr.	Radius $a \cdot 10^5$ cm	Ladung $e \cdot 10^{10}$ elektrostat. Einh.
1	3,1	4,4
2	3,4	4,4
3	3,0	2,2
4	2,6	2,9
5	3,4	1,8
6	3,5	3,2
7	3,3	3,1

Es sei gleich hier bemerkt, daß Eyring in einem ausführlichen Passus durch Angabe der verwendeten Chemikalien die einwandfreie Reinigung und Trocknung des benützten Wasserstoffes feststellt.

Wenn Herr Fletcher also meint, daß ein Widerspruch der Rechenresultate nach den beiden Methoden „der bestmögliche Beweis dafür sei, daß entweder eine elektrische Ladung existierte, die das Elektron unterschreitet, oder, daß die Gleichung für die Brownsche Bewegung nicht gültig ist", so muß er aus dem Vorhergehenden anerkennen, daß dieser Beweis geliefert ist.

Schlußfolgerungen.

Es bleiben somit meine Behauptungen in erweitertem Umfange aufrecht. 1. Auch in den Messungen Millikans und Fletchers sind Beweise für die Existenz von Ladungen enthalten, welche den Wert von $4{,}78 \cdot 10^{10}$ elektrostat. Einh. bedeutend unterschreiten. — 2. Die Gleichungen der Brownschen Bewegung liefern auch auf Öltropfen angewendet, Werte für e, die von den aus den Widerstandsgesetzen erhaltenen abweichen.

Erneuert wurden diese Nachweise an den Messungen F. C. Eyrings geführt.

Aus dem I. physikalischen Institut der k. k. Univers. Wien, Standort im Felde, 10. März 1916.

(Eingegangen 24. März 1916).

Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. I.

Von Karl Uller.

§ 1. Der Schwingungszustand im Felde.

Es heiße: ein Vektorfeld ($\mathfrak{E}$) schwinge in elementarer Schwingungsform, wenn seine Abhängigkeit von der Zeit t von der Form ist

$$\mathfrak{E} = {}^1/_2 \{E \cdot e^{i\nu t} + E^* \cdot e^{-i\nu^* t}\} = e^{-\nu'' t}\{E' \cos \nu' t - E'' \sin \nu' t\}. \quad (1)$$

Darin bezeichnet $E = E' + iE''$ einen von der Zeit unabhängigen komplexen Vektor, und faßt $\nu = \nu' + i\nu''$ komplex zusammen die Frequenz ν' sowie die (positive oder negative) Dämpfung ν''; zwischen ν'' und dem Log. Dekrement Λ bzw. Inkrement $-\Lambda$ besteht der Zusammenhang $\pi\nu'' = \Lambda\nu'$. Mit einem Sternchen kennzeichne ich den konjugiert komplexen Ausdruck. E ist vom Nullpunkt der Zeitzählung abhängig. Denn führen wir einen neuen N-P. t_0 ein, von dem aus die Zeit durch $t_1 = t - t_0$ gemessen werden soll, so ist $E \cdot e^{i\nu t} = E e^{i\nu t_0} \cdot e^{i\nu t_1} = E_1 \cdot e^{i\nu t_1}$. Bei permanenten Schwingungen: $\nu'' = 0$ gibt es hinsichtlich des N-P. der Zeitzählung invariante Ausdrücke wie $(EE^*) = (E_1 E_1^*) = \mathfrak{E}^2_{min} + \mathfrak{E}^2_{max}$ oder $[EE^*] = [E_1 E_1^*] = 2i[\mathfrak{E}_{min}\,\mathfrak{E}_{max}]$. Es sei $d\mathfrak{x}$ der Winkel zwischen $\mathfrak{E}$ und $\dot{\mathfrak{E}}dt$. Sonach ist der Vektor der Sektorengeschwindigkeit

$$\mathfrak{E}^2\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{E}\dot{\mathfrak{E}}] = -i(\nu + \nu^*)e^{i(\nu-\nu^*)t}[EE^*] = \nu' e^{-2\nu'' t}[E''E']. \quad (2)$$

Daraus folgt: Der Vektor $\mathfrak{E}$ rotiert in einer Ebene, deren Normale parallel zu $[E''E']$ liegt, und zwar von E'' auf dem kürzeren Wege nach E' in der Zeit einer Viertelperiode.

Die spiralische Rotation geht bei permanenten Schwingungen in eine elliptische Rotation über. Wir wollen auf diesen Fall näher eingehen. Um zunächst die Vektoren $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}_{min}$, die zueinander senkrecht stehen, zu bestimmen, bedenken wir, daß sie sich nach dem Vorangegangenen aus den Vektoren E' und E'' linear zusammensetzen lassen müssen. Wir machen daher den Ansatz

$$\mathfrak{E}_{max} = \alpha E + \alpha^* E^*; \ \mathfrak{E}_{min} = \beta E + \beta^* E^*. \quad (3)$$

Zur Ermittelung von α und β haben wir zwei Beziehungen, nämlich $(\mathfrak{E}_{max}\,\mathfrak{E}_{min}) = 0 = \alpha\beta E^2 + \alpha^*\beta^* E^{*2} + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)(EE^*)$ und $E'^2 + E''^2 = (EE^*) = \mathfrak{E}^2_{min} + \mathfrak{E}^2_{max}$, woraus unter Einführung der beiden Ansätze folgt

$$\{1 - 2\alpha\alpha^* - 2\beta\beta^*\}(EE^*) = 0;$$
$$(\alpha^2 + \beta^2)E^2 + (\alpha^{2*} + \beta^{2*})E^{*2} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\alpha = i\beta$, somit aus der vorletzten $\alpha\alpha^* = {}^1/4$, und weiter aus der ersten

$$E^{*2}/E^2 = -\alpha\beta/\alpha^*\beta^* = -\alpha^2/\alpha^{*2} = \alpha^4/(\alpha\alpha^*)^2 = 16\alpha^4,$$

also (4)

$$\alpha = i\beta = {}^1/_2 \cdot \sqrt[4]{E^{*2}/E^2} = {}^1/_2 H; \ HH^* = 1.$$

Die Vierdeutigkeit der Wurzel ist in Wirklichkeit nur eine Zweideutigkeit. Diese besagt, wie ohne weiteres klar ist, daß für $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}_{min}$

zwei Richtungssinne möglich sind. Wählen wir aber in einem beliebigen Punkt eine davon aus, so ist in jedem anderen Punkte nach dem Prinzip der stetigen Fortsetzung der Richtungssinn festgelegt.

Als Elliptizität von $\mathfrak{E}$ empfiehlt es sich, das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{E}^2_{max} - \mathfrak{E}^2_{min}}{\mathfrak{E}^2_{max} + \mathfrak{E}^2_{min}} = \frac{|(EE)|}{(EE^*)} = \varepsilon \qquad (5)$$

zu definieren. Die notwendige und hinreichende Bedingung

für Kreispolarisation ($\varepsilon = 0$) ist: $(EE) = 0$

„ Strichpolarisation ($\varepsilon = 1$) „ : $[EE^*] = 0$.

Wir zerlegen jetzt $\mathfrak{E}$ parallel zu $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}_{min}$ und schreiben $\mathfrak{E} = p \cdot \mathfrak{E}_{max} + q \cdot \mathfrak{E}_{min}$.

Dabei ist eine vorherbestimmte Richtung von $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}_{min}$ festzuhalten. Aus (1) (3) und (4) ergibt sich

$$p - iq = H^* e^{i\nu t};\ p + iq = He^{-i\nu t}, \text{ so daß}$$
$$\mathfrak{E}_p = {}^1/_2 \cdot \{H^* e^{i\nu t} + He^{-i\nu t}\} \mathfrak{E}_{max}$$
$$\mathfrak{E}_q = -{}^1/_{2i} \cdot \{H^* e^{i\nu} - He^{-i\nu}\} \mathfrak{E}_{min} \text{ wird.}$$

Als Phase von $\mathfrak{E}$ definieren wir nun die von $\mathfrak{E}_p$; im Grenzfalle der Kreispolarisation hat man eine beliebig gewählte der unendlich vieldeutigen Lagen von $\mathfrak{E}_{max}$ festzuhalten. Sonach ist die Phase von $\mathfrak{E}$

$$\varphi = \nu' t + i \log H. \qquad (6)$$

Sie ist invariant und gilt auch für einen Skalar mit elementarer Schwingungsform.

§ 2. Der Schwingungszustand in der Welle. Das Feld ($\mathfrak{E}$) hat allemal einer gewissen Differentialgleichung zu genügen, die zeitliche und räumliche Ableitungen von $\mathfrak{E}$ enthält. Sofern sie linear und homogen ist, ist die elementare Schwingungsform (1) im vorigen Paragraphen eine mögliche. Für den komplexen Vektor E bleibt dann eine rein räumliche Differentialgleichung zu erfüllen. Ihre Homogenität und Linearität hat zur Folge, daß E stets auf die Form gebracht werden kann

$$E = \int \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi}. \qquad (1)$$

Darin bezeichnet jeder Summand eine Welle, so daß E die Feldstärke bestimmt, wie sie als Summe aller den betrachteten Punkt durchkreuzenden, gleichfarbigen Wellen von elementarer Schwingungsform zustande kommt.

In einer Welle

$$E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi} \qquad (2)$$

bestimmt die Lage der Schwingungsebene sowie den Umlaufssinn von $\mathfrak{E}$ der Vektor

$$[EE^*]/2i = [E''E'] = {}^1/_{2i} \cdot e^{i(\Phi - \Phi^*)} [\mathfrak{e}\mathfrak{e}^*]. \qquad (3)$$

Ist $|\nu''|$ klein, so charakterisieren Größe und Orientierung der Schwingungsellipse von $\mathfrak{E}$, mit Benutzung von $H = e^{-i\Phi'} \eta$,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_{max} &= {}^1/_2 \cdot e^{-\Phi''} \{\eta\mathfrak{e} + \eta^*\mathfrak{e}^*\};\ \eta = \sqrt[4]{\mathfrak{e}^{*2}/\mathfrak{e}^2} \\ \mathfrak{E}_{min} &= {}^1/_{2i} \cdot e^{-\Phi''} \{\eta\mathfrak{e} - \eta^*\mathfrak{e}^*\};\ \eta\eta^* = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Elliptizität von $\mathfrak{E}$ mißt

$$\varepsilon = |(\mathfrak{e}\mathfrak{e})|/(\mathfrak{e}\mathfrak{e}^*) \qquad (5)$$

und die Phase von $\mathfrak{E}$

$$\varphi = \nu' t + \Phi' + i \log \eta. \qquad (6)$$

Wenn es sich nur um Aussagen über die Verhältnisse in einem Feldpunkt handelt, können wir über den N-P. der Zeitzählung stets so verfügen, daß für ihn $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E}_{max}$ oder $\mathfrak{E}_{min}$ zusammenfällt, also $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'') = \mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^{*2} = 0$ ist. Dann ist in dem betrachteten Punkt $\eta = 1$ und grad-log $\eta = 0$.

Aus dem Phasengefälle

$$-\partial\varphi/\partial N' = -\operatorname{grad} \Phi' - i \operatorname{gradlog} \eta \qquad (7)$$

ergibt sich die Geschwindigkeit, mit der ein geometrischer Punkt, der zu Zeit t sich auf der Isophasenfläche $\varphi = c$ befindet, in Richtung ihrer Normale N' sich weiterbewegt, zu

$$\omega' = -\partial\varphi/\partial t : \partial\varphi/\partial N' = \nu'/\{\operatorname{grad} \Phi' + i \operatorname{gradlog} \eta\}. \qquad (8)$$

Es ist aber wohl zu beachten, daß diese Geschwindigkeit nur eine kinematische Bedeutung hat. Das Phasengefälle (7) bezeichnet nicht die Richtung, in der sich das physikalische Gebilde: Welle fortpflanzt. Der Ausdruck (2) ist eben rein kinematischen Inhalts. Die Auswählung des Phasengefälles als Richtung der Welle ist eine vom kinematischen Standpunkt aus naheliegende, nichtsdestoweniger aber willkürliche Übereinkunft, die den Vorzug der Besonderheit und Einfachheit hat. Um den physikalischen Begriff: Welle zu bilden, muß dem kinematischen Begriff: Welle noch ein physikalisches Attribut eingefügt werden. Das aber lautet: Welle ist eine Art der Energiefortpflanzung. Die Verschiebung der Phasenwerte in Richtung der momentanen Energieströmung macht das aus, was wir als physikalische Wellenfortpflanzung bezeichnen müssen. Dementsprechend ist auch die Wellenlänge und die Transversalität des Feldes auf die der momentanen Energieströmung zu beziehen.

Im allgemeinen werden die Verschiebungen von Augenblick zu Augenblick verschieden sein, nämlich allemal wenn die Energieströmung turbulent ist. Natürlich läßt sich dann mit den soeben gegebenen Anweisungen praktisch nichts anfangen. Es gibt aber in jeder Welle einen bestimmten Energiefortgang. Bei turbulenter Energieströmung gibt dieser die mittlere Verschiebungsrichtung. Wir bezeichnen den über hinreichend große Zeiten genommenen Mittelwert der Strahlung $\mathfrak{R}$, der den definitiven Energiefortgang in dem gedachten Zeitraum mißt,

mit $\overline{\mathfrak{R}}$. Nunmehr ergibt sich die Verschiebungsgeschwindigkeit ω der Phasen in Richtung von $\overline{\mathfrak{R}}$ aus der Beziehung

$$\omega \cdot \cos(\overline{\mathfrak{R}}, \operatorname{grad} \varphi) = \omega', \tag{9}$$

sonach die Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi\omega/\nu' = 2\pi|\overline{\mathfrak{R}}|/|(\overline{\mathfrak{R}} \operatorname{grad} \varphi)|. \tag{10}$$

Und weiter: Unsere $\mathfrak{E}$-Welle ist transversal, wenn in ihr $(\mathfrak{e}\overline{\mathfrak{R}}) = 0$ ist. (11)

§ 3. Der Zerfall der Wellengleichung. In dem Ausdruck für eine Welle ist ein Skalar willkürlich, denn wir können schreiben

$$E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi} = \mathfrak{e}_1 \cdot e^{i\Phi_1} = \text{usw.} \tag{1}$$

Von vornherein kann also Φ beliebig sein, wodurch also auch der Vektor $\mathfrak{w} = -\operatorname{grad} \Phi$ beliebig ausfällt. Wir setzen nun aber fest, daß sowohl $\mathfrak{e}^{+i\Phi}$ als auch $\mathfrak{e}^{-i\Phi}$ die Lösung der Wellengleichung sei, der E zu genügen hat.

Danach soll in derselben Welle in jedem Punkte auch das gerade entgegengesetzte Phasengefälle möglich sein.

Dieses Theorem, das die kinematische Isotropie des Raumes zum Ausdruck bringt, hat zur wichtigen Folge, daß die Wellengleichung für E stets zerfällt in zwei selbständige Gleichungen, von denen die eine nur Glieder enthält, die von dem Vorzeichen von $\mathfrak{w}$ abhängig sind, während die andere nur Glieder aufweist, die von jenem Vorzeichen unabhängig sind!

Den so definierten komplexen Vektor $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}' + i\mathfrak{w}''$ nennen wir das Wellennormalenpaar und den zugehörigen vom N-P. der Zeitzählung abhängigen Vektor $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}' + i\mathfrak{e}''$ den Wellenvektor in der $\mathfrak{E}$-Welle. Nur diese der gespaltenen Wellengleichung genügenden Größen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{e}$ definieren in der Form $\mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi}$ eine Welle.

Die Benennung Wellennormalenpaar für $\mathfrak{w}$ ist den Verhältnissen bei Planwellen ($\mathfrak{e} =$ const., $\mathfrak{w} =$ const.) entnommen. Da dann $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{r})$ geschrieben werden kann, worin $\mathfrak{r}$ den Topographen bezeichnet, so ist $\Phi = -(\mathfrak{w}\mathfrak{r})$. Der Vektor $\mathfrak{w}'$ steht also dann normal zu den Isophasenebenen $(\mathfrak{w}'\mathfrak{r}) =$ const. und der Vektor $\mathfrak{w}''$ normal zu den Isodynamenebenen $(\mathfrak{w}''\mathfrak{r}) =$ const. Dementsprechend ist $\mathfrak{w}'$ als Isophasengradient und $\mathfrak{w}''$ als Isodynamengradient zu bezeichnen. Sie sind aber nicht die Normalen dieser Ebenen, weder die Einheitsnormalen noch die Abstände der Ebenen von einem festen Punkt. Sie sind überhaupt keine Strecken, sondern kinematische Vektoren von der Dimension einer reziproken Länge. Der Betrag $|\mathfrak{w}'|$ gibt den Zuwachs der Flächenkonstante, wenn man zur benachbarten im Abstande von 1 cm weiter geht. Entsprechendes gilt für $|\mathfrak{w}''|$.

Die oben ausgesprochene Festsetzung können wir der Anschauung näher bringen. Wir denken uns gemäß (2) § 2 die Feldlinien von $\mathfrak{e}$ sowie die Feldlinien von $-\operatorname{grad} \Phi = \mathfrak{w}$ gezogen. Dabei müssen die $\mathfrak{e}$-Linien überall mit den E-Linien zusammenfallen, doch ist ihre Intensitätsverteilung und demnach auch das $\mathfrak{w}$-Feld völlig willkürlich. Eine Umkehrung der kinematischen Fortpflanzungsrichtung der $\mathfrak{E}$-Welle, also eine Umkehrung des Vorzeichens von $\mathfrak{w}$, hat aber eine Umgestaltung beider Felder zur Folge, denn die Wellengleichung für E verlangt einen anderen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{w}$, wenn man dem $\mathfrak{w}$ das andere Vorzeichen gibt. Die Forderung der kinematischen Isotropie des Raumes bereitet nun dieser rechnerischen Willkürlichkeit ein Ende: sie verlangt, daß in jeder Welle die $\mathfrak{e}$- und $\mathfrak{w}$-Verteilung unabhängig sein soll von dem Vorzeichen von $\mathfrak{w}$; das Vorzeichen von $\mathfrak{e}$, also der Richtungssinn von $\mathfrak{e}$, spielt keine Rolle, da das von E in der Wellengleichung ohne Einfluß ist.

Nebenbedingungen, die dem $\mathfrak{E}$-Felde noch aufgedrückt sein können, unterliegen nun notwendig ebenfalls dem angeführten Theorem.

Lassen wir den Blick über die Welle schweifen, so sehen wir, daß der Gangunterschied zwischen irgend zwei Punkten nach Gl. (6) § 2 im allgemeinen nicht lediglich sein Vorzeichen wechselt, wenn die Welle in entgegengesetzter Richtung läuft. Das gleiche gilt nach Gl. (8) ebenda für die Phasengeschwindigkeit. Es liegt dies an $\log \eta$ bzw. $\operatorname{grad} \log \eta$, Glieder, die nicht umkehrbar sind. In besonderen Fällen nur lassen sie sich zum Verschwinden bringen, nämlich wenn überall in der Welle $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'') = 0$ gesetzt werden kann, also wenn die Welle kreispolarisiert ist, oder wenn die Welle eine Planwelle ist.

Auch in Skalarwellen gelten die entwickelten Gesetzmäßigkeiten in sinngemäßer Abwandlung.

Einige Beispiele mögen nun die vorgetragenen Auseinandersetzungen erläutern und zugleich weitere vorbereiten.

§ 4. Beispiele der Zerlegung. A) In einem Felde $(\mathfrak{Y})$ von elementarer Schwingungsform habe der komplexe Vektor Y der Wellengleichung zu genügen

$$aY + \nabla^2 Y = 0, \tag{1}$$

worin a eine Konstante sei. Für eine Welle $Y = \mathfrak{y} \cdot e^{i\Phi}$ haben wir dann als Ergebnis der Spaltung von (1)

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{y} + 2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{y} = 0 \tag{1'}$$

$$(a - \mathfrak{w}^2) \cdot \mathfrak{y} + \nabla^2 \mathfrak{y} = 0. \tag{1''}$$

Es sei beispielsweise $\mathfrak{y} = \mathfrak{c} \cdot f(r)$, wobei $\mathfrak{c}$ ein konstanter Vektor sei, und $f(r)$ eine reine

Funktion des Betrages r des Topographen $\mathfrak{r}$ bedeute. Offenbar muß dann für das Wellennormalenpaar gelten

$$\mathfrak{w} = g(r)\cdot\mathfrak{r};\quad [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*] = 0.$$

Damit liefern (1') und (1'')

$$\mathfrak{w}^2 = a, \text{ also } g(r) = \sqrt{a}/r \qquad (2)$$

$$\text{und } f(r) = 1/r. \qquad (3)$$

Das sind die bekannten Beziehungen in der vorausgesetzten umkehrbaren vektoriellen Kugelwelle.

B) Elastische Wellen in einem isotropen Körper. Es bezeichne D die Massendichte, ε_v den Volum-Modul, ε_g den Gestalt-Modul, $\mathfrak{S}$ die Verrückung. Unter den üblichen Annahmen finden wir als Spannung in der Flächeneinheit mit der Einheitsnormale $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{T} = (\varepsilon_v - {}^2/_3\,\varepsilon_g)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{n} + 2\varepsilon_g(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{S} + \varepsilon_g[\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{S}]; \qquad (4)$$

dabei mißt div $\mathfrak{S}$ die relative Dichteminderung $-\Delta D/D$. Hieraus berechnen wir nun die Oberflächenkraft $\int\mathfrak{T}\cdot df$ für die Volumeneinheit, wollen aber dabei die beiden Elastizitäts-Moduln sowie die Massendichte als Ortsfunktionen ansehen. Wir erhalten

$$\int\mathfrak{T}\,df = (\varepsilon_v + {}^4/_3\,\varepsilon_g)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathfrak{S} - \varepsilon_g\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathfrak{S} - [\mathrm{rot}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_g] + 2(\mathrm{grad}\,\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{S} + \mathrm{div}\,\mathfrak{S}\cdot\mathrm{grad}(\varepsilon_v - {}^2/_3\,\varepsilon_g). \qquad (5)$$

Ist keine andere Kraft als diese elastische wirksam, so liefert uns die Gleichsetzung von (5) mit der Massenbeschleunigung $D\ddot{\mathfrak{S}}$ die elastische Bewegungsgleichung.

Setzen wir $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_g + \mathfrak{S}_v$ und dementsprechend $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_g + \mathfrak{T}_v$, so lassen sich durch Zerlegung mit Zusatzbedingungen folgende beide Gleichungssysteme aus (4) und (5) gewinnen:

die Scherungswellen

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathfrak{S}_g = 0\\ &-D\ddot{\mathfrak{S}}_g - \varepsilon_g\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathfrak{S}_g\\ &-[\mathrm{rot}\,\mathfrak{S}_g\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_g] + 2(\mathrm{grad}\,\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{S}_g = 0;\\ &\mathfrak{T}_g = \varepsilon_g[\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{S}_g] + 2\,\varepsilon_g(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{S}_g;\end{aligned}\right\}(6)$$

sowie die Verdünnungwellen

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathfrak{S}_v = 0\\ &-D\ddot{\mathfrak{S}}_v + (\varepsilon_v + {}^4/_3\varepsilon_g)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathfrak{S}_v\\ &+\mathrm{div}\,\mathfrak{S}_v\,\mathrm{grad}(\varepsilon_v - {}^2/_3\varepsilon_g) + 2(\mathrm{grad}\,\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{S}_v = 0;\\ &\mathfrak{T}_v = (\varepsilon_v - {}^2/_3\varepsilon_g)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{S}_v\cdot\mathfrak{n} + 2\,\varepsilon_g(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{S}_v.\end{aligned}\right\}(7)$$

Beide Wellengattungen haben die Dichte D gemeinsam, falls sie im selben Raume zugleich bestehen. Solange die Dichteschwankungen aber klein sind, sind wir berechtigt auch in diesem Falle beide Wellensysteme als selbständige Gebilde anzunehmen, deren jedes auch seine eigne Energiebewegung hat, wenn sie nicht gerade kohärent schwingen. Auch dürfen wir D allemal durch seinen zeitlichen Mittelwert ersetzen.

Für eine Scherungswelle ($\mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi}$) liefert die Spaltung der Wellengleichung unter (6)

$$\left.\begin{aligned} &\{\varepsilon_g\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + (\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_g)\}\,\mathfrak{f}\\ &+\varepsilon_g(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{f} - \varepsilon_g(\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{w} - \varepsilon_g[\mathfrak{w}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}]\\ &+(\mathfrak{f}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_g)\mathfrak{w} - \varepsilon_g\,\mathrm{div}\,\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{w} = 0.\end{aligned}\right.\qquad(8')$$

$$\left.\begin{aligned} &\{\nu^2 D - \varepsilon_g\mathfrak{w}^2\}\,\mathfrak{f}\\ &-\varepsilon_g\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathfrak{f} - [\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}, \mathrm{grad}\,\varepsilon_g]\\ &+2(\mathrm{grad}\,\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{f} + \varepsilon_g(\mathfrak{f}\mathfrak{w})\mathfrak{w} = 0.\end{aligned}\right.\qquad(8'')$$

Der Zerlegungszwang erstreckt sich aber notwendig auch auf die Nebenbedingung, der das Verrückungsfeld zu genügen hat, nämlich die Divergenzlosigkeit dieses Feldes, die besagt, daß $\mathrm{div}\,\mathfrak{f} = i(\mathfrak{f}\mathfrak{w})$ sein soll. Die Unabhängigkeit des $\mathfrak{f}$- und des $\mathfrak{w}$-Feldes vom Vorzeichen von $\mathfrak{w}$ führt die Forderung mit sich: $\mathfrak{w}$ ist so zu wählen, daß

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{w}) = 0 = \mathrm{div}\,\mathfrak{f} \qquad (9')\ (9'')$$

erfüllt ist.

Für eine Verdünnungswelle ($\mathfrak{z}\cdot e^{i\Phi}$) liefert die Spaltung der Wellengleichung unter (7)

$$(\varepsilon_v + {}^4/_3\,\varepsilon_g)\{\mathrm{div}\,\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{w} + \mathrm{grad}(\mathfrak{z}\mathfrak{w})\} + 2(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_g)\mathfrak{z} + (\mathfrak{z}\mathfrak{w})\,\mathrm{grad}(\varepsilon_v - {}^2/_3\varepsilon_g) = 0. \qquad (10')$$

$$\nu^2 D\,\mathfrak{z} + (\varepsilon_v + {}^4/_3\,\varepsilon_g)\{\mathrm{grad\,div}\,\mathfrak{z} - (\mathfrak{z}\mathfrak{w})\mathfrak{w}\} + 2(\mathrm{grad}\,\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{z} + \mathrm{div}\,\mathfrak{z}\cdot\mathrm{grad}(\varepsilon_v - {}^2/_3\,\varepsilon_g) = 0. \qquad (10'')$$

Die Lamellarbedingung, der das Verrückungsfeld unterliegen soll, verlangt, daß $\mathrm{rot}\,\mathfrak{z} + i[\mathfrak{z}\mathfrak{w}]$ verschwinde. Sollen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ das Wellennormalenpaar bzw. der Wellenvektor in der Verdünnungswelle sein, so muß sein

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{z} = 0 = [\mathfrak{z}\mathfrak{w}]. \qquad (11')\ (11'')$$

C) Elektromagnetische Wellen in einem isotropen Körper. Bei elementarer Schwingungsform des Feldes sind die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die magnetische Feldstärke $\mathfrak{M}$ von der Form

$$\mathfrak{E} = {}^1/_2\{E\cdot e^{i\nu t} + E^*\cdot e^{-i\nu^* t}\},$$
$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\{M\cdot e^{i\nu t} + M^*\cdot e^{-i\nu^* t}\};$$

entsprechende Ausdrücke gelten für die elektrische Erregung $\mathfrak{D}_e$ sowie die magnetische Erregung $\mathfrak{D}_m$. In isotropen, nichtdrehenden und nichtaktiven Körpern sind diese proportional den entsprechenden Feldstärken, also $D_e = \varepsilon E$ und $D_m = \mu M$, worin ε den (komplexen) elektrischen und μ den (komplexen) magnetischen Erregungskoeffizienten bezeichnet. Sind räumliche Dichten der Elektrizität und des Magnetismus nicht vorhanden, so lauten die Feldgleichungen nach Einführung der Abkürzungen: $\varepsilon\nu/V = a_e$; $\mu\nu/V = a_m$; $a_e a_m = a$, wobei $4\pi V$ die Lichtgeschwindigkeit eines einfachen Strahles im Vakuum bedeutet,

$$i a_e\cdot E = \mathrm{rot}\,M;\quad -i a_m\cdot M = \mathrm{rot}\,E. \qquad (12)$$

Die Dualität des Feldes bringt es mit sich, daß wir aus (12) zwei gleichberechtigte Ausgangsformeln gewinnen können, nämlich

$$\left.\begin{aligned} &aM - \mathrm{rot\,rot}\,M - [\mathrm{rot}\,M, \mathrm{grad}\log a_e] = 0\\ &i a_e E = \mathrm{rot}\,M\end{aligned}\right\}(13)$$

oder, indem wir umgekehrt das magnetische Feld von dem elektrischen abhängen lassen

$$\left.\begin{aligned} & a E - \operatorname{rot}\operatorname{rot} E - [\operatorname{rot} E, \operatorname{grad}\log a_m] = 0 \\ & - i a_m M = \operatorname{rot} E. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Sowohl in (13) als auch in (14) sind die Forderungen $\operatorname{div}(a_e E) = 0$; $\operatorname{div}(a_m M) = 0$ erfüllt.

Gehen wir von dem magnetischen Felde aus, so haben wir für eine magnetische Welle $M = \mathfrak{m} \cdot e^{i\Phi_m}$ als Ergebnis der Spaltung ihrer Wellengleichung, der ersten Gl. unter (13),

$$\begin{aligned} & \{\operatorname{div}\mathfrak{w}_m - (\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad}\log a_e)\}\, \mathfrak{m} + 2(\mathfrak{w}_m V)\,\mathfrak{m} \\ & + (\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log a)\,\mathfrak{w}_m - \operatorname{grad}(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) = 0; \end{aligned} \quad (15')$$

$$\begin{aligned} & \{a - \mathfrak{w}_m^2\}\, \mathfrak{m} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m} \\ & - [\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log a_e] = 0. \end{aligned} \quad (15'')$$

Die Divergenzlosigkeit der magnetischen Erregung verlangt das Verschwinden von $\operatorname{div}(a_m \cdot \mathfrak{m}) - i a_m (\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m)$. Sollen, wie in (15), $\mathfrak{w}_m$ das Wellennormalenpaar und $\mathfrak{m}$ den magnetischen Wellenvektor bedeuten, so muß auch in dieser Nebenbedingung zum Ausdruck kommen, daß das $\mathfrak{m}$- und das $\mathfrak{w}_m$-Feld unbeeinflußt ist von dem Vorzeichen des magnetischen Wellennormalenpaares. Es muß also sein

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) = 0 = \operatorname{div}(a_m \mathfrak{m}). \quad (16')\ (16'')$$

Wir wollen zeigen, daß dies Ergebnis auch aus (15') und (15'') abgeleitet werden kann. Multiplizieren wir nämlich (15') skalar mit $\mathfrak{w}_m$, nehmen wir anderseits von (15'') die Divergenz, so kommt

$$\begin{aligned} & \{\operatorname{div}\mathfrak{w}_m - (\mathfrak{w}_m \operatorname{grad}\log a_e)\}\, (\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) + (\mathfrak{w}_m(\mathfrak{w}_m V)\mathfrak{m}) \\ & + (\mathfrak{m} \operatorname{grad}\log a)\, \mathfrak{w}^2_m - {}^1/_2 \cdot (\mathfrak{m} \operatorname{grad}\mathfrak{w}_m^2) = 0 \\ & \operatorname{div}(a_m \mathfrak{m}) + a_m(\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log(a - \mathfrak{w}_m^2)/a) = 0. \end{aligned}$$

Die Erfüllung von (16) verlangt also aus beiden Teilen der gespaltenen Wellengleichung übereinstimmend

$$(\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \mathfrak{w}_m^2 a) = 0. \quad (17)$$

Diese Übereinstimmung muß ja auch vorhanden sein, denn die Divergenzlosigkeit des elektromagnetischen Feldes ist wie bereits erwähnt, schon in den Ausgangsformeln (13) erfüllt.

Gemäß (16') ist das Glied $\operatorname{grad}(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m)$ in Gl. (15') zu streichen, und weiter ist deshalb noch

$$(\mathfrak{m}V)\,\mathfrak{w}_m + (\mathfrak{w}_m V)\,\mathfrak{m} + [\mathfrak{w}_m \operatorname{rot}\mathfrak{m}] = 0. \quad (18)$$

Für die nach (13) von der magnetischen Welle abhängige elektrische erhalten wir

$$i a_e E = \{[\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m] - i \operatorname{rot}\mathfrak{m}\}\, e^{i\Phi_m}. \quad (19)$$

Beachtenswert ist, daß demzufolge dieses Feld im allgemeinen weder seine Lage beibehält noch seine Richtung wechselt, wenn das magnetische Phasengefälle sich umkehrt.

In demselben elektromagnetischen Feld können wir aber auch das elektrische bevorzugen und das magnetische als von jenem abhängig ansehen. Für die elektrische Welle $E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi_e}$ bekommen wir dann aus dem System (14) den Gl. (15) bis (18) gleichgebaute Formeln, in denen $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}_m$ mit $\mathfrak{w}_e$ und a_e mit a_m vertauscht erscheinen. Die die elektrische Welle begleitende magnetische Welle — dieselbe, die wir oben besprochen haben — tritt jetzt in der Form auf

$$- i a_m \cdot M = \{[\mathfrak{e}\mathfrak{w}_e] - i \operatorname{rot}\mathfrak{e}\}\, e^{i\Phi_e}. \quad (20)$$

Dasselbe Feld, von dem oben gezeigt wurde, daß es unabhängig von einem Richtungswechsel des magnetischen Wellennormalenpaares $\mathfrak{w}_m$ sei, erscheint jetzt abhängig von dem Vorzeichen des elektrischen Wellennormalenpaares $\mathfrak{w}_e$ oder was dasselbe besagt, des elektrischen Phasengefälles. Die Wellennormalenpaare $\mathfrak{w}_m$ und $\mathfrak{w}_e$ können eben von vornherein verschieden sein. Wenn in derselben elektromagnetischen Welle sowohl das $\mathfrak{e}$- als auch das $\mathfrak{m}$-Feld lamellar ist, sind beide identisch, also auch das elektrische und magnetische Phasengefälle, und ist ein Zeichenwechsel von $\mathfrak{w}$ ohne Einfluß auf die Lagen der genannten Felder. Dann ist ferner nach (15''), $\mathfrak{w}^2 = a$ und die Phasendifferenz der elektrischen und magnetischen Schwingung

$$\varphi_e - \varphi_m = \frac{i}{2} \log \frac{a_e\, a_m^*}{a_e^*\, a_m}, \quad (21)$$

also nur mehr abhängig von den Körpercharakteristiken.

Untersucht man die elektrischen Schwingungen, die an der Oberfläche eines axialsymmetrisch begrenzten Körpers möglich sind, so findet man, daß die vom Leiter fortlaufenden elektrischen Wellen keineswegs umkehrbar sind. Diese Wellen sind eben im Grunde keine Wellen, sondern Doppelwellen, die bekanntlich aus den paarweis gegeneinander laufenden eigentlichen Wellen am Leiter hervorgehen. Jede Komponente einer Doppelwelle ist umkehrbar und zeigt in ihrem Bau die vorstehend entwickelten Gesetzmäßigkeiten. Kehren wir in jeder das Phasengefälle um, so resultiert dennoch wieder eine nach außen laufende Doppelwelle.

Gießen, im März 1916.

(Eingegangen 22. März 1916.)

Die Bahn der Schallstrahlen in der Luft unter dem Einfluß der Temperatur.

Von V. Kommerell.

Für die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft gilt bekanntlich die Formel

$$v = v_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \quad (1)$$

wobei t die Temperatur, v_0 die Geschwindigkeit für $t = 0^0$ und $\alpha = \frac{1}{273}$ der Ausdehnungskoef-



fizient der Gase ist. Kommt also der Schallstrahl an die Grenze zweier Luftschichten von verschiedener Temperatur, so erfährt er nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz eine Ablenkung; ändert sich die Temperatur stetig, so beschreibt er eine Kurve, deren Gleichung hier aufgestellt werden soll. Natürlich ist dies nur unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen über das Gesetz der Temperaturänderung möglich. Wir nehmen an, daß die Temperatur eine Funktion der Höhe y sei, daß also

$$t = f(y) \tag{2}$$

bekannt sei.

Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz ist nun, wenn β den Winkel des Schallstrahls mit der Vertikalen bedeutet,

$$\frac{\sin(\beta + d\beta)}{\sin\beta} = \frac{v + dv}{v}$$

oder

$$\operatorname{ctg}\beta\, d\beta = \frac{dv}{v}. \tag{3}$$

Nach (1) und (2) ist aber

$$dv = \frac{v_0 a \cdot f'(y)\, dy}{2\sqrt{1 + a f(y)}}. \tag{4}$$

Ist nun $y = \psi(x)$ die gesuchte Gleichung der vom Schallstrahl beschriebenen Kurve, und setzt man, wie üblich

$$y' = \psi'(x) = p,$$

so ist

$$\operatorname{ctg}\beta = p, \tag{5}$$

und hieraus

$$-\frac{d\beta}{\sin^2\beta} = dp,$$

also

$$d\beta = -\frac{dp}{1 + p^2}. \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (3)—(6) folgt nun

$$-\frac{p\, dp}{1 + p^2} = \frac{a f'(y)\, dy}{2[1 + a f(y)]}. \tag{7}$$

Diese Gleichung läßt sich sofort logarithmisch integrieren, und ergibt

$$(1 + p^2)[1 + a f(y)] = C. \tag{8}$$

Die Integrationskonstante C kann gleich bestimmt werden durch die Festsetzung, daß im Ausgangspunkt der Schallbewegung, wo $y = 0$ sei, die Schallrichtung den Winkel ε mit der Horizontalen bilden soll, d. h. daß für $y = 0$ der Differentialquotient $p = \operatorname{tg}\varepsilon$ werden soll. Nach (8) wird also

$$C = \frac{1 + a f(0)}{\cos^2\varepsilon}. \tag{9}$$

Zur weiteren Behandlung der Gleichung (8) muß nun die Funktion $f(y)$ bekannt sein; wir nehmen den einfachen Fall an, daß die Temperatur mit der Höhe gleichmäßig zu- oder abnehme, was ja innerhalb gewisser Grenzen zulässig sein wird. Es sei also

$$t = f(y) = t_0 + \gamma y. \tag{10}$$

Hierbei ist γ der Gradient, d. h. die Temperaturänderung für 1 m Höhenunterschied. Ein positives γ bedeutet also Zunahme, ein negatives Abnahme der Temperatur mit wachsender Höhe. Letzterer Fall ist ja der normale, und zwar nimmt erfahrungsgemäß im Durchschnitt die Temperatur für etwa je 200 m Höhe um 1^0 ab, so daß also dann

$$\gamma = -0{,}005 \tag{11}$$

wäre.

Wir haben also in (8) zu setzen

$$f(y) = t_0 + \gamma y$$

und erhalten so unter Berücksichtigung von (9)

$$(1 + p^2)(1 + a t_0 + a\gamma y) = \frac{1 + a t_0}{\cos^2\varepsilon}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\frac{a\gamma}{1 + a t_0} = m, \tag{12}$$

so lautet die Gleichung (8), nachdem p durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzt ist:

$$dy\sqrt{\frac{\cos^2\varepsilon\,(1 + my)}{\sin^2\varepsilon - my\cos^2\varepsilon}} = dx. \tag{13}$$

Die Integration ergibt

$$x - x_0 = \frac{1}{m\cos^2\varepsilon}\Big\{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\cos^2\varepsilon\,(1 + my)}{\sin^2\varepsilon - my\cos^2\varepsilon}} - \cos\varepsilon\sqrt{(1 + my)(\sin^2\varepsilon - my\cos^2\varepsilon)}\Big\}. \tag{14}$$

Die Substitution

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\cos^2\varepsilon\,(1 + my)}{\sin^2\varepsilon - my\cos^2\varepsilon}} = \frac{\psi}{2}$$

liefert:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\varepsilon\,(1 + my) &= \sin^2\frac{\psi}{2}, \\ \sin^2\varepsilon - my\cos^2\varepsilon &= \cos^2\frac{\psi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Durch Einsetzen in (13) folgt

$$x - x_0 = \frac{1}{m\cos^2\varepsilon}\left(\frac{\psi - \sin\psi}{2}\right), \tag{16}$$

während aus (14) oder (15) folgt

$$y = \frac{1}{m\cos^2\varepsilon}\left(\sin^2\frac{\psi}{2} - \cos^2\varepsilon\right). \tag{17}$$

Die Konstante x_0 wird aus der Bedingung bestimmt, daß für $y = 0$ auch $x = 0$ werden soll. Aus (17) folgt, daß für $y = 0$

$$\cos^2 \varepsilon = \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

oder

$$\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

ist.

Setzt man dies in (16) ein, und gleichzeitig $x = 0$, so erhält man

$$-x_0 = \frac{1}{m \cos^2 \varepsilon}\left(\frac{\pi}{2} - 2 - \frac{\sin 2\varepsilon}{2}\right),$$

also

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{m \cos^2 \varepsilon}\left(\frac{\psi - \sin\psi - \pi + 2\varepsilon + \sin 2\varepsilon}{2}\right), \\ &\text{wozu wieder tritt} \\ y &= \frac{1}{m \cos^2 \varepsilon}\left(\sin^2 \frac{\psi}{2} - \cos^2 \varepsilon\right). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Gleichungen (18) stellen nun eine gewöhnliche Zykloide dar, und zwar liegt der Anfangspunkt in dem Punkt, wo sie mit der x-Achse den Winkel ε bildet. Daß in der Tat eine Zykloide vorliegt, erkennt man sofort, wenn man eine Parallelverschiebung mit der Kurve (18) vornimmt, derart, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ und $y' = \infty$ wird. Man geht zu diesem Zweck am einfachsten auf die Gleichungen (16) und (17) zurück, wo y durch $y - y_0$ zu ersetzen ist. Durch Differentiation dieser Gleichungen und nachfolgende Division ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sin\psi}{1 - \cos\psi} = \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}. \quad (19)$$

Für $\psi = 0$ wird also $y' = \infty$; sollen ferner für $\psi = 0$ auch x und y verschwinden, so muß $x_0 = 0$ und $y_0 = \frac{1}{m}$ werden. Durch Einsetzen dieser Werte erhält man dann

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2m \cos^2 \varepsilon}(\psi - \sin\psi), \\ y &= \frac{1}{2m \cos^2 \varepsilon}(1 - \cos\psi). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Dies sind aber die Gleichungen einer gewöhnlichen Zykloide, die durch einen Kreis vom Radius

$$a = \frac{1}{2m \cos^2 \varepsilon} = \frac{1 + \alpha t_0}{2\alpha\gamma \cos^2 \varepsilon} \quad (21)$$

erzeugt wird. Diese Zykloide ist nach oben konvex, wenn γ positiv ist, nach unten, wenn γ negativ ist.

Die Spitzen aller dieser Zykloiden, die bei verschiedenen Werten von ε sich ergeben, liegen nun alle in derselben Höhe, wie aus (13) folgt. Denn für die Spitze ist $y' = \infty$, oder $\frac{1}{y'} = 0$. Nach (13) tritt dies ein, wenn

$$y = -\frac{1}{m} = -\frac{1 + \alpha t_0}{\alpha\gamma} \quad (22)$$

ist. Dann ist aber nach (10)

$$t = t_0 - \frac{(1 + \alpha t_0)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Da $\alpha = \frac{1}{273}$, so ist also

$$t = -273^0,$$

d. h. die Höhe, in der die Spitzen aller durch (18) dargestellten Zykloiden liegen, ist diejenige, in welcher, gleichmäßige Änderung der Temperatur vorausgesetzt, der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht würde. Da nun die Spitzen einer Zykloide auf der Geraden liegen, auf der der erzeugende Kreis rollt, so können also die Schallzykloiden, um sie kurz so zu bezeichnen, alle durch Abrollen eines Kreises auf jener Horizontalen in der Höhe des absoluten Nullpunktes erzeugt gedacht werden. In der Tat folgt auch aus (21) durch eine einfache geometrische Überlegung, daß ein Kreis von dem dort angegebenen Radius durch Abrollen auf jener Horizontalen eine Zykloide erzeugt, die im Nullpunkt gerade den Winkel ε gegen die Horizontale bildet.

Es hat sich also ergeben:

Ändert sich die Lufttemperatur gleichmäßig mit der Höhe, so beschreibt jeder Schallstrahl eine Zykloide, die nach unten konvex ist, wenn die Temperatur mit der Höhe abnimmt (normaler Zustand), nach oben, wenn die Temperatur mit der Höhe zunimmt (Temperaturumkehr).

Alle diese Zykloiden können erzeugt gedacht werden dadurch, daß die Kreise, welche durch den Ausgangspunkt der Schallstrahlen gehen, und die Horizontale des absoluten Nullpunktes berühren, auf dieser abrollen: die Ebenen der Kreise bleiben hierbei stets vertikal.

Natürlich gilt dies Ergebnis ganz ebenso für jede Wellenbewegung, bei der die Geschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus der Höhe ist.

Daß als Bahnkurve eine Zykloide herauskommen mußte, hängt damit zusammen, daß ein Wellenstrahl, der von einem Medium in ein anderes übertritt, und dabei dem Snelliusschen Gesetz folgt, zugleich in kürzester Zeit von einem Punkt A des einen zu einem Punkt B des anderen Mediums gelangt. Ändert sich also die Geschwindigkeit stetig, so kommt er, immer dem Brechungsgesetz folgend, in kürzester Zeit von einem Punkt seiner Bahn zu einem andern. In unserem Fall ist die Geschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus der

Höhe; ebenso ist es aber bei der Fallbewegung; da nun hier bekanntlich die Zykloide die Kurve kürzester Fallzeit (Brachistochrone) ist, so ist es nicht zu verwundern, daß auch als Bahn der Schallkurven eine Zykloide sich ergeben muß.

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß das oben gefundene Resultat imstande sei, die eigentümlichen Erscheinungen zu erklären, die bei der Fortpflanzung des Kanonendonners beobachtet werden, und die darin bestehen, daß auf ein Gebiet normaler Hörbarkeit die sogenannte „Zone des Schweigens" folgt, d. h. ein Gebiet, wo kein Schall vernommen wird, daß aber jenseits dieser Zone des Schweigens wieder der Schall gehört wird[1]). Es handelt sich aber hier offenbar um ein sehr verwickeltes Phänomen, bei dem außer der Lufttemperatur noch eine Reihe anderer Faktoren, wie Reflexion, Beugung, Wind, vielleicht auch Erdbodenleitung mitwirken, und die isolierende Behandlung eines derselben, also hier der Temperaturänderung, wird kaum eine allseitig befriedigende Erklärung zu geben vermögen. Immerhin aber könnte daran gedacht werden, daß die bei normalem Temperaturgefäll nach oben konkaven Zykloiden in einer höher liegenden Schicht, wo Temperaturumkehr herrscht, in die nach oben konvexe Form umgebogen und zur Erde zurückgeleitet würden. Leider aber stimmen die bei der Rechnung sich ergebenden Zahlen mit den beobachteten hinsichtlich der Größenordnung schlecht überein[2]). Es treten nämlich hauptsächlich zwei Umkehrschichten auf, die eine etwa von 1000—1500 m, gewöhnlich über Wolkenschichten, mit einem Gradienten von etwa $\gamma = +0{,}02$, und eine zweite von etwa 12000—18000 m mit einem Gradienten von etwa $\gamma = +0{,}0015$. Nimmt man eine Umbiegung an der ersteren an, so würde der Schallstrahl schon nach etwa 20 km wieder herunter kommen. Legt man aber die höhere Schicht zugrunde, so kommt man auf Entfernungen von 400—500 km, wobei aber die Dicke der Umkehrschicht 50—70 km betragen müßte. Beides stimmt nicht mit der Erfahrung überein. Wie freilich die Temperaturverhältnisse in den höheren Schichten der Atmosphäre beschaffen sind, darüber liegen keine Beobachtungen vor, und umgekehrt aus der Tatsache der Zone des Schweigens auf das Vorhandensein einer Temperaturumkehrschicht in größeren Höhen schließen zu wollen, wäre doch sehr gewagt. Jedenfalls aber muß die Umkehrung der Schallstrahlen, um die großen horizontalen Entfernungen zu erklären, in Höhen der Atmosphäre erfolgen, über die keine Beobachtungen vorliegen. Dorthin verlegt z. B. v. d. Borne[1]) die Reflexion, von der er annimmt, daß sie an der allerdings hypothetischen Grenze der Stickstoff- und Wasserstoffatmosphäre erfolge. Die dabei sich ergebenden Zahlen stimmen besser mit der Erfahrung überein.

Der Einfluß der Lufttemperatur vermag also wohl das Aufsteigen der Schallstrahlen und damit vielleicht lokale Abnormitäten in der Schallverbreitung (z. B. Unhörbarwerden auf verhältnismäßig kurze Entfernung) zu erklären, wie solche aus der Kriegsgeschichte mehrfach bekannt sind[2]). Dagegen scheint es nicht, daß er, ohne willkürliche Annahmen über die Temperatur der höheren Luftschichten, eine befriedigende Erklärung für die „Zone des Schweigens" und die daran sich anschließende Zone der abnormen Hörbarkeit zu geben vermag.

Anmerkung bei der Korrektur: Erst während des Druckes erhalte ich Kenntnis von der Abhandlung des Hrn. Nölke in dies. Zeitschr. **17**, 31, 1916: „Zur Erklärung der beim Geschützdonner, bei großen Explosionen usw. beobachteten Fortpflanzungseigentümlichkeiten des Schalles". Dort wird mit Recht auf die wichtige Rolle hingewiesen, welche die Beugung bei der Fortpflanzung des Schalles spielt. — Die Rechnung ist in abgekürzter Form durchgeführt; daß sich als Bahnkurve eine Zykloide ergibt, wird nicht ausdrücklich bemerkt, sondern es wird näherungsweise eine Parabel an ihre Stelle gesetzt. Die in Rede stehende Erscheinung wird dann durch Totalreflexion gebeugter Strahlen an einer Umkehrschicht zu erklären gesucht. Die Schwierigkeit aber, daß es sich in vertikaler Richtung nur um wenige Kilometer, in horizontaler um Hunderte von Kilometern handelt, scheint mir nicht genügend berücksichtigt.

Reutlingen, März 1916.

(Eingegangen 30. März 1916.)

1) Nach Meinardus (Die Hörweite des Kanonendonners bei der Belagerung von Antwerpen. Meteorol. Zeitschr. 1915, Heft 5, S. 199—206) erstreckte sich z. B. bei der Belagerung von Antwerpen das Gebiet normaler Hörbarkeit etwa 100 km weit, dann folgte bis etwa 160 km die Zone des Schweigens, darauf wieder Hörbarkeit bis etwa 230 km.

2) Die folgenden Zahlenangaben verdanke ich gütigen Mitteilungen des Herrn Prof. Dr. Pilgrim, Vorstands der meteorologischen Abteilung des K. Statistischen Landesamts in Stuttgart.

1) Über die Schallverbreitung bei Explosionskatastrophen. Diese Zeitschr. **11**, 483—488, 1910.

2) Vgl. hierüber: Dörr, Über die Hörbarkeit von Kanonendonner, Explosionen u. dgl. Meteorol. Zeitschr. 1915, Heft 5, S. 208—215.



Über einen Vakuumspektrographen zur Aufnahme von Hochfrequenzspektra und eine mit demselben ausgeführte vorläufige Untersuchung der seltenen Erden[1]).

Von Manne Siegbahn und Einar Friman.

(Mit Tafel IV.)

I. Beschreibung des Vakuumspektrographen.

Um die Hochfrequenzspektra der Elemente bei größeren Wellenlängen untersuchen zu können, haben die Verfasser einen Vakuumspektrographen bauen lassen. Ein solcher muß, wie unsere früheren Messungen gelehrt haben, folgende Bedingungen erfüllen. Erstens muß der Kristall beweglich sein, da sonst Unebenheiten in der Kristallstruktur stark zur Geltung kommen (vgl. auch Rutherford und E. Wagner). Zweitens ist zur Erzielung eines guten Auflösungsvermögens außer einem sehr feinen ersten Spalt gute Fokussierung nötig. Es ist somit erforderlich, daß der Abstand erster Spalt-Kristalldrehungsachse möglichst gleich der Entfernung Kristalldrehungsachse-Platte ist.

Der nach diesen Prinzipien gebaute Apparat ist in den Fig. 1 und 2 dargestellt, wobei Fig. 1 einen Vertikal-, Fig. 2 einen Horizontalschnitt desselben gibt. Der Spektrograph besteht aus einem runden, 6 mm dicken Messingkasten von 8 cm Höhe und 30 cm inneren Durchmesser. Der obere, 35 mm breite Rand BB ist sorgfältig plan geschliffen, ebenso der entsprechende Teil CC des Deckels. Dieser ist, wie auch der Boden, mit radialen Verstärkungen versehen, um den Druck aushalten zu können. Der Deckel hat außerdem einen Handgriff H und eine Schraube S. Letztere dient dazu, den Deckel nach dem Lufteinlassen zu heben. Der Kasten ruht auf drei Stellschrauben. In der Mitte des Bodens ist eine konische Ausbohrung, durch die ein gut passender Messingkonus M geht, auf dem der Kristallhalter angebracht ist. Dieser besteht aus einem Schlitten G, der mit Hilfe der Schraube r verschoben werden kann. Auf dem Schlitten befindet sich der eigentliche Tisch T, der durch die Schraube u um die Achse a sich drehen läßt. Durch diese Anordnung kann man den Kristall K sehr genau einstellen. Der Kristall ist mittels eines Bügels b an dem Tisch befestigt. Der untere Teil des Konus ist mit einem etwa 20 cm langen Messingarm L durch die Schraube fest verbunden, welche mit einem Zeiger Z versehen ist. Dieser läuft der Skala N entlang, die den Drehungswinkel des Kristalls direkt in Graden angibt. Der Messingarm L wird mit Hilfe einer langsam rotierenden Exzenterscheibe in eine hin- und hergehende Bewegung versetzt.

Durch die Wand des Kastens gehen zwei angelötete einander gegenüberliegende Röhren R und U. Erstere steht durch einen Schlauch in Verbindung mit der Vorpumpe. In dem anderen steckt ein Rohr V, dessen Ende mit einer plangeschliffenen Messingscheibe m bedeckt ist, welche mit einem 0,1 mm feinen, goldgeränderten Spalt b versehen ist.

Zwischen diesem und dem Kristall ist ein Bleischutz P angebracht, der einen etwa 2 mm breiten Spalt hat. In dem Rohre V befindet sich noch ein $1^1/_2$ cm dicker zylindrischer Bleischutz z mit einer Öffnung von ca. 1 mm. Das benutzte Röntgenrohr X war von der früher[1]) beschriebenen Konstruktion. Es wurde an dem Spektrographen in der Weise befestigt, daß der ausgezogene Teil desselben in das Rohr U eingeführt und dann eine luftdichte, elastische Verbindung mit Hilfe Pizein erreicht wurde.

Die photographische Platte wird in der Kassette F angebracht. Diese ist mit dem Schlitten G durch zwei Schrauben i, die durch die Füße F gehen, fest verbunden. Die Füße sind mit rechteckigen Ausbohrungen versehen, wodurch die Kassette ein wenig verschoben bzw. gedreht werden kann. Diese Anordnung ermöglicht es, die Platte senkrecht gegen die Linie Spalt—Kristalldrehungsachse ebenso wie in derselben Entfernung einzustellen, wie den Spalt von der Kristalldrehungsachse. Der Schlitten ruht auf drei Stahlkugeln o (vgl. H. G. J. Moseley, Phil. Mag. 27, 1914), von denen die zwei hinteren in einer kreisförmigen Ausbohrung g laufen, während die vordere in eine der radial gehenden Vertiefungen h taucht. Der Schlitten nimmt in dieser Weise einige ganz feste Lagen ein. Die Zahl der radial gehenden Ausbohrungen beträgt 13, welche in ungefähr gleicher Winkelentfernung voneinander liegen. Diese Winkel sind sehr genau gemessen worden. Der Öffnungswinkel der Kassette beträgt etwa 37° und die Platten überdecken einander in zwei naheliegenden Lagen mit 4° bis 5°. Der Winkel einer Spektrallinie wird mit Hilfe einer Bezugslinie bestimmt, die mit einem Messer genau an derselben Stelle an dem Innenrand der Kassette gezogen wird. Die Entfernung dieser Linie von der Mitte der Platte wird durch beiderseitige Aufnahme der $K\alpha$-Linien des Silbers ermittelt.

Das Auspumpen des Röntgenrohres geschieht

1) (Die bei der Untersuchung verwendeten Stoffe wurden in sehr entgegenkommender Weise von Dr. Carl Freiherr Auer von Welsbach zur Verfügung gestellt. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, für diese Freundlichkeit meinen aufrichtigen Dank auszusprechen. Siegbahn.)

1) Siegbahn und Friman, Ann. d. Phys. 1916.



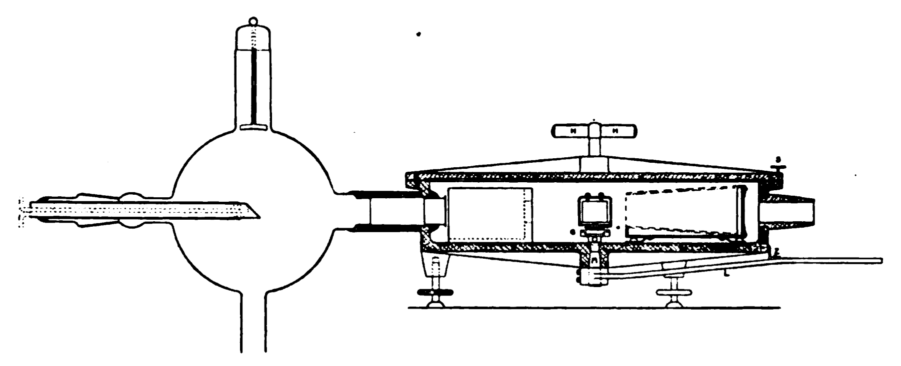


Fig. 1. Vakuumspektrograph (Vertikalschnitt).

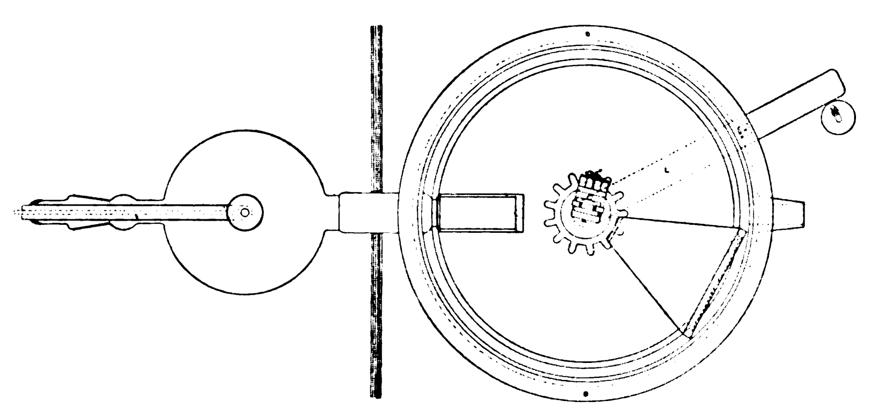


Fig. 2. Vakuumspektrograph (Horizontalschnitt).

mit Molekularpumpe. Die Vorpumpe wird gleichzeitig für das Röntgenrohr und den Spektrographen benutzt. Diese sind durch eine ca. 0,001 mm dünne Aluminiumfolie getrennt, die an dem Spalt aufgelegt wird. In dieser Weise erhält man in wenigen Minuten Röntgenvakuum.

Eine Photographie der ganzen Apparatur ist in der Tafel (Fig. 3) reproduziert. Um die Leistungsfähigkeit des Vakuumspektrographen zu zeigen, ist noch eine Aufnahme des Hochfrequenzspektrums (*L*-Reihe) des Aldebaraniums in etwa dreifacher Vergrößerung wiedergegeben (Fig. 4).

II. Vorläufige Untersuchung der seltenen Erden.

Durch unsere früheren Untersuchungen[1]) bei *U*-*Ta* ist bekannt, daß die *L*-Reihe aus wenigstens 11 Linienserien besteht. Für die Weiterverfolgung dieser Serien zu den nächstfolgenden Elementen ist eine Voruntersuchung betreffs Reihenfolge und Reinheit der wenig bekannten seltenen Erden nötig. Wegen des Ineinandergreifens der *L*-Serien einander naheliegender Elemente ist genügende Reinheit eine Hauptbedingung für die Feststellung der Serien. Hat es sich doch bei den Elementen *Ta*-*U* gezeigt, daß mehrere Serien einander kreuzen und folglich bei einigen Elementen zwei Linien, die verschiedenen Serien angehören, zusammenfallen.

Bei der jetzigen Untersuchung wurde die stärkste Linie (α_1) und ihr Satellit (α_2) in dem ganzen Gebiet *Pr*—*Ta* mit Ausnahme der zwei Elemente ***Tu I*** und ***Tu II*** bestimmt. Diese Dublette ist wegen ihres charakteristischen Aussehens leicht zu erkennen. Bei jeder Aufnahme wurde immer ein hinreichend großer Wellenlängenbezirk photographiert, um festzustellen, ob die nächstliegenden Elemente als Verunreinigungen vorkamen. Die Aufnahmen zeigen durchweg, daß die benutzten Präparate sehr rein waren. In den Fällen, wo Andeutungen von Verunreinigungen auftraten, gehörten die bezüglichen Linien einem Element an, das früher als Strahlengeber benutzt worden war und von dem daher einige Reste im Rohr wahrscheinlich zurückgeblieben waren. Die Antikathode selbst wurde zwar nach jeder Aufnahme rein gefeilt, es ist aber von uns schon früher bemerkt worden, daß trotzdem das Spektrum eines vorher benutzten Elementes bei der nächsten Aufnahme nochmals erscheint.

Sämtliche Elemente wurden als feines Pulver

1) Siegbahn und Friman, diese Zeitschr. **17**, 17, 1916; Ann. d. Phys. 1916.

auf eine Kupferantikathode aufgerieben, nachdem diese mit einem Messer geritzt worden war. In dieser Weise gelang es schon mit winzigen Mengen des Stoffes kräftige Spektra zu erzeugen.

Die Tabelle I gibt die erhaltenen Wellenlängen an.

Tabelle I.

Nr.	Elem.	$\lambda \cdot 10^8$ cm	
		α_1	α_2
73	*Ta*	1,518	1,528
72	*Tu II*	—	—
71	*Cp*	1,619	1,629
70	*Ad*	1,670	1,681
69	*Tu I*	—	—
68	*Er*	1,783	1,794
67	*Ho*	1,843	1,854
66	*Dy*	1,907	1,916
65	*Tb*	1,973	1,983
64	*Gd*	2,043	2,054
63	*Eu*	2,121	2,131
62	*Sa*	2,200	2,210
61	—	—	—
60	*Nd*	2,369	2,379
59	*Pr*	2,462	2,472

In der Tabelle II sind die Werte von $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, 10^{-4}$ (bei α_1) nebst den Differenzen dieser Werte zweier aufeinanderfolgenden Elemente angegeben.

Tabelle II.

Nr.	Elem.	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot 10^{-4}$ α_1	Diff.
73	*Ta*	0,812	
			13
72	*Tu II*	—	
			13
71	*Cp*	0,786	
			12
70	*Ad*	0,774	
			13
69	*Tu I*	—	
			12
68	*Er*	0,749	
			12
67	*Ho*	0,737	
			13
66	*Dy*	0,724	
			12
65	*Tb*	0,712	
			12
64	*Gd*	0,700	
			13
63	*Eu*	0,687	
			13
62	*Sa*	0,674	
			12
61	—	—	
			12
60	*Nd*	0,650	
			13
59	*Pr*	0,637	

Der stärkste Komponent (α_1) dieser zwei Linien ist für einige dieser Elemente von Moseley[1]) bestimmt worden. Abgesehen von einer fehlerhaften Bezeichnung bei Nummer 66, die Dysprosium sein soll, ist die Übereinstimmung sehr gut. Ebenso ist der Anschluß an unsere früheren Messungen (*U*—*Ta*) sehr befriedigend, wie die erste Differenz *Ta*—*Cp* zeigt.

Ferner stimmt die nach den Röntgenspektren beurteilte Reihenfolge der Elemente in diesem Gebiete mit den allgemein angenommenen überein und zeigt zwischen *Nd* und *Sa* ein fehlendes Element ($N = 61$) an. Die zwei als *Tu I* und *Tu II* bezeichneten Elemente, die uns nicht zur Verfügung standen, sind zwischen *Er*—*Ad* bzw. *Cp*—*Ta* einzureihen. Für weitere Elemente sind in diesem Bereich keine Plätze im System übrig.

Lund, Physikalisches Institut 25. März 1916.

(Eingegangen 1. April 1916.)

1) Moseley, loc. cit.

Versuche über den Einfluß der Bestrahlung mit ultraviolettem Licht auf das Emissionsvermögen von Metallen im Ultrarot[1]).

Von Heinrich Hörig.

Wenn ich im Folgenden einige Versuche mitteile, die ich in Erwartung eines Einflusses ultravioletter Strahlen auf das Emissionsvermögen von Metallen zwischen Zimmertemperatur und etwa 100° C angestellt habe, so bin ich mir bewußt, daß sie in mehrfacher Hinsicht unvollkommen sind; doch glaubte ich sie in Anbetracht des Interesses, das dieser Gegenstand besitzt, dennoch mitteilen zu dürfen.

I. Teil. Experimentelles.

Versuche mit dem Apparat Fig. 1.

Da es sich zunächst darum handelte, rein qualitativ unter verschiedenen Bedingungen nach einer Änderung des Emissionsvermögens zu suchen, so habe ich die Abkühlungszeiten einer elektrisch geheizten und nach Ausschalten des Stromes sich selbst überlassenen Silberfolie von 0,01 mm Stärke gemessen: belichtet und unbelichtet. Die 100 mm lange und 35 mm breite Folie ist, wie Fig. 1 zeigt, zwischen zwei der Stromzuführung dienenden Backen M_1 und M_2 ausgespannt, welche zusammen mit den beiden Hartgummiplatten H_1, H_2 einen Rahmen bilden, der auf einer Seite durch die Glasplatte *Gl*, auf der anderen durch die mit einer durch die Quarzplatte *Q* bedeckten Öffnung versehenen Messingplatte *M* (unter Zwischenlage dünnen Hartgummiblattes wegen M_1 und M_2) zu einem vakuumdichten Gefäße verkittet ist, das durch ein unten angesetztes Rohr an die Gaedepumpe angeschlossen werden kann. Das Vakuum betrug meist etwa 10^{-5} mm *Hg*, war jedenfalls immer derart, daß die Temperatursteigerung durch den gleichen Heizstrom beträchtlich größer war als bei Atmosphärendruck.

Der Temperaturverlauf wurde thermoelektrisch verfolgt. Dazu sind, wie Fig. 1 zeigt, drei 0,02 mm starke Konstantandrähte an die Folie

1) Diese Arbeit ist mit Unterstützung aus den Mitteln der Robert Bosch-Stiftung ausgeführt worden.



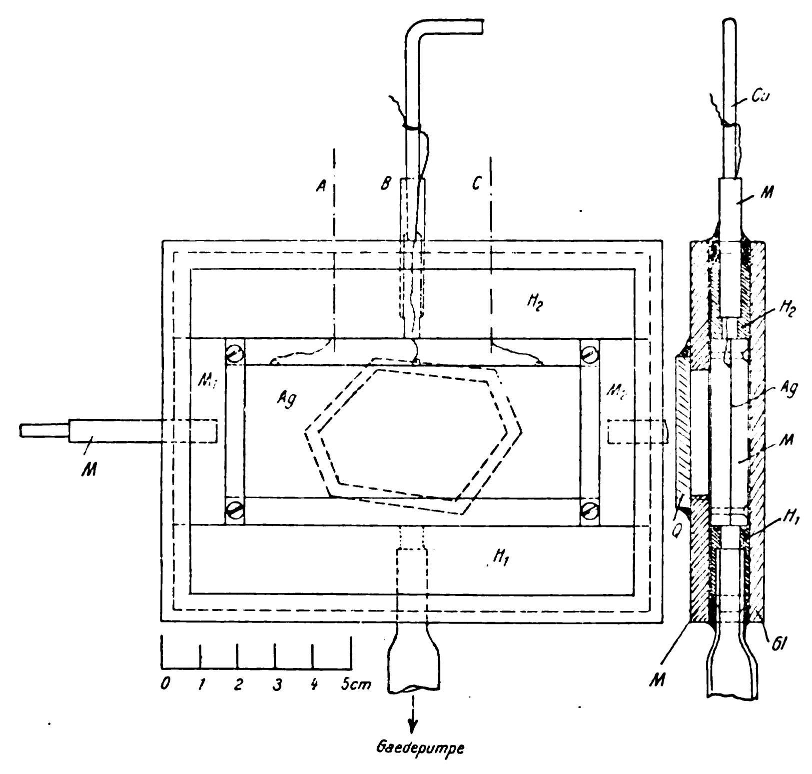


Fig. 1.

angelötet und in leicht lösbarer Weise durch ein Konussystem bei A, B und C nach außen geführt. Sie bilden zusammen mit der Silberfolie Thermoelemente, von denen bei den hier beschriebenen Versuchen das mittelste Verwendung fand. Die Messung der Thermokraft erfolgte mit einem kleinen Edelmannschen Saitengalvanometer. Wie eine Beobachtung mit A und C erkennen ließ, hat man es bei dem mittleren Teile der Folie, welche allein zur Bestrahlung gelangte, im wesentlichen nur mit Wärmeverlusten durch Strahlung zu tun. Im Interesse der Einfachheit ist zunächst von einer, prinzipiell natürlich weit vorteilhafteren, photographischen Aufnahme der Temperaturkurven abgesehen worden. Der Durchgang der Galvanometersaite[1]) durch bestimmte Teilstriche wurde mit einer Stoppuhr ermittelt. Ausschalten des Heizstromes und Einschalten des Galvanometers geschah durch einen und denselben Hebel in sehr rascher Folge. Sofern es sich um die Zeitmessung vom Augenblicke der Stromausschaltung an handelt, hätte man die Stoppuhr allenfalls noch automatisch auslösen können und nur die (etwa 10 Sek. später erfolgende) Abstoppung beim Fadendurchgang von Hand zu bewirken brauchen, doch erschien dieser Vorteil zu gering. Der hier mitsprechende persönliche Fehler wurde durch Häufung der Beobachtungen zu eliminieren gesucht. Selbstverständlich sind die in die persönliche Funktion eingehenden Parameter bis zu einem gewissen Grade von den Versuchsoperationen (Hell — Dunkel) abhängig, doch dürfte diese systematische Fehlerquelle hier kaum von Bedeutung sein.

Als Strahlungsquelle diente die in einem eisernen mit einem von Hand oder durch Fußtritt zu betätigenden Schieber versehenen Bogenlampengehäuse aufgestellte Quarzquecksilberlampe für 110 Volt von Heraeus. Sie befand sich etwa 12 cm von der Folie entfernt und wurde mit einer Akkumulatorenbatterie gespeist.

I. Die Abkühlungszeiten vom Augenblicke des Ausschaltens des Heizstromes bis zu einer bestimmten niedrigeren Temperatur wurden mit und ohne Bestrahlung verglichen. Die Bestrahlung mit der Lampe erfolgte während des Erwärmens und Kühlens.

Die Belichtung des kalten Streifens bewirkte hier zunächst einen kleinen Ausschlag, der in „Sättigungsform" sich nach 3—5 Sek.

1) Die Nichtproportionalität des Saitenausschlages mit der Stromstärke, auf die Sperling in seiner Dissertation, Beiträge zur Kenntnis der Selenzellen, Gießen 1908 (im Simonschen Institut für angewandte Elektrizität in Göttingen gemacht), Seite 13 hinweist, spielt hier zunächst keine Rolle.

einem Endwerte α_0 näherte, welcher einer elektromotorischen Kraft von etwa $3 \cdot 10^{-4}$ Volt entsprach und somit, falls man ihn als Temperaturerhöhung zu deuten berechtigt gewesen wäre, eine solche von etwa $5-6^0$ bewirkt haben würde. Tatsächlich scheint es sich aber um eine noch der näheren Untersuchung bedürfende besondere Wirkung des ultravioletten Lichtes zu handeln. Es sei hier nur erwähnt, daß mit Zwischenschaltung von dünnem Glimmerblatt, Glas, Hartgummi oder Papier dieser Ausschlag vollkommen unterdrückt wurde. Ultraviolett wird von Glimmer ja ziemlich stark absorbiert, während ultrarote Strahlen noch ziemlich reichlich durchgehen. Letztere würden übrigens wegen des hohen Reflexionsvermögens des *Ag* für lange Wellen nur in beschränktem Maße in Wirkung treten. Man wird zunächst schließen, daß es sich um eine Wirkung des Ultravioletts handelt. Sie ist ziemlich stark vom Zustande der Lampe abhängig. Der Umstand, daß die ultravioletten Strahlen, denen ja bei der Heraeuslampe eine relativ große Energie zufällt, vom Silber, namentlich in der Gegend von 316 $\mu\mu$ sehr stark absorbiert werden, ist beachtenswert. Für eine bloße Temperatursteigerung erscheint mir die Wirkung zu groß; vielleicht hängt der Einfluß mit den Effekten zusammen, welche Weidert[1]) auf Veranlassung von Rubens an *Pt*|Selen|*Pt*-thermoelementen konstatiert hat. Für das Folgende ist α_0 als Nullpunktsverschiebung unbekannter Herkunft in Rechnung gezogen.

Bei einem Heizstrom von 12,5 Amp. stellte sich nach 20 Sek. ein in Hinblick auf die unvermeidlichen seitlichen Unregelmäßigkeiten in der Bedienung des Schalters genügend stationärer Zustand ein, und es ergab sich der maximale Ausschlag bei Belichtung ein klein wenig geringer als ohne dieselbe. Mit Berücksichtigung von α_0 etwa 19,3 gegen 18,7 Skalenteile. Als eigentliche Beobachtungsmethode ist dies zunächst nicht herangezogen worden. Die nach I. gemessenen Abkühlungszeiten ergaben als Mittelwerte aus verschiedenen Beobachtungsreihen folgende Zahlen:

t_{dunkel}	t_{hell}	Δt	$=^0/_0$ von t_{dunkel}
12,84	12,64	0,20	1,7
12,93	12,68	0,25	1,9
12,40	12,07	0,33	2,7
12,92	12,25	0,67	5,2
13,00	12,22	0,78	6,0
12,70	12,35	0,35	2,8
12,87	12,69	0,18	1,4
12,06	11,85	0,21	1,7
		im Mittel:	3 $^0/_0$.

1) Weidert, Ann. d. Phys. **18**, 811, 1905.

Die gewonnenen Δt sind im Mittel vom Betrage 0,4 Sek. Die Stoppuhr arbeitete mit Fünftelsekunden. Es ist selbstverständlich in dieser Hinsicht ein sehr rohes Verfahren. Das Gesamtergebnis — und der Eindruck, den man bei den Experimenten bekam — spricht aber doch dafür, daß bei Bestrahlung mit der Quarzlampe die Wärmeverluste des Streifens etwas größer sind. Hätte sich eine Verlangsamung des Prozesses ergeben, so würde man den Einwand erheben können, daß die Veränderung durch eine Energieaufnahme der Folie aus der Lampenstrahlung bedingt sei, da es sich aber um eine Beschleunigung handelt, so scheint dies doch auf eine vermehrte Emission des *Ag* zu deuten — wenn man die, bis zu einem gewissen Grade ja sicher vorhandene, Energieaufnahme berücksichtigt, sogar a fortiori.

Die Silberfolie war bei allen diesen Versuchen geerdet. Die Zahlen entsprechen verschiedenen Versuchsreihen. Dabei ist die für die Heizung verwendete Spannung nicht immer genau die gleiche gewesen, auch die Lampenbeschaffenheit hat geschwankt — dadurch erklären sich die Abweichungen der Zahlen voneinander.

Bezüglich α_0 kann man nach den im Laufe der Experimente gemachten Erfahrungen sagen: α_0 wird höchstens mit der Zeitdauer der Belichtung noch etwas ansteigen, keinesfalls zurückgehen (sofern die Lampe genügend konstant brennt). Der Versuch, bei stationärem α_{max} die Größe α_0 etwa dadurch ermitteln zu wollen, daß man während des konstant gehaltenen Heizstromes belichtete, ließ sich mit dieser Anordnung nicht gut anstellen, da es nicht zweckmäßig war, das Galvanometer hier gleichzeitig mit dem Heizstrom zu benutzen. Es konnte also α_0 hier nicht direkt für die höchsten Temperaturen gemessen werden. Nimmt man aber an, α_0 wäre zu gering bewertet worden, so würde die abgestochene Zeit im Falle der Belichtung etwas zu groß ausgefallen sein: das heißt die Ausstrahlung ging tatsächlich noch etwas rascher vor sich als den obigen 3 Proz. entsprechend.

II. Es ist von Interesse, zu prüfen, wie sich die bei hell und dunkel erhaltenen Kühlzeiten verhalten, wenn man α_0 nicht als Nullpunktsverschiebung in Rechnung zieht, sondern nur die zu gleichen α gehörenden Zeitabschnitte bestimmt. Man übersieht sofort, daß eine bloße Nullpunktsverschiebung (also ohne Effekt) eine beträchtliche scheinbare Vergrößerung der Kühlzeit bewirken wird. Ist dagegen die unter I behauptete beschleunigende Wirkung vorhanden,

so wird die Kurve sowohl in ihrer maximalen Ordinate als auch in ihrer Form etwas geändert werden. Die Art dieser Änderung läßt sich nicht ohne weiteres angeben, doch ist plausibel, daß im allgemeinen der in Fig. 2 gezeichnete Fall eintreten wird: für $\alpha_0 = 0$ würde die Dunkelkurve 1 bei Belichten übergehen in 3. Wenn

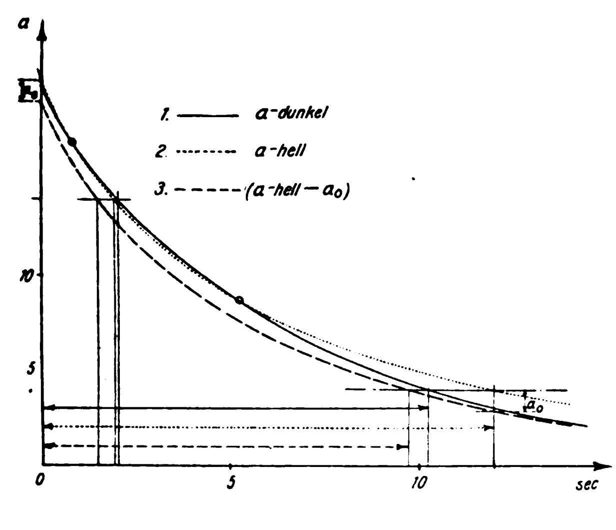


Fig. 2.

aber α_0 einen genügenden Betrag erreicht, so wird 3 in die Lage 2 gehoben, in der sie 1 in zwei Punkten durchschneidet. Geht man dann beim Herausstechen einer gewissen Kühlperiode mit deren Ende bis zu einer genügend kleinen Ordinate herab, so bekommt man trotz des rascheren Kühlens eine beträchtliche Zunahme der betreffenden Zeit. Greift man dagegen das Zeitintervall bei größeren Ordinaten heraus, so wird man eine Verkürzung erhalten, die aber bei weitem nicht so groß ausfallen kann. Dieser Fall aber könnte offenbar bei einer Verzögerung der Ausstrahlung nicht eintreten, denn erstens würde die Anfangsordinate (selbst für $\alpha_0 = 0$) größer geworden sein, und zweitens würde die Kurve flacher, somit unbedingt oberhalb der Dunkelkurve verlaufen. Ferner ist zu beachten, daß in der Nähe des unteren Durchschneidungspunktes, falls dieser zufällig etwas weit unten liegen würde, durch geringe Schwankungen in der Versuchsanordnung (Heizstrom, Lampe) leicht ein Umschlagen einer kleinen Verkürzung in relativ große Verlängerung eintreten kann. Diese Überlegungen entsprechen dem experimentellen Befund. Bei einem $\alpha_{max} = 18$ wurde die Kühlzeit bestimmt für $15 \rightarrow 9$, $15 \rightarrow 5$ usw.; mit folgendem Ergebnis:

t dunkel	t hell	Δt	% von t dunkel
$15 \rightarrow 9$			
2,8	3,4	0,6	22
15 — 5			
6,63	7,24	0,61	9,2
$15 \rightarrow 4$			
8,3	11,2	2,9	35
$15 \rightarrow 3$			
10,60	10,26	0,34	3,2 (Verkürzung!)
10,60	12,70	2,10	40
$15 \rightarrow 2$			
8,40	9,65	1,25	15.

III. Während bisher die Bestrahlung immer während des ganzen Heiz- und Kühlprozesses erfolgte, wurde sie nun nur während des Kühlprozesses vorgenommen. Infolgedessen machte sich das in etwa 3 Sek. zustande kommende α_0 in dem Intervall des ersten, steilsten, Temperaturabfalls nur wenig bemerkbar. Die Lampe wurde durch Schnurlauf und Fußtritt a) im Augenblicke des Umschaltens, b) bei $\alpha = 15$ aufgezogen, indem man mit der linken Hand den Umschalter und mit der rechten die Uhr bediente. Dann ergab sich a) die Kühlzeit um etwa 8 Proz. verlängert, b) bei einer Beobachtungsreihe 45 Proz. Verlängerung, bei einer anderen in Abwechslung mit a) vorgenommen, für beide Beobachtungen im Mittel der gleiche Wert: 38 Proz. Verlängerung. Auch hier ergibt sich kein Widerspruch gegen das Vorhandensein der beschleunigenden Wirkung, denn: der Umstand, daß die Durchschneidung der Hell- und Dunkelkurve bei der unteren Ordinate in ungefähr gleicher Weise stattfindet, läßt sich zwanglos dadurch erklären, daß das ohne α_0 zu erwartende tiefere Herabgehen der Hellkurve durch das etwa 5 Sek. früher zur Ausbildung gelangte α_0 auch in dem Intervall $15 \rightarrow 5$ entsprechend mehr gehoben wird für den Fall a), während im Falle b) sich α_0 erst ausbilden muß.

IV. Wenn man nur während des Erwärmens belichtet, so bekommt man fast keinen Einfluß auf die Kühlzeit für ($\alpha_{max} \rightarrow 2$). Zum Beispiel: dunkel: 12,64, hell: 12,57. Das ist offenbar so zu verstehen: dank des während der Erwärmung voll ausgebildeten α_0 beginnt die Abkühlung, trotz etwas verringerter maximaler Temperatur, bei etwas größerem α_{max}, verläuft dann aber nicht wie bei konstant gedachtem α_0 parallel und oberhalb der Dunkelkurve, sondern nähert sich ihr wieder in dem Grade, in dem α_0 zurückgeht.

In ähnlicher Weise sind noch verschiedene andere Verhältnisse durchprobiert worden, die nirgends zu einem Widerspruche zu dem unter

I. Mitgeteilten geführt haben. Der Einfluß macht sich in dem flachen Teile der Kurve am meisten bemerkbar. Bestrahlt man einmal nur während des Kühlens und das andere Mal während des Erwärmens und Kühlens, so bekommt man genau dieselben Einflüsse. Ist ferner α_{max} = etwa 20 und bestrahlt man 1. von α_{max} an, 2. von $\alpha = 12$ an und mißt dann die Änderung der Kühlzeit $\alpha_{max} \rightarrow 2$, so erhält man fast genau dasselbe; beobachtet man aber im allerersten Gebiete: zwischen $\alpha_{max} = 20$ und $\alpha = 16$, was allerdings nach dieser Methode nur noch wenig zuverlässig sein kann, so gelangt man in das Gebiet, wo die Hellkurve die Dunkelkurve durchschnitten hat und dementsprechend, trotz des bis zu einem gewissen Grade schon ausgebildeten α_0, zu einer Verkürzung der Kühlzeiten, das heißt in Übereinstimmung mit I zu einer Beschleunigung des Kühlprozesses. Mit 12,5 Amp. liegt diese Messung so ziemlich innerhalb der Fehlergrenzen, so daß auf diese 2,8 Proz. geringere Kühlzeit nicht viel zu geben wäre, indessen wird bei 19 Amp. ein analoger Effekt von ca. 2 Proz. erhalten. Ich führe dies nur an, um zu zeigen, daß jedenfalls soweit man es nach dieser ungenauen Methode erwarten kann, man zu keinen widersprechenden Ergebnissen kommt.

Ein Versuch im Magnetfeld.

Mit diesem Apparat Fig. 1 habe ich auch einen Versuch im transversalen Magnetfeld (etwa 6000 Gauß) angestellt und habe dabei im Mittel aus 67 Messungen ohne und 53 mit Feld erhalten: 14,25 — 13,83 = 0,42 = (2,95 Proz.) Verkürzung der Kühlzeit. Ich erwähne dies nur der Vollständigkeit halber, der Versuch bedarf jedenfalls einer Nachprüfung und der Erwägung, inwieweit hier ein Einfluß des Feldes auf die Thermokraft vorgelegen hat.

Bemerkungen zu I—IV.

Auf einen Einwand, den man bei vorstehenden Versuchen erheben kann, will ich noch hinweisen. Man kann die raschere Kühlung durch die im Falle des aufgezogenen Lampenschiebers veränderte „Umgebung", gegen welche die Folie strahlt, erklären wollen. Ich habe diesen Umstand bei diesen ersten Experimenten wenig beachtet. Versuche bei geöffnetem und geschlossenem Schieber und nicht brennender Lampe schienen keine bemerkbare Differenz zu ergeben, und bei brennender Lampe sollte man eher eine langsamere Kühlung erwarten. Gegen diesen Einwand sprechen übrigens Versuche, die ich mit einem „Zweistreifenapparate" angestellt habe, bei welchem zwei vom gleichen Strome durchflossene Silberstreifen gleichzeitig oder wechselnd bestrahlt werden konnten und zwei dahinter befindliche und gegeneinander geschaltete Thermoelementchen mit kleinen „Fühlplatten" an ihren Lötstellen einen Unterschied in dem Verhalten der beiden Strahlungen anzeigten. (Die Thermoelemente waren durch Schliffe im Vakuum so zu regulieren, daß man den Ausschlag auf Null bringen konnte.) Es hat sich hierbei um die Beeinflussung der Maximaltemperatur der Streifen gehandelt bei dauerndem Stromdurchgange, deshalb konnten die Thermoelemente nicht direkt in Berührung gebracht werden. Letzteres hat natürlich zur Folge, daß die resultierende EMK. nur anzeigen kann, ob überhaupt irgendeine Verschiedenheit in der Strahlung beider Streifen eintritt; man kann nicht ohne weiteres aus der Temperaturerhöhung eines Thermoelements auf vermehrte Ausstrahlung des betreffenden Streifens schließen. Die mannigfachen hiermit angestellten Versuche ließen im allgemeinen erkennen, daß irgendeine Änderung in dem Verhalten der Folien beim Bestrahlen eintritt, doch will ich darauf nicht weiter eingehen.

Versuche mit dem Apparat Fig. 3.

Zu dieser Anordnung führte das Streben nach möglichster Einfachheit und nach kleinen Abmessungen, denn es erwies sich als erforder-

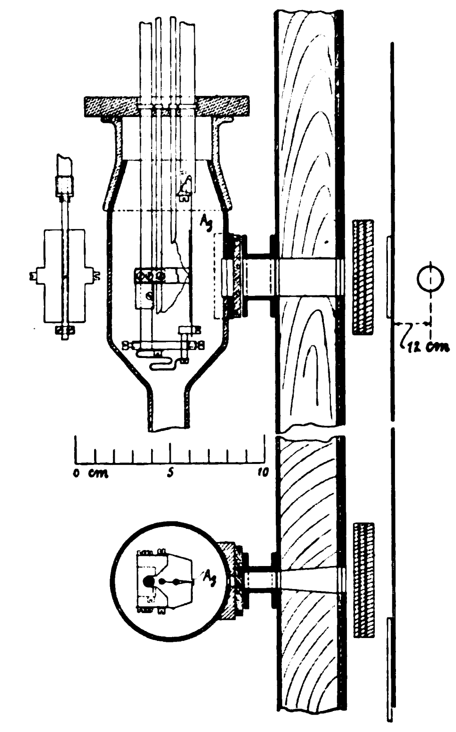


Fig. 3.

lich, den gesamten Vakuumapparat möglichst gut vor Wärmeschwankungen zu schützen. — Der strahlende Körper besteht aus einem 3 mm breiten, etwa 80 mm langen und 0,01 mm starken Silberstreifen, der, vertikal ausgespannt, unten durch eine kupferne Feder dauernd straff gehalten wird, so daß beim Stromdurchgange kein Verlagern eintritt. Das erregende Licht tritt in Fig. 3 von rechts her durch die schon bei den anderen Apparaten benutzte Quarzplatte und eine längliche Öffnung in der Glaswand in das Vakuumgefäß ein und fällt auf den Streifen, dessen Temperatur mit einem an der Rückseite in der Mitte des bestrahlten Gebietes mit möglichst wenig (reinem) Zinn angelötetes Kupfer-Konstantanthermoelement gemessen wird. Diese Thermodrähte sind so angeordnet, daß sie im Schatten des Streifens verlaufen. Zur Sicherheit gegen eventuelle Ultraviolettwirkungen wurden bei einigen Versuchen noch die in der Figur sichtbaren Schutzplatten[1]) verwendet, welche, ohne die Folie oder die Thermodrähte zu berühren, dafür sorgten, daß das Licht nur die Folie traf. Der Gefäßdeckel bestand aus Hartgummi.

Um störende Nebeneinflüsse durch Wärmestrahlung, Luftströmungen u. a. fernzuhalten, befand sich der ganze Aufbau samt Widerstand und zwei Akkumulatoren für die Erwärmung der Streifen in doppelwandigen, mit Holzwolle ausgestopften Pappkästen. Die in Fig. 3 rechts im Schnitt gezeichnete Seitenwand besteht in der Mitte aus Holz, die schwarz ausgezogenen Belegungen sind aus Bleiblech hergestellt. Das aus dem gleichen Material gefertigte Kanalstück zwischen der Quarzplatte und der Innenwand des Schutzkastens sollte zugleich Luftströmungen durch die Öffnung vermeiden. Die von der (als Kreis angedeuteten) Quarzlampe, welche im eisernen Bogenlampenkasten stand, ausgehenden Strahlen gehen bei geöffnetem (Blei-)Schieber durch ein Ultraviolettfilter[2]), so daß hier wohl angenommen werden darf, daß bis auf die durch das Filter gehenden Strahlen beim Öffnen und Schließen des Schiebers keine in Betracht kommende Änderung der „Umgebung" des Silberstreifens resultierte. — Bei nicht brennender Lampe war das Öffnen und Schließen des Schiebers gänzlich ohne Einfluß auf den Zustand des Streifens.

Im Gegensatz zu den oben beschriebenen Versuchen, bei denen zu bestimmten Ordinaten (Temperaturen) die zugehörenden Zeiten ermittelt wurden, diente dieser „Einstreifenapparat" in Verbindung mit einem Helmholtzschen Pendelunterbrecher von Edelmann, München, und einem ballistischen Galvanometer[1]) zur Messung von Temperaturen in definierten Zeitpunkten. Dieses Verfahren entsprang u. a. dem Wunsche, in dem ersten Zeitabschnitt nach Abstellen des Heizstromes beobachten zu können. Fig. 4 zeigt die gesamte Anordnung. Der zwei parallel geschalteten Akkumulatoren entnommene Erwärmungsstrom floß, wenn die beiden parallel geschalteten Pendelkontakte III und IV geschlossen waren, über einen Strommesser und einen ad hoc gebauten Widerstand durch den Versuchsstreifen. Das Thermoelement liegt über Kontakt I und II an dem mit einem Kurzschlußkontakt versehenen Galvanometer. Der Gang des Versuchs war folgender: Bei kurzgeschlossenem Galvanometer und eingelegten Hebeln I und II werden zur Erwärmung der Folie III und IV geschlossen, was in Anbetracht der benutzten Heizzeit von 40 Sekunden mit genügender zeitlicher Genauigkeit ausführbar ist. Am Ende dieser 40 Sekunden wird durch Fadenzug (vgl. weiter unten!) das Pendel fallen gelassen und seine Platte trifft zuerst Kontakt IV und um den Bruchteil eine Sekunde später erst Kontakt III. Der Quecksilberkontakt IV ist erforderlich, weil für den Heizstrom der Kontakt III allein sich zu unsicher zeigte. Etwaige durch undefiniertes Anliegen von III zustandekommende Schwankungen des Heizstromes können bei dieser Anordnung nur für einen nicht in Betracht kommenden Zeitabschnitt eintreten: die Ausschaltung erfolgt durch III zu einem genau definierten Zeitpunkte. Alsdann

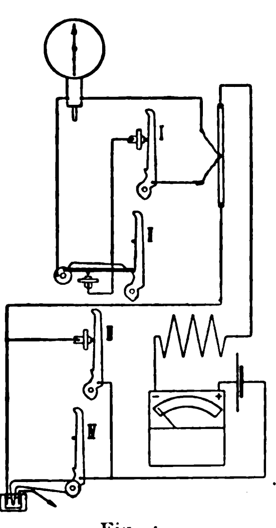


Fig. 4.

1) Links herausgezeichnet: von vorn; unten im Grundriß.

2) Bestehend aus 3 Uviolglasplatten mit 2 Zwischenschichten.

1) Drehspulsystem mit Elektromagneterregung, in der Werkstätte des Instituts von Herrn Präzisionsmechaniker Klopfer gebaut.

schlägt die Pendelplatte den Hebel II um und schließt damit das Thermoelement so lange an das Galvanometer an, bis durch Umschlagen von I der Kreis wieder geöffnet wird. Die Zeit II → I ist klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers. Der erfolgende ballistische Ausschlag, dessen erster und zweiter Umkehrpunkt notiert wird, gibt ein Maß für die im Mittel in der Zeit zwischen II → I vorhandene Temperatur des Streifens und wird sich in gewissem Grade geringer ergeben, wenn die Abkühlung aus irgendeinem Grunde rascher erfolgt.

Definiertes Streifenpotential war durch eine am Quecksilbernapf bei IV vollzogene Erdung gewährleistet; dies ist auch in Hinblick auf etwaige lichtelektrische Ereignisse von vornherein erforderlich. Auf gute Isolation der gesamten Anordnung wurde in bekannter Weise Sorge getragen. Die Leitungen des Galvanometers waren auch vor Wärmeeinflüssen geschützt, dieses selbst stand in abgeschlossenem doppelwandigen Pappkasten und wurde durch besonderen ebenfalls vor Wärmeschwankungen geschützten Akkumulator erregt. — Auch der Pendelunterbrecher war mit Schutzkasten versehen, der nur vorn eine Öffnung besaß zum Bedienen der Hebel. Dadurch wurde die Sauberkeit wesentlich erhöht.

Um etwaigen permanenten Temperatureinwirkungen auf die Oberflächenbeschaffenheit des Streifens möglichst wenig ausgesetzt zu sein, wurde die Maximaltemperatur der Lötstelle (die des Streifens dürfte nicht unbeträchtlich höher sein, namentlich auch deshalb, weil diese Folien nie ganz frei von Rissen, Löchern und sonstigen Unregelmäßigkeiten sind) zunächst nur zu etwa 60° C gewählt, entsprechend einer Heizstromstärke von 0,62 Amp. und einer Heizdauer von 40 Sek. Nach 25 Sek. war praktisch schon der stationäre Zustand erreicht. Nach Ausschalten des Stromes fiel die Temperaturerhöhung in etwa 5 Sek. um die Hälfte. Ich führe hier zwei verschiedene Fälle an. Es erfolgte das Umschlagen der Kontakthebel

II: 0,02 Sek. nach III
I: 0,5 „ „ II (Fall a),

und:

II: 4 „ „ III
I: 0,5 „ „ II (Fall b).

Zur Erreichung dieser großen Zeitintervalle wurde an dem Pendel eine improvisierte Konstruktion vorgenommen, deren Beschreibung hier übergangen sei. — Die elektromagnetische Auslösung des Pendels war wegen dieser großen Schwingungsdauer (ca. 8 Sek.) nicht mehr zuverlässig und wurde durch eine rein mechanische ersetzt.

Einer großen Anzahl von Versuchen mit dieser Apparatur will ich hier nur das wesentliche Resultat entnehmen: im allgemeinen liegen die Abweichungen der Ausschläge bei offenem und geschlossenem Lampenschieber beinahe innerhalb der Beobachtungsfehlergrenzen. Indessen gewinnt man doch den Eindruck, daß im Mittel eine Tendenz besteht (und zwar in beiden obigen Fällen) zu einer kleinen Verringerung der Temperaturen bei Bestrahlung. Dies sei durch Fig. 5 erläutert. Die Ordinaten sind die den Temperaturen proportionalen ballistischen Galvanometerausschläge, welche zur besseren Übersicht für den Fall mit und ohne Bestrahlung durch gestrichelte bzw. ausgezogene Linien verbunden sind.

Die mit einem Strich nach unten versehenen Ringe sind die Ausschläge, welche bei Bestrahlung erhalten wurden, und zwar erfolgte diese nur während der Abkühlung. Die Beobachtungsreihen A und B entsprechen Fall a (siehe oben), C dem Fall b. Bei A und B ist also von einem α_0 keine Rede (wenigstens sofern es sich um die oben erwähnte, sich langsam in 5—6 Sek. ausbildende Wirkung handelt), die hier auftretende geringe Verminderung der Temperatur im allerersten Gebiete des Temperaturabfalls (1 bis 2 Promille) würde also einer Beschleunigung des Kühlvorganges entsprechen. Bei C ist die Abkühlung schon bis etwa auf die Hälfte der anfänglichen Temperaturerhöhung vorgeschritten

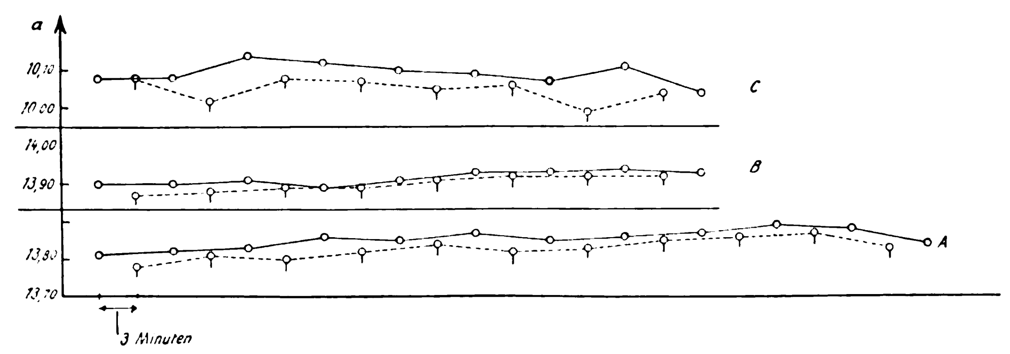


Fig. 5.

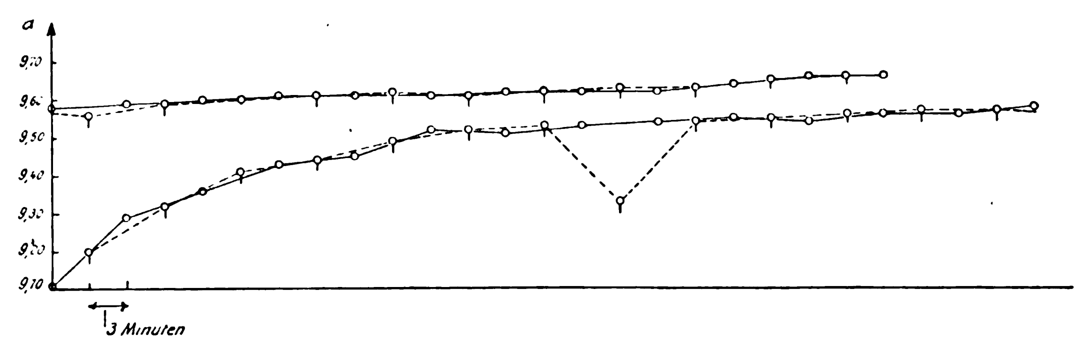


Fig. 6.

(Fall b) und die Differenz ergibt sich zu etwa 5 Promille. Die Wirkung scheint an gewisse Bedingungen geknüpft, die nach vielfach abgeänderten Versuchen namentlich von dem Zustande der Lampe abzuhängen scheinen, es ist aber auch möglich, daß noch besondere Umstände, welche die Folie selbst betreffen, maßgebend sind. Darüber können nur weitere Versuche mit anderen Anordnungen entscheiden. Im allgemeinen scheinen zwei sich entgegenwirkende Vorgänge vorhanden zu sein, die sich gelegentlich aufheben. Es ist mir in einem Falle — siehe Fig. 6 — gelungen, abgesehen von spontan eintretenden Ausnahmen[1]), ein Zusammenfallen der beiden Beobachtungen zu erzielen. Da hierbei die oben erwähnten Schutzplatten benutzt wurden, so wurde in Erwägung gezogen, daß die bei Fig. 5 erhaltenen Differenzen möglicherweise von einer Wirkung ultravioletten Lichtes auf das Thermoelement herrühren könnten, falls vielleicht der Verlauf dieser Drähtchen an irgendeiner Stelle nicht „im Schatten" des Silberstreifens gelegen haben sollte. Durch Drehen des Schliffes habe ich dann in verschiedener Weise absichtlich eine Bestrahlung der Thermodrähte herbeigeführt. Demnach scheint in der Tat bei dem Kupferdrahte eine Wirkung zu bestehen, namentlich wenn er nahe der Lötstelle getroffen wird (in einzelnen Fällen 1 bis 2 Proz. Verringerung der betreffenden Temperatur), eine Erscheinung, die hinsichtlich der von Weidert[2]) an einem *Pt* | Selen | *Pt*-thermoelement gefundenen Einflusse jedenfalls Beachtung verdient und noch einer besonderen Untersuchung unterzogen werden soll. Aber trotzdem habe ich bis jetzt, auch bei Berücksichtigung des Befundes der Fig. 6, den Eindruck, daß eine besondere, die Ausstrahlung des Silbers beschleunigende Wirkung des ultravioletten Lichtes vorhanden ist. Umfassendere Versuche nach anderen Methoden sind geplant.

1) Siehe unteren Kurventeil Fig. 6.
2) l. c.

Schließlich habe ich einige Versuche an einer 0,0025 mm starken *PtIr*-Folie mit dem gleichen Apparate gemacht. Die Stromstärke betrug hier 0,2 Amp. und die Temperatur der Lötstelle war etwa das Doppelte der bei den anderen Versuchen. Im Mittel habe ich hier keine Wirkung konstatieren können, doch habe ich bei näherer Betrachtung der Folge der bestrahlten und nicht bestrahlten Ausschläge häufig den Eindruck gehabt, daß die Bedingungen für die Abkühlung bei auffallendem Ultraviolett irgendwie geändert sind. Merkwürdigerweise weichen zum Beispiel häufig die Ausschläge bei Bestrahlung weniger sprungweise voneinander ab als ohne dieselbe, als ob irgendwelche Unregelmäßigkeiten des Abkühlungsvorganges durch die Bestrahlung unterdrückt würden.

Vielleicht ist hier auch noch folgendes von Interesse. In einem Falle, bei *PtIr*, war durch einen Defekt an der Gaedepumpe im Verlaufe einer halben Stunde das Vakuum beträchtlich schlechter geworden, so daß die Ausschläge von normal 27,00 bis auf etwa 16,00 herabgingen. Dies hatte auf den Charakter der Messungen keinerlei Einfluß.

Zusammenfassend möchte ich sagen: so unvollkommen die Experimente auch in dieser Form noch sind, so scheinen sie doch trotz der im Mittel geringen und in dem einen Falle der Figur 6, von einzelnen Werten abgesehen, ausgebliebenen Wirkungen für das Vorhandensein eines den Abkühlungsvorgang beschleunigenden Einflusses des ultravioletten Lichtes zu sprechen; und zwar dürfte es sich um einen Einfluß auf die emittierende Schicht des Silbers handeln.

Übrigens scheinen auch hier wie bei so vielen lichtelektrischen Wirkungen gewisse Trägheitserscheinungen mitzuspielen, die im Verein mit einer dem gesuchten Effekte entgegengesetzt superponierten Wirkung den eigentlichen Vorgang verschleiern. Die Klarstellung muß weiteren Versuchen nach anderen Methoden

vorbehalten bleiben. Dabei wäre im Lilienfeldschen extremen Vakuum[1]) mit entsprechend entgasten Metalloberflächen zu arbeiten, um sowohl eine etwa in Betracht kommende Wirkung auf Wärmeleitfähigkeit des Gases von vornherein auszuschließen als zu entscheiden, ob wirklich die Emission des Metalls oder aber, was in Anbetracht der „Lichtempfindlichkeit" gewisser Metallsulfide (und Oxyde?) nicht ausgeschlossen wäre (vgl. weiter unten), etwa eine die Oberfläche des strahlenden Körpers bildende chemische Verbindung für die Wirkung verantwortlich zu machen ist. Ich halte die Erreichung der Lilienfeldschen Kriterien für die „Extremheit" des Vakuums für die einzige zur Zeit vorhandene Gewähr für „definitives" Vakuum, was sich neuerdings bei den schönen Versuchen von W. Germershausen[2]) glänzend bewährt hat.

Zu der hier gewählten Abkühlungsmethode sei noch bemerkt, daß man natürlich die Empfindlichkeit dadurch steigern kann, daß man das Verhältnis von Oberfläche zu Masse anders wählt oder aber, falls dies aus technischen Gründen, z. B. bei Untersuchung dünner Schichten, nicht angängig ist, der Umgebung, mit welcher der Strahlungsaustausch erfolgt, hohes Reflexionsvermögen erteilt. Man könnte auch in Hinblick auf die weiter unten erwogene Möglichkeit, daß sich nur eine Veränderung in der spektralen Energieverteilung ergeben könnte, während die Gesamtemission konstant bliebe, den Fall einer selektiv reflektierenden Umgebung des Versuchskörpers einer Diskussion unterziehen, denn es handelt sich ja hier nicht um Gleichgewichtsstrahlung im Hohlraum.

Die benutzte Anordnung ist übrigens bei genügend lang gewählten Streifen der theoretischen Behandlung zugängig, doch will ich, da es sich ja hier nicht um die quantitative Seite handelt, diese Rechnungen nicht mitteilen. — Die relativ kurzen Kühlzeiten sind in Rücksicht auf die mannigfachen Fehlerquellen, die mit der Zeit schwanken, gewählt worden.

II. Teil. Theoretisches.

Zur Zeit bildet die Frage nach dem physikalischen Sinn der Quantentheorie einen Hauptgegenstand theoretischer Interessen. Wenn auch eine Klärung dieser Fragen begonnen hat — ich will hier nur an die grundlegenden Auffassungen von Sommerfeld[1]) und an die kürzlich erschienene Arbeit von Nernst[2]), deren Bedeutung wohl weit über den quantentheoretischen Ausgangspunkt hinausreicht, erinnern — so ist es doch auch erwünscht, neue experimentelle Wege ausfindig zu machen für die Erforschung des Mechanismus, der den Übergang von Körperwärme in Strahlungsenergie und umgekehrt bewirkt. Danach liegt es unter anderem nahe, optische Vorgänge an der Grenze Körper – Vakuum in Beziehung zu Parametern zu untersuchen, welche dem Experiment zugänglich sind. Einerseits dispersionstheoretische Erörterungen gemessener optischer Konstanten und andererseits eine, meist noch stark spekulative, Bearbeitung lichtelektrischer Forschungsergebnisse haben bereits ein gewisses Material ergeben, aber es wäre gut, wenn man zu einer noch direkteren Erforschung des Wesens der quantenhaften Emission gelangen könnte. Ein systematisches Durchgehen der Möglichkeiten physikalischer Veränderungen optisch wirksamer Schichten (ich denke hier zunächst an das Emissionsvermögen) läßt bei einem Durchsuchen der Literatur eine verhältnismäßig wenig zahlreiche Bearbeitung dieser Probleme erkennen. Ohne auf diesen Gegenstand hier näher einzugehen, sei es gestattet, einige experimentelle Fragen zu berühren, die vielleicht zur Anregung dienen können.

Die weitaus systematischsten Untersuchungen, die hier in Frage kommen, sind jedenfalls die von Rubens[3]) und seinen Mitarbeitern über den Temperatureinfluß auf die Emission von Metallen und Isolatoren. Ursprünglich zur Prüfung der Maxwellschen Theorie unternommen, haben sie neuerdings zu interessanten Vergleichen mit den Atomschwingungsformeln geführt. Bei dem inneren Zusammenhang, der zwischen elektrischer Leitfähigkeit, elektromagnetischer Strahlung und Wärmeleitvermögen besteht, wäre es möglich, daß ein Wärmestrom parallel der Plattenoberfläche auf deren Emissionsvermögen (beziehentlich Reflexionsvermögen) von Einfluß wäre. Die Reflexion ließe sich bei linearem Temperaturgefälle wohl für eine bestimmte mittlere Temperatur als Funktion des Gefälles untersuchen. Man könnte aber für eine direkte Messung der Emission auch an folgendes Experiment denken. Angenommen das Emissionsvermögen als Funktion der Temperatur sei be-

1) Vgl. J. E. Lilienfeld, Die Elektrizitätsleitung im extremen Vakuum. Leipziger Habilitationsschrift 1910 und Ann. d. Phys. 32, 673, 1910, sowie zahlreiche folgende Publikationen.

2) W. Germershausen, Die Elektronenemission der *CaO*-Elektrode im Vakuum. Diese Zeitschr. 16, 104, 1915 und die (noch nicht erschienene?) Leipziger Dissertation.

1) Sommerfeld, Sitz.-Ber. Bayr. Akad. 1911, S. 1; diese Zeitschr. 12, 1057, 1911 (Naturforscherverс.), Solvay-Verhandlungen, deutsch von Eucken (1914 bei Knapp, Halle), S. 252. — Ferner Debye u. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 41, 873, 1913.

2) Nernst, Ber. d. D. Phys. Ges. 1916, S. 83.

3) Vgl. den Bericht von E. Liebreich, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12, 205, 1915.

kannt — nach Rubensschen Methoden für die hier ins Auge gefaßten langen Wellenlängen bestimmt —, so würde sich für eine bestimmte Anordnung eines, zunächst linear gedachten, Temperaturgefälles, zum Beispiel bei einer kreisförmigen Platte in radialer Richtung, theoretisch angeben lassen die Emission (einer bestimmten Wellenlänge) der ganzen Platte wie sie wäre, wenn das Emissionsvermögen nur von der Temperatur, nicht aber vom Temperaturgefälle abhängt. Der Wert dieses Integrals wäre dann durch direkte Messungen nach Rubensschen Methoden zu prüfen.

Vielleicht ließe sich dies Problem auch dadurch angreifen, daß man theoretisch die äquivalente Temperatur ermittelte, für welche die Platte ohne Temperaturgefälle die gleiche Emission ergeben müßte, wie im Falle des Temperaturgefälles, so daß das Experiment auf eine Differentialanordnung hinauslaufen würde. Die experimentellen Schwierigkeiten dürften allerdings beträchtlich sein. — Dieser Versuch wäre das thermische Analogon zu dem an sich naheliegenden Versuche, die optischen Konstanten bei durchfließendem elektrischen (Gleich- oder Wechsel-) Strom oder bei Beanspruchung durch elektrische Schwingungen zu untersuchen. Ob derartige Experimente schon vorliegen, weiß ich nicht.

Auf die vielfachen dem Experimente zugänglichen Fragestellungen, wie Aufladung der Fläche auf hohes Potential — selbstverständlich im extremen Vakuum —, Einfluß des Magnetfeldes (zum Teil schon mehrfach untersucht) u. a. will ich hier nicht näher eingehen, sondern nur den Einfluß einer Bestrahlung der emittierenden Platte betrachten.

Faßt man das Problem ganz allgemein, so handelt es sich nicht nur darum, daß die Emission oder Reflexion einer bestimmten Wellenlänge durch die gleichzeitig erfolgende Bestrahlung mit einer ganz anderen, zum Beispiel wesentlich kürzeren Wellenlänge geändert würde, sondern im speziellen um die Abhängigkeit der fraglichen Konstanten von der Intensität der betreffenden Strahlen selbst.

Im allgemeinen scheint das letztere nicht der Fall zu sein, doch ist diese Möglichkeit theoretisch in Betracht gezogen worden[1]) und wie es scheint, gibt es Körper, für welche eine solche Abhängigkeit auch tatsächlich vorhanden ist[2]). — Aus Gründen, die ich an dieser Stelle nicht darlegen will, möchte ich die Frage einer

1) Vgl. Solvay-Verhandlungen 1911, deutsch von Eucken bei Knapp, Halle, 1914, S. 103 (Diskussion Bericht Planck).

2) Vgl. Koenigsberger, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **11**, 138, 1914.

experimentellen Prüfung für wert halten, ob bei sehr geringen Intensitäten der Extinktionskoeffizient und die optischen Konstanten überhaupt sich ändern würden[1]). Für diesbezügliche Messungen dürfte sich eine Beachtung der neuerdings[2]) bei astronomischen Helligkeitsschwankungsmessungen mit Elster- und Geitel-Zellen erreichten Empfindlichkeiten empfehlen.

Hinsichtlich der in Teil I referierten Experimente interessiert hier nur die Erregung mit kurzwelligerem Licht. Sieht man von einem Versuche mit Elektronenstrahlen, bei dem sich die betreffende Fläche in Lilienfeldschem extremen Vakuum[3]) zu befinden hätte, ab, so wird man zwar in erster Linie die kurzwelligen Strahlen für den Versuch ins Auge fassen (auch Röntgenstrahlen), indessen in Rücksicht auf gewisse Körper (siehe weiter unten S. 190) auch sichtbare bis ultrarote heranziehen müssen.

Unabhängig von speziellen Atomvorstellungen[4]) möchte man vermuten, daß durch kurzwellige Strahlen, die eine so tiefgreifende Wirkung hervorbringen können, daß sie Elektronen aus dem Atome auslösen, das elektrische[5]) Leitvermögen unter Umständen merklich ändern und die Elektronen selbst bis zum Austritt aus dem Körper bringen — was nebenbei bemerkt alles Wirkungen sind, die in Parallele zu Temperatureinflüssen stehen — auch noch andere Wirkungen an den Atomen oder am Atomverbande zustandekommen könnten. Dies um so mehr, als, wie man nach lichtelektrischen Forschungen[6]) annehmen muß, nur ein sehr geringer Bruchteil der absorbierten Energie zur Auslösung der Elektronen verbraucht wird. Von

1) Vgl. hierzu auch J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **7**, 386, 1910; für die besprochenen Probleme überhaupt: J. Stark, Prinzipien der Atomdynamik, Leipzig, bei S. Hirzel. 1910, 1911, 1915.

2) Guthnik u. Prager, Elster- und Geitel-Festschrift 1915, S. 652. Vieweg & Sohn, Braunschweig; P. Guthnik, Ber. d. D. Phys. Ges. **16**, 1021, 1914.

3) J. E. Lilienfeld, l. c.

4) Über Atommodelle vgl. außer den neueren Arbeiten von Sommerfeld, Elster- und Geitel-Festschrift 1915, S. 549, und Debye. Ber. Münch. Akad. 1915, S. 1, namentlich die zusammenfassende Untersuchung von F. A. Lindemann, Verh. d. D. Phys. Ges. 1914, S. 281, sowie die von ganz anderen Gesichtspunkten an diese Probleme herantretenden Arbeiten von A. Byk, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 524, 1913; **16**, 850, 1914; Ann. d. Phys. **42**, 1417, 1913; sowie: G. Mie, Ann. d. Phys. **37**, 511, 1910; **39**, 1, 1912; **40**, 1, 1913.

5) Möglicherweise auch das Wärmeleitvermögen; Bellati u. Lussana, Beibl. Ann. d. Phys. **11**, 818, 1887; Pochettino u. Trabacchi, Nuovo Cim. **13**, 29, 1907; Ann. Beibl. **31**, 1128, 1907; S. P. Sieg, Phys. Rev. **6**, 213, 1915.

6) Pohl u. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen, Braunschweig 1914, S. 94 und Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 173, 1913 (S. 183); Hallwachs, Die Lichtelektrizität in: E. Marx, Handbuch der Radiologie, Bd. III, Leipzig 1916, S. 506.

der zur Verfügung stehenden Energie abgesehen, kann man sich auch vorstellen, daß die Atome bei der Elektronenabspaltung ihr physikalisches Verhalten bis zu gewissem Grade ändern. Hinsichtlich der elektronischen Auffassung der chemischen Valenz[1]) steht dies übrigens in Zusammenhang mit der Frage, inwieweit die optischen Eigenschaften der Atome sich beim Eingehen einer chemischen Verbindung ändern.

Für den Zusammenhang der ultravioletten und ultraroten Eigenschwingungszahl hat bekanntlich F. Haber[2]) die Formel aufgestellt[3])

$$\nu_{\text{rot}} = 42{,}81\sqrt{M}\cdot\nu_{\text{violett}},$$

worin M das Molekulargewicht des im Ultrarot schwingenden Gebildes ist. Dieser keineswegs selbstverständliche Zusammenhang, der bei entsprechender Definition vom M wahrscheinlich nicht nur in solchen Fällen, wie den von Haber[4]) bei Steinsalz und Sylvin berechneten, sondern auch bei Metallen eine Bedeutung zukommen wird, legt den Gedanken nahe, daß bei einer Abtrennung des dem ν_{violett} zukommenden Elektrons das zugehörende rote System seine Schwingungszahl etwas verändert. Im Falle monochromatischen erregenden Lichtes, für dessen Wirkungsart man zunächst an irgendeinen Resonanzvorgang[5]) denken mag, würde somit eine Änderung in der spektralen Verteilung der emittierten Energie zu erwarten sein, bei der aber die Gesamtemission ungeändert bleiben könnte. — Die Experimente wären also nach Reststrahlenprinzipien anzustellen; vielleicht wäre es zu empfehlen, selektiv reflektierende Körper auf den Einfluß erregenden Lichtes, dessen Schwingungszahl nach der Haberschen Formel gewählt wäre, zu untersuchen.

Vom Standpunkte der Maxwellschen Theorie aus wäre mit einem gewissen Rechte bei Körpern, welche ihr elektrisches Leitvermögen bei Bestrahlung ändern, ein Einfluß auf das Reflexions- und Emissionsvermögen zu erwarten. Es sei n der Brechungsexponent, α der Absorptionskoeffizient, ε die Dielektrizitätskonstante, T die Schwingungsdauer, σ das in absolutem elektromagnetischen Maße gemessene elektrische Leitvermögen, c die Lichtgeschwindigkeit und r das Reflexionsvermögen, so ist, wenn man die Permeabilität $\mu = 1$ setzen kann, bekanntlich[1]), von Eigenschwingungen abgesehen, für einen im Vakuum befindlichen absorbierenden Körper bei senkrecht auffallenden ebenen Wellen:

$$r = \frac{(1-n)^2+\alpha^2}{(1+n)^2+\alpha^2}; \qquad \left.\begin{array}{r} n^2-\alpha^2=\varepsilon \\ n\alpha = \sigma^2 T \end{array}\right|$$

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \sigma^2 c^4 T^2}$$

$$\alpha^2 = -\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \sigma^2 c^4 T^2}$$

und nach dem Kirchhoffschen Gesetze gilt für das auf den schwarzen Körper bezogene Emissionsvermögen e

$$e = 1 - r = \frac{4n}{(1+n)^2+\alpha^2}.$$

Als solche „lichtempfindliche" Körper sind bekannt: Selen, Tellur, Schwefelsilber, Antimonglanz, Jodsilber, granuläres Silber, Kupferjodür, Kupferoxyd, Ruß. Vermutlich würden sich bei systematischem Suchen noch andere derartige Substanzen finden lassen. — Die bekannte große Wirkung am Selen[2]) hat Amaduzzi[3]) veranlaßt, mit einem Leslieschen Würfel, dessen Seiten mit verschiedenen Modifikationen von Selen überzogen waren und intensiv bestrahlt

1) J. Stark, Atomdynamik, l. c. und zahlreiche andere Arbeiten von Stark.

2) F. Haber, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 1117, 1911.

3) Vgl. hierzu: F. A. Lindemann, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 1107, 1911; K. Eisenmann, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 318, 1912.

4) F. Haber, l. c. S. 1123.

5) Der Resonanzvorgang, ob man ihn prinzipiell für die Elektronenablösung heranziehen will oder nicht, bildet eine Schwierigkeit in den lichtelektrischen Theorien, denn streng genommen, muß er für den hier vorliegenden Fall überhaupt erst definiert werden. Man vergleiche hierzu außer der grundlegenden Arbeit von Debye u. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **41**, 873, 1913, namentlich: Hallwachs, Die Lichtelektrizität, § 42 in: E. Marx, Handbuch der Radiologie, Bd. III, Leipzig 1916; Pohl u. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen, Braunschweig 1914, Kapitel X (speziell S. 93); R. Ladenburg, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **6**, 476, 1909; A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 132, 1905; J. Stark, Prinzipien der Atomdynamik, Bd. II, Leipzig 1911, § 35; F. A. Lindemann, Verh. d. D. Phys. Ges. **12**, 482, 1911 (dabei zu Seite 488: J. Stark, l. c. S. 112, Fig. 21, diese Zeitschr. **9**, 85, 1908); E. Wertheimer, diese Zeitschr. **12**, 408, 1911; K. Herrmann, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 936, 1912; F. A. Lindemann, Über die Grundlagen der Atommodelle, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 281, 1914; A. Byk, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 531, 1913, Ann. d. Phys. **42**, 1442, 1913; G. Mie, l. c., IV. Kapitel.

1) Vgl. z. B. Drude, Physik des Äthers, Stuttgart 1894, Kapitel XI, und Lehrbuch der Optik, 3. Aufl., Leipzig 1912, Kapitel IV, auch Baedeker, Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern, Braunschweig 1911, S. 127 ff.

2) Ch. Ries, Das Licht in seinen elektrischen und magnetischen Wirkungen, Leipzig 1909; Ch. Ries, Die elektrischen Eigenschaften und die Bedeutung des Selens für die Elektrotechnik, 2. Aufl., Berlin-Nikolassee 1913, und diese Zeitschr. **12**, 480 u. 522, 1911. Die Selenliteratur ist, auch namentlich in Hinblick auf optische Messungen, in den letzten Jahren sehr stark angewachsen. Hier sei auf die wegen erstmaliger Beobachtung von Sättigungsströmen in Metallen grundlegende Arbeit von F. Kaempf, diese Zeitschr. **13**, 686, 1912 sowie auf die bemerkenswerte Arbeit von H. Greinacher, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 117, 1916 besonders hingewiesen.

3) Amaduzzi, Rend. Linc. **17**, 590, 1908; Beibl. Ann. d. Phys. **33**, 96, 1909; Fortschritte der Phys. 1908.

wurden, nach einer Änderung der Emission zu suchen — er hat aber keinen Einfluß gefunden. Ferner konnte Pfund[1]) „keinerlei Änderung an den optischen Konstanten entdecken, wenn das Metall [Selen] mit einem zweiten Lichtstrahl von sehr großer Intensität belichtet wurde.“ Nach obigen Formeln ist dies Ergebnis vorauszusehen, denn es liegen hier trotz des metallischen Charakters dieses Selens wesentlich andere Verhältnisse vor als bei den Versuchen von Hagen und Rubens[2]), an die man hier unwillkürlich denken wird, bei welchen die Leitfähigkeitsänderung von Metallen sich sehr stark von Einfluß auf das Emissionsvermögen zeigt, was bekanntlich in guter Übereinstimmung ist mit einer für die benutzten Reststrahlenwellenlängen gültigen einfachen Formel[3]). Das elektrische Leitvermögen des lichtempfindlichen Selens ist ziemlich gering. Der spezifische Widerstand in Ohm/cm wird bei Ries[4]) zu $4 \cdot 10^5$ angegeben. Der Brechungsexponent ist nach einer Mitteilung von Gripenberg[5]) für metallisches Selen etwa 3,5 und für α[6]) kann man aus einer Kurve für die prozentische Absorption einer metallischen Selenschicht von $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm Dicke bei Pfund[7]) für $\lambda = 1\mu$ ungefähr den Wert $\alpha = 0{,}1$ ermitteln. Damit ergibt sich:

$$r = \frac{6{,}25 + 0{,}01}{20{,}25 + 0{,}01} = 0{,}309.$$

Also rund 31 Proz., während nach der Kurve von Pfund r von $\lambda = 600$ bis $\lambda = 1000\ \mu\mu$ langsam abnimmt von etwa 29 Proz. bis zu 24 Proz. Da sich $\sigma^2 c^4 T^2$ hier zu $0{,}56 \cdot 10^{-16}$ ergibt, so würde nach diesen Formeln von einem Einfluß des Leitvermögens und seiner Schwankungen auf n keine Rede sein können und da α dann entsprechend[8])

$$\alpha = \frac{\sigma c^2 T}{n} = \frac{\sigma c^2 T}{\sqrt{\varepsilon}}$$

gleich $2{,}14 \cdot 10^{-9}$ wäre, so würde jedenfalls von

1) Siehe P. J. Nicholson, diese Zeitschr. **14**, 1213, 1913, § 4, wo nicht veröffentlichte Versuche von Pfund erwähnt sind.

2) Hagen u. Rubens, Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Berlin 1903, 269, 410; 1909, 478; 1910, 467; vgl. auch: E. Liebreich, Bericht üb. neuere Fortschritte i. d. Untersuchung des langwelligen ultraroten Spektrums, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **12**, 205, 1915.

3) l. c. 1910, 468; 1903, 410; 1910, 467; Planck, ebenda, 1903, 278; Cohn, ebenda, 1903, 1; Drude, Physik d. Äthers, S. 574.

4) Ries, Das Licht, S. 210.

5) Gripenberg, diese Zeitschr. **14**, 123. 1913.

6) In bekannter Weise definiert durch: $e^{-\frac{4\alpha\pi z}{\lambda}}$ um welchen die Intensität der Strahlung mit der Wellenlänge λ im Vakuum beim Durchlaufen der Strecke z im Körper geschwächt wird.

7) Pfund, diese Zeitschr. **10**, Fig. 4, 340, 1909.

8) Drude, Physik d. Äthers, S. 573.

diesem Gesichtspunkte aus durchaus keine Änderung von r und damit e bei Bestrahlung zu erwarten sein.

Eine sorgfältige experimentelle Prüfung des Verhaltens von α während einer Änderung von σ wäre aber zweifellos von Interesse und naheliegender als die Prüfung von r oder e. Versuche in dieser Richtung sind mir nicht bekannt.

Die Herstellung brauchbarer dünner Schichten aus metallischem Selen ist nach Pfund[1]) sehr schwierig. Übrigens müßte sich für eine Änderung von r um 1 Proz. der obige beobachtete Wert von α um 6,5 Proz. ändern (falls n und ε konstant bleiben, worüber nichts bekannt). In Anbetracht des neuerdings stark zunehmenden Selen-Interesses wären umfassendere Messungen im Ultrarot unter Einfluß „erregender“ Belichtung bei spektraler Zerlegung sehr erwünscht, am besten unter gleichzeitiger Messung des elektrischen und lichtelektrischen Verhaltens.

Soweit es aus den Beiblättern, beziehentlich Fortschritte der Physik-Referaten zu entnehmen ist, hat Amaduzzi nur die Gesamtemission untersucht, man müßte aber, wie schon oben S. 188 erwähnt, mit der Möglichkeit rechnen, namentlich bei spektral begrenztem Erregungslichte, daß nur eine Änderung der Energieverteilung eintreten würde. Auch wäre es von Interesse, den Einfluß der Temperaturänderung auf r und e bei metallischem Selen zu untersuchen, da ein solcher dem Obigen zufolge nicht vorhanden sein darf. Es wäre zweifellos wichtig, das optische Verhalten in zwei verschiedenen Fällen, in welchen die gleiche Widerstandsänderung auf verschiedene Art bewirkt wird (mechanische[2]) Einflüsse, Magnetfeld [Wismut!] u. a.) zum Vergleich zu gewinnen. Die hier in Erinnerung gebrachten Gesichtspunkte gelten auch für andere lichtempfindliche Körper. In Rücksicht auf Eigenschwingungsfragen könnte man beim Selen den Versuch machen, die spezifische Wärme unter Einfluß der leitfähigkeitsändernden Bestrahlung zu messen — ein Problem, das allerdings bedeutende Schwierigkeiten haben wird.

Etwas günstiger als bei Selen liegen die

1) Pfund, l. c., S. 342.

2) S. Nakamura, Ann. d. Phys. **20**, 807, 1906 (bei *Ag* Einfluß permanenter Dehnung auf die optischen Konstanten), vgl. aber H. Rumpelt, Ann. d. Phys. **28**, 622, 1909. Bei einer eventuellen Fortsetzung derartiger Versuche im langwelligen Gebiete wäre es zweckmäßig, die „akzidentelle“ elektrische Leitfähigkeit, sowie nach Baedeker u. Vehrigs, Ann. d. Phys. **44**, 783, 1914; Vehrigs, Vollständige Bestimmung der Konstanten der akzidentellen Thermokräfte, Langensalza 1914, gleichzeitig die Thermokraft zu messen.

Verhältnisse vielleicht bei anderen lichtempfindlichen Körpern mit größerem Leitvermögen, trotz der damit verbundenen erheblich geringeren Widerstandsänderung. Der spezifische Widerstand w_0 des Tellurs in Ohm/cm liegt nach W. Haken[1]) zwischen 0,25 (Tellur β) und 0,0059 (Tellur α). Welcher Wert dem lichtempfindlichen Tellur zukommt, scheint nicht näher bekannt zu sein. Probiert man, um eine ungefähre Schätzung zu ermöglichen, verschiedene Zahlenwerte durch: w_0 zwischen 0,25 und 0,006, ε zwischen 1 und 12, so gelangt man für eine spezifische Widerstandsänderung um 1 Proz. zu Schwankungen von r bis zu einigen Prozenten. Mindestens bei Anwendung langwelliger Reststrahlen[2]) erscheint von diesem Gedankengange aus die fragliche Änderung von r einer Messung zugänglich, doch dürfte auch für $\lambda = 8\,\mu$, was bekanntlich bei Temperaturen zwischen 0 und 100° C ungefähr dem Energiemaximum entsprechen würde, eine Schwankung von e beobachtbar werden. — Die Reflexion des Tellurs hat W. W. Coblentz[3]) zwischen 0,5 und 9 μ bestimmt. — Tellur ist bekanntlich ein vielfach untersuchter Körper, so daß die Feststellung des fraglichen Emissionseffekts hier besonderes Interesse bieten würde.

Der Antimonglanz, dessen Lichtempfindlichkeit von F. M. Jaeger[4]) entdeckt und von Hilda von Martin[5]) bis ins Ultrarot verfolgt worden ist, besitzt zwar einen noch höheren spezifischen Widerstand als Selen, würde aber mit den vorliegenden beobachteten Werten von n und α, falls α, wie es nach einer Bemerkung von Koenigsberger[6]) möglich erscheint, beeinflußbar ist, im Bestrahlungsfalle doch eine geringe Änderung von r beziehentlich e möglich erscheinen lassen.

In Betracht käme auch das vom Ultraviolett bis Ultrarot lichtempfindliche Schwefelsilber[7]), doch wäre hier zu beachten, daß die Leitung wohl nicht rein metallisch erfolgt im Gegensatz zu Selen, dessen elektronische Leitfähigkeit als sichergestellt angesehen werden darf[8]).

Einige andere „lichtempfindliche" Substanzen, wie Jodsilber[1]), granuläres Silber[2]) und namentlich die künstlichen metallischen Leiter von Baedeker[3]) lassen noch keine weitere Diskussion zu. Vielleicht würde man aber gerade mit diesen künstlichen lichtempfindlichen metallisch leitenden Schichten wegen der dabei möglichen Variation der elektronischen Eigenschaften Bedingungen erreichen können, unter denen das Leitvermögen genügend groß und dabei noch in geringem Grade lichtempfindlich wäre. Die oben zitierte Arbeit von Greinacher legt es nahe, auch die optischen Konstanten bei der von ihm gefundenen Leitfähigkeitsänderung durch Wechselstrom zu untersuchen.

Um schließlich nochmals auf meine Versuche am Silber zurückzukommen, so ist im Auge zu behalten: von einer Änderung der elektrischen Leitfähigkeit bei Bestrahlung, die früher behauptet worden ist[4]), kann nach den auf Veranlassung von O. Wiener durch K. Baedeker[5]) angestellten Experimenten keine Rede sein. Wenn man also nach meinen Beobachtungen mit einem kleinen Einflusse auf das Emissionsvermögen zu rechnen hat, so muß dies, wie oben erörtert, auf einer besonderen, nicht mit dem elektrischen Leitvermögen in direktem Zusammenhange stehenden Wirkung[6]) beruhen — oder aber: es würde sich handeln um eine vom reinen homogenen Silber verschiedene emittierende Schicht, deren Oberflächenstruktur durch chemische Verunreinigungen oder die mechanische Herstellung der Folie bedingt ist. Es wäre denkbar, daß Verunreinigungen durch Oxyde oder Sulfide, welche ja lichtempfindlich sind, vorhanden wären, da ja sehr dünne Schichten[7]) genügen.

Übrigens scheint im allgemeinen die zur Veränderung der elektrischen Leitfähigkeit erforderliche erregende Wellenlänge um so kleiner zu sein, je höher diese ist. Die Versuche von Baedeker würden, mit etwas größeren Schichtdicken, eine Wiederholung mit sehr harten Röntgenstrahlen erfordern.

Endlich sei noch ein allgemeiner Gesichtspunkt für weitere Emissionsexperimente ange-

1) W. Haken, Ann. d. Phys. **32**, 291, 1910.
2) Vgl. Liebreich, l. c.
3) W. W. Coblentz, Bull. Bureau Standards **7**, 215, 1911 (Nr. 152).
4) F. M. Jaeger, Versl. K. Ak. van Wet. **15**, 724, 1907; Ann. Beibl. **31**, 789, 1907; Zeitschr. f. Krist. **44**, 45, 1907; Ann. Beibl. **32**, 640, 1908; vgl. auch Ries, Das Licht, S. 220.
5) Hilda von Martin, geb. Landschütz, diese Zeitschr. **12**, 47, 1911.
6) J. Koenigsberger, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **11**, 138, 1914.
7) Ries, Das Licht, S. 214.
8) Ries, diese Zeitschr. **12**, 480 u. 522, 1911; F. Kaempf, l. c.

1) H. Scholl, Ann. d. Phys. **16**, 193, 1905; Zeitschr. f. wiss. Phot. **4**, 1, 1906.
2) W. Wilson, Ann. d. Phys. **23**, 107, 1907.
3) Baedeker, diese Zeitschr. **9**, 431, 1908.
4) Vgl. Ries, Das Licht, S. 223.
5) K. Baedeker, Leipziger Ber. **55**, 198, 1903; Ann. Beibl. **28**, 724, 1904.
6) In bezug auf die von Sieg l. c. konstatierte Tatsache, daß bei Selen das Wärmeleitvermögen in seinem Verhalten auch nicht annähernd dem des elektrischen entspricht (Effekt sicher unter 5 Proz.), wäre bei Metallen eiu analoges Experiment erwünscht.
7) Etwa 10^{-6} cm, vgl. Ries, diese Zeitschr. **12**, 528, 1911.

geben. Man könnte die Bestrahlung bei Verhältnissen vornehmen, welche irgendeinem physikalisch „labilen“ Zustande des betreffenden Systems entsprechen. Abgesehen von einer, vielleicht aussichtsreichen, Verwendung von Körpern wie die Lenardschen Erdalkaliphosphore[1]), wäre an besondere Temperaturen: Schmelzpunkt, magnetische Umwandlungspunkte und ähnliches zu denken, bei denen eine quasi unstetige Veränderung physikalischer Eigenschaften statthat.

Meinem hochverehrten Chef, Herrn Professor K. R. v. Koch danke ich verbindlichst für gütige Bereitstellung von Apparaten, Herrn Geheimen Hofrat Professor Des Coudres in Leipzig bin ich für die leihweise Überlassung des Pendelunterbrechers zu großem Danke verpflichtet.

Stuttgart, Physikal. Inst. d. Königl. Techn. Hochschule, März 1916.

(Eingegangen 15. April 1916.)

1) Vgl. u. a. P. Lenard, Elster- u. Geitel-Festschrift, S. 669; Literatur auch bei Hallwachs l. c. S. 448, 581.

BESPRECHUNGEN.

J. Rippel, Methodik des Unterrichts in der Chemie. gr. 8. II u. 130 S. mit 8 Abbildungen. Wien, A. Pichlers Witwe u. Sohn. 1915. Geheftet M. 2.55, gebunden M. 3.—

Ein Analogon etwa zu dem in Deutschland von Baumeister herausgegebenen „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen“ bildet die in Österreich von Scheindler herausgegebene „Praktische Methodik für den höheren Unterricht“, von dem das Rippelsche Buch einen Teil bildet. Der Verfasser schildert zunächst die mannigfachen Wandlungen, die der chemische Unterricht an den österreichischen Mittelschulen durchgemacht hat, um sodann auf Unterrichtsverfahren und anzustrebendes Lehrziel überzugehen: Auf experimentellem Weg erworbenes Verständnis chemischer Vorgänge und ihrer Gesetzmäßigkeiten. Übersichtliche Kenntnis der wichtigsten Grundstoffe und derjenigen Verbindungen, die wegen ihres Vorkommens, ihrer Rolle im Haushalte der Natur und ihrer praktischen Verwertung oder in theoretischer Hinsicht von Bedeutung sind; Verständnis der wichtigsten chemischen Vorgänge des gewöhnlichen Lebens. Alsdann wird die Art und Weise des an den verschiedenen Schulen zu erteilenden Chemie-Unterrichts besprochen, besonders eingehend an den Realschulen, wo folgende Einteilung vorgenommen wird: I. Unterstufe: Die ersten Unterrichtsstunden in der Chemie, der mineralogische Anfangsunterricht, Fortsetzung des chemisch-mineralogischen Lehrgangs. II. Oberstufe: Die Chemie der Nichtmetalle, das periodische System der Elemente, die Chemie der Metalle; die aliphatischen Verbindungen; das chemische Praktikum.

R. Lucas.

Enzyklopädie der Photographie. gr. 8. Halle a/S. Wilhelm Knapp.

Heft 83: M. Andresen, Das latente Lichtbild, seine Entstehung und Entwicklung. VIII u. 61 S. mit 4 in den Text gedruckten Abbildungen. 1913. M. 2.40

Die Schrift ist der Beitrag eines um die Vervollkommnung des photographischen Prozesses verdienten Mannes zu den Versuchen, den weiten Abstand zu verringern, in welchem die technische Beherrschung des photographischen Vorganges der Theorie vorangeeilt ist. Die Natur des „latenten Bildes“, des ersten — innerhalb eines geringen Bruchteils einer Sekunde entstehenden — nur durch die „Entwicklung“ zur Wahrnehmung gelangenden Lichtproduktes bildet ein viel umstrittenes Problem. Die naheliegende Auffassung des latenten Bildes als qualitativ identisch mit dem bei mehr als tausendfach längerer Belichtung sichtbar werdenden Reaktionsprodukt, dem gewöhnlichen metallischen Silber, hat sich als nicht haltbar erwiesen. Neben dieser „Silberkeimtheorie“ hat die Subbromidtheorie Vertreter gefunden, welche ein oder eine Anzahl von nicht bis zum Metall gehenden Reduktionsprodukten des Bromsilbers annimmt, und weiter eine „Strukturtheorie“, die auf Grund der im Licht beobachteten Zerstäubungen im latenten Bild lediglich physikalisch verändertes Bromsilber sieht, das durch Auflockerung für Reduktionsmittel leichter angreifbar geworden ist. Während in einer anderen früher erschienenen Schrift der gleichen Sammlung Lüppo-Cramer für eine modifizierte Silberkeimtheorie eintritt, nach der im Licht nicht gewöhnliches, sondern kolloidales Silber entsteht, das als „Adsorptionsverbindung“ das latente Bild ausmacht, stützt sich Andresen in seinen Ausführungen auf die Annahme einer ursprünglich bestehenden Verbindung von $(AgBr)_n$ + Gelatine. Die Annahme erweist sich als brauchbare Arbeitshypothese. Gegenüber der Kompliziertheit des Systems, welches die photographische Platte nach der sogenannten Reifung und gar nach der Belichtung darstellt, äußert er resigniert: „Man möchte fast annehmen, daß es niemals gelingen wird, diese verzwickten Verhältnisse restlos aufzuklären. Wir werden uns in den verschiedenen Stadien unserer Erkenntnis der Natur des latenten Bildes damit begnügen müssen, unsere Vorstellungen jeweilig mit dem vorliegenden Tatsachenmaterial möglichst in Einklang zu bringen.“

Es sind in der kleinen Schrift eine Menge interessanter Beobachtungen über den photographischen Prozeß mitgeteilt. Sie gibt im Verein mit der oben genannten von Lüppo-Cramer einen guten Überblick über die von den verschiedensten Seiten her unternommenen Versuche, der Erkenntnis des latenten Bildes näher zu kommen.

A. Coehn.

Heft 7: Hugo Müller, Die Mißerfolge in der Photographie und die Mittel zu ihrer Beseitigung (Photographisches Fehlerbuch). I. Teil: Negativverfahren. VII u. 113 S. mit 4 Figuren im Text, 8 Tafeln und einem Sachregister. Vierte verbesserte und vermehrte Auflage. 1913. Geheftet M. 2.—, gebunden M. 2.60

Für das Fehlen eines über die Mitteilung von Rezepten hinausgehenden Lehrbuches der Photographie ist die immer weiter anschwellende Menge der von theoretischer Begründung der Vorgänge absehenden Unterweisungen kein Ersatz. Der Verfasser der vorliegenden Schrift hat einen eigenen Ton gefunden, indem er nicht das Positive, das was beachtet werden muß, in den Vordergrund stellte, sondern das Nichtseinsollende, die Folgen von Mängeln der Apparatur und Fehlern in den verschiedenen Stadien des Prozesses. Daß er damit eine vielen willkommene Form für die Mitteilung praktischer Erfahrungen gefunden hat, wird durch das Erscheinen bereits der vierten Auflage des „Fehlerbuches" bewiesen. Auch dem Geübteren dürfte das Büchlein zuweilen nützlichen Rat geben, wenn es sich um Rettung fehlerhafter Aufnahmen handelt. Weniger gelungen als die Angaben über Abhilfe bei Mißerfolgen des photographischen Verfahrens sind die über Linsenfehler. Die vorgeschlagene Prüfung über Astigmatismus sagt darüber nichts aus. A. Coehn.

H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbststudium. III. Band: Integralrechnung. gr. 8. X u. 485 Seiten mit 111 Figuren. Leipzig, S. Hirzel. 1914. Geheftet M. 13.60, gebunden M. 14.60.

Bei der Besprechung der beiden ersten Bände des Lehrbuches von H. v. Mangoldt (diese Zeitschr. **14**, 85, 1913) habe ich schon die Tendenz des Werkes charakterisiert und besonders hervorgehoben, daß dieses Buch sowohl wegen der Sorgfalt, mit welcher die Grundlagen der Infinitesimalrechnung behandelt werden, als auch wegen der Klarheit und Einfachheit seiner Sprache ganz besonders zu empfehlen ist. Der vorliegende dritte Band besteht vor allem in einer vollständigen Theorie der einfachen und mehrfachen Integrale, die alles Grundlegende enthält, was man zum Studium der Fourierschen Reihen, der komplexen Funktionentheorie, der Theorie des logarithmischen und gewöhnlichen Potentials, und der Maxwellschen Theorie braucht. So findet man z. B. eine einfache Ableitung des zweiten Mittelwertsatzes, eine besonders schöne Darstellung des Goursatschen Beweises für den Fundamentalsatz von Cauchy, und ein Kapitel über die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes, welche die Grundlage so vieler physikalischer Theorien bilden. Auch die Anwendungen auf Volumen-, Gehalts- und Schwerpunktsberechnungen sind geschickt ausgesucht.

Dagegen ist der Teil des Buches, der sich mit Differentialgleichungen befaßt, entschieden zu kurz ausgefallen. Es wäre zu begrüßen, daß der Autor bei der zweiten Auflage seines Buches diese Kapitel weiter ausbauen wollte; in einem so umfangreichen Werke müßten die gewöhnlichen Differentialgleichungen mindestens soweit berücksichtigt werden, wie man sie in der Mechanik braucht. Ich denke dabei vor allem an die Differentiation nach einem Parameter, an die Abhängigkeit der Lösungen von ihren Anfangswerten, an gewisse Randwertprobleme und an das Verhalten der Lösungen in der Umgebung der am häufigsten vorkommenden singulären Stellen; das Studium der Differentialgleichung

$$y' = \frac{kx + ly}{mx + ny}$$

in der Umgebung des Anfangspunktes der Koordinaten kommt z. B. für diese letzte Fragestellung in Betracht. C. Carathéodory.

Max J. Langguth, Der physikalische Schülerversuch in der Volksschule. 8. IV u. 187 S. mit 63 Textabbildungen. Hildesheim u. Leipzig, A. Lax. 1914. Geheftet M. 3.—, gebunden M. 3.70

Das Buch wünscht auch der Volksschule das physikalische Schülerpraktikum zugänglich zu machen. Da aber diese in der Regel nicht über ausgiebige Mittel zu verfügen pflegt, so muß nach des Verfassers Ansicht die Apparatur von den Schülern selbst aus wohlfeilen Materialien, als da sind Zigarrenkisten, Wellpappe, eiserne Nägel, Drahtenden u. ähnl., gefertigt werden, wozu genauere Anweisungen gegeben werden. Die Schülerübungen werden dadurch mehr zu einem Handfertigkeitsunterricht, wodurch sich von selbst ergibt, daß die Zahl der zur Bearbeitung kommenden Aufgaben verhältnismäßig bescheiden sein muß. Das Buch ist gut gemeint und würde wirklich Gutes leisten, wenn die Darstellung nicht durch eine etwas lästige Breite beeinträchtigt würde. Der Verfasser will offenbar volkstümlich wirken, müßte sich aber vor so manchen Ungereimtheiten im Ausdrucke hüten. Behrendsen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ständige Mitarbeiter Dr. Friedrich Hoffmann zum Kais. Professor und Mitglied, der Assistent Dr. Johann Disch zum ständigen Mitarbeiter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin, der a.o. Professor an der Universität Jena Dr. Wilhelm Schlenk zum ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Wien, Professor Gilbert J. Morgan vom Royal College of Science in Dublin zum Professor der Chemie am Technical College of the City and Guilds of London Institute in Finsbury, der Observator beim Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam Professor Gustav Eberhard zum Hauptobservator daselbst, Dr. Richard Prager zum Observator an der Universitätssternwarte in Babelsberg.

Berufen: Der a.o. Professor der Mathematik an der Universität Czernowitz Dr. Hans Hahn in gleicher Eigenschaft an die Universität Bonn.

In den Ruhestand: Der ord Professor für reine Mathematik an der Universität Zürich Dr. Ernst Zermelo (aus Gesundheitsrücksichten).

Gestorben: Der ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Wien (früher in Braunschweig) Dr. Ing. Karl Czeija (gefallen am 16. April 1916 auf dem südöstlichen Kriegsschauplatz), der Photochemiker Johannes Gaedicke in Berlin (Herausgeber des Photographischen Wochenblattes).

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

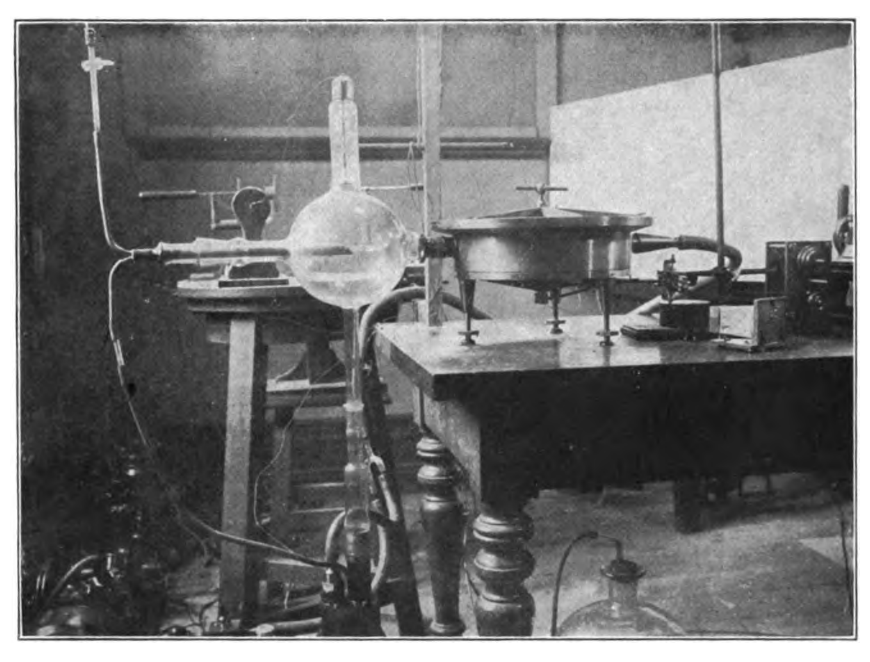


Fig. 3.

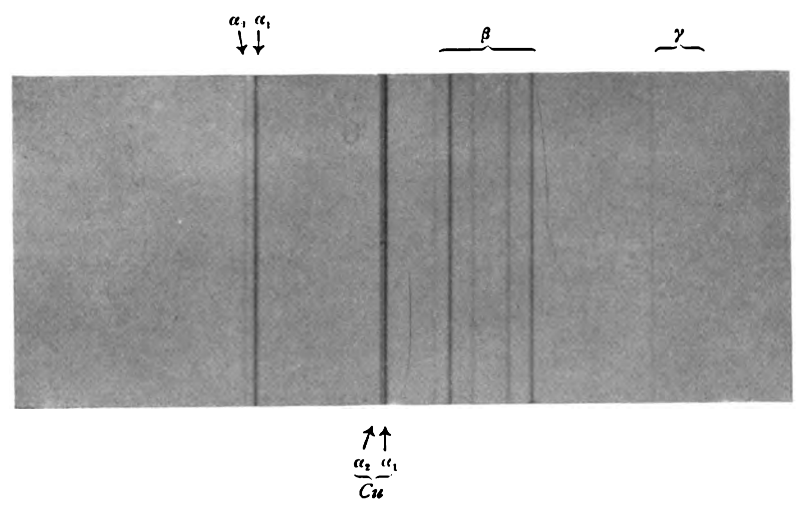


Fig. 4. Hochfrequenzspektrum (L-Reihe) des Aldebaraniums.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. | 15. Mai 1916. | 17. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 11 am 20. Mai 1916.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einen möglichen Zusammenhang gewisser Witterungsvorgänge mit der radioaktiven Emanation des Erdbodens.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von E. Bandl.

Die im Gebirge auf Bergkuppen, längs eines Höhenzuges, in einer Paßenge usw. auftretenden umfangreichen Wolkenbildungen sind eine allgemein beobachtete und bekannte Erscheinung, die auf Luftströmungen bzw. lokale Temperaturänderungen in der Atmosphäre zurückgeführt wird. Naturgemäß wirkt bei der Entstehung und Gestaltung eines derartigen Gewölkes stets auch die besondere Form und Gliederung des betreffenden Gebirges, die Beschaffenheit und Richtung der Täler und Ähnliches mit.

Einen ganz anderen Eindruck als die vorerwähnte Bewölkungsart macht jedoch jenes, verhältnismäßig kleine, Wolken- oder Nebelgebilde, das in manchen Gebirgsgegenden unter bestimmten Verhältnissen an einer und stets derselben engumgrenzten Stelle eines Berges, bei einer steilen Felswand, an einem Grat oder in einer Einsattelung entsteht und dabei entweder in einiger Höhe über jener charakteristischen Gegend fast unbeweglich schwebt oder aber unmittelbar am Gebirge anhaftet. Die Dauer dieser Wolkenerscheinung schwankt etwa zwischen 5 und 30 Minuten; selten ist sie länger.

Nach ihrem ganzen Verhalten scheinen solche Wolken mit Luftströmungen in keinem unbedingten bzw. ausschließlichen Zusammenhang zu stehen; sie zeigen sich eher häufiger bei relativer Windstille; andererseits können sie auch während mäßiger Winde vorkommen, ohne daß sie jedoch auf lokale Winddrehungen irgendwie besonders reagieren. Ebensowenig dürften auftretende Temperaturdifferenzen an sich eine ausschlaggebende Rolle spielen, zumal jene Wolkengebilde meistens bei konstanter Temperatur, und zwar in gleicher Weise sowohl in der warmen als auch in der kalten Jahreszeit vorkommen.

Nur ein Vorgang verläuft mit dem Entstehen genannter Wolkenart nahezu immer parallel, nämlich die Abnahme des atmosphärischen Druckes. Nicht selten vermag man schon aus dem Auftauchen besagter Wolke allein auf ein Sinken des Luftdruckes zu schließen.

Im Laufe mehrjähriger Beobachtungen habe ich konstatiert, daß das Erscheinen einer solchen Wolke an dem betreffenden charakteristischen Punkt in der jeweiligen Gebirgsgegend mit auffallender Sicherheit, und zwar viel verläßlicher als der Rückgang des Barometerstandes für sich, einen nahen Witterungsumschlag oder andere ähnliche meteorologische Ereignisse ankündigt.

Zeigt sich während einer Reihe konstant schöner und klarer Tage in einiger Höhe über einer solchen charakteristischen Stelle eine kleine dunkel gefärbte Flockenwolke, eventuell auch nur für wenige Minuten, so tritt mit fast absoluter Bestimmtheit nach 12 bis 24 Stunden feuchtwarmer, von starker Bewölkung begleiteter Wind, ein Gewitter usw. ein.

Entsteht ein derartiges Gebilde über oder an der charakteristischen Stelle zu einer Zeit, wo schon eine ziemlich umfangreiche, höhere Bewölkung vorhanden ist, so kann dies als sicheres Vorzeichen eines stärkeren Regens angesehen werden[1]). Besonders auffallend ist eine solche Erscheinung dann, wenn z. B. die be-

1) Vereinzelt wird eine solche Wetterprognose aus dem Erscheinen einer Wolke an einer bestimmten Stelle, sogar von der ortsansässigen, bäuerlichen Bevölkerung selbst aufgestellt.

treffende charakteristische Stelle eine weit geringere Höhe aufweist als die umliegenden Berge, deren Spitzen eventuell alle noch ganz ohne Wolken sind, während an besagter Stelle schon ein Nebel haftet.

Durch genauere, wenn auch noch nicht streng systematische Beobachtungen gewann ich immer mehr den Eindruck, daß die geschilderte Wolken- oder Nebelbildung mit dem einzelnen charakteristischen Punkte des Gebirges in einer ganz speziellen Beziehung stehen müsse, als ob dieser geradezu einen unmittelbaren, bestimmenden Einfluß auf das Entstehen der Wolke hätte. Namentlich ein unbewegliches Schweben solcher Gebilde in einigem Abstand über der charakteristischen Stelle erweckt den Anschein, wie wenn von letzterer irgendwelche unbekannte, die Wolke erzeugende und gleichzeitig festhaltende Kräfte ausgingen.

Schon vor längerer Zeit dachte ich, ob man die Erscheinung nicht etwa auf eine Art elektrischer Ladungswirkung oder Ionisierung seitens des betreffenden Gebirgsteiles zurückführen könnte; ich fand jedoch keine Gründe, welche diese spekulative Annahme irgendwie sonst gerechtfertigt hätten.

Erst vor kurzem wurde ich durch eine Schrift von H. Sieveking[1]) auf eine Tatsache aufmerksam gemacht, die, wie ich glaube, für obige Frage die einfachste Lösung gibt. Es ist dies die durch ein Sinken des äußeren Luftdruckes bewirkte Steigerung der radioaktiven Ausströmungen des Erdbodens, welche, wenn sie entsprechend stark ist, durch Ionisationswirkung in der Atmosphäre Kondensation von Wasserdampf und damit Wolken erzeugen dürfte.

Auf Grund von vorläufig bloß allgemeiner Orientierungen habe ich inzwischen festgestellt, daß alle jene Stellen, die ich in den letzten Jahren als für besagte Wolkenbildung charakteristisch kennen lernte, sich in Gegenden befinden, welche die typischen Merkmale tektonischer Einsturz- oder Spaltengebiete aufweisen. Ist der Erdboden bzw. ein Hohlraum in der Erde in dem betreffenden Gebiete durch einen größeren Gehalt an radioaktiver Emanation ausgezeichnet, so wird durch diese Emanation zunächst die in den Höhlungen und Spalten befindliche Luft teilweise ionisiert sein.

Wenn nun durch ein Sinken des äußeren Luftdruckes aus solchen Poren der Erde die einen Überdruck besitzende Luft herausgetrieben wird, so muß sie auch einen Teil der angesammelten radioaktiven Emanation in die freie Atmosphäre mitnehmen. Mögen auch die Erdspalten selbst durch Gestein, Schotter oder selbst lockeren Humus verdeckt sein, immerhin wird jene mit Emanation vermischte Luft Wege finden, durch die sie in Form von Gasströmen emporsteigen kann; die mitgeführte Emanation wird hierbei weiter ionisierend wirken.

Dort, wo solche aufsteigende Gasströme in der freien Luft auf Wasserdampf stoßen, erzeugen sie durch die in ihnen enthaltenen Ionen Kondensation, d. h. Wolken- oder Nebelbildung. Je nach der relativen Höhe, in welcher eine Wasserdampfschichte vorhanden ist bzw. am Gebirge vorbeistreicht, schwebt dann die Wolke in einem bestimmten Abstand über der charakteristischen Stelle oder sie haftet als Nebel selbst am Berge.

Solche Kondensationserscheinungen werden um so sicherer eintreten, je rascher der Luftdruck sinkt, weil dabei um so mehr Emanation und Ionen auf einmal aus der Erde ausgestoßen werden.

Meine bisherigen Beobachtungen bestätigen im allgemeinen diese Erwägung.

Die empfindliche Reaktion des Wasserdampfes auf die Anwesenheit von Ionen gibt, wie ich glaube, auch eine einfache Erklärung der Tatsache, warum jene Wolkengebilde an den charakteristischen Punkten zumeist um so vieles früher zustandekommen als die mit der Luftdruckabnahme und ähnlichen gröberen, atmosphärischen Vorgängen in näherer Beziehung stehende allgemeine Bewölkung.

Es ist übrigens vielleicht nicht völlig ausgeschlossen, daß auch an der Bildung allgemeiner Bewölkung eine, wenngleich nur schwache Emanations- und Ionenausströmung seitens jenes ganzen Erdoberflächenteiles, auf welchen sich die jeweilige Abnahme des atmosphärischen Druckes erstreckt, bis zu einem gewissen Maße mitwirken könnte.

Eine von mir gemachte konkrete Feststellung, wonach in einer bestimmten Gebirgsgegend in der Nähe eines durch viele Felsenspalten charakterisierten, vor Witterungsänderungen stets jene Wolkenbildung aufweisenden Punktes die ganze Umgebung, die zudem als Einsturzgebiet bekannt ist, sich durch außerordentlich reiche Niederschläge auszeichnet[1]), sowie die gleiche Eigenschaft ausgedehnter Einsturzgebiete in anderen Gegenden, bestärkt mich in der Vermutung, daß das Ausströmen größerer Emanationsmengen aus der Erde nicht nur jene gewissen Wolken erzeugen, sondern

1) Moderne Probleme der Physik, Vorträge von Dr. H. Sieveking. Braunschweig, Verlag Vieweg 1914.

1) Einmal fielen dort in einer Nacht 152 mm Regen, gegen 15 mm in den angrenzenden Gebieten.



auch das Zustandekommen von Niederschlägen wesentlich begünstigen dürfte.

Eventuell lassen sich auf ähnliche Weise die starken Regengüsse die nach größeren tektonischen Erdbeben bisweilen auftreten sollen, mit der Kondensationswirkung bedeutender Mengen ionisierter Luft, welche durch Verschiebungen oder Senkungen der Erdrinde aus dieser herausgepreßt werden, in Verbindung bringen.

Schließlich kann man vielleicht sogar gewisse Gewittererscheinungen, die sich ebenfalls bei tektonischen Beben mitunter zeigen, ferner die häufigen Entladungen auf den verschiedenen als besonders gewittergefährlich bekannten Berghöhen zum Teil auf einen, auch von der Erdbodenemanation herrührenden elektrischen Einfluß zurückführen.

So dürften z. B. längs eines bestimmten Gebirgskammes, von dessen außergewöhnlicher Gewittergefährlichkeit ich mich vor mehreren Jahren selbst überzeugen konnte, wohl sicherlich tiefe Spalten in der Erdrinde verlaufen, aus denen bei sinkendem Luftdruck größere Mengen radioaktiver Emanation emporsteigen. Iin einem Gebirgspanorama von mehr als 100 km Ausdehnung habe ich einmal bei klarster Witterung gerade nur in der Nähe besagten Kammes eine Bewölkung, und zwar jener charakteristischen Art, wahrgenommen.

Ein in einer ganz anderen Gegend befindliches Bergmassiv, das ohne Zweifel viele Spalten und Einsturzstellen besitzen dürfte, und an dem ich ebenfalls einigemal bei sonst vollkommen wolkenlosem Wetter jene oben geschilderten feststehenden Wolken gesehen habe, wird von Ortskundigen desgleichen als sehr gewittergefährlich bezeichnet.

Ich will nicht absolut ausschließen, daß der aus dem Erdinnern ausströmenden radioaktiven Emanation und ionisierten Luft vielleicht nicht ein derart weitgehender Einfluß zukommt, wie ich aus den oben angeführten Beobachtungen abzuleiten versuchte.

Es ist eventuell möglich, daß schon das intensive Ausströmen der Luft an sich aus gewissen, nicht zu sehr verschütteten Erdspalten bei sinkendem atmosphärischen Druck infolge der Aufwärtsbewegung sowie Ausdehnung eine Abkühlung und damit Kondensation des Wasserdampfes erzeugt, wobei vielleicht auch die Temperaturdifferenz zwischen der Luft der freien Atmosphäre und jener im Erdinnern (die sich allerdings mit dem Wechsel der Jahreszeit umkehrt) mitwirken könnte.

Es soll nicht ganz in Abrede gestellt werden, daß eventuell doch auch irgendwelche lokale, schwer nachweisbare Winde bei dem Zustandekommen jener charakteristischen Wolken eine besondere Rolle spielen.

Endlich wäre allenfalls zu erwägen, ob nicht auch eine durch ultraviolette Sonnenstrahlen in der freien Atmosphäre selbst erzeugte Ionisierung oder lokale elektrische Einflüsse hierbei mitwirken.

Es ist möglich, sogar sehr wahrscheinlich, daß eben mehrere verschiedene und vielleicht ziemlich komplizierte Vorgänge zusammenwirken müssen, damit jene Wolkenbildung entstehe.

Auf jeden Fall aber glaube ich, daß es sich lohnen dürfte, die Frage des Einflusses der radioaktiven Bodenemanation auf gewisse Witterungserscheinungen, sowie auch im allgemeinen das Ausströmen von Luft aus dem Erdinnern bei sinkendem atmosphärischen Druck durch ausgedehnte systematische und statistische Beobachtungen bzw. Messungen zu prüfen. Zu einer Sammlung derartigen Materials anzuregen, soll der Hauptzweck vorstehender Mitteilung sein.

Die genauen topographischen Angaben über die oben beschriebenen Wahrnehmungen werde ich aus begreiflichen Gründen erst bei Wiedereintritt normaler Zeiten veröffentlichen können.

Zusammenfassung.

1. In manchen Gebirgsgegenden zeigen sich unter gewissen Verhältnissen an, bzw. in der Nähe einer und stets derselben Stelle eines Berges kleine Wolken- oder Nebelgebilde, die nach ihren besonderen Eigenschaften mit den jeweiligen herrschenden Winden oder mit den lokalen Temperaturverhältnissen nicht in unbedingtem Zusammenhang zu stehen scheinen.

2. Das Auftreten dieser Wolken ist fast immer von einem Sinken des Luftdruckes begleitet und kündigt, nach empirischen Beobachtungen, mit auffallender Sicherheit das Nahen eines Witterungsumschlages, einen kommenden feuchten Wind mit Bewölkung oder Regen an.

3. Das eigentümliche Verhalten solcher Wolkengebilde macht den Eindruck, wie wenn zwischen der Stelle, wo die Wolke sich zeigt, und dieser letzteren selbst ganz besondere Beziehungen bestünden.

Erwägt man die Tatsache, daß das Sinken des atmosphärischen Druckes unter anderem auch eine Steigerung des Ausströmens radioaktiver Emanation und ionisierter Luft aus den Poren der Erde zur Folge hat, und berücksichtigt man ferner den Umstand, daß die Umgebung jener Stellen im Gebirge, wo oben genannte Wolken zustande kommen, in der Regel den Typus tektonischer Einsturzgebiete aufweisen, so kann man annehmen, daß ein derartiges



Aufsteigen von Emanation und ionisierter Luft eine Kondensation der in der freien Atmosphäre befindlichen Wasserdämpfe und damit jene charakteristischen Wolkengebilde erzeugt.

4. Es ist vielleicht die Vermutung zulässig, daß die ionisierende Wirkung der radioaktiven Bodenemanation möglicherweise auch bei dem Zustandekommen allgemeiner Bewölkung, sowie bei dem Entstehen starker Niederschläge mitbeteiligt ist, ferner daß eventuell gewisse durch Gewitter besonders ausgezeichnete Berge diese Eigenschaft zum Teil dem elektrischen Einfluß derselben Bodenemanation verdanken.

5. Obgleich vielleicht die Wirkung der radioaktiven Emanation des Erdbodens tatsächlich nicht eine so weitgehende bzw. vielseitige ist, wie mit den vorstehenden Darlegungen gezeigt werden sollte, so dürfte eine eingehende statistische Prüfung der Frage immerhin wünschenswert erscheinen.

Im Felde, März 1916.

(Eingegangen 9. April 1916.)

Die Instabilität des Bohr-Debyeschen Wasserstoff-Moleküls und die Dispersion von Wasserstoff[1]).

Von Frl. H. J. van Leeuwen.

§ 1. Instabilität nach der klassischen Mechanik, richtige Dispersion. Unter Zugrundelegung des Bohrschen Wasserstoffmoleküls[2]) (zwei Kerne mit Ladung e auf der „Molekülachse", zwei im Äquator, einander gegenüber mit Winkelgeschwindigkeit ω drehende Elektronen, mit Ladung $-e$ und Masse m) hat Debye[3]) eine Dispersionsformel für Wasserstoff abgeleitet, rechnend nach den Vorschriften der klassischen Mechanik. Diese Dispersionsformel stimmt sehr gut mit der Erfahrung, wenn man den bekannten Wert für das Verhältnis von Ladung zu Masse der Elektronen und für das Moment der Bewegungsgröße $\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ einsetzt. Gegen das Debyesche Verfahren muß aber eingewendet werden, daß zwei von den fünf Gliedern seiner Dispersionsformel labilen Bewegungsweisen des Moleküls entsprechen. Eine einfache Rechnung ergibt nämlich, daß die Hauptschwingungen des Systems (wenn man mit Debye die beiden Kerne mit Rücksicht auf ihre relativ so große Masse als unbeweglich annimmt) sind:

a) beide Elektronen bewegen sich parallel der Achse des Moleküls und haben immer entgegengesetzt gleiche Verrückungen, die Frequenz ist $n_a = \pm 0{,}27\,\omega$,

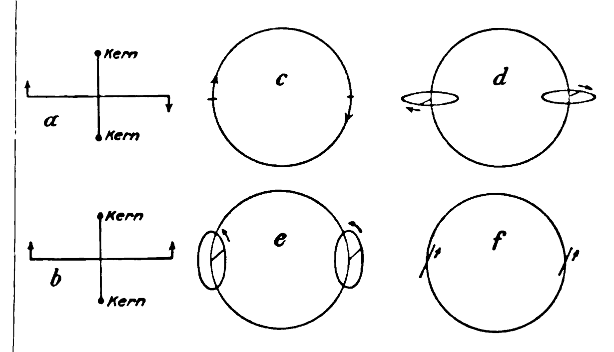
b) beide Elektronen haben gleiche Verrückungen, gleichgerichtet, parallel der Molekülachse, die Frequenz ist $n_b = \pm 0{,}556\,\omega$,

c) beide Elektronen sind über den Kreis im selben Sinne etwas verschoben, dieser Störung gegenüber ist das System natürlich indifferent, $n_c = 0$,

d) beide Elektronen durchlaufen gleiche Ellipsen von derselben Orientierung, die Radiusvektoren sind entgegengesetzt gerichtet, die Frequenz ist $n_d = \pm 1{,}47\,\omega$,

e) beide Elektronen durchlaufen wieder kongruente Ellipsen von gleicher Orientierung, aber mit gleichgerichteten Radiusvektoren, $n_e = \pm 1{,}412\,\omega$,

f) die Verrückungen beider Elektronen sind gleichgerichtet, die Frequenz ist $n_f = \pm 0{,}55\,i\omega$, mit der Frequenz $-0{,}55\,i\omega$ beschreiben die Elektronen die in der Figur gezeichneten geraden Linien, oder mit der Frequenz $+0{,}55\,i\omega$ die damit in bezug auf den Radius im Gleichgewichtszustande symmetrischen, dabei wachsen die Verrückungen exponentiell. Diese Bewegung ist also instabil[1]). Auf alle diese Bewegungen superponiert sich noch die gleichmäßige Rotation.



Bei den Bewegungen a, c, d hat das Molekül kein resultierendes elektrisches Moment, eine äußere elektrische Kraft kann diese Bewegungen nicht anregen und sie liefern also auch keinen Beitrag zur Dispersion. Anders ist es mit den Bewegungen b, e, f. Betrachten wir die Dispersionsformel von Debye in der Form:

---

1) Zusammenfassung der Resultate eines unter dem Titel: „Eenige opmerkingen over het waterstofmolekuul van Bohr-Debye" in den Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam Dl 24, 1047, 1915 erschienenen Artikels, auf den für alle hierher gehörigen Rechnungen verwiesen wird.

2) N. Bohr, On the Constitution of Atoms and Molecules III, Phil. Mag. (6) 26, 857, 1913.

3) P. Debye, Die Konstitution des Wasserstoffmoleküls. Sitz.-Ber. München 1915, 1.

1) Die Instabilität von Systemen, aus zwei Kernen bestehend mit zwischen ihnen rotierendem Elektronenring ist schon von Bohr bemerkt worden, s. N. Bohr, loc. cit.

$$n^2 - 1 = \frac{\mu_1}{1 - \left(\frac{s}{n_b}\right)^2} + \frac{\mu_2}{1 - \left(\frac{s}{n_e - \omega}\right)^2} +$$
$$+ \frac{\mu_3}{1 - \left(\frac{s}{n_e + \omega}\right)^2} + \frac{\mu_4}{\left(\frac{n_f i}{\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{s}{\omega}\right)^2} +$$
$$+ \frac{\mu_5}{\left(\frac{n_f i}{\omega}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\omega}\right)^2}.$$

in der n der Brechungskoeffizient ist,

die μ die Debyeschen Zähler sind, auf deren nähere Struktur es jetzt nicht ankommt,

und s die Frequenz des durchgehenden Lichtbündels ist.

Wir überlegen, daß die periodische elektrische Kraft, die proportional zu $\cos(st + p)$ ist, parallel der Molekülachse eine Komponente gleichfalls mit der Periode $\frac{2\pi}{s}$ hat, parallel den mitrotierenden Achsen im Äquator aber Komponenten proportional zu $\cos(st + p)\cos(\omega t + q)$, die sich aufspalten lassen in Glieder mit Perioden $\frac{2\pi}{s - \omega}$ und $\frac{2\pi}{s + \omega}$.

Das erste Glied deutet also auf Resonanz für $s = n_b$, das zweite und dritte für $s \pm \omega = n_e$, das vierte und fünfte für $s \mp \omega = n_f = 0{,}55 i\omega$, so daß das Pluszeichen zwischen den Quadraten der reellen Größen $\frac{n_f i}{\omega}$ und $1 \mp \frac{s}{\omega}$ in den letzten zwei Nennern der Dispersionsformel die Instabilität, des Moleküls verrät[1]).

(Hierauf machte mich Herr Professor Lorentz aufmerksam.)

Steht das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül unter der Einwirkung einer allzeit ungestörten periodischen elektrischen Kraft (siehe das übliche Verfahren zur Berechnung von Dispersionsformeln), so führt es erzwungene Schwingungen von derselben Periode aus und seine Instabilität tritt dabei noch nicht in Erscheinung. Aber sobald die einfallende Lichtbewegung sich ändert, z. B. aufhört, macht sich die Instabilität sofort geltend: denn im letzten Augenblick sind im Molekül solche Konfigurationen oder Bewegungen der Elektronen vorhanden, daß sich nun die instabile Bewegung (f) frei entwickelt und das Molekül zerstört.

§ 2. Stabilisierung durch Einführung kinematischer Bedingungen liefert mit der Erfahrung schlecht stimmende Dispersion. Man kann sich fragen, ob es möglich ist, das System kinematisch so zu beschränken, daß einerseits die instabile Bewegung f ausgeschlossen wird, andererseits die Dispersionsformel noch befriedigende Übereinstimmung mit der Erfahrung behält. Die Bewegung f allein auszuschließen, ist wohl nicht leicht möglich; denn schreibt man für den Schwerpunkt der Elektronen eine Bahn von der Form e vor, so ist die Homogenität der Gleichungen verloren und man kann die erzwungenen Schwingungen nicht mehr auf die freien superponieren. Wir wollen noch zwei andere vergebliche Versuche in ähnlicher Richtung besprechen.

1. Die Bahn des Schwerpunktes der Elektronen ist die Molekülachse. Man bekommt eine Dispersionsformel:

$$n^2 - 1 = 4\pi N \frac{e^2}{m\omega^2}\left[\frac{2{,}153}{1 - \left(\frac{s}{0{,}556\,\omega}\right)^2}\right],$$

in der N die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit ist.

Nach Einsetzen der Werte:

$$Ne = 1{,}289 \cdot 10^{10}, \quad \frac{e}{m} = 5{,}28 \cdot 10^{17},$$
$$\omega = \frac{(3\sqrt{3} - 1)^2 \pi^3}{2} \cdot \frac{me^4}{h^3}, \quad e = 4{,}69 \cdot 10^{-10},$$
$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27},$$

erhält man:

$$n - 1 = 0{,}53 \cdot 10^{-4} + 0{,}98 \cdot 10^{-37} s^2,$$

während Kochs Beobachtungen lieferten:

$$n - 1 = 1{,}361 \cdot 10^{-4} + 2{,}908 \cdot 10^{-37} s^2,$$

die von C. und M. Cuthberson:

$$n - 1 = 1{,}362 \cdot 10^{-4} + 2{,}780 \cdot 10^{-37} s^2,$$

(und schließlich Debyes Rechnungen:

$$n - 1 = 1{,}58 \cdot 10^{-4} + 3{,}55 \cdot 10^{-37} s^2).$$

Die hier eingeführte Bedingung gibt also einen viel zu kleinen Brechungsindex.

2. Die Elektronen sind nur über einem Kreis mit vorgeschriebenem Radius beweglich; drehen sie in allen Molekülen mit derselben Geschwindigkeit rM über einen Kreis mit gleichem Radius r, so wird die Dispersionsformel:

1) Vgl. als einfaches System ohne Rotation eins, bestehend aus einem materiellen Punkte, abgestoßen mit einer Kraft, proportional zu der Entfernung von dem Koordinatenursprung, mitschwingend mit einer periodischen Kraft: $a\cos st$, also $m\ddot{x} = fx + a\cos st$, f ist positiv. $n = \sqrt{\frac{f}{m}} \cdot i$ ist die Frequenz der freien Schwingungen, $x = \frac{-a\cos st}{m[s^2 + (ni)^2]}$ die Verrückung bei den erzwungenen Schwingungen.

$$n^2 - 1 = \frac{8\pi N e^2}{3m}\left[\frac{1}{\frac{e^2}{4mr^3} - M^2} + \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}e^2}{16mr^3}} + s^2\left\{\frac{\frac{e^2}{4mr^3} + 3M^2}{\left(\frac{e^2}{4mr^3} - M^2\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}e^2}{16mr^3}\right)^2}\right\}\right].$$

Trägt man den Wert für $\frac{e^2}{m}$ ein, so wären noch die Werte von r und M, zwischen denen nur die Beziehung: $mr^2M = \frac{h}{2\pi}$ bestehen muß, nötig, um die Formel mit den empirischen vergleichen zu können. Diese r und M kennen wir aber nicht. Darum rechnen wir umgekehrt und fragen, ob die Werte von r und M, welche die Formel in die Kochsche überführen, der Bedingung $mr^2M = \frac{h}{2\pi}$ genügen. Dies ist nicht der Fall, man findet $mr^2M = \frac{h}{5{,}1}$ also 5,1 statt $2\pi = 6{,}28$.

§ 3. **Bei Stabilität nach dem Bohrschen Kriterium besteht vorläufig unbekannte Dispersion.** Mehr wünschenswert wäre es, die Beschränkung in der Bewegungsfreiheit der Elektronen in Übereinstimmung zu bringen mit der von Bohr für die Atome eingeführten, auf der die Ableitung der Balmerschen Formel beruht, nämlich daß für jedes Elektron die Beziehung:

$$mr^2\dot{\vartheta} = \frac{h}{2\pi} \qquad (1)$$

(r und ϑ sind Polkoordinaten in dem Äquator) auch noch für die gestörte Bewegung erhalten bleiben soll.

Zur Untersuchung der Stabilität wenden wir das von Bohr vorgeschlagene Kriterium, als Ersatz für die Forderungen der klassischen Mechanik, auf dieses Wasserstoffmolekül an. Dieses Kriterium lautet: Das System ist stabil, wenn die Totalenergie des Systems bei der betrachteten Bewegung ein Minimum ist, allen Störungen gegenüber, bei denen das Moment der Bewegungsgröße für jedes Elektron unverändert bleibt.

Wir wollen hiernach die Stabilität des Wasserstoffmoleküls untersuchen, wie Föppl[1]) es für die Atome (Systeme mit einem Kern) gemacht hat. Wir berechnen also die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie; diese Summe läßt sich nach Ersetzung von $\dot{\vartheta}_1$ und $\dot{\vartheta}_2$ durch $\frac{h}{2\pi m r_1^2}$ und $\frac{h}{2\pi m r_2^2}$ (die Indizes unterscheiden die Elektronen) ausdrücken in deren Wert für die ungestörte Bewegung, vermehrt mit einer Anzahl Glieder, die Quadrate der Größen, welche die Abweichungen messen, enthalten, mit positiven Koeffizienten[1]). Das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül genügt also der Stabilitätsbedingung von Bohr.

Will man aber nun die diesem Standpunkte entsprechende Dispersionsformel berechnen, so stößt man auf folgende Schwierigkeit: Man muß dann nämlich berechnen, wie ein System, dem die Bohrsche Momentenrelation (1) auferlegt ist, unter dem Einflusse von äußeren Kräften schwingt, die ohne die Relation jene Momente verändern würden. Die Mechanik lehrt uns noch nicht, wie die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems lauten, denn die Bohrschen Momentenrelationen (1) erinnern wohl an linear homogene kinematische Gleichungen zwischen Geschwindigkeiten (rollen ohne gleiten), aber sie sind nicht homogen und geben dementsprechend (im Gegensatz zu diesen kinematischen Gleichungen) auch keine Relationen zwischen unendlich kleinen Verschiebungen. Man sieht: es bedürfte hier noch neuer Festsetzungen über die Bewegungsgleichungen des Systems und so lange die nicht getroffen sind, läßt sich über die entsprechende Dispersion nichts sagen.

Gerne spreche ich auch hier Herrn Professor Lorentz gegenüber meinen besten Dank aus für die Anregung zu dieser Arbeit.

1) L. Föppl, Über die Stabilität des Bohrschen Atommodelles, diese Zeitschr. **15**, 707, 1914.

1) Höhere Glieder als die quadratischen werden vernachlässigt.

(Eingegangen 3. April 1916.)

Zum Bohrschen Atommodell.

Von M. Wolfke.

Vor kurzem habe ich gezeigt[1]), daß die Anwendung der Bohrschen Strahlungsannahmen auf das Debyesche Wasserstoffmolekül zu der Balmerschen Serie führt. Der Ausdruck für die Balmersche Konstante, der bei dem Bohrschen Atommodell[2])

$$2 \cdot \frac{\pi^2 e^4 m}{h^3} \qquad (1)$$

ist, nimmt dabei für das Molekül folgende Form an:

1) M. Wolfke, diese Zeitschr. **17**, 71, 1916.
2) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **26**, 1, 1913.

$$\frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{8} \cdot \frac{\pi^2 e^4 m}{h^3} = 2{,}2 \cdot \frac{\pi^2 e^4 m}{h^3}, \quad (2)$$

wo e die Ladung des Elektrons, m die Masse des Elektrons und h das Plancksche Wirkungsquantum bedeuten.

Da die Frage nach den Trägern der Serienlinien von prinzipieller Bedeutung ist, so möchte ich in dieser Abhandlung genau untersuchen, welcher von den beiden Ausdrücken (1) und (2) besser mit den neuesten experimentellen Daten übereinstimmt.

Setzt man in die beiden Formeln (1) und (2) die von Riecke benutzten Werte ein[1]), so fällt das Resultat entschieden zugunsten des Moleküls aus[2]). Dieser Schluß ist jedoch durchaus nicht entscheidend, da ein kleiner Zuwachs des unsicheren Wertes von e das Gegenteil ergeben würde. Daraus geht hervor, daß die beiden Ausdrücke in der Form (1) und (2) zur genauen Prüfung dieser Frage nicht geeignet sind. Ich werde jedoch hier zeigen, daß bei einer entsprechenden Umformung der beiden Ausdrücke eine sichere Entscheidung möglich ist.

Vor allem möchte ich darauf hinweisen, daß die Bohrschen Strahlungshypothesen auf dem Boden der Quantentheorie aufgebaut sind und daß man deshalb, wenn man konsequent bleiben will, die Beziehung zwischen dem Wirkungsquantum und dem elektrischen Elementarquantum, die als direktes Ergebnis aus dem Planckschen Strahlungsgesetz folgt[3]), nicht unbeachtet lassen darf, und die beiden Größen h und e als voneinander abhängig betrachten muß.

Wir wollen im folgenden diese Beziehung in den Ausdrücken (1) und (2) einführen.

Bezeichnen wir mit k die Boltzmannsche Konstante, mit R die Gaskonstante und mit E die Ladung eines Grammäquivalentes, so ist:

$$e = \frac{kE}{R}. \quad (3)$$

Die Quantentheorie liefert uns folgende Beziehung[4]):

$$k^4 = \frac{a c^3 h^3}{48 \pi \alpha}, \quad (4)$$

wo a die Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und

$$\alpha = 1{,}0823$$

ist. Die Formeln (3) und (4) ergeben:

$$e^4 = \frac{a c^3 h^3 E^4}{48 \pi \alpha R^4}. \quad (5)$$

Setzt man den Ausdruck (5) in die Formeln (1) und (2) ein, so folgt für das Atom:

$$2 \cdot \frac{\pi c^3}{48\alpha} \cdot \frac{E^4 a m}{R^4} = \frac{\pi c^3}{24\alpha} \cdot \frac{E^4 a e}{R^4 e/m},$$

und für das Molekül:

$$2{,}2 \cdot \frac{\pi c^3}{48\alpha} \cdot \frac{E^4 a m}{R^4} = 1{,}1 \cdot \frac{\pi c^3}{24\alpha} \cdot \frac{E^4 a e}{R^4 e/m}.$$

Der in den obigen Formeln gemeinsame Faktor

$$\frac{\pi c^3}{24\alpha} \cdot \frac{E^4 a e}{R^4 e/m} \quad (6)$$

eignet sich bedeutend besser zu einem quantitativen Vergleich, als die beiden Formeln (1) und (2), da er voneinander unabhängige Größen enthält, und die vierte Potenz nur bei den experimentell sehr genau bestimmten Größen E und R steht.

Um zu einer sicheren Entscheidung zu gelangen, wollen wir aus den bekannten experimentellen Daten auf Grund des Ausdruckes (6) den unteren und den oberen Grenzwert für die Balmersche Konstante sowohl für das Atom, als auch für das Molekül berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir auf Grund der Ergebnisse der neuesten Messungen für jede der im Ausdruck (6) vorkommenden Größen die zulässigen Grenzwerte bestimmen. Wir werden dabei alle Größen im absoluten Maßsystem ausdrücken.

Die Werte von E und R sind sehr genau bekannt. Als Grenzwerte für E setzen wir:

$$2{,}894 \cdot 10^{14} \text{ und } 2{,}896 \cdot 10^{14}$$

und für R:

$$8{,}31 \cdot 10^7 \text{ und } 8{,}32 \cdot 10^7.$$

Was den Wert von e/m betrifft, so stehen die Resultate der neuen Messungen in sehr guter Übereinstimmung miteinander, so daß auch diese Größe in ziemlich enge Grenzen eingeschlossen werden kann[1]). Wir wählen als Grenzwerte:

$5{,}289 \cdot 10^{17}$ (Bucherer 1908)

und

$5{,}328 \cdot 10^{17}$ (Classen 1908).

Der Wert von e ist weniger sicher und deshalb müssen wir für diese Größe möglichst weite Grenzen festsetzen. Jedenfalls läßt sich wohl mit Sicherheit sagen, daß der Wert von e zwischen

1) E. Riecke, diese Zeitschr. **16**, 222, 1915.
2) M. Wolfke, l. c.
3) M. Planck, Vorles. üb. d. Theorie der Wärmestrahlung. 2. Aufl., S. 165—167, 1913.
4) M. Planck, l. c. Formel (287) u. (288), S. 165.

1) Vgl. R. Seeliger, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **9**, 28, 1912; A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. (4) **37**, 597, 1912 u. Cl. Schaefer, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 935, 1913.



$4,65 \cdot 10^{-10}$ (Rutherford u. Geiger)
und

$$4,85 \cdot 10^{-10}$$

liegen muß[1]).

Auch die Resultate der Messungen der Strahlungskonstante a gehen weit auseinander[2]), so daß wir folgende zwei weit voneinander liegende Grenzwerte setzen müssen:

$7,41 \cdot 10^{-15}$ (kleiner als der von Westphal 1913)
und

$8,20 \cdot 10^{-15}$ (Puccianti 1912).

Um die untere Grenze des Ausdruckes (6) zu berechnen, setzen wir im Zähler die unteren und im Nenner die oberen Grenzwerte der einzelnen Größen ein. Für die obere Grenze gilt das Gegenteil.

Die Rechnung ergibt alsdann, daß nach der Bohrschen Theorie die Balmersche Konstante für das Wasserstoffatom zwischen den Werten

$$3,09 \cdot 10^{15} \text{ und } 3,62 \cdot 10^{15}$$

und für das Wasserstoffmolekül zwischen

$$3,40 \cdot 10^{15} \text{ und } 3,98 \cdot 10^{15}$$

liegen muß.

Der experimentelle Wert der Balmerschen Konstante ist

$$3,29 \cdot 10^{15}.$$

Wir sehen also, daß der experimentelle Wert durchaus in dem von der Theorie für das Atom geforderten Intervall liegt. Die Werte, die dem Molekül entsprechen, sind dagegen viel zu groß, so daß sogar der kleinste mehr als um 3 Proz. zu groß ist.

Aus dieser Betrachtung folgt mit Sicherheit, daß der Bohrsche Ausdruck für die Balmersche Konstante mit den heute bekannten zulässigen experimentellen Daten in vorzüglicher Übereinstimmung steht.

Das Molekül dagegen gibt durchwegs zu große Werte, deren Abweichungen sicher außerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtungen liegen.

Das entgegengesetzte Resultat, zu dem ich in meiner früheren Mitteilung gelangte, erklärt sich dadurch, daß ich ähnlich wie Riecke und andere den Zusammenhang zwischen e und h bei der Rechnung nicht berücksichtigt habe.

Betrachtet man den Bohrschen Ausdruck für die Balmersche Konstante als genau gültig, dann läßt sich aus ihm und dem experimentellen Wert der Balmerschen Konstante die Strahlungskonstante berechnen. Setzen wir zu diesem Zweck:

$E = 2,895 \cdot 10^{14}$, $R = 8,315 \cdot 10^{7}$, $e/m = 5,32 \cdot 10^{17}$, und für e den letzten Millikanschen Wert[1]);

$$e = 4,774 \cdot 10^{-10},$$

so folgt für die Strahlungskonstante:

$$a = 7,62 \cdot 10^{-15},$$

eine Größe, die sich sehr gut zwischen die neuesten experimentellen Werte

$7,56 \cdot 10^{-15}$ (Shakespear 1912)
$7,87 \cdot 10^{-15}$ (Gerlach 1912)
$7,85 \cdot 10^{-15}$ (Keene 1913)

einreiht[2]).

Aus der Gleichung (5) folgt alsdann für das Plancksche Wirkungsquantum

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27}.$$

Zürich, April 1916.

(Eingegangen 12. April 1916.)

1) Vgl. R. Pohl, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **8**, 406, 1911 u. Millikan, diese Zeitschr. **14**, 796, 1913.

2) Vgl. W. W. Coblentz, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **10**, 340, 1913 u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. (4) **41**, 113, 1913.

1) Millikan, l. c. Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem neuesten Resultat $4,764 \cdot 10^{-10}$ von J. Y. Lee, Phys. Rev. (2) **4**, 420, 1914.

2) Zu ähnlichem ($7,61 \cdot 10^{-15}$) Schlußwert gelangt W. W. Coblentz in seinem Bericht (l. c. S. 367).

Ein fahrbarer Laboratoriumstisch für die Gaedesche Molekularluftpumpe.

Von Heinrich Hörig[1]).

(Mit Tafel V.)

Wer mit der Molekularluftpumpe von Gaede, hergestellt von E. Leybolds Nachfolger, Cöln a. Rh., gearbeitet hat, wird wissen, daß sorgfältige, erschütterungssichere Aufstellung sehr wichtig ist — von Leybold wird sogar, wo angängig, feste Montierung auf Steinsockel empfohlen. Infolge der ungemein hohen Leistungsfähigkeit der Pumpe wird man sie aber, namentlich in größeren Instituten, gern öfters in verschiedenen Arbeitszimmern benutzen, vielleicht, wozu sie ja prädestiniert erscheint, die Maschine auch bei Vorlesungen verwenden wollen. Auf solche Verhältnisse Rücksicht nehmend, habe ich einen fahrbaren eisernen Tisch konstruiert, dessen Herstellung an Hand der hier mitzuteilenden Zeichnungen wohl ohne weiteres in jeder Physikalischen Institutswerkstätte möglich sein dürfte. Die verwendeten Profileisenstücke kann man fertig geschnitten beziehen, die drei Schrauben, welche die Entlastung der Räder bewirken, wenn wirklich nicht

1) Die Mittel für die Anschaffung der Pumpe und Herstellung der Fahrtische verdanken wir der Robert Bosch-Stiftung.

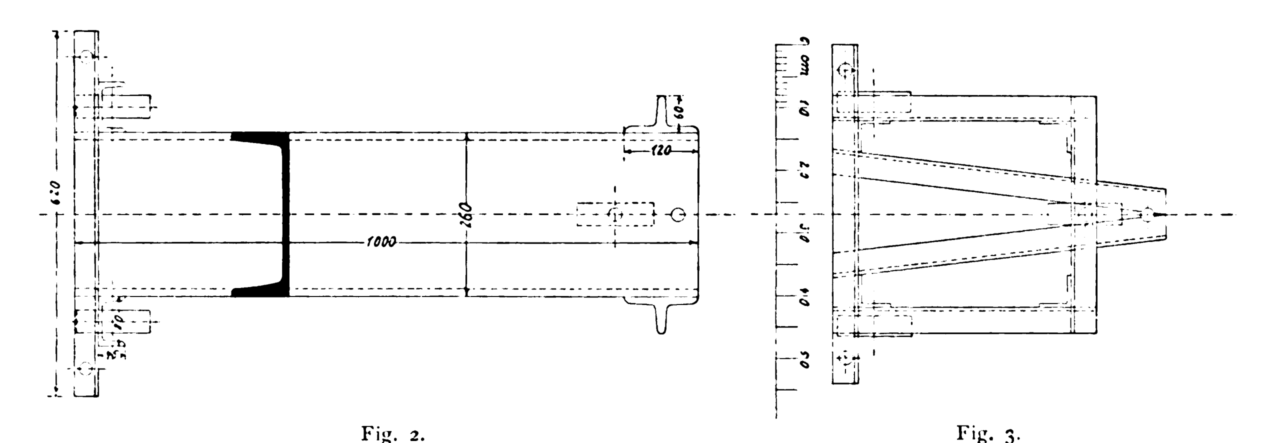


Fig. 2. Fig. 3.

herstellbar, in jeder Maschinenfabrik anfertigen lassen. — Der Fig. 1 (Tafel V), welche den Tisch in Grund-Auf- und Seitenriß zeigt, mag erläuternd noch einiges hinzugefügt werden.

Die vertikalen mit drei bequemen „Handrädern" versehenen 25 mm starken Eisenstangen laufen mit einzölligem (scharfgängigem) Gewinde in den drei aus Stahlguß[1]) hergestellten „Füßen", welche an ihrem zylindrischen Ende zwecks seitlicher Zusammenklemmung aufgesägt sind. Die Gewindelänge der Spindeln beträgt 220 mm. Durch diese Anordnung wird erreicht, daß man die Laufräder (technische Hartholzrollen mit Eisenfassung) nicht nur entlasten, sondern maximal etwa 100 mm über den Boden heben kann. Dies ist für das Experimentieren sehr vorteilhaft, namentlich beim Glasblasen, und gestattet auch die Pumpe durch Senken von einer Anordnung zu trennen, die man nicht abzubrechen wünscht. Die Achse für die beiden Hinterräder ist von unten in Schlitze der beiden vertikalen Winkeleisen gesetzt. Das vordere Rad läuft in einer geschmiedeten Gabel, deren Lenkachse oben mit einem abnehmbaren (Gabel und Stift) Handgriff versehen ist. Durch Stifte unterhalb der Platte wird der Spielraum der Drehung auf etwa 240° begrenzt. Der Handgriff streicht auch in Fahrstellung, ohne zu berühren, über die vordere Entlastungsstange. — Die verwendeten Profile sind: obere und untere Platte: $260 \times 90 \times 10{,}5$ mm; vertikal: $50 \times 50 \times 7$; horizontal und große Diagonalen: $40 \times 40 \times 6$ beziehentlich unten senkrecht der Längsachse des Tisches: $60 \times 40 \times 6$; kleine Diagonalen: $28 \times 17 \times 3{,}5$.

Der Verband ist überall mit blanken *halbzölligen Schrauben* (nur an einigen, leicht ersichtlichen Stellen sind $^3/_8$zöllige benutzt) bewirkt, was für Laboratoriumsgebrauch einer Nietung unbedingt vorzuziehen ist. — Die obere Platte ist gehobelt. Sie besitzt drei Schlitze von 10 bzw. 30 mm Weite, welche die zur Riemenspannung erforderliche Bewegung einer 10 mm starken, als Grundplatte für den Motor bestimmten Eisenplatte beziehentlich deren Feststellung bewirken lassen.

Die unterhalb der Platte befindliche Schraube hat halbzölliges Gewinde und besitzt einen an der Hinterseite des Tisches leicht zugänglichen Kopf (30×30), der sich dank einer kräftigen Fräsung am Umfange leicht von Hand drehen läßt. Die Entlastungsstangen sind am oberen Ende noch mit je einer Flügelmutterklemme versehen, die ein Klirren beim Betrieb unmöglich macht — doch sei hier bemerkt, daß infolge der *schweren* und *statisch bestimmten* Konstruktion auch bei voller Tourenzahl fast keine Vibration zu bemerken ist[1]) — auch beim Anlassen zeigen sich keinerlei Resonanzen. — Unterhalb der Ölablaßschrauben sowie der roten Schraube der Pumpe sind 25 mm weite Löcher in der Platte vorgesehen, um ein bequemes Ablassen des Öles beziehentlich Benzins zu ermöglichen. Die Anordnung des Anlaßwiderstandes, Schalters usw. bleibt selbstverständlich dem Geschmacke überlassen; ich habe auf der großen Diagonale an der Riemenseite einen Schieberwiderstand und daran anschließend in der oberen Ecke Schalter und Steckdose angebracht. *Auf der unteren U-Platte kann mit Vorteil die Gaedesche Kapselpumpe aufgestellt werden*, so daß dann die ganze Anlage auf relativ geringem Raum zusammengestellt ist. Es ist auch leicht möglich, den jeweiligen Bedürfnissen entsprechend Bohrungen zum Einsetzen von Stativstangen vorzusehen, was für Demonstrationsexperimente von Nutzen sein kann. Zweckmäßig montiert man auch eine Wasserwage.

1) Oder aus gewöhnlichem Maschinenguß.

1) Der Motor ist zur Vermeidung axialen Stoßes mit Kugellagern gewählt worden.

Etwas schlanker kann man die Konstruktion gestalten, wenn man von dem in Fig. 2 skizzierten Grundrisse ausgeht. In diesem Falle dürfte man auch ohne Diagonalen auskommen. Der Einfachheit halber habe ich das Modell, welches ich für das hiesige Institut konstruiert habe, hier genau wiedergegeben. — Ein analog gebautes, aber bedeutend leichteres Fahrgestell habe ich für die Gaedesche Quecksilberpumpe, für deren Transport ja bekanntlich ein Fahrtisch recht erwünscht ist, bauen lassen. Eine Skizze vom Grundriß zeigt Fig. 3. Der Motor sitzt in diesem Falle unter der Pumpe. Trotz der relativ geringen Entfernung der Laufrollen zeigt sich der Tisch durchaus stabil fahrend.

Endlich darf vielleicht noch darauf hingewiesen werden, daß dieser Molekularpumpenfahrtisch, nötigenfalls in passend geänderter Form, für recht viele Laboratoriumsbedürfnisse verwendet werden kann.

Herrn Professor Dr. K. R. v. Koch danke ich herzlich für sein bereitwilliges Eingehen auf meine Vorschläge.

Stuttgart, Physikal. Institut der Königl. Techn. Hochschule, 8. April 1916.

(Eingegangen 9. April 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über die Dimensionen physikalischer Größen.

Von C. Runge.

§ 1.

Der Begriff der Dimension einer physikalischen Größe und die Erkenntnis, daß eine physikalische Gleichung einen Irrtum enthält, wenn ihre Terme „in den Dimensionen nicht übereinstimmen", stammt von Fourier, der den Gegenstand in der IX. Sektion des 2. Kapitels seiner Theorie der Wärme ausführlich auseinandergesetzt hat. Seitdem bildet er eine Grundlage aller physikalischen Bildung.

Fourier erläutert seine Dimensionsbetrachtungen an der von ihm aufgestellten Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} - \frac{K}{CD}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{hl}{CDs}v = 0$$

der Wärmeleitung in einem Stabe von konstantem Querschnitt und konstantem Querschnittsumfang. Dabei mißt x die Längsausdehnung des Stabes, s den Querschnitt, l den Umfang, v die Temperaturdifferenz gegen die Umgebung, C die Wärmekapazität, D die Dichte, K die innere Leitfähigkeit, h die Leitfähigkeit der Oberfläche, t die Zeit. Die Einheiten der Länge, Masse, Zeit, Temperatur und Wärmemenge werden dabei unabhängig voneinander angenommen. Fourier gibt nun in einer Tabelle an, wie sich die in der Gleichung vorkommenden Maßzahlen ändern, wenn man die Einheiten der Länge, der Zeit und der Temperatur ändert. Die Tabelle lautet so:

	Länge	Zeit	Temperatur
x	1	0	0
t	0	1	0
v	0	0	1
K	−1	−1	−1
h	−2	−1	−1
D	−3	0	0
C	0	0	−1

Sie ist so zu verstehen, daß sich z. B. die Maßzahl D in $n^{-3}D$ verwandelt, wenn durch Änderung der Längeneinheit die Maßzahl einer Länge in das n-fache verwandelt wird (d. h. durch Reduktion der Längeneinheit auf $1/n$). In der Tabelle sind die Kolonnen für die Einheit der Masse und der Wärmemenge nicht mit aufgeführt, offenbar, weil die Wahl der Masseneinheit nur die Maßzahlen C und D beeinflußt und auch diese nur so, daß CD ungeändert bleibt, und weil die Einheit der Wärmemenge nur die Maßzahlen h, K und C beeinflußt und auch diese nur so, daß $\frac{h}{C}$ und $\frac{K}{C}$ ungeändert bleibt. Die Dimensionen von l und s sind auch als selbstverständlich weggelassen. Heute würden wir in einer meines Wissens von Maxwell herrührenden Bezeichnung z. B. sagen die Dimension der Dichte sei $[L^{-3}M]$.

Die Exponenten von L und M sind dabei die in Fouriers Tabelle angegebenen Zahlen, wenn man sich eine Kolonne für die Masse hinzugefügt denkt. Die Prüfung seiner Wärmeleitungsgleichung nimmt Fourier nun in der Weise vor, daß er einzeln die vorkommenden Einheiten sich geändert denkt. Wird z. B. die Längeneinheit auf $1/n$ reduziert, so bleibt der erste Term $\frac{dv}{dt}$ unbeeinflußt, in dem zweiten und dritten Term ändern sich K, D, dx, h, l, s und gehen in $n^{-1}K$, $n^{-3}D$, ndx, $n^{-2}h$, nl, n^2s über, derart, daß auch der zweite und dritte Term wie der erste nicht von der Längeneinheit abhängen. Führt man auch für die andern Einheiten die Betrachtung durch, so zeigt sich, daß alle drei „dieselbe Dimension" haben, nämlich die Dimension „Temperatur durch Zeit". Wäre dies Kriterium nicht erfüllt, hätte z. B. der erste Term eine andere Dimension als die andern beiden, so könnte er nicht von Null verschieden sein.

Denn man könnte sonst durch passende Wahl der Einheiten seinen Wert relativ zu dem Werte der Summe der beiden andern Terme ändern, was der Gleichung widerspricht.

Besitzt eine Gleichung mehr als drei Terme, so wäre der Fall möglich, daß eine Gruppe von ihnen eine andere Dimension hätte als die übrigen. Dann müßte diese Gruppe für sich Null sein und die Gleichung müßte sich in ebensoviel Gleichungen spalten lassen als Gruppen von verschiedener Dimension gebildet werden können. Mit dieser Einschränkung auf Gleichungen, die nicht in zwei oder mehr zerfallen, kann man also sagen, daß sie aus Termen gleicher Dimension bestehen müssen.

§ 2.

Fourier hat seine Dimensionsbetrachtungen, wie es scheint, nur zur Kontrolle physikalischer Gleichungen angewendet. Es gibt aber noch eine andere nicht minder wichtige Verwendungsmöglichkeit, nämlich, um die Form der Abhängigkeit physikalischer Größen zu untersuchen. Nimmt man als bekannt an, daß eine physikalische Größe durch gewisse andere bestimmt ist, so kann man aus der Kenntnis ihrer Dimensionen die Form der Gleichung erschließen, die zwischen ihren Maßzahlen besteht. Dies möge an einigen Beispielen erläutert werden.

1. Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels für unendlich kleine Schwingungen ist durch die Pendellänge und die Erdbeschleunigung bestimmt. T, l und g seien die Maßzahlen dieser drei Größen. Die Erdbeschleunigung wird durch die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit gemessen und hat mithin die Dimension Geschwindigkeit durch Zeit oder $[LT^{-2}]$ nach Maxwells Bezeichnungsweise. Mithin hat g dieselbe Dimension wie $\frac{l}{T^2}$ oder $\frac{gT^2}{l}$ ist dimensionslos, d. h. der Wert von $\frac{gT^2}{l}$ ist von den beiden zugrunde liegenden voneinander unabhängigen Einheiten der Länge und der Zeit unabhängig. Wäre es nicht möglich, aus T, l, g eine dimensionslose Kombination zu bilden, so wäre keine Gleichung möglich, die nur diese drei Größen enthielte, weil man dann durch geeignete Wahl der Einheiten den Maßzahlen T, l, g unabhängig voneinander beliebige Werte geben könnte.

Die Gleichung zwischen T, g, l werde zunächst in der allgemeinen Form

$$T = f(l, g)$$

geschrieben. Statt T führen wir auf der linken Seite die dimensionslose Größe $\sqrt{\frac{g}{l}}\,T$ ein und schreiben

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = \sqrt{\frac{g}{l}}\,f(l, g) = \varphi(l, g).$$

Jetzt denken wir uns die physikalischen Größen festgehalten, aber die Einheit der Zeit geändert. Dann ändert sich g, während $\varphi(l, g)$ ungeändert bleibt, weil es einer dimensionslosen Größe gleich ist. Folglich ist $\varphi(l, g)$ von g unabhängig. Wir können also g auf der rechten Seite weglassen und $\varphi(l)$ dafür schreiben. Andererseits ändern wir die Längeneinheit. Dann ändert sich l, während $\varphi(l)$ ungeändert bleibt. Folglich ist $\varphi(l)$ von l unabhängig. Mit andern Worten: die rechte Seite ist eine von den zugrunde gelegten Einheiten unabhängige absolute Zahl. Daß ihr Wert gleich 2π ist (unter T die volle Schwingungsdauer verstanden), läßt sich allerdings durch Dimensionsbetrachtungen allein nicht beweisen. Aber wir gewinnen doch so viel, daß die Messung von T, l, g für ein spezielles Pendel in einem speziellen Schwerefeld den Wert von $\sqrt{\frac{g}{l}}\,T$ für alle Pendel und alle Schwerefelder festlegen würde.

Das Wesentliche bei dieser Überlegung ist erstens, daß T eine Funktion von l und g ist[1]), zweitens daß l und g durch bloße Änderung der Einheiten beliebige Werte bekommen können oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß aus l und g allein keine dimensionslose Kombination gebildet werden kann.

Es möge ein zweites Beispiel besprochen werden, wo es sich auch um eine Abhängigkeit zwischen drei Größen handelt, wo aber die zweite Voraussetzung nicht erfüllt ist.

2. Auf einer Kugel von gegebenen Volumen sei ein Kreis mit einem gegebenen sphärischen Radius gezogen. Dann ist die sphärische Fläche dieses Kreises durch das Volumen der Kugel und den sphärischen Radius bestimmt. Die Maßzahlen seien F, V, R. Die erste Voraussetzung ist, daß

$$F = f(V, R).$$

Wir dividieren durch R^2, um auf der linken Seite eine dimensionslose Größe zu erhalten

$$\frac{F}{R^2} = \frac{1}{R^2} f(V, R) = \varphi(V, R).$$

Jetzt sind aber V und R durch bloße Änderung der Einheiten nicht unabhängig voneinander veränderlich. Es läßt sich die dimensions-

1) Daraus ergibt sich, daß aus T, g, l eine dimensionslose Kombination gebildet werden kann.

lose Kombination $\frac{V}{R^3}$ bilden. Wir setzen $\frac{V}{R^3} = u$ und schreiben

$$\frac{F}{R^2} = \varphi(u R^3, R) = \psi(u, R).$$

Ändern wir die Einheiten, so bleiben $\frac{F}{R^2}$ und u ungeändert und nur R ändert sich. Mithin ist $\psi(u,R)$ von R unabhängig und wir können $\psi(u)$ dafür schreiben; aber von u bleibt es abhängig. Das Resultat ist also

$$\frac{F}{R^2} = \psi\left(\frac{V}{R^3}\right).$$

Die eine dimensionslose Größe $\frac{F}{R^2}$ ist eine Funktion der andern dimensionslosen Größe $\frac{V}{R^3}$. Die Beschaffenheit der Funktion ψ läßt sich durch bloße Dimensionsbetrachtungen nicht weiter ergründen. Aber so viel ist doch gewonnen, daß nur eine Funktion einer Veränderlichen unbekannt bleibt. Wir könnten z. B. durch Messung von F für eine Reihe von Werten von R auf einer einzigen Kugel den Verlauf der Funktion $\psi(u)$ experimentell ermitteln; dann würde der Zusammenhang von F, R und V auch für jede beliebige andere Kugel damit gefunden sein.

Eine elementare Rechnung zeigt, daß

$$\psi(u) = \pi \cdot \left(\frac{\sin \sqrt[3]{\frac{\pi}{6u}}}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6u}}}\right)^2.$$

In diesem Falle ist also von den 3 Maßzahlen F, R, V, wenn die physikalischen Größen selbst festgehalten werden, nur eine beliebig veränderlich, weil nur eine Einheit willkürlich bleibt. Die andern beiden Maßzahlen sind dann durch die dimensionslosen Kombinationen aus ihr abzuleiten. Welche von den 3 Maßzahlen man als unabhängige wählt, das führt nur zu formalen Unterschieden.

Andere Beispiele:

3. Eine Masse wird an einem Faden von gegebener Länge im Kreise mit gegebener Geschwindigkeit herumgeschleudert. Dann ist die Spannung des Fadens bestimmt. Die Maßzahlen seien m, l, v, k. Werden die Einheiten der Masse, Länge und Geschwindigkeit unabhängig voneinander angenommen, so sind bei festgehaltenen physikalischen Größen die Maßzahlen m, l, v beliebig. Die Einheit der Kraft ist aber dann nicht mehr beliebig. k hat dieselbe Dimension wie $\frac{mv^2}{l}$ oder $\frac{kl}{mv^2}$ ist dimensionslos. Der Zusammenhang der vier Größen muß in der Form

$$\frac{kl}{mv^2} = \varphi(m, l, v)$$

darstellbar sein. Da aber m, l, v keine dimensionslose Kombination liefern, so muß die rechte Seite eine von m, l, v unabhängige Zahl sein. In der Tat ist

$$\frac{kl}{mv^2} = 1.$$

4. Ein Planet bewege sich im Kreise um eine Sonne von gegebener Masse. Seine Masse sei so klein, daß die Sonne nicht merklich bewegt wird. Seine Umlaufszeit ist gegeben, wenn die Sonnenmasse, der Radius des Kreises und die Gravitation gegeben ist. Die Maßzahl der Gravitation wird durch die Kraft bestimmt, die zwei Massen von der Größe 1 in der Einheit der Entfernung aufeinander ausüben. Die Maßzahlen der 4 Größen seien T, M, R, k. Die Einheiten, auf die sich die ersten drei Maßzahlen beziehen, sind unabhängig voneinander. Die Kraft, mit der sich zwei Massen anziehen, sei dem Produkt der beiden Massen und der $-\lambda^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung proportional. Dann hat $kM^2 \cdot R^{-\lambda}$ die Dimension einer Kraft und demnach ist

$$\frac{kM^2R^{-\lambda}}{MRT^{-2}} = \frac{kT^2M}{R^{\lambda+1}}$$

dimensionslos. Da zwischen den vier Maßzahlen keine andere dimensionslose Kombination möglich ist, so muß $\frac{kT^2M}{R^{\lambda+1}}$ eine reine Zahl sein. Die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Planeten um dieselbe Sonne verhalten sich demnach wie die $\lambda+1^{\text{ten}}$ Potenzen der Entfernungen, wenn die Anziehungskraft der λ^{ten} Potenz umgekehrt proportional ist.

5. Ein Körper bewege sich parallel mit sich durch eine inkompressible Flüssigkeit. Die Richtung der Bewegung und die Gestalt des Körpers möge vorgeschrieben sein bis auf den Maßstab, in dem er ausgeführt ist. Um den Maßstab zu bestimmen, möge das Volumen des Körpers betrachtet werden. Der Widerstand, den ein Körper von dieser Gestalt bei seiner Bewegung erfährt, ist bestimmt, wenn gegeben ist sein Volumen, seine Geschwindigkeit, die Dichte und der Reibungskoeffizient der Flüssigkeit. Die Maßzahlen dieser fünf Größen seien W, V, v, ϱ, μ.

Soll es möglich sein, W als Funktion der übrigen vier Maßzahlen durch eine physikalische

Gleichung darzustellen, so muß die Einheit, auf die sich W bezieht, auf die der anderen zurückführbar sein, d. h. es muß aus V, v, ϱ, μ mindestens eine Kombination hergestellt werden können, deren Dimension gleich der von W ist. Das ist in der Tat der Fall. W hat die Dimension einer Kraft, also $W\sqrt[3]{V}$ die Dimension einer Energie. Andererseits hat auch $\varrho v^2 V$ die Dimension einer Energie. Mithin hat $\varrho v^2 V^{2/3}$ dieselbe Dimension wie W oder

$$\frac{W}{\varrho v^2 V^{2/3}}$$

ist dimensionslos. Diese dimensionslose Größe müßte also ebenfalls eine Funktion von $\varrho, v V, \mu$ sein. Bestünde nun zwischen den Einheiten dieser vier Maßzahlen keine weitere Abhängigkeit, so könnte man den vier Maßzahlen beliebige Werte geben, ohne die physikalischen Größen selbst zu ändern. Dabei aber ändert sich die linke Seite der Gleichung nicht, weil sie als dimensionslose Größe von den gewählten Einheiten ganz unabhängig ist. Mithin könnte sich auch die rechte Seite nicht ändern und müßte daher eine absolute Zahl sein. Das nächste muß also sein, zu untersuchen, ob die Einheiten von ϱ, v, V, μ voneinander unabhängig sind. Wenn wir die Einheit der Länge beliebig annehmen, so ist V beliebig, wenn außerdem die Einheit der Zeit beliebig bleibt, so ist auch v beliebig, und wenn dazu noch über die Einheit der Masse verfügt werden kann, so ist auch noch ϱ beliebig. Dann ist aber μ nicht mehr beliebig. Denn der Reibungskoeffizient μ wird gemessen durch die Schubspannung, die in einer Ebene durch die Reibung der Flüssigkeit entsteht, wenn senkrecht zu der Ebene ein Geschwindigkeitsgefälle 1 herrscht. D. h. μ hat die Dimension Kraft durch das Produkt Fläche mal Geschwindigkeitsgefälle oder was dasselbe ist, Energie durch Fläche mal Geschwindigkeit; μ hat dieselbe Dimension wie

$$\frac{\varrho v^2 V}{V^{2/3} v} \text{ oder } \varrho v V^{1/3}.$$

Mithin ist der Ausdruck

$$\frac{\varrho v V^{1/3}}{\mu},$$

den wir mit dem Buchstaben R bezeichnen wollen, dimensionslos. Diese dimensionslose Größe R denken wir uns auf der rechten Seite anstatt μ eingeführt, indem wir

$$\mu = \frac{\varrho v V^{1/3}}{R}$$

setzen. Sie wird die Reynoldsche Zahl genannt. Die rechte Seite wird dann eine Funktion der Reynoldschen Zahl und der Maßzahlen ϱ, v, V. Nun aber können ϱ, v, V durch passende Wahl der Einheiten beliebige Werte annehmen, ohne daß die physikalischen Größen sich ändern. Dabei bleiben auch die dimensionslosen Größen ungeändert. Mithin muß die rechte Seite von ϱ, v, V ganz unabhängig und nur eine Funktion der Reynoldschen Zahl sein, d. h. es ist

$$\frac{W}{\varrho \cdot v \cdot V^{2/3}} = f\left(\frac{\varrho v V^{1/3}}{\mu}\right).$$

Über die Natur der Funktion f kann man durch bloße Dimensionsbetrachtungen nichts aussagen. Indessen ergeben sich physikalische Gesichtspunkte, die einen gewissen Verlauf der Funktion wahrscheinlich erscheinen lassen. Z. B. wird man annehmen können, daß der Widerstand, wenn die Reibung sehr klein ist, sich nicht mehr wesentlich ändern wird, wenn man die Reibung noch kleiner werden läßt. Mit andern Worten, die Funktion f wird sich für große Argumente einer konstanten Zahl nähern, was in der Tat durch die Versuche bestätigt wird. Für kleine Argumente dagegen spielt die Reibung eine wesentliche Rolle. Die Funktion f wird also für kleine Werte der Reynoldschen Zahl sehr wesentlich von ihr abhängen, und da der Widerstand mit μ zugleich beliebig groß werden muß, so ist die nächstliegende Annahme die, daß die Funktion f für kleine Werte der Reynoldschen Zahl ihr umgekehrt proportional ist

$$\frac{W}{\varrho v^2 V^{2/3}} = \text{const.} \frac{\mu}{\varrho v V^{1/3}}$$

$$\left(\text{für kleine Werte von } \frac{\varrho v V^{1/3}}{\mu}\right)$$

oder

$$W = \text{const.}\, \mu v V^{1/3}.$$

Mit andern Worten, der Widerstand ist für große Geschwindigkeiten dem Quadrat der Geschwindigkeit und der ersten Potenz der Dichte proportional und unabhängig von dem Reibungskoeffizienten, für kleine Geschwindigkeiten ist dagegen der Widerstand der Geschwindigkeit direkt proportional und bei gleichem Reibungskoeffizient unabhängig von der Dichte. Und was die Abhängigkeit vom Maßstab anbelangt, so ist der Widerstand bei hohen Geschwindigkeiten dem Quadrat der linearen Dimension, bei kleinen Geschwindigkeiten der linearen Dimension selbst proportional.

Wird die Flüssigkeit als kompressibel angenommen, so tritt zu den vier physikalischen Größen, von denen der Widerstand abhängt, noch die Kompressibilität hinzu.

Es möge $\frac{d\varrho}{dp}$ als Maßzahl der Kompressibilität angesehen werden, wo p die Maßzahl des Druckes bedeutet. Für nicht zu große Dichtigkeitsänderungen ist $\frac{d\varrho}{dp}$ als konstant zu betrachten. Die Dimension von $\frac{d\varrho}{dp}$ ist gleich der von v^{-2} [1]). Unter den fünf Größen

$$\varrho, V, v, \mu, \frac{d\varrho}{dp}$$

sind nun zwei dimensionslose Kombinationen; denn außer

$$\frac{\varrho v V^{1/3}}{\mu} \text{ ist auch } \frac{d\varrho}{dp} v^2$$

dimensionslos. Wenn wir nun diese beiden dimensionslosen Größen als Variable an Stelle von μ und $\frac{d\varrho}{dp}$ einführen und beachten, daß wieder durch Änderung der Einheiten ϱ, V, v beliebige Werte annehmen können, ohne daß sich die physikalischen Größen selbst ändern, so erkennen wir, daß die Beziehung zwischen den betrachteten physikalischen Größen die Form hat

$$\frac{W}{\varrho V^{2/3} v^2} = f\left(\frac{\varrho v V^{1/3}}{\mu}, \frac{d\varrho}{dp} v^2\right).$$

Ist $\frac{d\varrho}{dp} v^2$ klein, d. h. ist die Bewegungsgeschwindigkeit nur ein kleiner Bruchteil der Schallgeschwindigkeit, so wird die rechte Seite nur wenig geändert, wenn man für das zweite Argument der Funktion Null einsetzt. Damit erhält man dieselbe Formel, wie für eine inkompressible Flüssigkeit. Nähert sich dagegen die Geschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit, so wird die Gleichung wesentlich anders.

Der Körper bewege sich in einem Gase mit Geschwindigkeiten, die klein gegen die Schallgeschwindigkeit sind, so daß wir das Gas als inkompressibel betrachten können; aber die lineare Ausdehnung des Körpers werde so klein, daß das Gas nicht mehr als kontinuierliche Flüssigkeit angesehen werden kann. Dann werden wir in erster Linie anzunehmen haben, daß die freie Weglänge des Gases den Widerstand beeinflussen wird. Sei λ die Maßzahl der freien Weglänge. Da $\frac{\lambda}{V^{1/3}}$ dimensionslos ist, so ergibt sich nach derselben Schlußweise wie oben

$$\frac{W}{\varrho v^2 V^{2/3}} = f\left(\frac{\varrho v V^{1/3}}{\mu}, \frac{\lambda}{V^{1/3}}\right),$$

oder wenn wir die Funktion f für kleine Werte der **Reynoldschen** Zahl ihr umgekehrt proportional setzen

$$W = \mu v V^{1/3} \varphi\left(\frac{\lambda}{V^{1/3}}\right)^{1)}.$$

6. Die Energie, die die Oberfläche eines schwarzen Körpers in der Form von Licht- und Wärmewellen ausstrahlt, ist für jede Schwingungszahl bestimmt, wenn seine Temperatur gegeben ist. Es möge versucht werden, durch Dimensionsbetrachtungen etwas über die Form der Abhängigkeit zu ermitteln. Es sei $u d\nu$ die Maßzahl der von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit ausgestrahlten Energie, soweit die Schwingungszahl der Strahlen in dem Intervall ν bis $\nu + d\nu$ liegt, wo ν die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit bedeutet. ϑ sei die Maßzahl der absoluten Temperatur. Soll die Temperatur unter den Veränderlichen vorkommen, so muß die Einheit, auf die sich ihre Maßzahl bezieht, mindestens mit einer der übrigen Einheiten in Beziehung stehen. Das ist möglich, wenn wir als Thermometer die Ausdehnung eines Gases in sehr hoher Verdünnung anwenden. Ist p die Maßzahl des Druckes, v die des Volumens des Gases, so ist nach der kinetischen Gastheorie $\frac{3}{2} p v$ die translatorische kinetische Energie. Sei N die Zahl der Moleküle, so ist

$$\frac{p v}{N}$$

gleich der Maßzahl von $\frac{2}{3}$ der mittleren translatorischen kinetischen Energie eines Moleküls. Diese Größe werde als Maßzahl der absoluten Temperatur benutzt und mit ϑ bezeichnet. Sie ist von der Natur und von der Menge des Gases unabhängig, weil bei zwei Gasen von gleicher Temperatur die mittlere translatorische Energie des Moleküls die gleiche ist. Die Dimension von ϑ ist die einer Energie.

Wir wollen nun zunächst annehmen, die in einem Spektralintervall ausgestrahlte Energie sei allein von der Schwingungszahl, der Lichtgeschwindigkeit und der als Energie gemessenen absoluten Temperatur abhängig. Es müßte dann die Maßzahl u durch ν und ϑ und die Maßzahl c der Lichtgeschwindigkeit ausdrückbar sein. Zu dem Ende müßte aus ν, ϑ und c eine Kombination gebildet werden können von der

1) In der Tat ist ja $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ nichts anderes als die Schallgeschwindigkeit.

1) Für die Kugel hat E. **Cunningham** eine Formel abgeleitet, bei der φ eine lineare Funktion seines Arguments ist. Das würde auch für andere Formen anzunehmen sich empfehlen.

gleichen Dimension wie u. $u d\nu$ hat die Dimension einer Energie durch das Produkt einer Fläche und einer Zeit. ν hat die Dimension einer reziproken Zeit. Also hat u die Dimension einer Energie durch eine Fläche. Nun hat ϑ die Dimension einer Energie und c/ν die einer Länge, folglich hat

$$\frac{\vartheta \nu^2}{c^2}$$

dieselbe Dimension wie u und

$$\frac{u c^2}{\vartheta \nu^2}$$

ist dimensionslos. Zwischen ν, ϑ und c ist keine dimensionslose Kombination möglich. Denn ν ist allein von der Zeiteinheit abhängig. Ist über die Zeiteinheit verfügt, so bleibt die Maßzahl c immer noch willkürlich durch passende Verfügung über die Längeneinheit, und liegt auch diese fest, so bleibt ϑ noch willkürlich durch passende Wahl der Masseneinheit.

Daraus folgt unter der Annahme, daß u allein durch ν, ϑ und c bestimmt ist, daß

$$\frac{u c^2}{\vartheta \nu^2}$$

eine absolute Zahl sein muß.

Das ist die Rayleighsche Strahlungsformel, die aber der Erfahrung nicht entspricht. Die Prämisse ist also unrichtig, daß u allein durch ν, ϑ, c bestimmt sei. Es muß noch eine andere physikalische Größe in der Strahlungsformel eine Rolle spielen. Nimmt man an, daß das Wirkungsquantum diese Größe sei, so hat man zu überlegen, ob durch ihr Hinzutreten eine zweite dimensionslose Kombination gebildet werden könnte. Das Wirkungsquantum hat die Dimension Energie mal Zeit. Sei h seine Maßzahl, so ist also $\frac{h\nu}{\vartheta}$ dimensionslos. Wenn wir jetzt statt h diese Kombination $\frac{h\nu}{\vartheta}$ hinzunehmen, so erhalten wir $\frac{u c^2}{\vartheta \nu^2}$ als Funktion der vier Größen $\nu, \vartheta, c, \frac{h\nu}{\vartheta}$. Da aber ν, ϑ, c durch passende Wahl der Einheiten jeden beliebigen Wert erhalten können, ohne daß sich die dimensionslosen Größen ändern, so folgt, daß die rechte Seite von ν, ϑ, c unabhängig ist. Das heißt es ist

$$\frac{u c^2}{\vartheta \nu^2} = f\left(\frac{h\nu}{\vartheta}\right)$$

oder auch

$$\frac{u c^2}{\vartheta \nu^2} \cdot \frac{\vartheta}{h\nu} = \frac{\vartheta}{h\nu} f\left(\frac{h\nu}{\vartheta}\right) = \varphi\left(\frac{h\nu}{\vartheta}\right)$$

oder

$$\frac{u c^2}{h \nu^3} = \varphi\left(\frac{h\nu}{\vartheta}\right)$$

oder

$$u = \frac{h}{c^2} \nu^3 \varphi\left(\frac{h\nu}{\vartheta}\right).$$

Diese Formel ist nichts anderes als das Wiensche Verschiebungsgesetz, daß sich hier also durch bloße Dimensionsbetrachtungen ergibt aus der Annahme, daß außer den Größen ν, ϑ, c noch eine physikalische Größe von der Dimension Energie mal Zeit eine Rolle spielt.

Umgekehrt kann man aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz den Schluß ziehen, daß in der Strahlungsformel eine Größe von der Dimension des Wirkungsquantums eine Rolle spielt. Denn das Verschiebungsgesetz besagt zunächst, daß die absolute Temperatur nur in der Verbindung ϑ/ν in der Formel vorkommen kann. Wenn man nun durch die Erfahrung weiß, daß die bei einer bestimmten Stelle des Spektrums ausgestrahlte Energie nicht einer Potenz der absoluten Temperatur proportional ist, so kann ϑ nur so in der Formel vorkommen, daß diese eine Funktion mit einem aus ϑ/ν gebildeten dimensionslosen Argument enthält. Dieses dimensionslose Argument können wir in der Form $\frac{\vartheta/\nu}{h}$ schreiben, wo h die Maßzahl einer physikalischen Größe von der Dimension von ϑ/ν, d. h. Energie mal Zeit bedeuten muß.

Die Formel

$$u = \frac{h}{c^2} \nu^3 \varphi\left(\frac{h\nu}{\vartheta}\right)$$

ergibt bekanntlich durch Integration über ν das Stefansche Gesetz, daß die Gesamtstrahlung der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional ist. Man kann dies Gesetz aber auch direkt durch bloße Dimensionsbetrachtungen erhalten unter der Annahme, daß die in der Zeiteinheit pro Flächeneinheit ausgestrahlte Energie allein von der Lichtgeschwindigkeit, dem Wirkungsquantum und der absoluten Temperatur abhängt. Denn aus den Maßzahlen c, h, ϑ können die Kombinationen $\frac{h}{\vartheta}$ von der Dimension einer Zeit und $\frac{ch}{\vartheta}$ von der Dimension einer Länge gebildet werden. Demnach hat

$$\frac{\vartheta}{\left(\frac{ch}{\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{h}{\vartheta}}$$

dieselbe Dimension, wie die von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit ausgestrahlte Gesamtenergie, deren Maßzahl mit U bezeichnet werden möge. Der Quotient

$$\frac{U c^2 h^3}{\vartheta^4}$$

ist daher dimensionslos und gleich einer absoluten Zahl; denn die Maßzahlen c, h, ϑ sind durch passende Wahl der Einheiten beliebig veränderlich.

Die in diesen Formeln angewendete Messung der absoluten Temperatur durch den Wert der Energiemenge

$$\frac{pv}{N}$$

kann auf die Messung durch Celsiusgrade zurückgeführt werden. Zu dem Ende müssen die Energiemengen ϑ_1 und ϑ_2 gemessen werden, die den Temperaturen des schmelzenden Eises und des siedenden Wassers bei normalem Druck entsprechen. Der hundertste Teil der Differenz dieser Energiemenge ist gleich

$$1{,}347 \cdot 10^{-16} \text{ erg.}$$

Wird ihre Maßzahl mit k bezeichnet, so ist

$$\frac{\vartheta}{k}$$

eine dimensionslose Größe, die in Celsiusgraden die absolute Temperatur angibt und ϑ ist das $k$fache dieser Zahl[1]).

Das Theorem, daß den vorhergehenden Beispielen zugrunde liegt, möge noch einmal in seiner allgemeinsten Form ausgesprochen werden.

Eine physikalische Größe, deren Maßzahl mit z bezeichnet werden möge, sei durch eine Reihe von anderen physikalischen Größen bestimmt, deren Maßzahlen wir mit $x_1 x_2 \cdots x_n$ bezeichnen. Die Aufgabe ist, z als Funktion von $x_1, x_2 \cdots x_n$ auszudrücken. Zu dem Ende muß die Einheit, auf die sich z bezieht, mit den Einheiten, auf die sich $x_1 x_2 \cdots x_n$ beziehen, zusammenhängen. Denn hinge sie nicht mit ihnen zusammen, könnte man sie unabhängig von den andern ändern, so könnte man z beliebig verändern, ohne $x_1 x_2 \cdots x_n$ und ohne die betrachteten physikalischen Größen zu ändern, was der Voraussetzung $z = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ widerspricht. Es hängt also die Einheit mit denen der andern Größen zusammen, d. h. es läßt sich aus $x_1 x_2 \cdots x_n$ eine Kombination

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

bilden, die von der gleichen Dimension ist wie z, oder es ist

$$z x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

dimensionslos.

1) Es ist üblich, k „die Boltzmannsche Konstante" zu nennen. Da k eine bestimmte Energiemenge bezeichnet, so würde es dem sonstigen physikalischen Sprachgebrauch entsprechen, diese Energiemenge nach Boltzmann zu benennen und sie, ebenso wie 10^7 erg nach Joule „ein Joule" genannt wird, als „ein Boltzmann" zu bezeichnen.

Nun fragt es sich weiter, wie die Einheiten auf die sich $x_1 x_2 \cdots x_n$ beziehen, untereinander zusammenhängen. Sind sie alle voneinander unabhängig, so kann man, ohne die physikalischen Größen zu ändern, den Maßzahlen $x_1 x_2 \cdots x_n$ beliebige Werte erteilen. Da aber

$$z x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

als dimensionslose Größe sich nicht ändert, so muß es gleich einer von $x_1, x_2 \cdots x_n$ unabhängigen Zahl sein.

Besteht zwischen den Einheiten eine und nur eine Beziehung, so daß z. B. x_n dieselbe Dimension hat wie

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}},$$

so führt man statt x_n die dimensionslose Kombination

$$x_n x_1^{-\beta_1} x_2^{-\beta_2} \cdots x_{n-1}^{-\beta_{n-1}}$$

ein. Da $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$ beliebige Werte erhalten können, ohne die physikalischen Größen und die Maßzahlen der dimensionslosen Größen zu ändern, so ergibt sich demnach

$$z x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

als Funktion von

$$x_n x_1^{-\beta_1} x_2^{-\beta_2} \cdots x_{n-1}^{-\beta_{n-1}}.$$

Besteht auch noch zwischen den Einheiten von $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ ein Zusammenhang derart, daß z. B. x_{n-1} dieselbe Dimension hat wie

$$x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_{n-2}^{\gamma_{n-2}},$$

während die Einheiten von $x_1, x_2 \cdots x_{n-2}$ unabhängig voneinander sind, so ergibt sich

$$z x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} \cdots x_n^{-\alpha_n}$$

als Funktion der beiden dimensionslosen Größen

$$x_n x_1^{-\beta_1} x_2^{-\beta_2} \cdots x_{n-1}^{-\beta_{n-1}}$$

und

$$x_{n-1} x_1^{-\gamma_1} x_2^{-\gamma_2} \cdots x_{n-2}^{-\gamma_{n-2}}$$

usw.

Das Endresultat ist also immer, daß eine dimensionslose Kombination, die z enthält, entweder gleich einer absoluten Zahl oder gleich einer Funktion von einer oder mehreren dimensionslosen Größen ist, die sich aus $x_1 \cdots x_n$ als Produkte von Potenzen zusammensetzen.

§ 3.

Die Abhängigkeit der Einheiten voneinander beruht immer auf einem physikalischen Zusammenhang. Dennoch ist man durch den physikalischen Zusammenhang nicht genötigt, die Einheiten voneinander abhängig zu machen. Die physikalischen Darstellungen weichen daher



nicht selten darin voneinander ab, welche Einheiten sie aufeinander aufbauen. In der Relativitätstheorie ist es z. B. üblich, die Einheit der Zeit mit der Einheit der Länge so in Beziehung zu setzen, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird. Dann haben Zeit und Länge die gleiche Dimension und jede Geschwindigkeit ist dimensionslos. Diese Festsetzung hat für solche Untersuchungen einen guten Sinn, in denen die Lichtgeschwindigkeit eine grundlegende Rolle spielt und das Wesentliche jeder andern Geschwindigkeit ihr Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit ist. Bei andern Untersuchungen dagegen, die mit der Lichtgeschwindigkeit nichts zu tun haben, würde diese Bindung zwischen Zeit- und Längen-Einheit die Dimensionsbetrachtungen einschränken. So z. B. würden die Betrachtungen, die oben über den Widerstand in einer Flüssigkeit angestellt wurden, nicht möglich sein, wenn die Maßzahl der Geschwindigkeit dimensionslos ist.

Es ist daher mit Recht üblich, die Einheiten von Zeit und Länge unabhängig voneinander zu lassen. Ebenso könnte man die Einheit der Masse auf die der Länge und Zeit gründen durch die Festsetzung, daß die Newtonsche Gravitationskraft, die von einer punktförmigen Masse 1 in der Entfernung 1 auf eine andere punktförmige Masse 1 ausgeübt wird, ihr die Beschleunigung 1 erteilt. Die Masse erhielte dann die Dimension Länge zur dritten durch Zeitquadrat. In solchen Untersuchungen, in denen die Massen nur in bezug auf die Gravitationskräfte betrachtet werden, die sie hervorrufen, kann eine solche Festsetzung einen Zweck haben. In Untersuchungen aber, wo die Masse eine Rolle spielt, ohne daß Gravitationskräfte ins Spiel kommen, würde eine solche Festsetzung wieder die Dimensionsbetrachtungen unnötig beschränken.

Daher ist es im allgemeinen üblich, die Masseneinheit unabhängig von den Einheiten der Zeit und Länge zu lassen. Geschieht das, so tritt in dem Gravitationsgesetz die Maßzahl der Gravitation auf

$$K = k\frac{mm}{r^2},$$

wo K, m, r die Maßzahlen der Kraft, der Masse und der Entfernung, k die Maßzahl der Gravitation von der Dimension Kraft mal Längequadrat durch Massequadrat oder Länge zur dritten durch Masse mal Zeitquadrat.

Es ist nun weiter üblich, die Einheiten anderer physikalischer Größen, so weit sie in irgendwelchen Erscheinungen den Potenzen von Massen, Längen und Zeiten proportional sind, auf die Einheiten dieser letzteren aufzubauen. Gezwungen ist man nicht dazu, sondern es fragt sich in jedem Falle nur, ob es zweckmäßig ist. Man ist z. B. nicht gezwungen, der Maßzahl der Fläche die Dimension Länge mal Länge zu geben. Man kann sich die Flächeneinheit auch unabhängig von der Längeneinheit vorbehalten. Der Zusammenhang zwischen der Fläche eines Quadrates oder eines Kreises oder irgendeiner von einer linearen Größe abhängigen Figur einerseits und der linearen Größe andererseits würde dann für die Maßzahlen der Fläche und Länge auf eine Gleichung

$$F = kl^2$$

führen, wo k die Maßzahl einer physikalischen Größe von der Dimension Fläche durch Länge zum Quadrat ist. Die Zahl k könnte man die Maßzahl der „flächenbildenden Eigenschaft" der linearen Ausdehnung bei der betreffenden Figur nennen[1]). Der Grund, weshalb man solche physikalischen Größen nicht eingeführt hat, liegt darin, daß Flächen und Längen nur in diese Beziehung zueinander treten, daß eine Fläche dem Quadrat einer Länge proportional ist. Daher verliert man nichts für allgemeine Dimensionsbetrachtungen, wenn man die Einheit der Fläche von der der Länge abhängig macht, indem man für eine bestimmte Figur $k = 1$ werden läßt. Damit wird k dimensionslos und nimmt für andere Figuren bestimmte absolute Zahlwerte an.

Diese Betrachtung ist derjenigen genau analog, die dazu geführt hat, die Einheit der Elektrizitätsmenge durch das Coulombsche Gesetz der Anziehung ungleichnamiger und der Abstoßung gleichnamiger Elektrizitäten auf die Einheit der Masse, Länge und Zeit zu beziehen. Nimmt man die Einheit der Elektrizitätsmenge zunächst unabhängig an, so wird, wenn e, e' die Maßzahlen zweier punktförmigen Elektrizitätsmengen und r die Maßzahl ihrer Entfernung bedeutet,

$$\frac{ee'}{r^2}$$

der Kraft proportional, mit der sie aufeinander wirken. Ist K die Maßzahl der Kraft, so ist demnach

$$\frac{ee'}{r^2} = \varepsilon K,$$

wo ε die Dimension hat Elektrizitätsmenge zum Quadrat durch das Produkt Länge mal Länge mal Kraft. ε mißt eine physikalische Eigenschaft des Mediums, in dem die Anziehung oder Abstoßung vor sich geht. Es ist nun üblich, die Einheit der Elektrizitätsmenge dadurch auf

1) So würde man z. B. sagen können: die flächenbildende Eigenschaft einer Länge ist als Radius eines Kreises π mal größer, denn als Seite eines Quadrats.

die der Kraft und Länge zu beziehen, daß man für den freien Äther $\varepsilon = 1$ festsetzt. Dadurch wird ε dimensionslos und jedem ponderablen nichtleitenden Medium kommt ein bestimmter Zahlenwert ε, seine „Dielektrizitätskonstante", zu. Die Elektrizitätsmenge erhält durch diese Festsetzung die Dimension Wurzel aus Kraft mal Längequadrat.

Ob es sich empfiehlt, so zu verfahren, das ist eine andere Frage. Die Elektrizität ruft bei ihrer Bewegung auch noch andere Kräfte hervor, die von jenen Anziehungs- und Abstoßungskräften ganz unabhängig sind. Man hat dem dadurch Rechnung getragen, daß man noch eine andere Einheit der Elektrizitätsmenge eingeführt hat, die sich auf die Anziehung und Abstoßung elektrischer Ströme gründet und dadurch ganz anders mit den Einheiten der Masse, Länge und Zeit zusammenhängt, als durch das Coulombsche Gesetz. Aber zweckmäßiger ist es, auch die elektromagnetischen Erscheinungen nicht zu benutzen, um die Einheit der Elektrizität an die der Masse, Länge und Zeit zu binden, sondern sie unabhängig zu lassen. Die Einheit der magnetischen Menge wird dagegen zweckmäßig auf die Einheit der Elektrizitätsmenge bezogen. Denn nach unserer heutigen Anschauung besteht Magnetismus nur aus der Wirkung elektrischer Ströme. Eine Fläche, deren Rand ein elektrischer Strom durchfließt, hat nach außen dieselbe Wirkung, wie wenn die Fläche aus zwei magnetischen Schichten von entgegengesetzter magnetischer Dichte und konstantem sehr kleinen Abstand bestünde, d. h. wie eine Fläche von konstanter Dichte des magnetischen Moments, die dem Strom proportional ist. Da nach der heutigen Anschauung Dichte des magnetischen Moments nur auf diese Weise zustande kommt, so empfiehlt es sich, die Einheit der Dichte des magnetischen Moments an die Einheit des elektrischen Stromes zu binden und sie durch die Dichte des magnetischen Moments einer von der Einheit des elektrischen Stromes umkreisten Fläche zu definieren. Dadurch erhält die Dichte des magnetischen Momentes die Dimension Elektrizität durch Zeit, wie der elektrische Strom und demnach die magnetische Menge die Dimension Elektrizität mal Länge durch Zeit.

Die Kraft, mit der sich zwei punktförmige magnetische Mengen anziehen oder abstoßen, ist ihrem Produkt direkt und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional

$$\frac{m_g m'_g}{r^2} = \mu K$$

(m_g, m'_g die Maßzahlen der magnetischen Mengen).

Nach dem elektromagnetischen Maßsystem bezieht man durch dieses Gesetz die Einheit der magnetischen Menge auf die der Kraft und der Länge, indem man für den freien Äther $\mu = 1$ annimmt. Damit ist dann auch die Einheit der elektrischen Menge auf die Einheiten der Masse, Länge und Zeit bezogen.

Es ist indessen aus den oben genannten Gründen besser, es nicht zu tun, sondern auch hier wie bei den Coulombschen Kräften zu verfahren und μ, die Maßzahl der Permeabilität, nicht dimensionslos zu machen. μ erhält die Dimension von $\frac{m_g^2}{Kr^2}$. Für die Dielektrizitätskonstante ε fanden wir oben die Dimension $\frac{e^2}{Kr^2}$. Demnach hat $\frac{\mu}{\varepsilon}$ die Dimension $\frac{m_g^2}{e^2}$, und da m_g die Dimension von $\frac{el}{t}$ hat, so ergibt sich für μ/ε die Dimension $\frac{l^2}{t^2}$ des Quadrats einer Geschwindigkeit.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten dann für Medien von derselben Permeabilität wie der freie Äther

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E} \text{ und } \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

so daß $\frac{\mu}{\varepsilon}$ das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit in dem Medium ist.

In physikalischen Gleichungen ist es üblich, Winkel als dimensionslos zu betrachten. Das hat seinen Grund darin, daß überall, wo irgendein Winkel in einer physikalischen Beziehung eine Rolle spielt und durch seine auf irgendeine Einheit bezogene Maßzahl gegeben ist, auch die Maßzahl eines Winkels von 180° in derselben Einheit als gegeben betrachtet werden kann. Wenn aber zwei Winkel in der physikalischen Relation vorkommen, so kann man statt des einen das Verhältnis beider einführen und hat damit eine dimensionslose Größe, in der der Winkel vorkommt. Daher ist gar kein Vorteil für etwaige Dimensionsbetrachtungen damit verbunden, daß man die Einheit des Winkels sich vorbehält. Wenn man aber die Einheit durch die ganze Untersuchung festhält, so kann man die Maßzahl geradeso ansehen, als ob sie eine absolute Zahl wäre.

Man betrachte z. B. den Zusammenhang zwischen der Fläche eines sphärischen Dreiecks, dem Radius der Kugel und den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks. Was läßt sich aus der Betrachtung der Dimensionen darüber sagen?

Seien $F, r, \alpha, \beta, \gamma$ die Maßzahlen. Dann ist auch die Maßzahl δ eines Winkels von 180^0 bestimmt. Nach der oben auseinandergesetzten Schlußweise folgt dann, daß die dimensionslose Größe $\frac{F}{r^2}$ eine Funktion der drei dimensionslosen Größen $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ sein muß. In der Tat ist ja bekanntlich

$$\frac{F}{r^2} = \pi\left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} - 1\right).$$

Denken wir uns die Einheit der Winkel festgehalten und die Maßzahlen der Winkel als ob es absolute Zahlen wären, so wären wir zu dem gleichen Resultat gekommen, daß $\frac{F}{r^2}$ eine Funktion der drei Winkel sein muß. Es gewährt daher für Dimensionsbetrachtungen keinen Vorteil, die Einheit der Winkel veränderlich zu lassen.

§ 4.

Allen obigen Betrachtungen haben wir die Annahme zugrunde gelegt, daß die Maßzahl einer physikalischen Größe auf eine bestimmte Einheit bezogen sei, bei deren Änderung sie sich umgekehrt proportional der Einheit ändert. Die physikalischen Schriftsteller sind aber in einem Falle von dieser hergebrachten Art der Messung abgewichen und haben physikalische Gleichungen aufgestellt, bei denen die Dimensionsgesetze, so wie Fourier sie ausgesprochen hat, nicht erfüllt sind.

Betrachten wir z. B. die Gleichung zwischen der Maßzahl f der Fläche eines Kreises und der Maßzahl r des Radius

$$f = r^2\pi$$

und bilden wir aus dieser Gleichung eine neue Gleichung, dadurch daß wir auf beiden Seiten den Logarithmus nehmen

$$\log f = 2\log r + \log\pi,$$

so ist dies ohne Zweifel eine richtige Gleichung. Sie unterscheidet sich aber von der gewöhnlichen Form physikalischer Gleichungen insofern, als die Terme $\log f$ und $2\log r$ in dem hergebrachten Sinne nicht mehr Maßzahlen physikalischer Größen sind; denn sie ändern sich bei Änderung der Längeneinheit nicht um einen Faktor, sondern um eine additive Konstante. Die Gleichung erfüllt allerdings insofern auch die Fouriersche Forderung, daß sie bei Änderung der Einheiten richtig bleibt. Allein sie unterscheidet sich dadurch, daß bei Änderung der Längeneinheit nicht ein Faktor auftritt, sondern daß auf beiden Seiten die additive Konstante hinzutritt, die sich dann weghebt. Bei den Maßzahlen der Fläche und Länge ist es nun allerdings nicht üblich, der Gleichung diese Form zu geben. Bei der Einführung des Begriffes der Entropie dagegen haben die Physiker in der Tat den Logarithmus der Maßzahl einer physikalischen Größe eingeführt. Sie bezeichnen den Logarithmus mit einem Buchstaben S und erwecken damit in der physikalischen Gleichung leicht die Vorstellung, als ob S sich auch wie die andern in der Gleichung vorkommenden Maßzahlen auf eine bestimmte Einheit bezöge. So schreibt z. B. Planck (Thermodynamik § 119, Gl. (52), für die Entropie eines idealen Gases

$$S = M\left(c_v \log\vartheta + \frac{R}{m}\log v + \text{const.}\right).$$

Der Term $M\frac{R}{m}\log v$ z. B. ist keine physikalische Größe in dem von Fourier gedachten Sinne. Man kann ihm weder eine Dimension zuschreiben, noch kann man ihn dimensionslos nennen. Denn bei Änderung der Längeneinheit ändert er sich nicht um einen Faktor, sondern um eine additiv hinzutretende Größe.

Bei dem Term $Mc_v\log\vartheta$ liegt die Sache noch verwickelter, so lange man die Einheit der absoluten Temperatur noch unabhängig gelassen hat. Denn Mc_v ist die Energiemenge, die man hinzufügen muß, um die absolute Temperatur um eine Einheit zu steigern. Bei einer Änderung der Einheit der Temperatur tritt demnach zu Mc_v ein Faktor hinzu und gleichzeitig zu $\log\vartheta$ eine additive Größe.

Die Fourierschen Begriffe können dagegen vollständig aufrecht erhalten werden, wenn die absolute Temperatur wie oben durch die Energie $\frac{pv}{N} = \vartheta$ definiert wird. Ist U die Gesamtenergie des Gases, so ist, wenn ihm die Energiemenge dQ zugeführt wird,

$$dQ = dU + p\,dv.$$

Wenn die Energie nur in der translatorischen Energie steckt, so ist

$$U = \frac{3}{2}N\vartheta,$$

im andern Fall tritt statt $\frac{3}{2}$ ein größerer Wert ein. Wir wollen den ersten Fall allein betrachten.

Dann ist also

$$dQ = \frac{3}{2}N\,d\vartheta + N\vartheta\frac{dv}{v}.$$

Durch ϑ dividiert, ergibt dies ein vollständiges Differential



$$\frac{dQ}{\vartheta} = \frac{3}{2} N \frac{d\vartheta}{\vartheta} + N \frac{dv}{v} = d\left(\frac{3}{2} N \log \vartheta + N \log v\right)$$

dem Differential des Logarithmus von $\vartheta^{\frac{3}{2}N} v^N$. Diese Größe $\vartheta^{\frac{3}{2}N} v^N$, deren Logarithmus bis auf eine hinzutretende willkürliche Konstante mit dem übereinstimmt, was man die Entropie des einatomigen idealen Gases zu nennen pflegt[1]), ist nun in der Tat eine physikalische Größe in dem alten Fourierschen Sinne, die in einer bestimmten auf Länge, Masse und Zeit bezogenen Einheit gemessen werden kann. Auch durch die Betrachtungen der statistischen Mechanik wird man zunächst auf diese im Fourierschen Sinne physikalische Größe geführt, die der Wahrscheinlichkeit der Geschwindigkeits- und Raumverteilung der Moleküle bei gegebenem ϑ und v proportional ist. Daß man dann den Logarithmus ihrer Maßzahl betrachtet, anstatt ihre Maßzahl selbst, kann als eine rein rechnerische Operation gelten.

1) Dabei ist nur davon abgesehen, daß in dem Ausdruck $\frac{dQ}{\vartheta}$ gewöhnlich die absolute Temperatur nicht durch die Einheit der Energie gemessen ist. Bezeichnet T die Anzahl der Grade Celsius, so ist

$$\frac{1}{k}\frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{\vartheta} \cdot (k = 1{,}347 \cdot 10^{-16} \text{erg}).$$

(Eingegangen 17. April 1916.)

BESPRECHUNGEN.

M. Born, Dynamik der Kristallgitter. Fortschritte der math. Wiss. in Monographien. Bd. 4. gr. 8°. VII u. 122 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1915. Preis geh. M. 7.—, geb. M. 7.60.

Die Vorstellung von dem regelmäßigen Aufbau der Kristalle ist den Physikern seit den Zeiten Poissons und Bravais' bekannt; aber erst die Forschung der letzten Jahre hat dieser Spekulation einen solchen Grad von Wirklichkeit gegeben, daß wir die Existenz der Raumgitter von Atomen als die gesicherte Basis für jede weitere Forschung über Kristalle zugrundelegen können. Es sei daran erinnert, wie Madelungs und Habers, Born-Kármáns und andere Untersuchungen, die von der primitivsten Raumgittervorstellung ausgingen, durch ihre Erfolge das Vertrauen zu der Grundannahme so zu stärken vermochten, daß als Ausfluß einer festen Überzeugung das Experiment von Laue und seinen Mitarbeitern zustandekam.

In dem Maße, wie durch die Forschung mit Röntgenstrahlen die spezielle Kenntnis einzelner Kristalle zunimmt, macht sich das Bedürfnis nach einer Theorie fühlbar, die den Weg zu all den Einzelproblemen weist, die bei der Erklärung der physikalischen Eigenschaften aus der Struktur auftreten. Welches sind die mit der Struktur unmittelbar zusammenhängenden Eigenschaften? Wie läßt sich im Prinzip der Einfluß eines beliebig komplizierten Gitters ermitteln?

Dies sind Fragen, die Born in der Dynamik der Kristallgitter beantworten will. Grundsätzlich knüpft er die Untersuchung an das allgemeinste Gitter an, aus dem die höher symmetrischen Gitter durch Einschränkung erhalten werden. Dieses allgemeinste Gitter setzt sich aus beliebig vielen kongruenten gegeneinander verschobenen „einfachen" Gittern zusammen, unter einfachem Gitter die Gesamtheit aller gleichen Partikel — Atome, Atomkerne oder Elektronen — verstanden, die die Schnittpunkte von drei Scharen paralleler äquidistanter Ebenen besetzen. Die Anfangspunkte der einfachen Gitter, deren Lage die gegenseitige Verschiebung der Gitter bestimmt, nennt Born die Basisgruppe. Grundsätzlich werden die Elektronen als Bestandteile des Kristalls angesehen, die mit den Atomen bzw. positiv geladenen Atomkernen gleichberechtigt sind und sich der Gitterordnung fügen.

Das große Interesse, das das Bornsche Buch verdient, wird am besten durch eine gedrängte Übersicht über die wichtigsten Ergebnisse dargetan werden. Im Anschluß an Born mögen die Kapitel Elastizität, Piezoelektrizität, spez. Wärme, Reststrahlen, Dispersion, Doppelbrechung und optische Aktivität besprochen werden.

1. Elastizität. Gerade die Ableitung der elastischen Eigenschaften eines Raumgitters hat früher am meisten dazu beigetragen, den Glauben an den regelmäßigen Gitteraufbau zu erschüttern. Es ergab sich aus den alten Theorien, daß bei konservativen Atomkräften die sechs Cauchyschen Relationen zwischen den elastischen Konstanten bestehen müssen, die die Zahl der unabhängigen Konstanten von 21 auf 15 herabdrücken — was den Beobachtungen von Voigt widerspricht. Man erinnert sich, wie Voigt glaubte, die Gitterannahme wahren zu können, indem er Drehmomente zwischen den Atomen einführte — eine Annahme, die sich nie großer Beliebtheit erfreut hat.

Es ist klar, daß sich Born zunächst endgültig mit dieser Frage auseinandersetzen muß. Dies geschieht in befriedigendster Weise, indem die Ungültigkeit der Cauchyschen Relationen selbst bei konservativen Zentralkräften zwischen den Atomen bewiesen wird. (Über die Atomkräfte wird überhaupt in dem ganzen Buch keine weitere Annahme gemacht, als daß ein elastisches Potential existiert.)

Der Gedankengang bei Born ist etwa so: Es gibt unter den Verzerrungen, die das Raumgitter erleiden kann, zwei besonders wichtige Arten. Bei der ersten wird das Raumgitter dadurch abgeändert, daß das Grundparallelogramm verzogen wird, und mit ihm das ganze Gitter. Diese Verzerrung ist beim einfachen Gitter die einzig mögliche. Beim zweiten Typus, der nur im zusammengesetzten Gitter auftreten kann, bleibt das Grundparallelogramm unverzerrt, aber die Versetzung der einzelnen einfachen Gitter, also die Basisgruppe des Gitters, wird geändert. Die allgemeine homogene Verzerrung setzt sich aus beiden Arten von Verzerrung zusammen. Entsprechend besteht die potentielle Energie des allgemeinen Gitters aus drei Teilen, die je durch die Deformation der einfachen Gitter, durch die hinzutretende Deformation der Basisgruppe und durch eine Wechselwirkung beider Verzerrungsarten entstehen.

Nur der erste Teil der potentiellen Energie wurde in der alten atomistischen Theorie berücksichtigt, die

die Betrachtung an ein einfaches Gitter anknüpfte, und die Folge war die zu geringe Zahl von elastischen Konstanten (15 statt 21). Die hinzutretenden Teile der potentiellen Energie erhöhen die Anzahl gerade um 6. Diese Klarstellung ist das erste schöne Ergebnis der Durchführung der Rechnung an dem zusammengesetzten Gitter.

2. Piezoelektrizität. Befinden sich in den Gitterpunkten positive und negative Ladungen, so wird im allgemeinen eine gewisse Polarisation pro Volumeinheit bestehen. Im unverzerrten Kristall ist diese durch eine angesammelte Oberflächenladung nach außen hin kompensiert. Bei solchen Verzerrungen aber, bei denen eine Verschiebung der einfachen Gitter gegeneinander stattfindet, tritt eine Änderung dieses Momentes ein, die als piezoelektrische Erregung wahrgenommen wird. Die Formeln geben den Zusammenhang der phänomenologisch eingeführten piezoelektrischen Koeffizienten mit dem elastischen Potential.

3. Die mechanischen Eigenschwingungen. Die nächsten Kapitel sind den Schwingungszuständen des Gitters gewidmet. Born bedient sich einer fruchtbaren, mit dieser Konsequenz auf physikalische Probleme zum erstenmal von Hilbert angewandten Methode der Reihenentwicklung der Ausgangsgleichung, bei der die Lösung als Potenzreihe nach a/λ erscheint, so daß die einzelnen Glieder immer mehr den Einfluß der atomaren Struktur berücksichtigen (a = ein Gitterabstand, λ = Wellenlänge der Schwingung). Die durchgehende Anwendung dieser Methode verleiht den Rechnungen etwas sehr Systematisches und Einheitliches.

Das neue Ergebnis des Abschnittes über Eigenschwingungen sind Sätze über das elastische Spektrum eines Kristalles, die die Grundlage liefern sowohl für das thermische Verhalten des Gitters (Energieinhalt der freien Schwingungen), wie über sein Verhalten bei erzwungenen Schwingungen (Theorie der Reststrahlen).

4. Spezifische Wärme. In dem Kapitel über spezif. Wärme wird die auf Grund der gewonnenen Sätze sofort hinzuschreibende Formel diskutiert. Es zeigt sich, daß die beste Darstellung der spez. Wärme eine Summe von Termen ist, die teils den Charakter der von Debye, teils die Form der von Einstein angegebenen Funktion haben — eine Vermutung, die auf Grund der experimentellen Kurven schon von Nernst auf dem Kongreß in Göttingen ausgesprochen worden ist.

5. Reststrahlen und Kristalloptik. Streng genommen ist für die Behandlung der Optik eines Gitters Rücksicht zu nehmen auf die elektrodynamischen Wirkungen der schwingenden Ladungen aufeinander. Dieser Standpunkt, der dem Lorentz-Planckschen Standpunkt der Dispersionstheorie entspricht, wird von Born in den späteren Kapiteln über die Elektrodynamik des Gitters eingenommen. Ihnen schickt er eine einfache in Drudeschem Sinne geführte Ableitung der formalen Kristalloptik und Dispersionsformel voraus, in dem die von einer einfallenden optischen Welle erzwungenen mechanischen Schwingungen (und mit ihnen die Polarisation und die Dielektrizitätskonstante) auf Grund der Kenntnis der freien Schwingungen des Gitters untersucht werden. Wichtige Sätze über das Verhalten im Ultraroten werden gewonnen. Die Anzahl der Reststrahlfrequenzen (= Stellen, an denen der Brechungsindex unendlich wird) steht im engsten Zusammenhang mit der Kompliziertheit der Gitterstruktur: sie ist höchstens gleich $3(p-1)$, unter p die Anzahl der einfachen Gitter verstanden, aus denen das Gitter aufgebaut ist.

6. Doppelbrechung und Dispersion. Die Vertiefung der Betrachtungsweise für die Kristalloptik setzt ein näheres Eingehen auf das elektrische Feld voraus, das durch die schwingenden Ladungen selbst erzeugt wird. Diesem Felde werden durch die Periodizität des Kristalls periodische Eigenschaften aufgezwungen, die zu seiner Berechnung in eleganter Weise benutzt werden. Wieder entsteht eine Reihenentwicklung von ähnlicher Art, wie für die mechanischen Schwingungen. Aus dem Grundglied und der ersten Näherung folgen das Fresnelsche Gesetz über die Abhängigkeit der Lichtfortpflanzung von der Richtung und die Dispersionsformel. Wesentlich an der Betrachtungsweise ist die gleichzeitige Erledigung des elektrodynamischen und des mechanischen Problems: während in der alten Dispersionstheorie die schwingungsfähigen Elektronen an feste Ruhelagen gebunden erschienen, kennt die Bornsche Theorie nur Bindungen der Ladungen (bzw. geladene Atomkerne) untereinander und deshalb ist der elektrische Schwingungszustand von dem mechanischen gar nicht getrennt zu behandeln. So ist die Kenntnis der Mechanik des Gitters die notwendige Vorbereitung zu der tieferen Betrachtungsweise, die die innige Wechselwirkung zwischen Mechanik und Elektrodynamik voll durchführt. Auch die Theorie der Piezoelektrizität findet die endgültige Behandlung erst an dieser Stelle.

7. Optische Aktivität. Ein besonderer Vorzug der von Born befolgten Annäherungsmethode ist die zwanglose Einreihung der optischen Aktivität in das Schema der allgemeinen Lösung. Die Drehung der Polarisationsebene wird durch die Näherung II. Ordnung erhalten, in dem einzigen Falle, wo die vorhergehende Näherung zu keinem eindeutigen Ergebnis führt. Dies ist so zu verstehen: für gewöhnlich gibt die erste Näherung eine feste Zuordnung zwischen der Fortpflanzungsrichtung eines Strahles und den beiden Polarisationsrichtungen, unter denen lineare Schwingungen allein stattfinden können und für die es daher einheitliche Brechungsexponenten gibt. Bei der Ausbreitung längs der optischen Achse findet diese Bestimmung in der ersten Näherung nicht statt und man muß die zweite Näherung zuziehen. Diese liefert einmal kleine Zusatzterme zu dem in erster Näherung erhaltenen Wert des Brechungsindex und zweitens eine Beziehung zwischen diesen Zusatztermen und der Art der Polarisation. Dies führt hier zu dem Ergebnis, daß einheitliche Brechungsindizes nur für rechts- und linkszirkular polarisierte Schwingungen existieren, wodurch in bekannter Weise die Drehung der Polarisationsebene erklärt ist. (Vgl. hierzu diese Zeitschr. **16**, 437, 1915.)

Dieser Überblick über Borns Resultate möge genügen. Born selbst nennt seine Arbeit eine Vorarbeit für eine tiefere Auffassung des Kristalls, die über die uns heute bekannten geometrischen Zusammenhänge hinaus die dynamischen Bedingungen des Kristalls und der Atomkräfte erfaßt, wie es bei Atom und Molekül mit Erfolg erstrebt wird. Aber auch ohne diesen weiten Ausblick bietet das Buch, was Ergebnisse wie Form betrifft, volle Befriedigung und reiche Anregung.

Ein Wort der Anerkennung für den Teubnerschen Verlag, der den an sich nicht leichten und durch die Umstände erschwerten Druck besorgt hat, darf hier nicht fehlen. P. P. Ewald.

Handbuch der Radiologie. Herausgegeben von Erich Marx. gr. 8⁰. Band III[1]), enthaltend: E. Gehrcke, Glimmentladung. R. Seeliger, Die positive Säule. W. Hallwachs,

1) Besprechung von Band II, durch Rümelin, diese Zeitschr. **15**, 261, 1914.



Die Lichtelektrizität. — Mit einem Anhang: Die Entwicklung der Lichtelektriziät von Januar 1914 bis Oktober 1915 von E. Marx. XXII u. 619 S. mit 140 Figuren und Abbildungen im Text. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1916. Geheftet M. 34.—.

Erfreulicherweise ist dieser dritte Band des verdienstvollen Marxschen Unternehmens trotz des Krieges erschienen. Er bildet ein überaus wertvolles Hilfsmittel sowohl zum Einarbeiten als zum Nachschlagen. Gerade diese Art zusammenfassender Darstellungen ist bestens geeignet dem praktischen Physiker Zeit zu ersparen und die Wege zu ebnen.

Die ersten 240 Seiten sind der Glimmentladung und der positiven Säule gewidmet. Auf eine im wesentlichen mit den ersten beiden Kapiteln des bekannten vorzüglichen Buches von Gehrcke[1]): Die Strahlen der positiven Elektrizität, Leipzig, Hirzel 1909, übereinstimmenden Einleitung Gehrckes über allgemeine Eigenschaften und Nomenklatur, folgt der von R. Seeliger verfaßte Abschnitt: Die geschichtete und die ungeschichtete positive Säule. Seine klar disponierte Darstellung (geometrische, elektrische, energetische und theoretische Behandlung) verschafft einen guten Überblick über die verwickelten und bekanntlich vielfach noch ungenügend geklärten Erscheinungen. Dabei hat der Verfasser sehr geschickt die Übersichtlichkeit dadurch zu erhöhen gewußt, daß er möglichst die gleiche oben genannte Einteilung getrennt für die ungeschichtete und geschichtete Säule verwendet. Die Literatur vor 1900 ist in Rücksicht auf das Buch von J. Stark: Elektrizitätsdurchgang in Gasen (Leipzig 1902) nicht ausführlich angemerkt worden, sondern dies ist erst von 1900 an geschehen, bis 1914 soweit irgend angängig. Gerade bei diesem Stoffe interessiert vielleicht eine nähere Inhaltsangabe. — I. Ungeschichtete Säule: Nach einem Abschnitte, welcher die Entladung in Abhängigkeit von den geometrischen Verhältnissen beschreibt, wird der Potentialgradient ausführlich behandelt: Meßmethoden, räumliche Verteilung, Abhängigkeit von Stromdichte, Druck und Temperatur; ferner die Leitfähigkeit, ihr Zusammenhang mit Stromdichte, Druck und Rohrdimension sowie ihre Messung und die Geschwindigkeit der Ionen. Die Energetik der ungeschichteten Säule geht auf die spektralen Verhältnisse ein, behandelt die Abhängigkeit der Intensität der Strahlung von den Entladungsbedingungen (Stromstärke, Wattverbrauch, Druck), die spektrale Intensitätsverteilung und die Temperaturverhältnisse der Säule; Gebiete, die zum Teil noch wenig bearbeitet erscheinen. Die theoretische Betrachtung erwähnt auch neuere Arbeiten: Franck und Hertz, Seeliger, Holm (1915). II. Geschichtete Säule: die Bedingungen für das Zustandekommen der Schichten werden sorgfältig und klar referiert (Entladungsart, Röhrenform, Gas, Temperatur, Magnetfeld, Stromstärke, Druck), sodann werden die geometrischen Verhältnisse in analoger Folge diskutiert. Die Erörterung der elektrischen Eigenschaften ist entsprechend I. angelegt. — Mechanismus der geschichteten Säule und Theorie bilden einen kritisch anregenden Schlußabschnitt dieser Darstellung, welche erkennen läßt ein wie großes und dankbares Arbeitsfeld hier noch vorliegt. —

Das nun folgende Kapitel von Gehrcke, Erscheinungen der Glimmentladung an den Elektroden, behandelt: I. Kathodisches Glimmlicht, kathodischer Dunkelraum und Kanalstrahlenlicht auf der Kathode (sogen. dritte, zweite und erste Schicht), II. die elektrischen Messungen in den kathodischen Lichtgebilden und die Theorie des Dunkelraumes und des Glimmlichts, III. den Faradayschen Dunkelraum und die anodischen Lichtgebilde, IV. thermische und mechanische Eigenschaften der Elektroden mit ihrer Nachbarschaft. Die Darstellung ist gut unterstützt durch Tabellen, Kurven und Figuren und zeichnet sich überhaupt durch Übersichtlichkeit aus. Unter I findet sich übrigens auch ein Abschnitt über technische Anwendungen des Glimmlichts.

Den zweiten, umfangreicheren Teil des Bandes bildet „Die Lichtelektrizität". Hierfür Herrn Hallwachs gewonnen zu haben ist ein besonderes Verdienst des Herausgebers. Der weitverzweigte Stoff ist mit hervorragendem Geschick und einer originellen Frische dargestellt, die wohl nur von dem Manne ausgehen konnte, der so eng mit dem Gebiete verknüpft ist. „Von der Anschauung ausgehend, daß eine rein systematische Darstellung des Stoffes in einem werdenden Gebiete zu leblos und eine rein historische zu unübersichtlich wäre, hat der Verfasser eine mittlere Linie zwischen beiden gesucht." Man braucht nur die Figuren 1 und 2 Seite 249 und 250 zum Grundversuche der lichtelektrischen Entladung und Erregung anzusehen bei welchen im einen Falle das Elektroskop, im anderen der eiserne Schutzkasten mit dem Tage der Hallwachsschen Entdeckung versehen ist (27. XI. 87 u. 18. XII. 87) um einen Eindruck zu bekommen, mit welcher Forscherfreude der ganze Bericht abgefaßt ist! Zur Einarbeitung in das Gebiet steht hier ein außergewöhnlich vorteilhaftes Werk zur Verfügung. Die beiden ersten Kapitel bringen die Entwicklung des Gebietes bis 1899. Nach dem Bericht über die Grundversuche wird in systematischer Folge, bei der man die Entdeckungsgeschichte förmlich miterlebt, vor Augen geführt: die Abhängigkeit der Wirkung von den Eigenschaften des Lichtes, vom belichteten Körper, dem elektrischen Felde und von dem Gase. Dann folgen Ergebnisse von Eigenschaften der Strömung im Gas für die Lichtelektrizität und Besprechung des Einflusses äußerer Kräfte und der Temperatur, sowie die Zurückführung der Hertzschen Funkenbeeinflussung auf Lichtelektrizität.

Bis hierher ist von Elektronen noch nicht die Rede, sondern es handelt sich nur um die Beschreibung des Zusammenhanges der Erscheinungen. Dann aber folgt im dritten Kapitel durch eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser ersten Periode die Bestimmung der lichtelektrischen Problemstellung, und dies führt zu einer eingehenden Besprechung der für das Weitere grundlegenden Arbeit von P. Lenard, Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht, Wien. Ber. **108**, 1649—1666, 1899, welche die Lichtelektrizität als Elektronenstrahlung aufzufassen gelehrt hat.

Nach Gewinnung dieses Leitgedankens der späteren Arbeiten gibt Kapitel IV eine Einleitung in die Forschungsergebnisse seit 1900 wonach die „eigentliche lichtelektrische Frage" ist: „Wie geht die direkte Wirkung des Lichtes von dessen Absorption bis zur Abspaltung des Elektronen vor sich?" Einer für den Anfänger wichtigen Festlegung der Terminologie folgt eine Darlegung des Fortleitungsprozesses der ausgelösten Lichtelektrizität in dem Gase. Dieses hier, prinzipiell, anzuschließende große Gebiet der Gasleitung ist in Rücksicht auf Band I nur kurz behandelt. Es werden sodann die Meßmethoden der lichtelektrischen Elektronenstrahlung und ihre Fehlerquellen erörtert; dann findet man behandelt: Erstenergien sowie ionisierende Wirkung, freie Weglänge und Absorption der lichtelektrischen Elektronen; lichtelektrische Kanalstrahlen. Der nächste Abschnitt bringt die „Abhängig-

1) Besprechung diese Zeitschr. **10**, 1159, 1909.



keit der primären Endprodukte des lichtelektrischen Prozesses von den Eigenschaften des Lichtes und der Umgebung". Stärke des Lichtes, Absorption, Wellenlänge, Polarisationszustand und Einfallswinkel gelangen zur Besprechung und namentlich auch der selektive Photoeffekt wird eingehend beschrieben; ferner: Longitudinalwirkungsfrage, Eindringtiefe und deren Beziehung zur Temperatur. Auf die einzelnen Körperklassen und Substanzen geht Kapitel VII ein. Nach Behandlung der Gase widmet sich der Verfasser eingehend den Metallen: nächst den einzelnen Effekten gelangen die Beziehungen zu anderen physikalischen Parametern, sowie die lichtelektrische Ermüdung, der Einfluß der Gase und die speziellen Oberflächenprozesse zur Darlegung. Auch Flüssigkeiten und Lösungen sowie verschiedene Metallverbindungen, Nichtleiter und anderes finden hier Beachtung.

Sehr willkommen ist ein Abschnitt „Besondere lichtelektrische Erscheinungen und Nachbargebiete der Lichtelektrizität". Phosphoreszenz und Fluoreszenz, namentlich die bedeutsamen neueren Arbeiten von Lenard und Mitarbeitern, welche zu engem Zusammenhang mit lichtelektrischen Vorgängen geführt haben, findet man hier behandelt; auch über Leitfähigkeitsänderung, photochemische Prozesse, aktinodielektrische Wirkungen (Lenard), Elektronenerzeugung bei chemischen Prozessen u. a. kann man sich orientieren.

Eine beachtenswerte und anregende Zusammenstellung theoretischer Arbeiten bringt das 9. Kapitel: „Über den lichtelektrischen Grundprozeß, Versuch einer speziellen Deutung der lichtelektrischen Vorgänge", welches jedem Physiker, der sich für Atommodelle und damit verbundene Fragen interessiert, willkommen sein durfte.

Die „praktische Lichtelektrizität" endlich bezieht sich sowohl auf die experimentellen Hilfsmittel als auf Anwendungen und ist sehr beachtenswert.

Äußere Umstände haben es mit sich gebracht, daß in einem umfangreichen Nachtrage lichtelektrische Arbeiten vom 31. VII. 1913 bis Ende 1913 und sonstige Ergänzungen zusammengestellt sind (von Hallwachs), sowie daß Herr Marx selbst in einem Anhang die Entwicklung der Lichtelektrizität von Januar 1914 bis Oktober 1915 referiert hat. (Hier sind z. B. auch die Arbeiten von Fredenhagen, Küstner und Germershausen noch erwähnt.) Da der Zusammenhang mit dem Vorhergehenden durch Hinweise gut hergestellt ist, so kann man das kaum als Nachteil bezeichnen: es hat sogar den Vorteil, die neuesten Forschungsinteressen besser hervortreten zu lassen. — Schließlich sei auf die vorzügliche Literaturübersicht am Ende des Buches sowie die sorgfältigen Register hingewiesen. H. Hörig.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden. gr. 8°. Leipzig, B. G. Teubner. Band 5₃, Heft 3: M. v. Laue, Wellenoptik. Mit einem Beitrag über spezielle Beugungsprobleme von P. S. Epstein. 167 S. 1915. M. 5.20.

Der Artikel von M. v. Laue behandelt das Gebiet in 5 Abschnitten [I. Einleitung; II. Superposition von Sinusschwingungen von gleicher Frequenz; III. Superposition von Sinusschwingungen ungleicher Frequenz; Spektrum; Beziehungen zur Thermodynamik; IV. Allgemeine Theorie der Beugung; V. Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen], deren Überschriften die Gliederung des Stoffes erkennen lassen. In der Einleitung wird besonders der Frage nach der Definition der Intensität, über die man meistens vielsagend schweigt, die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt, auch ein wichtiger Zusammenhang mit der Definition der Planckschen natürlichen Strahlung hervorgehoben. Im Abschnitt II werden zunächst die einfachsten Interferenzerscheinungen behandelt (Newtonsche Ringe, Fresnelscher Spiegel, bei letzterem besonders interessant und wichtig, weil durch keine Beugungserscheinung gestört, die Anordnung von Righi), Kurven gleicher Neigung an planparallelen Platten, die durch ihre Beziehung zum V. Abschnitt wichtigen Queteletschen Ringe, das Michelsonsche Interferometer, Beugungsgitter und Stufengitter, schließlich auch einige Angaben über Interferenz elektrischer Wellen, die freilich etwas lückenhaft sind.

Der Abschnitt III bespricht zunächst die Lichtschwebungen, das Auflösungsvermögen, homogene und natürliche Strahlung, spektrale Zerlegung; bei Kohärenz und Inkohärenz spielt die Thermodynamik herein, was im Anschluß an eine bekannte Arbeit des Verfassers behandelt wird. Schließlich werden Michelsons Arbeiten über die „Sichtbarkeitskurven" diskutiert, wobei ich den Hinweis auf eine wichtige Arbeit von J. Koch vermißt habe, der eine solche zuerst bolometrisch aufgenommen hat.

Im IV. Abschnitt behandelt v. Laue zuerst das elementare Huygenssche Prinzip, dann dessen exakte Formulierung durch Kirchhoff, schließlich eine Reihe von einfachen Beugungserscheinungen; dann folgt die Lehre von der Abbildung im Sinne der Wellenlehre und, im Anschluß an eine jüngere Arbeit v. Laues, die Erörterung des Problems der Freiheitsgrade optischer Vorgänge.

Das V. Kapitel behandelt in Anlehnung an des Verfassers berühmte Arbeiten die Interferenz der Röntgenstrahlen, die derartig bekannt sind, daß hier ein genaueres Eingehen sich erübrigt.

Die Darstellung ist kurz und klar, hebt überall das Wesentliche hervor und stellt somit eine wertvolle Bereicherung der physikalischen und mathematischen Literatur vor, für die wir dem Verfasser zu Dank verpflichtet sind.

Nicht auf derselben Höhe steht der Anhang über spezielle Beugungsprobleme von Epstein, der als Ergänzung zum Laueschen Abschnitt IV gedacht ist. Die Darstellung hätte meines Erachtens durch eine intensivere Berücksichtigung und Zitierung der Literatur nicht unerheblich gewinnen können. Da es sich hier um ein Gebiet handelt, auf dem ich selbst gearbeitet habe, so sei es mir gestattet, dieses Urteil kurz zu begründen. Es handelt sich im Epsteinschen Artikel nicht um angenäherte Lösungen des Beugungsproblems nach der Kirchhoffschen Formel, sondern um strenge Lösungen der Maxwellschen Gleichungen nebst zugehörigen Randbedingungen. Mit Recht ist der größte Raum den Arbeiten Sommerfelds (und seiner Nachfolger) über die Beugung an einer absolut blanken Halbebene (usw.) eingeräumt, da diese Methode mathematisch das größte Interesse bietet; dann folgen die mittels der Methode der krummlinigen Koordinaten gelösten Probleme (Kreiszylinder, elliptischer Zylinder, parabolischer Zylinder, Kugel). Bezüglich der Beugung am dielektrischen Kreiszylinder wird allerdings auf eine Arbeit von Schaefer hingewiesen: aber das ist nur eine vorläufige Mitteilung, und die aus-

führliche Arbeit nebst experimentellen Belegen von Schaefer und Großmann wird nicht genannt. Auch fehlt jeder Hinweis darauf, daß gerade der dielektrische Zylinder Besonderheiten zeigt, die dem metallischen fehlen. Bei Besprechung der Kugel in Anlehnung an Arbeiten von Mie und Debye wird die Farbe kolloidaler Lösungen besprochen; hier wäre m. E. der Ort gewesen, einmal die Begriffe „Resonanz", „Beugung", „Reflexion", die in der Literatur vielfach in unklarem Gegensatze zueinander gebraucht werden, gegeneinander abzugrenzen, wobei das eigentliche Problem schärfer hervorgetreten wäre; der Name Pockels, der zuerst die Verhältnisse klar erkannt hat, fehlt hier leider vollständig. Eine (nicht ausreichende) Arbeit von Maxwell-Garnett wird genannt, die wichtige Untersuchung von Gans und Happel dagegen nicht erwähnt, ebensowenig wie die analoge Untersuchung für ein aus Zylindern bestehendes Medium von Schaefer und Stallwitz. Schließlich wird noch die polarisierende Wirkung von Gittern behandelt. Dabei werden als Literatur zum Hertzschen Gitter zwei Arbeiten von J. J. Thomson und H. Lamb gegeben, dagegen fehlt wieder der Hinweis auf die experimentellen Untersuchungen von Godfrey H. Thomson und Schaefer und Laugwitz, durch die erstere Theorie widerlegt, letztere bestätigt wurde. Der Verfasser macht sich auch die von mir eingeführten Bezeichnungen „Hertzeffekt" und „Duboiseffekt" zu eigen, der Hinweis auf die Arbeit fehlt aber. Schließlich werden die Resultate von Dubois und Rubens über die Inversion der Gitterwirkung erwähnt, dabei aber das eigentliche Problem, das für die Theorie noch besteht, gar nicht erwähnt. Die Braunschen Versuche über Hertzsche Gitterwirkung im Sichtbaren werden ebenfalls mit Stillschweigen übergangen, (obwohl sie in einem gewissen Gegensatz zu den Dubois-Rubensschen stehen), ebenso wie die Arbeit von Schaefer und Reiche, die sich damit und mit der Gitterinversion befaßt.

Diese Stichproben erwecken das Gefühl, daß der Artikel im einzelnen die notwendige Zuverlässigkeit vermissen läßt, und in der Tat könnte man in der obigen Weise noch länger fortfahren. Doch soll darüber nicht vergessen werden, daß auch hier die Darstellung klar ist und im ganzen gut orientiert.

C. Schaefer.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Bd. II. Elektromagnetische Theorie der Strahlung. gr. 8°. 3. Auflage. X. u. 402 S. mit 11 Abbildungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1914. Gebunden M. 11.—.

Max Abrahams Theorie der Elektrizität nimmt ohne Zweifel unter den Lehrbüchern der Elektronentheorie eine beherrschende Stellung ein. Wie Abraham wohl als erster in diesem Werk eine umfassende Darstellung des ganzen Gebietes gab, die sich durch Form und Inhalt gleich auszeichnete, so ist er bemüht gewesen, auch die späteren Auflagen nach Möglichkeit den modernen Entwicklungen der Theorie anzupassen. Auch die hier vorliegende dritte Auflage zeigt den früheren gegenüber mehrfach Veränderungen und Erweiterungen.

So ist der Satz vom Impulse des Energiestroms und von der Trägheit der Energie eingehender behandelt und unabhängig vom Relativitätsprinzip aufgestellt worden. Ihm tritt an die Seite der Satz von der Schwere der Energie, der sich auf die Gleichheit der schweren und der trägen Masse stützt, und die Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde zur Folge hat. Ein tieferes Eingehen auf die modernen Gravitationstheorien war natürlich im Rahmen des vorliegenden Buches unmöglich.

Auch die Elektrodynamik der bewegten Körper hat eine Veränderung erfahren. In den Grundgleichungen treten hier neben den bekannten Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Hilfsvektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ auf, die die Kräfte darstellen, welche das Feld auf bewegte elektrische und magnetische Einheitspole ausübt. Die verschiedenen Theorien unterscheiden sich dann nur durch die verschiedene Verknüpfungsweise der 4 Vektoren $\mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$. Die Experimentaluntersuchungen von Eichenwald und Wilson schränken diese Verknüpfungsgleichungen ein und führen so zu den drei möglichen Theorien von H. A. Lorentz, E. Cohn und H. Minkowski, die sich nur in Größen zweiter Ordnung unterscheiden. Allein die Minkowskischen Gleichungen genügen dem Relativitätsprinzip und erfüllen in der von Abraham modifizierten Form den Satz vom Impulse des Energiestroms. So lehrreich an sich dieser historische Entwicklungsgang ist, der die Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper auf Grund der Eichenwald-Wilsonschen Untersuchungen verwerfen mußte, dagegen die Entscheidung zwischen den drei genannten Theorien vom Standpunkt der reinen Elektrodynamik aus offen läßt, so sehr ist es andererseits, nach der Meinung des Referenten, zu bedauern, daß der Verfasser nicht die ganze Elektrodynamik bewegter Körper auf den Boden des Relativitätsprinzips gestellt hat. Die Einheitlichkeit und Eindeutigkeit geht so doch etwas verloren, und das Relativitätsprinzip scheint eher ein Anhängsel der Theorie als ein der Elektrodynamik übergeordnetes Prinzip zu sein.

Die hauptsächlichste Neuerung gegenüber der vorigen Auflage besteht in der ausführlichen Darstellung der Theorie des Magnetismus. Besonders ist die eingehende und schöne Bearbeitung des Feldes und der Strahlung des Magnetons mit Freude zu begrüßen. Aus ihr entwickeln sich konsequent die Langevinsche Theorie des Paramagnetismus und die Weißsche Theorie ferromagnetischer Stoffe.

F. Reiche.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der wissenschaftliche Hilfsarbeiter Dr. Erich Kron beim Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam zum Observator, der Privatdozent an der Universität Kiel Dr. Alexander Wilkens zum a.o. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte an der Universität Prag, der etatsmäßige Professor für Physikalische Chemie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Hans von Wartenberg zum etatsmäßigen Professor für anorganische Chemie an derselben Hochschule.

Gestorben: Der Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam ord. Honorarprofessor für Astrophysik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Karl Schwarzschild, der Dozent für Chemie an der Akademie in Posen Professor Dr. Emil Wörner, der ord. Professor der Organischen Chemie an der Sorbonne und dem Collège de France Emil Clément Jungfleisch in Paris, der emer. Professor der analytischen Chemie an der Böhmischen Technischen Hochschule in Prag Hofrat Dr. Karl Preis, der Ingenieur und Inhaber einer Werkstätte für Präzisionsmechanik Martin Bornhäuser in Ilmenau, der a.o. Professor für Chemie an der Universität München Dr. Oskar Piloty (gefallen am 6. Oktober 1915), der a.o. Professor für Mathematik an der Universität Zürich Dr. Adolf Weiler.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikal

H. Hör

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11. | 1. Juni 1916. Redaktionsschluß für No. 12 am 10. Juni 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Quantenbeziehungen beim photoelektrischen Effekt.

Von R. A. Millikan.

In den letzten zehn Jahren war ich mit Untersuchungen beschäftigt, die sich auf die Einsteinsche Gleichung des photoelektrischen Effekts bezogen und für sie experimentelle Bestätigung geben sollten. Zeitweise schienen mir die Ergebnisse unvereinbar mit jener Gleichung; aber je länger ich arbeitete und je besser die Fehlerquellen vermieden werden konnten, desto besser ergab sich jene Formel als im Einklang mit den Resultaten. Ich will in dieser Notiz nur ganz kurz sechs Folgen dieser Gleichung vorlegen und von ihrer experimentellen Bestätigung sprechen. Vorläufige Mitteilungen einiger dieser Resultate sind bereits erschienen[1]) und genauere Einzelheiten sollen in den nächsten Nummern der „Physical Review“ gebracht werden.

Die Einsteinsche Gleichung[2]) wurde abgeleitet auf Grund einer korpuskularen Quantentheorie der Strahlung. Einstein nahm an, daß das Licht aus Elementarteilen oder „Quanten“ von elektromagnetischer Energie besteht, die vom emittierenden Körper losgeschossen werden und den Raum als selbständige Individuen durcheilen, bis sie auf Atome auftreffen und von diesen absorbiert werden. Die Energie in jedem Lichtelement wurde gleich $h\nu$ gesetzt, wo h das Plancksche Wirkungsquantum und ν die Frequenz des emittierenden Oszillators ist. Bei der Absorption soll nun diese Energie umgesetzt werden in kinetische Energie eines sich loslösenden Elektrons. So ergab sich die Abtrennungsarbeit eines Elektrons von einer Metallfläche, die mit Licht von der Frequenz ν bestrahlt wird, aus:

$$\frac{m}{2}v^2 = h\nu - p.$$

p ist hier die Arbeit, die man leisten muß, um das Elektron loszulösen. Die maximale Energie des bewegten Elektrons wird gemessen durch $(V_0 + K)e$, wo e die Elementarladung ist und K das Kontaktpotential zwischen der bestrahlten Fläche und dem entgegengesetzten Faradayzylinder (der die Elektronen auffängt). V_0 ist das angelegte Potential, um gerade den Photostrom im Zylinder zum Verschwinden zu bringen. In der Gleichung sind folgende Behauptungen enthalten:

1. Es existiert eine bestimmte maximale kinetische Energie der losgelösten Teilchen (das wurde von Ramsauer[1]) bestritten).

2. Es besteht eine lineare Beziehung zwischen V_0 und ν.

3. Die Neigung der V_0, ν-Geraden mit e multipliziert ist genau das Plancksche „h“.

4. Der Schnittpunkt der V_0, ν-Geraden mit

1) R. A. Millikan, Physical Review **4**, 73, 1914; **6**, 55, 1915.
2) Einstein, Ann. d. Phys. (4) **17**, 132, 1905; (4) **20**, 199, 1906.

1) Ramsauer, Ann. d. Phys. **45**, 1120, 1914, auch **45**, 961.

der ν-Achse gibt die Grenzfrequenz ν_0, bei der die beleuchtete Substanz anfängt, photoelektrisch zu werden.

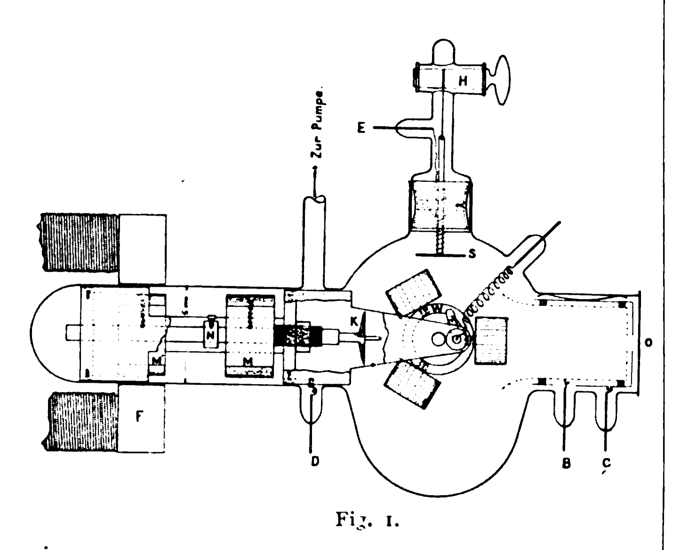


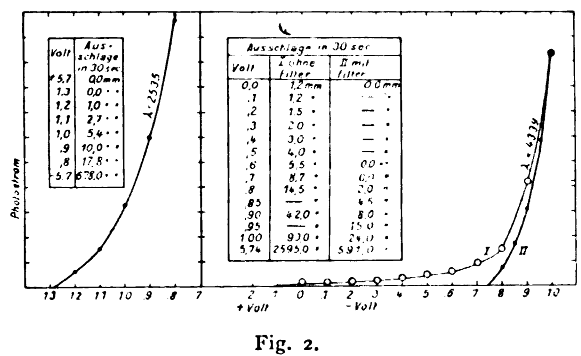
Fig. 1.

5. Das Kontaktpotential zwischen der bestrahlten Platte und dem Faradayzylinder ist gegeben durch:

$$K = \frac{h\nu_0 - h\nu_0'}{c} - (V_0 - V_0').$$

ν_0 und ν_0' sind die Grenzfrequenzen des Zylinders bzw. der Platte, V_0 und V_0' die entsprechenden Maximalpotentiale, die nötig sind, um die Entladung zwischen Zylinder und Platte zum Verschwinden zu bringen bzw. zwischen Zylinder und einer anderen Platte aus gleichem Material wie der Zylinder.

6. Die Kontaktpotentiale sind unabhängig von Temperatur. Dies folgt aus der Einsteinschen Gleichung zusammen mit der Tatsache[1]),



Volt	Ausschläge in 30 sec
+ 5,7	0,0 mm
1,3	0,0 „
1,2	1,0 „
1,1	2,7 „
1,0	5,4 „
,9	10,0 „
,8	17,8 „
− 5,7	678,0 „

Volt	Ausschläge in 30 sec: I ohne Filter	II mit Filter
0,0	1,2 mm	0,0 mm
,1	1,2 „	— „
,2	1,5 „	— „
,3	2,0 „	— „
,4	3,0 „	— „
,5	4,0 „	— „
,6	5,5 „	0,0 „
,7	8,7 „	0,0 „
,8	14,5 „	2,0 „
,85	— „	4,5 „
,90	42,0 „	8,0 „
,95	— „	15,0 „
1,00	93,0 „	24,0 „
5,74	2595,0 „	591,0 „

Fig. 2.

daß die photoelektrischen Potentiale von der Temperatur nicht abhängen. Sind jedoch Oberflächenschichten vorhanden, die eine Änderung der Photopotentiale mit der Temperatur hervorrufen, so entspricht dem ebenso eine Änderung des Kontaktpotentials.

Die Untersuchungen sind mit dem Apparat in Fig. 1 durchgeführt. Es können damit reine

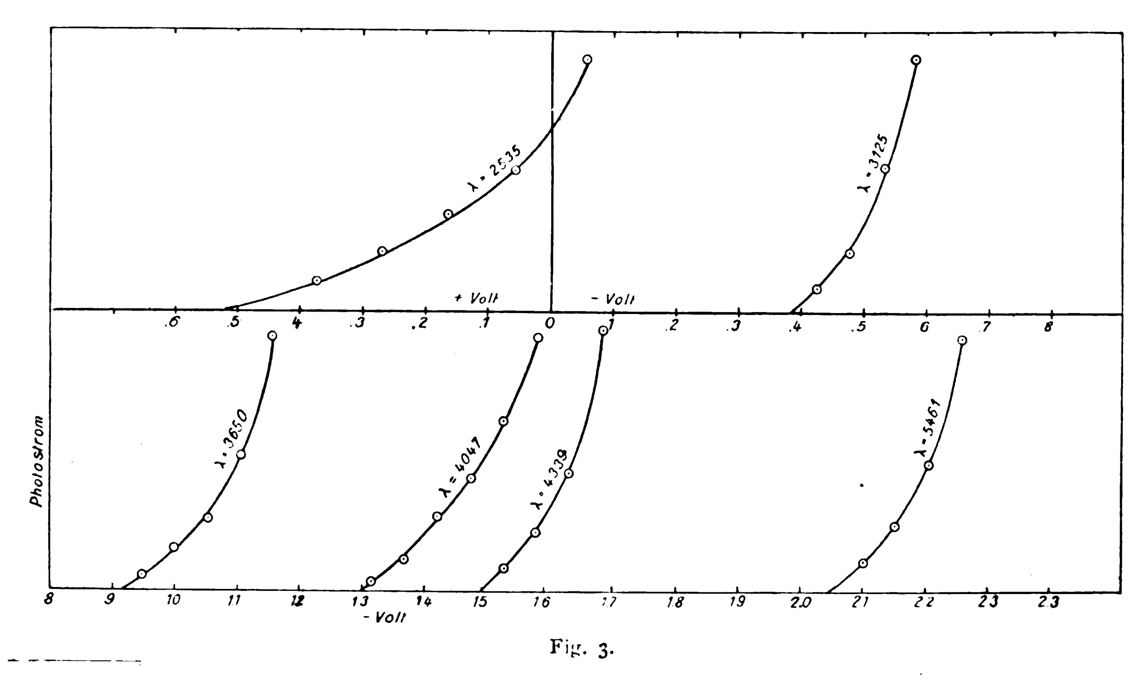


Fig. 3.

1) Millikan u. Winchester, Phys. Review 24, 16, 1906; Phil. Mag. (6) 14, 188, 1907.

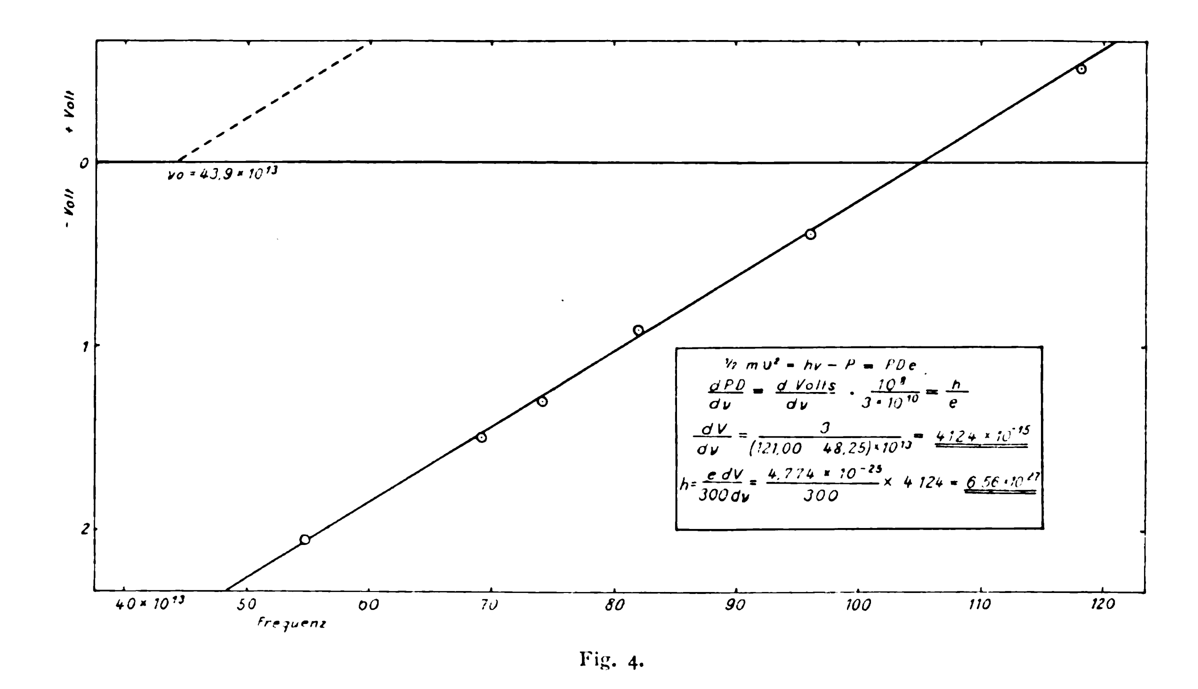


Fig. 4.

neue Oberflächen von *K*, *Na*, *Li* hergestellt werden durch Schaben im extremsten Vakuum und sofort nachher Photoströme und Kontaktpotentiale gemessen werden.

Auf den Beschauer zu gerichtet, hat die Röhre einen Ansatz (in der Figur nicht zu sehen), so daß das Rad *W* durch einen Elektromagneten ähnlich wie *F* und einen dritten Anker ähnlich *M* und *M'* gedreht werden kann. Die Zahlen für *Li* in Fig. 2 bestätigen Behauptung 1. Der Unterschied zwischen den Kurven I und II (die mit der *Hg*-Linie 4339 bekommen wurden) zeigt, wie die wahre Photostrom-Spannungskurve II völlig gefälscht wurde durch ein wenig zerstreutes kurzwelliges Licht (siehe I). Erst ein Äskulinfilter, das alle Wellen kürzer als 4339 absorbiert, beseitigte dies.

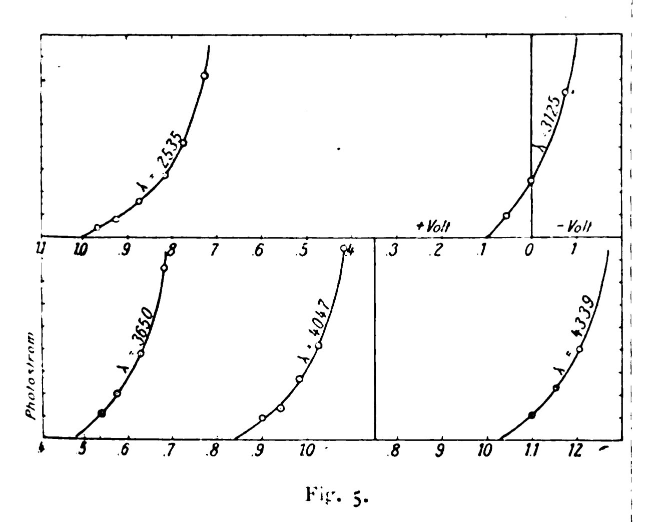


Fig. 5.

Behauptungen 2 und 3 sind gestützt auf die Figuren 3 und 4. Die letztere stellt die Maximalspannungen von 3 abhängig von ν dar. Beide Figuren beziehen sich auf Messungen an *Na*, bei dem die Sättigungsströme 15—500 mal größer sind als die Stromwerte in Fig. 3. Letztere entsprechen einem Ausschlag von 80 mm pro 30 Sek.

Ähnliche Messungen an *Li* sind in Fig. 5 und 6 dargestellt. Der Mittelwert der Planckschen Konstanten, die so photoelektrisch bestimmt wird, kann einen Fehler größer als 0,5 Proz. nicht enthalten. Es ist:

$$h = 6{,}57 \cdot 10^{-27},$$

wenn der hier benützte e-Wert der des Autors $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ ist.

Die Richtigkeit der Behauptung 4 ist in Fig. 6 gezeigt. Es fällt der Schnittpunkt $\nu_0 = 57{,}0 \cdot 10^{13}$ (gestrichelte Linie) zusammen mit dem direkt aus den Sättigungsströmen bestimmten Werten (siehe rechte Ecke von Fig. 6). Um den ν_0-Wert zu erhalten, wurde die V_0, ν-Gerade in Richtung der positiven Potentiale um den Wert des Kontaktpotentials verschoben. Im Falle des *Na* entspricht das $\nu_0 = 43{,}7 \cdot 10^{13}$ in Fig. 3 der Wellenlänge 0,68 μ. Eine direkte Bestimmung dieser langen Grenzwellenlänge für

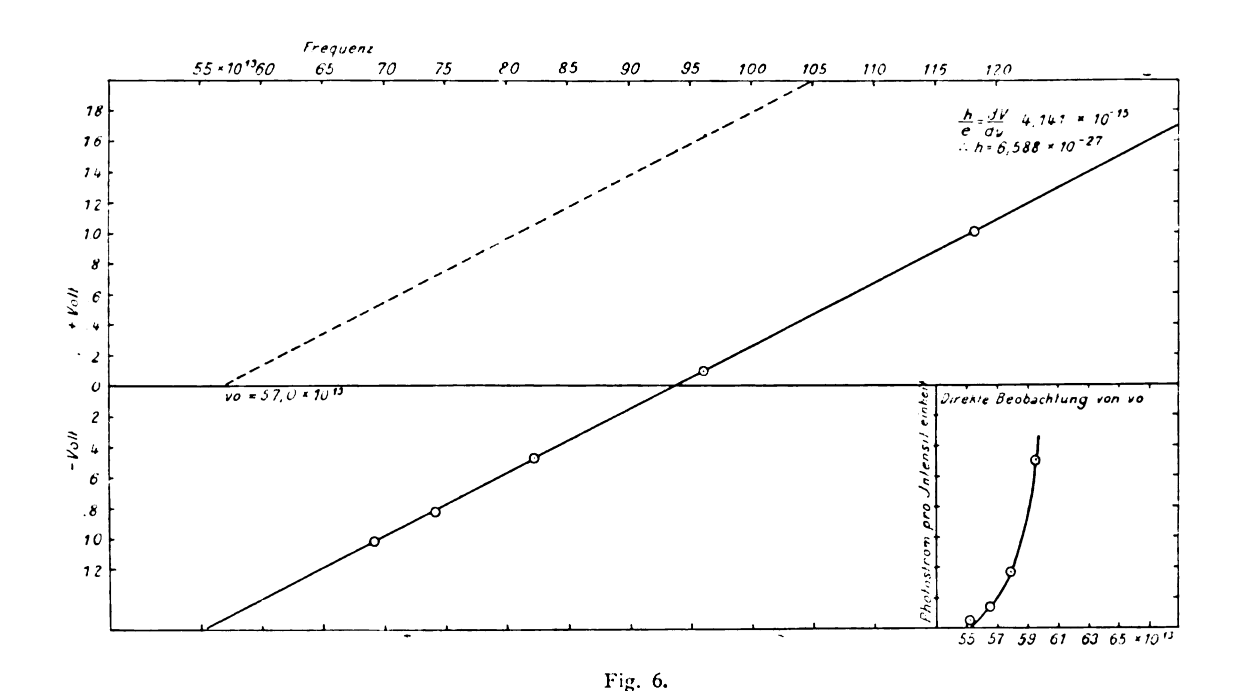


Fig. 6.

Na liefert Fig. 7; die Übereinstimmung ist eine völlige. Fig. 8 zeigt eine Bestimmung von h und ν_0 aus den Werten von Fig. 2.

Behauptung 5 wurde für zwei verschiedene Flächen, Li und Na, geprüft; das aus der Gleichung in 5 berechnete Kontaktpotential stimmte in jedem Falle mit dem direkt gefundenen bis auf 2 Proz. Einzelheiten dieser Nachweise findet man in Physical Review[1]).

Satz 6 wurde in dieser Arbeit nicht untersucht, aber Schottky[2]) hat kürzlich die Kontaktpotentiale zwischen heißen Platten und kalten Zylindern bestimmt und gefunden, daß unter Berücksichtigung der Unsicherheit der Beobachtungen Übereinstimmung herrscht mit dem Kontaktpotential der Metalle bei gewöhnlicher Temperatur.

Es scheint also, soweit die experimentelle Untersuchung bis jetzt fortgeschritten ist, daß die Einsteinsche Gleichung die Energie der Elektronenemission bei Lichtbestrahlung exakt wiedergibt. Nichtsdestoweniger erscheint mir die physikalische Theorie, auf die sich die Gleichung aufbaut, gänzlich unhaltbar. Sei dies, wie dem auch sei, jedenfalls sind die Ergebnisse des photoelektrischen Effekts, die hier vorgelegt sind, die beste Bestätigung für die Richtigkeit der fundamentalen Annahme der Quantentheorie, nämlich daß Energie von Elektronenoszillatoren

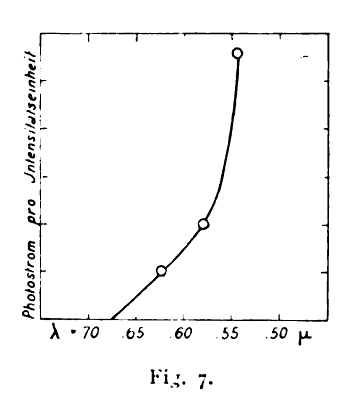


Fig. 7.

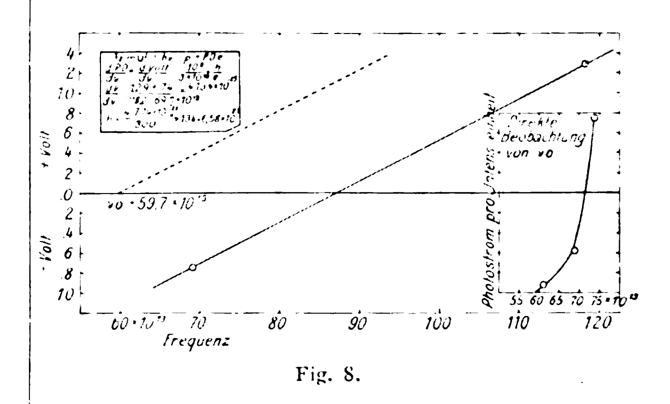


Fig. 8.

1) Millikan, Physical Review 2, 143, 1913.
2) Schottky, Ann. d. Phys. 44, 1011, 1914.

diskontinuierlich emittiert wird. Sie sind die unmittelbarsten und schlagendsten Beweise, die man bisher für die wirkliche physikalische Realität des Planckschen h erhalten hat.

Ryerson Physical Laboratory, University of Chicago.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übertragen von J. Engl.)

(Eingegangen 12. April 1916.)

Zur Theorie des Wechselstrom-Gleichstromeffektes und der elektrischen Nachwirkung im Wismut.

Von T. Heurlinger.

Für den Wechselstrom-Gleichstromeffekt, der bekanntlich in Wismutdrähten ausführlich untersucht, in Drähten aus Antimon und Tellur wenigstens nachgewiesen ist, und für die in denselben Elementen auftretende elektrische Nachwirkung liegt eine befriedigende Erklärung noch nicht vor[1]). Es scheint mir wenigstens als Vorarbeit notwendig, diejenigen Effekte annähernd zu berechnen und mit den beobachteten zu vergleichen, welche unter den betreffenden Versuchsbedingungen infolge der galvano- und thermomagnetischen Erscheinungen zu erwarten sind. Freilich wurde bekanntlich P. Lenard[2]) durch seine Versuche zu dem Schlusse geführt, daß diese Erscheinungen keinen zu berücksichtigenden Anteil an der von ihm entdeckten Widerstandsänderung haben. Nach der folgenden Berechnung sind aber bei genügend schlechter äußerer Wärmeleitung ein Wechselstromeffekt und eine elektrische Nachwirkung von durchaus derselben Größenordnung wie die beobachteten zu erwarten. Eine Vermutung über die Ursache dieses Widerspruchs wird unten ausgesprochen. Messungen, welche sowohl eine schärfere Prüfung der Theorie als eine Aufklärung dieses Punktes ermöglichen sollen, sind im hiesigen Institute in Vorbereitung.

I. Berechnung der theoretisch zu erwartenden Effekte.

1. Zunächst werden wir die Voraussetzungen und die zu lösenden Probleme formulieren. — Wir betrachten einen homogenen und isotropen, metallischen Leiter, der sich in einem homogenen Magnetfelde befindet[1]) und nehmen an, daß die stationäre Elektrizitäts- und Wärmeströmung durch folgende Gleichungen beschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}&=0,\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}&=0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0, \quad (2)$$

$$X j_x+Y j_y+Z j_z-\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}+\frac{\partial W_y}{\partial y}+\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)=0, \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} X&=a_{11} j_x+a_{12}\frac{\partial u}{\partial x}-b_{11} j_y-b_{12}\frac{\partial u}{\partial y},\\ Y&=a_{11} j_y+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{11} j_x+b_{12}\frac{\partial u}{\partial x},\\ Z&=a'_{11} j_z+a'_{12}\frac{\partial u}{\partial z},\\ W_x&=a_{21} j_x+a_{22}\frac{\partial u}{\partial x}-b_{21} j_y-b_{22}\frac{\partial u}{\partial y},\\ W_y&=a_{21} j_y+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{21} j_x+b_{22}\frac{\partial u}{\partial x},\\ W_z&=a'_{21} j_z+a'_{22}\frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Es ist hier vorausgesetzt, daß die z-Achse in der Richtung der magnetischen Feldstärke liegt, und es bedeuten: u die Temperatur (relativ zur Umgebung), $X, Y, Z, j_x, j_y, j_z, W_x, W_y, W_z$ die Komponenten der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte und der Dichte des Wärmestroms. Die Koeffizienten in (4) sind Funktionen der absoluten Temperatur (T), der magnetischen Feldstärke (H) sowie der chemischen Natur des Leiters[2]).

An der Oberfläche kann angenommen werden:

---

1) Eine Übersicht über die wichtigste Literatur findet sich in den Dissertationen von R. Seidler und J. Geipel (Leipzig 1909 und 1911). Siehe auch J. Brentano (Diss. München 1914).

2) P. Lenard, Wied. Ann. 39, 619, 1890.

1) Von dem mit der Elektrizitätsströmung verknüpften Magnetfelde sehen wir ab.

2) Vgl. T. Heurlinger, Ann. d. Phys. 48, 84, 1915. Die Gleichungen des isothermen Halleffektes sind bekanntlich ausführlich untersucht; siehe z. B. F. Koláček (Ann. d. Phys. 39, 1491, 1912), wo die ältere Literatur zitiert wird, ferner O. Corbino (Cim. 9, 13, 1915) und V. Volterra, ibid. 23. Einen Fall von kombinierter Elektrizitäts- und Wärmeströmung hat L. Boltzmann (Wied. Ann. 31, 755, 1887) annähernd behandelt.

$$j_n = 0, \tag{5}$$

$$W_n = hu, \tag{6}$$

wo h eine positive Funktion von T und u, n die vom Leiter nach außen gezogene Normale bedeutet.

Die folgenden Berechnungen beziehen sich auf einen Draht von kreisförmigem Querschnitt (Radius R) und so schwacher Krümmung, daß er als Zylinder (parallel der x-Achse) betrachtet werden kann. Wir werden die Elektrizitäts- und Wärmeströmung in drei verschiedenen Fällen untersuchen: 1. während eine konstante Spannung zwischen den Endflächen des Drahtes herrscht (bei Gleichstrom), 2. nach dem Ausschalten des Gleichstromes, 3. während eine sinusförmige Wechselspannung zwischen den Enden des Drahtes herrscht. Durch geeignete Zu- und Abfuhr von Wärme an den Endflächen sei bewirkt, daß der Temperaturgradient in der Längsrichtung des Drahtes ohne Bedeutung wird. Statt die Randbedingungen an den Endflächen einzuführen, können wir dann von x unabhängige Lösungen suchen. Wir können nämlich den Draht als so lang und dünn voraussetzen, daß die komplizierten Verhältnisse in der Nähe der Endflächen ohne Bedeutung werden.

Bei der Untersuchung der nicht stationären Strömung in den Fällen 2 und 3 ersetzen wir (3) durch:

$$Dc\frac{\partial u}{\partial t} = Xj_x + Yj_y + Zj_z - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}\right), \tag{7}$$

wo D die Dichte, c die spezifische Wärme bedeutet, behalten aber die übrigen Gleichungen unverändert bei, d. h. betrachten den Zustand als stationär in elektrodynamischer Hinsicht. Die Berechnungen im Falle 3 gelten deshalb nur für niedrige Frequenzen, was für unseren Zweck völlig ausreicht. Ferner können wir im Falle 2 nicht die rasch veränderliche Spannung während der ersten Momente nach dem Ausschalten der Stromquelle untersuchen. Diese wird aber auch nicht beobachtet und ist ohne Interesse.

2. Wir machen jetzt einige Umformungen, welche für alle drei Fälle gelten. — Da alle Größen unabhängig von x sind, ist X nach (1) auch unabhängig von y und z. (2) und (5) werden befriedigt durch:

$$j_y = \frac{\partial v}{\partial z},\ j_z = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

und

$$v = 0 \text{ für } r = R, \tag{8}$$

wenn $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Da $\partial u/\partial x = 0$, folgt aus (4):

$$a_{11} j_x = X + b_{11}\frac{\partial v}{\partial z} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= a''_{11}\frac{\partial v}{\partial z} + a''_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_{11}}{a_{11}}X, \\ Z &= -a'_{11}\frac{\partial v}{\partial y} + a'_{12}\frac{\partial u}{\partial z}, \\ W_y &= a''_{21}\frac{\partial v}{\partial z} + a''_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_{21}}{a_{11}}X, \\ W_z &= -a'_{21}\frac{\partial v}{\partial y} + a'_{22}\frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}\right|$$

wo:

$$a''_{12} = a_{11} + \frac{b_{11}b_{11}}{a_{11}},\quad a''_{21} = a_{21} + \frac{b_{21}b_{11}}{a_{11}}$$

$$a''_{11} = a_{12} + \frac{b_{11}b_{12}}{a_{11}},\quad a''_{22} = a_{22} + \frac{b_{21}b_{12}}{a_{11}}.$$

Sind die elektrische Feldstärke und der Querschnitt hinreichend klein, so werden die Temperaturunterschiede im Querschnitt so klein, daß die Temperaturabhängigkeit der Koeffizienten vernachlässigt werden kann. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich durch Einsetzen in (1), (7), (6):

$$a'_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a''_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (a''_{12} - a'_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Dc\frac{\partial u}{\partial t} &= -a''_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a'_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &\quad - (a''_{21} - a'_{21})\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} + \frac{1}{a_{11}}X^2 + a'_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ &\quad + a''_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + a''_{12}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} - a'_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad + 2\frac{b_{11}}{a_{11}}X\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{b_{12}}{a_{11}}X\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{11}$$

und für $r = R$:

$$\begin{aligned} &\left[a''_{21}\frac{\partial v}{\partial z} + a''_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_{21}}{a_{11}}X\right]\frac{y}{R} \\ &+ \left[-a'_{21}\frac{\partial v}{\partial y} + a'_{22}\frac{\partial u}{\partial z}\right]\frac{z}{R} = hu, \end{aligned} \tag{12}$$

oder mit Rücksicht auf (8):

$$\begin{aligned} &-a''_{22}\frac{\partial u}{\partial r} + hu - \frac{b_{21}}{a_{11}}X\frac{y}{R} \\ &+ (a''_{22} - a'_{22})\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{z}{R} + (a'_{21} - a''_{21})\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{z}{R} = 0, \end{aligned} \tag{12'}$$

während aus (9) folgt:

$$a_{11}\overline{j_x} = X + b_{12}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}, \tag{13}$$

wo $\overline{j_x}$ und $\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}$ die über den Querschnitt genommenen Mittelwerte von j_x und $\frac{\partial u}{\partial y}$ bezeichnen.

Wir suchen angenäherte Lösungen der Gleichungen (8), (10) bis (13), welche den drei formulierten Problemen entsprechen.

3. Bei Gleichstrom sind alle Größen von t unabhängig, X ist bekannt. Wir machen den Ansatz:

$$u = \sum_1^\infty u_n X^n, \quad v = \sum_1^\infty v_n X^n$$

und erhalten nach Einsetzen in (8), (10) bis (12) Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Randbedingungen, woraus die u_n und v_n sukzessive bestimmt werden können. Man verifiziert leicht, daß alle Bedingungen befriedigt werden durch:

$$u = \frac{b_{21}}{a_{11}(k+Rh)} yX + (A + By^2 + Cz^2)X^2 + (Ey + Fyz^2 + Gy^3)X^3 + \ldots,$$
$$v = (r^2 - R^2) Dz X^3 + \ldots,$$

wo die Koeffizienten $A, \ldots G$ durch Gleichungen ersten Grades bestimmt werden und k für $-a''_{22}$ geschrieben ist, um anzudeuten, daß diese Größe die Rolle der inneren Wärmeleitfähigkeit spielt. Bei Vernachlässigung von $Rh k$ und Größen, die nach der Erfahrung beim Wismut klein sind, wird:

$$\overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)} = -\frac{b_{12} R^2}{8(ka_{11})^2}.$$

Also wird nach (13) annähernd:

$$a_{11}\overline{j_x} = X\left[1 + \frac{b_{12} b_{21}}{a_{11}(k+Rh)} - \frac{1}{8}\left(\frac{b_{12}XR}{ka_{11}}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Das zweite und dritte Glied in den Klammern wachsen etwa in derselben Weise mit H. Eine Schätzung unter Benutzung der Messungen von H. Zahn[1]) lehrt, daß im Wismut bei 10000 Gauß das dritte Glied p Proz. von dem ersten erreicht, wenn

$$XR > 0{,}1\sqrt{p} \text{ (Volt)}.$$

Hiermit haben wir indessen nur eine obere Grenze des Gebietes erhalten, in welchem $\overline{j_x}$ und X proportional sind. Die Temperaturabhängigkeit der Koeffizienten kann Störungen von derselben Größenordnung hervorrufen.

Werden Rh/k und das dritte Glied vernachlässigt, so wird:

$$X = \left(a_{11} + \frac{b_{12} b_{21}}{a_{22}}\right)\overline{j_x},$$

oder mit einer zu unserem Zweck hinreichenden Genauigkeit:

$$X = (a_{11} + PQH^2)\, j_x = \varrho^{(gl)} j_x, \tag{14'}$$

wo P und Q die Koeffizienten des transversalen galvanomagnetischen Temperatureffektes, bzw. thermomagnetischen Potentialeffektes sind. Nach der hier gewählten Definition des Vorzeichens von PQ ist $PQ < 0$ beim Wismut.

4. Wird die Stromquelle ausgeschaltet, so fällt $\overline{j_x}$ auf Null herab, und zwar können wir annehmen, daß $\overline{j_x}$ schon nach einer Zeit, während welcher die Temperaturverteilung merklich unverändert bleibt, vernachlässigt werden kann. Die X-Komponente der Feldstärke, die Temperatur und die Stromfunktion zur Zeit t nach diesem Momente seien $X^{(t)}$, $u^{(t)}$, $v^{(t)}$, während X, u, v dieselbe Bedeutung wie vorher haben mögen. Wie diese befriedigen $X^{(t)}$, $u^{(t)}$, $v^{(t)}$ die Gleichungen (8), (10), (11), (12'), und nach (13) wird:

$$X^{(t)} = -b_{12}\overline{\left(\frac{\partial u^{(t)}}{\partial y}\right)}. \tag{15}$$

Außerdem ist:

$$u^{(0)} = u, \; v^{(0)} = v.$$

Wir machen den Ansatz:

$$u^{(t)} = \sum_1^\infty u_n^{(t)} X^n, \; v^{(t)} = \sum_1^\infty v_n^{(t)} X^n.$$

(15) gibt dann mit Rücksicht auf die Symmetrie:

$$X^{(t)} = -b_{12}\sum_1^\infty \overline{\left(\frac{\partial u^{(t)}_{2n-1}}{\partial y}\right)} X^{2n-1}. \tag{15'}$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung des ersten Gliedes im Ausdruck für $X^{(t)}$, welches bei genügend kleiner Feldstärke allein zur Geltung kommt. Eine weitere Annäherung (die ohne Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Koeffizienten illusorisch wäre) hat vorläufig wenig Interesse.

Zur Bestimmung von $u_1^{(t)}$ und $v_1^{(t)}$ erhalten wir die Gleichungen:

$$a'_{11}\frac{\partial^2 v_1^{(t)}}{\partial y^2} + a''_{11}\frac{\partial^2 v_1^{(t)}}{\partial z^2} + (a''_{12} - a'_{12})\frac{\partial^2 u_1^{(t)}}{\partial y \partial z} = 0, \tag{16}$$

1) H. Zahn, Ann. d. Phys. 14, 886, 1904.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_1^{(t)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1^{(t)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(t)}}{\partial z^2} \tag{17}$$

$$+ \frac{a''_{22} - a''_{22}}{a''_{22}} \frac{\partial^2 u_1^{(t)}}{\partial z^2} + \frac{a''_{21} - a'_{21}}{a''_{22}} \frac{\partial^2 v_1^{(t)}}{\partial y \partial z},$$

wo $a^2 = k/Dc = -a''_{22}/Dc$,

und für $r = R$:

$$v_1^{(t)} = 0, \tag{18}$$

$$k\frac{\partial u_1^{(t)}}{\partial r} + h u_1^{(t)} + \frac{b_{12} b_{21}}{a_{11}} \left(\frac{\partial u_1^{(t)}}{\partial y}\right) \cdot \frac{y}{R} \tag{19}$$

$$+ (a''_{22} - a'_{22}) \frac{\partial u_1^{(t)}}{\partial z} \cdot \frac{z}{R} + (a'_{21} - a''_{21}) \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial y} \cdot \frac{z}{R} = 0,$$

und für $t = 0$:

$$u_1^{(t)} = \frac{b_{21} y}{a_{11}(k + Rh)}, \quad v_1^{(t)} = 0.$$

Wäre $(a''_{21} - a'_{21})(a''_{12} - a'_{12})/a''_{22} a'_{11}$ gleich Null, so würden die letzten Glieder in (17) und (19) verschwinden, entweder durch ihre Koeffizienten oder weil $v_1^{(t)}$ selbst verschwinden würde. Da diese Größe zwar nicht gleich Null, aber klein ist, werden wir den Einfluß der genannten Glieder auf $u_1^{(t)}$ vernachlässigen. Ersichtlicherweise ist es ferner berechtigt, in der ersten Näherung die mit dem kleinen Faktor $(a'_{22} - a''_{22}) / a''_{22}$ behafteten Glieder zu vernachlässigen. Den hierdurch vereinfachten Gleichungen genügt die im ganzen Querschnitte reguläre Funktion:

$$u_1^{(t)} = \frac{b_{21} y}{a_{11}(k + Rh)} \cdot \frac{R}{r} \sum_1^\infty \left\{ \frac{2(1+\alpha)}{\lambda_n^2 - 1 + \alpha^2} \cdot \frac{J_1\left(\frac{r}{R}\lambda_n\right)}{J_1(\lambda_n)} e^{-\frac{a^2 \lambda_n^2 t}{R^2}} \right\}, \quad (t > 0),$$

die sich etwa durch Superposition von Partikularlösungen ergibt. Es bedeuten hier: J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung, λ_1, $\lambda_2, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$x \frac{dJ_1(x)}{dx} + \alpha J_1(x) = 0,$$

und es ist

$$\alpha = \frac{Rh}{k} + \frac{b_{12} b_{21}}{a_{11} k}, \text{ (also } \alpha > -1).$$

Aus (15′) folgt:

$$\frac{X^{(t)}}{X^{(o)}} = \sum_1^\infty \frac{2(1+\alpha)}{\lambda_n^2 - 1 + \alpha^2} e^{-\frac{a^2 \lambda_n^2 t}{R^2}}, \tag{20}$$

$$X^{(o)} = -\frac{b_{12} b_{21}}{a_{11}(k + Rh)} X. \tag{21}$$

Bei Vernachlässigung von Rh/k und α wird

$$\frac{X^{(t)}}{X^{(o)}} = \sum_1^\infty \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} e^{-\frac{a^2 \lambda_n^2 t}{R^2}}, \tag{20′}$$

$$X^{(o)} = -\frac{b_{12} b_{21}}{a_{11} k} X,$$

wo λ_1, $\lambda_2 \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = 0$$

sind. Beim Vergleich mit dem beobachteten Effekte werden wir (20′) benutzen und

$$X^{(o)} = PQH^2 \overline{j_x} \tag{21′}$$

setzen, wo $\overline{j_x}$ die mittlere Dichte des Gleichstromes bedeutet.

5. Es sei jetzt:

$$X^{(w)} = X_o \sin nt,$$

wo $X^{(w)}$ die X-Komponente der Feldstärke, X_o eine gegebene Konstante bedeutet[1]). Bezeichnet $u^{(w)}$ die Temperatur, $v^{(w)}$ die Stromfunktion, so gelten die Gleichungen (8), (10)—(13), wenn X, u, v mit $X^{(w)}$, $u^{(w)}$, $v^{(w)}$ vertauscht werden. Wir machen den Ansatz:

$$u^{(w)} = \sum_1^\infty u_n^{(w)} X_o^n, \quad v^{(w)} = \sum_1^\infty v_n^{(w)} X_o^n$$

und beschränken uns auf eine angenäherte Berechnung der ersten Glieder. Unter denselben Vernachlässigungen wie im vorigen Falle genügt $u_1^{(w)}$ der Gleichung

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_1^{(w)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1^{(w)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(w)}}{\partial z^2}$$

mit der Randbedingung

$$k\frac{\partial u_1^{(w)}}{\partial r} + h u_1^{(w)} - \frac{b_{21} y}{a_{11} R} \sin nt = 0, \text{ für } r = R.$$

Unter Berücksichtigung, daß $u_1^{(w)}$ für $r = 0$ endlich sein muß, ergibt sich

$$u_1^{(w)} = \Im\mathrm{m}(U), \tag{22}$$

wo

$$U = \frac{b_{21}}{a_{11}} \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{J_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{-ni}\right) e^{int}}{k \frac{d}{dR} J_1\left(\frac{R}{a}\sqrt{-ni}\right) + h J_1\left(\frac{R}{a}\sqrt{-ni}\right)}. \tag{23}$$

Bei der Diskussion beschränken wir uns auf den Fall $\frac{Rh}{k} << 1$, wo das zweite Glied im Nenner vernachlässigt werden kann. Dann wird

---

1) Der Buchstabe n kommt also in zwei Bedeutungen vor: als Frequenz und als Summationsvariabel.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{b_{21}}{a_{11}k}\eta e^{int},$$

wo

$$\eta = \eta_r + i\eta_i = \frac{J_1\left(\frac{R}{a}\sqrt{-ni}\right)}{R\frac{d}{dR}J_1\left(\frac{R}{a}\sqrt{-ni}\right)},$$

und nach (13)

$$a_{11}\overline{j_x} = \Im m\left[X_o e^{int}\left(1 + \frac{b_{12}b_{21}}{a_{11}k}\eta\right)\right]. \quad (24)$$

Verändert man den Nullpunkt der Zeit so, daß

$$\overline{j_x} = j_o \sin nt,$$

so läßt sich (24) annähernd schreiben:

$$X^{(w)} = \varrho^{(gl)} j_o \sin nt + PQH^2 j_o[(\eta_r - 1)\sin nt + \eta_i \cos nt]. \quad (25)$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{n=\infty}(\varrho^{(w)} - \varrho^{(gl)}) = -PQH^2, \quad (26)$$

wenn $\varrho^{(w)}$ den spezifischen Ohmschen Widerstand für Wechselstrom bedeutet. Unsere Berechnung setzt aber voraus, daß n nicht so groß wird, daß der Hauteffekt hereinspielt.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte von $1 - \eta_r$, η_i, und $\varphi = \operatorname{arc} tg \frac{\eta_i}{1 - \eta_r}$ zusammengestellt. Sie sind mit Hilfe einer von M. Maclean und J. Zenneck stammenden Tabelle[1]) über $q\frac{\sqrt{-i}}{2}J_o(q\sqrt{-i})/J_1(q\sqrt{-i})$ berechnet.

Tabelle I.

nR^2/a^2	$1 - \eta_r$	$-\eta_i$	$\varphi - 90^0$
1,00	+ 0,059	+ 0,235	+ 14⁰,0
2,25	0,256	0,393	33,1
4,00	0,489	0,423	49,1
6,25	0,650	0,370	60,4
9,00	0,740	0,302	67,8
12,25	0,790	0,249	72,5
16,00	0,820	0,210	75,6
20,25	0,841	0,182	77,8
25,00	0,857	0,161	79,4
30,25	0,870	0,145	80,6
36,00	0,881	0,131	81,5
64,00	0,911	0,096	84,0
100,00	0,928	0,076	85,3

Die wesentlichen Resultate der vorstehenden Berechnungen sind in den Gleichungen (14), (20), (21), (22), (23) enthalten. Im folgenden benutzen wir die spezielleren und weniger genauen Gleichungen (14'), (20'), (21'), (25), (26).

1) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, (B. G. Teubner, 1909), Tafel XXI.

II. Vergleich mit den beobachteten Effekten.

6. Durch die vorstehende Theorie können natürlich bestenfalls nur die durch ein transversales Magnetfeld hervorgerufenen Effekte erklärt werden. Von einer Theorie, die sich auf homogene und isotrope Leiter beschränkt, kann indessen nicht mehr verlangt werden. Die ohne Magnetfeld und im longitudinalen Magnetfelde bestehende elektrische Nachwirkung existiert nämlich nach R. Seidler und J. Geipel nicht in Drähten aus möglichst homogenem und quasiisotropem Wismut. Daß dasselbe auch für den Wechselstromeffekt gilt, ist freilich nicht erwiesen, aber nach der Analogie wahrscheinlich. Für das folgende kommen nur die Messungen in Betracht, bei welchen der vom transversalen Magnetfelde hervorgerufene Effekt wenigstens eine überwiegende Rolle spielte.

Zunächst bemerken wir, daß die gemessenen Potentialdifferenzen in Übereinstimmung mit den berechneten der Drahtlänge und — innerhalb gewisser Grenzen — der Stromdichte proportional sind, und daß die Widerstandsänderung mit wachsender Frequenz sich einem Grenzwert zu nähern scheint. Im Wismut haben ferner die elektrische Nachwirkung, die Widerstandsänderung und die Phasenverschiebung das von der Theorie geforderte Vorzeichen ($PQ < 0$). Im Antimon und Tellur gilt dasselbe wenigstens für die elektrische Nachwirkung (nach Geipel, l. c.).

Daß bei gewöhnlicher Temperatur die aus (21') und (26) berechneten Werte der elektrischen Nachwirkung $X^{(o)}$ und der Widerstandsänderung im Wismut wenigstens der Größenordnung nach mit den beobachteten übereinstimmen, geht aus Tabelle II hervor.

Die in der ersten Reihe der Tabelle berechnete Widerstandsänderung sollte ersichtlich gleich dem Unterschied zwischen dem Gleichstromwiderstand bei guter und bei schlechter äußerer Wärmeleitung sein. In den Versuchen von P. Lenard war aber dieser Unterschied verschwindend klein, und hierin liegt die erwähnte Diskrepanz. Es scheint indessen möglich, anzunehmen, daß die von Lenard erreichte Veränderung von der äußeren Wärmeleitung nicht genügend groß war, um diesen Unterschied hervortreten zu lassen. Daß bei Messungen in Luft Rh/k gegen 1 vernachlässigt werden kann, wie in (21') und (26) vorausgesetzt wurde, scheint nach vorliegenden Messungen über die äußere Wärmeleitfähigkeit von Drähten plausibel.[1])

1) Siehe z. B. die Übersicht bei Weinreich, Zeitschr. für Math. u. Phys. Hft. 1, 1914.

Tabelle II.

$10^{-3}\,H$ (Gauß)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	Herkunft der Daten
$-10^2 PQH^2/\varrho_0$	0	—	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,8	+ 1,3	—	—	—	H. Zahn, Ann. d. Ph. **14**, 886, 1904
$-10^2 X^{(\varrho)}/\varrho_0 j_x$	—0,04	—	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,5	+ 0,8	—	—	—	R. Seidler, l. c. Tab. 50
	—0,05	0	+0 05	+ 0,4	+1,05	+ 1,8	+ 2,9	+ 4,4	+ 6,0	J. Geipel, l. c. Tab. XXXVI
$10^2 \frac{\varrho^{(w)} - \varrho^{(gl)}}{\varrho_0}$	—0,2	—	—	0	+ 0,8	+ 2,3	+ 3,8	+ 5 4	+ 7,0	P. Lenard, l. c.
	—0,5	— 0,4	— 0 1	+ 0,3	+ 0,7	+(1,4)	+(2,6)	+ 4,6	+ 7,0	K. Bamberger, Diss. 1901

ϱ_0 = spezif. Gleichstromwiderstand für $H = 0$. — Viele der Zahlen sind interpoliert, einige nur unsicher bestimmbare in Klammern geschrieben. — $X^{(\varrho)}/\varrho_0 \overline{j_x}$ habe ich mit Hilfe der angegebenen Reduktionsfaktoren aus den Galvanometerablesungen berechnet. Von den bei Seidler sich widersprechenden Angaben über den Reduktionsfaktor dürften die in Tab. 9 die richtigen sein.

Die Temperaturkoeffizienten der Widerstandsänderung und der elektrischen Nachwirkung sind in der folgenden Tabelle mit dem theoretisch berechneten Werte zusammengestellt.

Tabelle III.

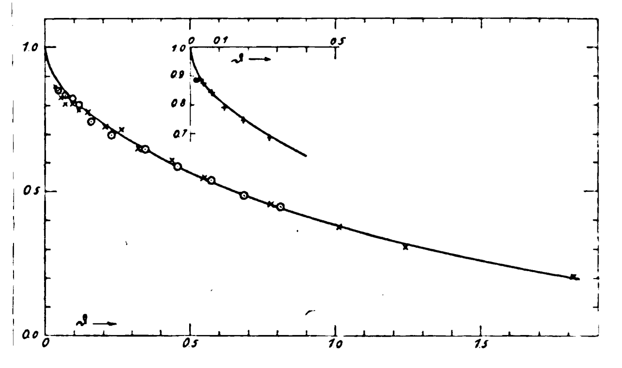
A	$10^2 \frac{\Delta A}{A \Delta T}$	Intervall	Herkunft der Daten
$\varrho^{(w)} - \varrho^{gl}$	— 2	$0^0 - 40^0$	G. Simpson, Ph. Mag. **4**, 1902.
X^{0}/j_x	— 2,3	$0^0 - 17^0$	J. Geipel, l. c. Tab. XLIII.
	— 0,8	$0^0 - 18^0$	„ „ „ XLV.
PQH^2	— 2,3	$15^0 - 35^0$	H. Zahn, l. c.

Bei tiefer Temperatur zeigen die Kurven über die Temperaturabhängigkeit der Widerstandsänderung (Simpson, l. c.) und der elektrischen Nachwirkung (Geipel) einen ähnlichen charakteristischen Verlauf. Daten zur Berechnung von PQ in diesem Gebiete sind mir nicht bekannt.

Im Antimon ist nach Messungen von H. Zahn[1]) über P und Q: $-PQH^2/\varrho_0 = 0{,}02$ Proz. bei 15000 Gauß (extrapoliert), während Geipel eine elektrische Nachwirkung von 0,07 Proz. gefunden hat. Obgleich eine Schätzung beim Tellur wenig Wert hat, sei erwähnt, daß mit $1/\varrho_0 = 1{,}7 \cdot 10^{-7}$ (entsprechend $Te\,\omega$)[2]) und den in H. Zahns[3]) Bericht angeführten Werten von P und Q sich ergibt: $-PQH^2/\varrho_0 = 0{,}8$ Proz. bei 26000 Gauß, während Geipel die Größenordnung zu 0,1 Proz. angibt. In den ferromagnetischen Elementen, wo der Wechselstromeffekt ohne Erfolg gesucht worden ist, erreicht auch der berechnete Effekt keinen meßbaren Betrag.

7. In Übereinstimmung mit der Theorie ist nach Seidler und Geipel der zeitliche Verlauf der Nachwirkung merklich unabhängig von der magnetischen Feldstärke und der primären Stromstärke. Die Form der Abklingungskurve ist im großen und ganzen die einer e^{-ct}-Kurve; sie zeigt jedoch, wie die Theorie fordert, im Anfang eine Abweichung im Sinne größerer Abklingungsgeschwindigkeit.

Der Versuch, einige empirische Abklingungskurven durch Veränderung des Maßstabes mit der theoretischen Kurve zur Deckung zu bringen (Figur), führte zu Werten von $\tau = 0{,}0661 \frac{R^2}{a^2}$ (= der theoretischen Halbierungszeit), welche in Tab. IV mit den unter der Annahme $a^2 = 0{,}0655$ (cm² sek⁻¹)[1]) berechneten zusammengestellt sind.



Beide Kurven stellen die Funktion

$$f(\vartheta) = \sum_1^\infty \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} e^{-\lambda_n^2 \vartheta \, 10^{-?} \log e}$$

dar, wo λ_n die positiven Wurzeln von $\mathcal{J}'_1(x) = 0$ sind. (Die kleinsten dieser Wurzeln sind von Lord Rayleigh, Phil. Mag. Nov. 1872 berechnet.) Die markierten Punkte entsprechen beobachteten Werten der elektrischen Nachwirkung, entnommen von R. Seidler, l. c. Tab. 50 (×), Tab. 51, *H.—B.* Draht, Probe II (⊙), J. Geipel, l. c. Tab. XL, Draht XII (+). Es wurde eine kleine Korrektion wegen des ohne Magnetfeld bestehenden Effektes angebracht.

Tabelle IV.

2 R mm		0 3	0,4	0,5
$10^3\,\tau$ Sek.	empirisch-	0,55	1,10	1,38
	theoret.	0,52	0,93	1,45

1) H. Zahn, Ann. d. Phys. **14**, 886, 1904.
2) W. Haken, Ann. d. Phys. **32**, 201, 1910.
3) H. Zahn, Jahrb. d. Rad. u. El. **5**, 166, 1908.

1) E. Giebe, Verh. d. D. Phys. Ges. **5**, 60, 1903.

Die Übereinstimmung ist überraschend gut, das Material aber zu gering, um sie sicherzustellen. (Die übrigen von Seidler und Geipel untersuchten Drähte konnten nicht in Betracht kommen, entweder wegen Störungen durch den außerhalb des Magnetfeldes bestehenden Effekt und vermutlicher Heterogenität, oder weil Daten zur Berechnung des Querschnitts fehlen.) Von der vorstehenden Theorie abgesehen liegt kein Grund vor, weshalb die miteinander verglichenen Zahlen auch nur der Größenordnung nach übereinstimmen sollten.

Die Tabellen von Geipel (l. c.) lehren, daß der Temperaturkoeffizient der Abklingungsgeschwindigkeit, wie die Theorie fordert, negativ ist; eine quantitative Vergleichung ist wegen des unregelmäßigen Verlaufes der Abklingungskurven kaum möglich.

Aus den Messungen von P. Lenard (l. c.), B. Wolff[1]) und E. Schnorr v. Carolsfeld[2]) scheint hervorzugehen, daß der Drahtradius auf die Abhängigkeit des Widerstandes von der Frequenz einen Einfluß hat, welcher mit dem von der Theorie geforderten qualitativ übereinstimmt.

Zusammenfassung.

Infolge der galvano- und thermomagnetischen Erscheinungen sind im transversalen Magnetfelde ein Wechselstrom-Gleichstromeffekt und eine elektrische Nachwirkung von derselben Größenordnung wie die beobachteten zu erwarten. Die theoretisch zu erwartenden Effekte werden angenähert berechnet und mit den beobachteten verglichen. Dabei ergibt sich eine bemerkenswerte Übereinstimmung.

1) B. Wolff, Diss. Würzburg, 1807.
2) E. Schnorr v. Carolsfeld, Diss. Leipzig, 1904.

Lund, April 1916.

(Eingegangen 17. April 1916.)

Bemerkungen zum Thomson-Effekt in glühenden Drähten.

Von Walter König.

Ich habe vor einigen Jahren Beobachtungen an elektrisch glühenden Drähten beschrieben, die ich als eine Erscheinungsform des Thomsoneffektes gedeutet habe[1]). Es ist mir gelegentlich in Gesprächen entgegengehalten worden, daß die beobachtete Erscheinung auch von dem Peltiereffekt herrühren könnte, der an der Berührungsstelle des glühenden Drahtes mit dem die Stromzuführung und zugleich die Abkühlung vermittelnden anderen Metalle eintritt. Daß die Wirkung nicht ausschließlich eine Peltierwirkung ist, geht aus dem Versuche hervor, der den Ausgangspunkt meiner Beobachtungen bildete: wenn eine durch einen elektrischen Strom zum Glühen erhitzte Platindrahtschleife mit ihrem unteren Teil in Wasser getaucht wird, so liegen auch hier die Punkte des beginnenden Glühens in dem herausragenden Teile auf den beiden vom Strom in entgegengesetzter Richtung durchflossenen Drahtteilen in verschiedenem Abstande von der Wasseroberfläche. Hier ist von einem Peltiereffekt nicht die Rede, da der Strom ja nur im Platin fließt. Aber es könnte wohl die Frage aufgeworfen werden, ob bei anderen Versuchsanordnungen, wenn z. B. die glühenden Drähte durch Eintauchen in Quecksilber statt in Wasser gekühlt, oder wenn sie zur Abkühlung und Stromzuführung in starke Kupferbolzen eingelötet sind, der Peltiereffekt mitwirkt und die beobachtete Wirkung wenigstens zum Teil auf seine Rechnung gesetzt werden muß. Allerdings sind die Bedingungen bei den von mir beschriebenen Versuchen derart, daß eine merkliche Mitwirkung des Peltiereffektes nicht wahrscheinlich ist; denn die Masse des die Wärme ableitenden Metalles ist gegenüber dem benutzten sehr dünnen Drahte so groß, daß von der an der Berührungsstelle entwickelten Wärme der größte Teil durch das zweite Metall abfließen muß. Doch erscheint eine nähere Prüfung der Frage auf alle Fälle geboten.

Ich will zunächst eine Abschätzung über den Anteil von Peltier- und Thomsonwirkung an der beobachteten Erscheinung auf Grund einer theoretischen Überlegung versuchen, die sich allerdings nur auf einen sehr vereinfachten und schematisierten Fall bezieht. Ein vollständiger Ansatz für die Wirkung des Thomson- und des Peltiereffektes in einem aus zwei Metallen bestehenden Stromleiter ist von P. Straneo gegeben worden[1]), ist aber auf meinen Fall nicht anwendbar, weil er auf der Voraussetzung beruht, daß die beiden Metalle Drähte von gleicher Dicke sind; auch ist in der schließlich gegebenen Lösung der Thomsoneffekt zur Vereinfachung vernachlässigt worden. Die Theorie des Herrn Straneo entspricht also eher dem Fall, den Herr Cermak an glühenden Drähten experimentell verwirklicht hat[2]). Eine andere Behandlung des Problems, die sich aber auf die Wirkung des Thomsoneffekts in stromdurchflossenen Leitern beschränkt,

1) W. König, diese Zeitschr. 11, 913—915, 1910; Arch. de Gen. (4) 30, 295—299, 1910.

1) P. Straneo, Rend. R. Acc. dei Linc. (5) 7, 1. Sem. 346—353, 1898.
2) P. Cermak, diese Zeitschr. 14, 1178—1179, 1913.

hat Herr W. Voigt gegeben[1]). Hier mögen die folgenden einfachen Betrachtungen genügen.

Es seien zwei verschiedene Metalle gegeben mit den Wärmeleitungsvermögen k_1 und k_2. Das erste habe die Form eines dünnen Drahtes vom Radius r_1, das zweite die Form einer Halbkugel vom Radius r_2, und es sei r_2 groß gegen r_1. Der Draht soll im Mittelpunkt der Halbkugel angelötet sein und auf ihrer ebenen Grenzfläche senkrecht stehen. Um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, werde angenommen, daß der Draht seine Wärme an die Umgebung von der Temperatur t_1 nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz mit einem äußeren Wärmeleitungsvermögen h abgebe, daß die ebene Grenzfläche der Halbkugel für Wärme undurchlässig sei und die halbkugelförmige Begrenzung auf der Temperatur t_1 gehalten werde. Unter diesen vereinfachenden Annahmen soll zunächst berechnet werden, wie sich der Strom einer Wärmemenge Q, die in jeder Sekunde in der kleinen Berührungsfläche der beiden Metalle erzeugt werde, auf den Draht und die Halbkugel verteilt unter der Voraussetzung eines stationären Zustandes. Die beiden Anteile sollen mit q_1 und q_2 bezeichnet werden und die Temperatur der Berührungsstelle mit t_0. Im Draht ist alsdann die Temperaturverteilung durch die bekannte Formel

$$t = t_1 + (t_0 - t_1)\, e^{-z\sqrt{\frac{2h}{k r_1}}}$$

gegeben, wenn z vom Kugelmittelpunkte aus die Drahtlänge zählt. In der Halbkugel kann die Temperaturverteilung, wenn man für die ganze sehr kleine Halbkugel vom Radius r_1 die Temperatur gleich der Endtemperatur t_0 des Drahtes annimmt, durch die Formel

$$t = t_1 + (t_0 - t_1)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

dargestellt werden, die sich durch die Annahme eines sehr großen Wertes für r_2 vereinfachen läßt zu

$$t = t_1 + (t_0 - t_1)\frac{r_1}{r}\,.$$

Aus diesen beiden Ansätzen ergibt sich für den Wärmestrom an der Berührungsstelle von Draht und Halbkugel

$$q_1 = \pi r_1 \sqrt{2hk_1 r_1}\,(t_0 - t_1)$$

und

$$q_2 = 2\pi r_1 k_2 (t_0 - t_1).$$

Daraus folgt:

$$q_1/q_2 = \frac{\sqrt{2hk_1 r_1}}{2k_2}$$

und

$$t_0 = t_1 + \frac{Q}{\pi r_1 (2k_2 + \sqrt{2hk_1 r_1})}\,.$$

Man ersieht daraus, in welchem Maße das Verhältnis q_1/q_2 sich verkleinert, je kleiner r_1 und je größer k_2 gewählt wird.

Es soll nun ein Strom durch die Halbkugel und den Draht fließen und Joulesche Wärme in ihnen nach Maßgabe seiner Stromstärke i und der spezifischen Widerstände ω_1 und ω_2 der Materialien erzeugen. Außerdem soll im Draht Thomsonwärme erzeugt werden — der Koeffizient des Thomsoneffektes sei σ — während in der Halbkugel, wegen der geringen Temperaturdifferenzen, die bei guter Leitfähigkeit des Materials in ihr nur auftreten können, und um die Betrachtungen nicht zu sehr zu verwickeln, der Thomsoneffekt vernachlässigt werden soll. Die Stromrichtung werde positiv gerechnet, wenn der Strom von der Halbkugel zum Draht fließt, also im Draht in der Richtung der wachsenden z. An der Übergangsstelle endlich von der Halbkugel zum Draht soll eine Peltierwärme vom Betrage Πi entwickelt werden, positiv gerechnet, wenn der Strom von der Halbkugel zum Drahte fließt. Der Thomsoneffekt werde in der üblichen Weise positiv gerechnet, wenn der mit der Wärme fließende Strom Wärme erzeugt. Die Temperaturverteilung im Drahte ist dann durch die Gleichung bestimmt[1]):

$$t = t_m - (t_m - t_0)\, e^{-\alpha z}\,,$$

in der t_m die Maximaltemperatur bedeutet, die für sehr große z-Werte im Drahte herrscht und die durch das Gleichgewicht von Stromwärme und Ausstrahlung nach der Gleichung:

$$t_m = t_1 + \frac{0{,}24\, i^2 \omega_1}{2h\pi^2 r_1^3}$$

gegeben ist. Die Größe α ist jetzt durch die Gleichung:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2h}{k_1 r_1} + \left(\frac{\sigma i}{2k_1 \pi r_1^2}\right)^2} - \frac{\sigma i}{2k_1 \pi r_1^2}$$

bestimmt. Die Temperaturverteilung in der Halbkugel ist durch die Gleichung dargestellt:

$$t = t_1 + (t_0 - t_1)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{0{,}12\, i^2 \omega_2}{4\pi^2 k_2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

die, wenn wieder r_2 sehr groß gegen r_1 genommen wird, in die einfachere Gleichung übergeht:

1) W. Voigt, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wis. zu Göttingen, Math. phys. Kl. 1899, S. 228—239.

1) Vgl. E. Verdet, Théorie mécanique de la chaleur, Bd. II, S. 201, Paris 1870.

$$t = t_1 + (t_0 - t_1)\frac{r_1}{r} + \frac{0{,}12\, i^2 \omega_2}{4\pi^2 k_2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

In diesen Gleichungen ist noch unbestimmt die Temperatur t_0 der Lötstelle. Sie ist durch die Grenzbedingung an dieser Stelle gegeben, und diese besteht darin, daß die vom Draht aus der Grenzfläche zufließende Wärmemenge $\left(k_1 \pi r_1^2 \left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0}\right)$ vermehrt um die Peltierwärme (Πi) und um die in der kleinen Übergangshalbkugel vom Radius r_1 erzeugte Stromwärme (q') gleich der durch die Oberfläche der Übergangshalbkugel abfließenden Wärmemenge $\left(k_2 2\pi r_1^2 \left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=r_1}\right)$ sein muß. Um für q' ohne umständliche Rechnungen einen gewissen Wert einsetzen zu können, werde q' gleich einem Bruchteil ε derjenigen Stromwärme gesetzt, die in einem Zylinder von der Grundfläche πr_1^2 und der Höhe r_1 aus dem zweiten Metall durch einen in Richtung der Achse fließenden Strom i erzeugt wird, also

$$q' = \varepsilon \cdot \frac{0{,}24\, i^2 \omega_2}{\pi r_1}.$$

Unter Berücksichtigung der Ansätze für die Temperaturverteilung im Draht und in der Halbkugel nimmt dann die Grenzbedingung die Form an:

$$k_1 \pi r_1^2 (t_m - t_0)\alpha + \Pi i + \varepsilon \cdot \frac{0{,}24\, i^2 \omega_2}{\pi r_1}$$
$$= 2\pi k_2 r_1 (t_0 - t_1) - \frac{0{,}12\, i^2 \omega_2}{2\pi r_1}.$$

Daraus ergibt sich

$$t_0 = \frac{k_1 \pi r_1^2 t_m \alpha + k_2 2\pi r_1 t_1 + \Pi i + \frac{0{,}24\, i^2 \omega_2}{\pi r_1}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\right)}{k_1 \pi r_1^2 \alpha + k_2 2\pi r_1}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung für t_m

$$t_0 = \frac{\pi r_1^2 \left[k_1 \alpha + 2h\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\right] t_m + 2\pi r_1 \left[k_2 - h r_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\right] t_1 + \Pi i}{\pi r_1^2 k_1 \alpha + 2\pi r_1 k_2}.$$

Führt man diesen Wert und denjenigen von α in die Gleichung für die Temperaturverteilung in dem Drahte ein, so erhält man schließlich:

$$t = t_m - \frac{2\pi r_1 \left[k_2 - h r_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\right](t_m - t_1) - \Pi i}{2\pi r_1 k_2 + \sqrt{2\pi^2 h k_1 r_1^3 + \left(\frac{\sigma i}{2}\right)^2} - \frac{\sigma i}{2}}\, e^{-z\sqrt{\frac{2h}{k_1 r} + \left(\frac{\sigma i}{2k_1 \pi r_1^2}\right)^2} + \frac{\sigma i z}{2 k_1 \pi r_1^2}}.$$

während ohne Thomson- und Peltiereffekt die Temperaturverteilung dargestellt wird durch

$$t = t_m - \frac{2\left[k_2 - h r_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\right](t_m - t_1)}{2k_2 + \sqrt{2 h k_1 r_1}}\, e^{-z\sqrt{\frac{2h}{kr}}}.$$

Der Peltiereffekt beeinflußt also nur den Faktor des Exponentialgliedes, während der Thomsoneffekt vor allem im Exponenten dieses Gliedes zur Wirkung kommt. Berücksichtigt man noch die Beziehung zwischen i und t_m, so kann man die Gleichung für t in der Form schreiben:

$$t = t_m - \frac{2\left[k_2 - h r_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\right](t_m - t_1) - \Pi \cdot \sqrt{\frac{2 h r_1}{0{,}24\, \omega_1}(t_m - t_1)}}{2k_2 + \sqrt{2 h k_1 r_1 + \frac{\sigma^2 h r_1}{0{,}48\, \omega_1}(t_m - t_1)} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{2 h r_1}{0{,}24\, \omega_1}(t_m - t_1)}} \cdot e^{-\alpha z}.$$

Stellt man also Versuche mit verschiedenen Drahtdicken an, und regelt den Strom jedesmal so, daß die gleiche Maximaltemperatur t_m des Drahtes erreicht wird, so ist der Einfluß des Peltiereffektes um so geringer, je kleiner r_1 und je größer k_2 ist. Steigert man andererseits die Stromstärke und damit die Temperaturdifferenz $t_m - t_1$, so kommt abermals die Peltierwärme um so weniger zur Wirkung, je größer $(t_m - t_1)$ ist, da in dem Zähler des obigen Bruches das erste Glied den Faktor $(t_m - t_1)$, das zweite aber nur $\sqrt{t_m - t_1}$ enthält, während der Thomsoneffekt um so stärker auftritt, je größer $(t_m - t_1)$ ist. Um den Einfluß der verschiedenen Effekte noch schärfer hervortreten zu lassen, will ich die Formeln noch umgestalten unter der Annahme, daß Thomson- und Peltierwirkung klein sind und den ohne diese Wirkungen sich

einstellenden Temperaturverlauf im Drahte nur um kleine Beträge abändern. Ich will also die Glieder mit Π und σ als Korrektionsglieder behandeln und eine Reihenentwicklung unter Beschränkung auf die ersten Potenzen dieser Glieder vornehmen. Zur Vereinfachung werde auch noch die Wirkung der Stromwärme in dem zweiten Metall vernachlässigt, d. h. es werde ω_2 so klein vorausgesetzt, daß das Glied mit ω_2/ω_1 unberücksichtigt bleiben kann. Da die Wirkung von Thomson- und Peltierwärme darin besteht, daß eine bestimmte Temperatur bei Umkehr des Stromes eine kleine Verschiebung längs des Drahtes erfährt, so soll ein Ausdruck für diese Verschiebung unter all den angeführten Vereinfachungen gesucht werden. Es sei z_1 diejenige Stelle des Drahtes, an der bei positiver Stromrichtung eine bestimmte Temperatur t_z herrscht und z_2 diejenige Stelle, bei der dieselbe Temperatur bei gleicher Stromstärke aber entgegengesetzter Stromrichtung besteht. Dann ergibt die Gleichung der Temperaturverteilung die Beziehung:

$$e^{-(z_1-z_2)\sqrt{\frac{2h}{k_1 r_1}}} \cdot e^{+\frac{\sigma i}{2k_1\pi r_1^2}(z_1+z_2)}$$
$$= \frac{2k_2(t_m-t_1)+\frac{\Pi i}{\pi r_1}}{2k_2(t_m-t_1)-\frac{\Pi i}{\pi r_1}} \times \frac{2k_2+\sqrt{2hk_1r_1}-\frac{\sigma i}{2\pi r_1}}{2k_2+\sqrt{2hk_1r_1}+\frac{\sigma i}{2\pi r_1}}$$

Wird hierauf die besprochene Reihenentwicklung angewandt, unter Berücksichtigung, daß auch $z_1 - z_2$ eine kleine Größe ist, so folgt die Gleichung:

$$-(z_1-z_2)\sqrt{\frac{2h}{k_1 r_1}} + \sigma i \frac{z_1+z_2}{2k_1\pi r_1^2}$$
$$= + \frac{\Pi i}{k_2\pi r_1(t_m-t_1)} - \frac{\sigma i}{\pi r_1(2k_2+\sqrt{2hk_1r_1})}$$

aus der sich, wenn man noch die Mittellage der Beobachtungsstelle $\frac{z_1+z_2}{2}$ mit z bezeichnet, für die gesuchte Verschiebung bei Stromumkehr ergibt:

$$\Delta z = z_1 - z_2 = \frac{iz\sigma}{\pi r_1\sqrt{2hk_1r_1}} \times$$
$$\left[1 + \frac{r_1 k_1}{z(2k_2+\sqrt{2hk_1r_1})} - \frac{\Pi}{\sigma(t_m-t_1)}\,\frac{r_1}{z}\,\frac{k_1}{k_2}\right].$$

Diese Formel zeigt auf das deutlichste, daß die Wirkung der Peltierwärme um so mehr zurücktritt, je größer die Wärmeleitfähigkeit des abkühlenden Metalls (k_2) gegenüber derjenigen des Drahtes (k_1) ist, je größer ferner die Temperaturdifferenz $t_m - t_1$ ist und je kleiner der Faktor r_1/z ist, d. h. je weiter man sich von der unmittelbaren Nähe des gekühlten Endes entfernt. Nun ist allerdings Π im allgemeinen erheblich größer als σ. Daß trotzdem der Einfluß des Peltiereffektes sehr gering ist, möge an einem Zahlenbeispiel nachgewiesen werden, das den bei meinen Versuchen vorkommenden Größen entsprechend gewählt werde. Der Draht sei ein Platindraht von 0,1 mm Radius, das abkühlende Metall sei Kupfer. Dann ist $k_1 = 0{,}17$, $k_2 = 0{,}90$ zu setzen. Der Peltiereffekt Kupfer/Platin ist nach Jahn[1]) + 0,09 Millikalorien für 1 Coulomb, der Thomsoneffekt in Platin nach Berg[2]) — 0,00225 Millikalorien für 1 Coulomb und 1 Grad. Nimmt man $z = 20$ mm, so erhält man für den Ausdruck

$$\frac{\Pi}{\sigma}\cdot\frac{r_1}{z}\cdot\frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{1}{t_m-t_1} \text{ den Betrag: } \frac{0{,}04}{t_m-t_1}.$$

Würde also die vom Strom in dem Draht erzeugte maximale Temperaturerhöhung 10° betragen, so würde in einem Abstande von 2 cm vom gekühlten Ende die Peltierwärme nur noch 0,4 Proz. im Verhältnis zur Wirkung der Thomsonwärme ausmachen. Da auch das andere Glied:

$$\frac{r_1}{z}\,\frac{k_1}{2k_2+\sqrt{2hk_1r_1}}$$

unter den angenommenen Verhältnissen jedenfalls kleiner als 0,0005 ist, so würde sich an der betreffenden Stelle des Drahtes der Thomsoneffekt aus der gemessenen Verschiebung Δz bis auf $^1/_2$ Proz. genau nach der einfachen Formel:

$$\sigma = \frac{\pi r_1\sqrt{2hk_1r_1}}{i}\,\frac{\Delta z}{z}$$

berechnen lassen.

Leider liegen die Voraussetzungen dieser theoretischen Überlegungen recht weit ab von den Verhältnissen, unter denen sich die Erscheinungen in den glühenden Drähten entwickeln. Ich habe daher die Frage eines möglichen Einflusses des Peltiereffektes bei diesen Vorgängen auch noch auf experimentellem Wege zu beantworten versucht. Ich habe nach der früher beschriebenen optisch-pyrometrischen Methode die Temperaturverteilung und den Einfluß der Stromumkehr an zwei gleichen Platindrähten gemessen, die durch zwei verschiedene Metalle von entgegengesetzter thermoelektrischer Stellung zum Platin gekühlt wurden. Als solche Metalle wurden Eisen und Nickel verwendet. Sie geben mit Platin nahezu gleich große thermoelektrische Kräfte, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, und zwar geht an der kalten Löt-

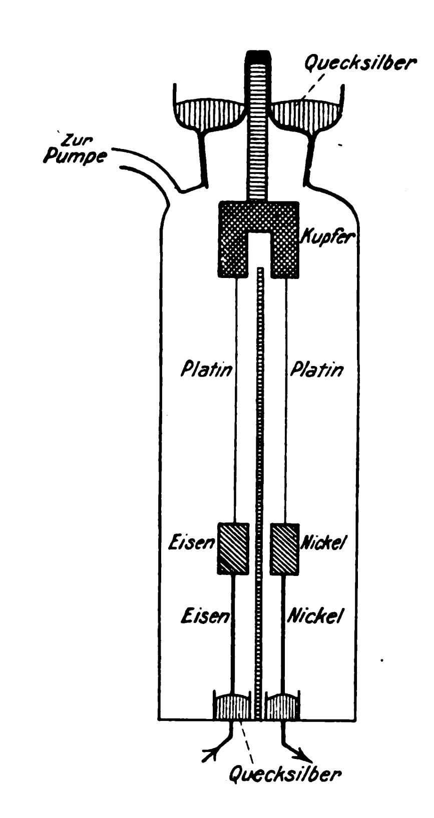
1) H. Jahn, Wied. Ann. **34**, 763, 1888.
2) O. Berg, Ann. d. Phys. (4) **32**, 517, 1910.

stelle der Strom einerseits vom Platin zum Nickel, andererseits vom Eisen zum Platin. Darnach würde also der Strom, wenn er vom Platin zum Nickel fließt, Wärme erzeugen, wenn er vom Platin zum Eisen fließt, Wärme verbrauchen. Da der Thomsoneffekt im Platin negativ ist, so wird Wärme verbraucht, wenn der Strom nach dem abkühlenden Metall hinfließt. Also würden, wenn der Platindraht durch Eisen gekühlt wird, Peltier- und Thomsoneffekt in demselben Sinne wirken, bei der Kühlung durch Nickel aber in entgegengesetztem Sinne. Der Sicherheit halber habe ich die obigen, den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommenen Angaben über die thermoelektrischen Kräfte nach Beendigung der optisch-pyrometrischen Beobachtungen nachgeprüft, indem ich die thermoelektrischen Kräfte der benutzten Metallpaare ermittelte. Ich fand für 100° Temperaturdifferenz:

bei Nickel — Platin $e = -1{,}65$ Millivolt
bei Eisen — Platin $e = +1{,}32$ Millivolt.

Die erste Zahl stimmt genau mit den Werten anderer Beobachter überein, die zweite Zahl ist etwas kleiner. Der Unterschied kann dadurch bedingt sein, daß ich bei meinen Versuchen zwar chemisch reines Nickel, aber käufliches Eisen verwandt habe.

Die optisch-pyrometrischen Versuche wurden mit der Anordnung ausgeführt, die ich früher in dieser Zeitschrift beschrieben habe. Zwei 15 cm lange Platindrähte von gleicher Dicke (0,15 bei der einen, 0,20 bei der anderen Versuchsreihe) wurden mit ihren oberen Enden in Kupferstäbe von 1 cm Durchmesser, mit ihren unteren Enden das eine in einen Eisen-, das andere in einen Nickelstab, beide ebenfalls von 1 cm Durchmesser, eingelötet. Die Kupferstäbe waren 3 cm lang und oben durch einen dicken Querbalken von Kupfer miteinander verbunden. Der Eisen- und der Nickelstab waren 2 cm lang; in sie waren als Fortsetzung nach unten dünne Stäbe von nur 1 mm Durchmesser, ebenfalls aus Eisen bzw. Nickel, eingeschraubt, die 7 cm lang waren und mit ihren unteren Enden in die zur Stromzuführung dienenden Quecksilbernäpfe tauchten. Die Zwischenschaltung dieser dünnen Teile zwischen die zur Abkühlung dienenden dicken Metallklötze und das Quecksilber schien mir nötig zu sein, um zu verhindern, daß der zwischen dem Metall und dem Quecksilber auftretende Peltiereffekt seine Wirkung nach oben hin bis zum Platindraht erstreckte, was bei dicken Stäben ohne Frage der Fall gewesen wäre. Die ganze Vorrichtung war in einem Glaszylinder aufgehängt, der luftdicht abgeschlossen war und mittels einer Gaedepumpe auf Kathodenvakuum ausgepumpt wurde. In diesem Vakuum hingen die beiden Drähte frei nebeneinander senkrecht herunter in einem Abstande von 2 cm voneinander (s. untenstehende Abbildung). Eine geschwärzte Glasplatte war zwischen ihnen angebracht, um jede Beeinflussung ihres Temperaturzustandes durch gegenseitige Zustrahlung zu verhindern. Die Drähte wurden mit einem Kathetometer durch eine rote Glasscheibe hindurch vor einer weißen Gipswand beobachtet, die durch eine Glühlampe von verschiedenen Abständen aus verschieden hell beleuchtet werden konnte. Der Heizstrom,



der die beiden Drähte hintereinander durchfloß, den einen also von unten nach oben, den anderen von oben nach unten, wurde so geregelt, daß, wenn die Lampe einen bestimmten kürzesten Abstand von der Wand besaß (Knopf 1), die Mitten der Drähte vor dem Hintergrund gerade verschwanden. Dann wurde die Lampe nacheinander in vier verschiedene größere Abstände gebracht (Knopf 2—5) und jedesmal diejenigen Stellen der beiden Drähte oben und unten bestimmt, die gleiche Helligkeit mit dem Hintergrunde hatten. Jede dieser Stellen wurde unter regelmäßigem Wechsel der Stromrichtung für jede Stromrichtung fünfmal bestimmt. Außerdem wurden die Enden der Drähte während des Glühzustandes mit dem Kathetometer festgestellt. Die Stromstärke wurde dabei mit Hilfe

eines Normalamperemeters kontrolliert und durch Regulierwiderstände genau konstant gehalten. Da die Drähte individuelle Ungleichheiten besitzen können, wurden nach Erledigung einer vollständigen Versuchsreihe der Eisen- und der Nickelstab abgelötet und nach Vertauschung wieder angelötet, und darauf der ganze Satz von Beobachtungen wiederholt. Es wurde so die Temperaturverteilung in jedem der beiden Drähte nacheinander für Kühlung mit Nickel und für Kühlung mit Eisen ermittelt, während die Beobachtungen an den oberen Enden jedesmal gleichzeitig die Temperaturverteilung für Kühlung mit Kupfer ergaben. Die gefundenen Zahlen stelle ich in Tabelle I in der Weise zusammen, daß ich für einen und denselben Draht die Mittelwerte der gemessenen Abstände der Stellen gleicher Temperatur von den Enden der Drähte (für 4 verschiedene Helligkeiten des Hintergrundes entsprechend den Lampenstellungen auf Knopf 2—5) nebeneinander stelle für die Fälle der Kühlung mit Kupfer, Nickel und Eisen, und zwar einmal für die Stromrichtung im Sinne des Temperaturgefälles und dann für die entgegengesetzte Stromrichtung.

Tabelle I.

	Stromrichtung im Sinne des Temperaturgefälles			Stromrichtung entgegen dem Temperaturgefälle		

Platindrähte 0,20 mm Durchmesser, Stromstärke 0,80 Amp.

Linker Draht

Lampe auf Knopf	*Cu* mm	*Ni* mm	*Fe* mm	*Cu* mm	*Ni* mm	*Fe* mm
2	40,38	42.42	41,70	38,52	40,18	38,08
3	34,24	32,58	31,28	31,74	31,24	29,82
4	26,90	26,28	25,20	25,62	24,80	23 64
5	—	24,04	23,94	—	22,34	22,86

Rechter Draht

	Cu	*Ni*	*Fe*	*Cu*	*Ni*	*Fe*
2	40,96	47,42	55,74	38,54	46,24	52,96
3	34,52	[illegible]3,22	30,00	32,26	31,28	33,82
4	27,26	20,54	28,00	25,94	25,70	27,32
5	—	25,92	26,34	—	24,58	24,76

Platindrähte 0,15 mm Durchmesser, Stromstärke 0,53 Amp.

Linker Draht

	Cu	*Ni*	*Fe*	*Cu*	*Cu*	*Ni*	*Fe*	*Cu*
2	3[illegible],10	3[illegible],98	34,78	33,98	31,52	32,00	[illegible]2,68	31,94
3	28,84	28,62	28,68	28,26	27,62	27,26	27,14	27,28
4	23,62	23,36	23,44	23,52	22,20	22,28	21,88	22,10
5	21,50	21,70	21,40	21,14	20,36	20,48	20,10	20,54

Rechter Draht

	Cu	*Ni*	*Fe*	*Cu*	*Cu*	*Ni*	*Fe*	*Cu*
2	37,42	37,66	34,66	36,94	35,02	36,68	32,44	[illegible]4,64
3	3[illegible],48	30,86	29,56	30,00	28,26	28,70	27,96	28,66
4	24,50	24.16	23,74	25,66	23,62	22,74	22,54	24,32
5	22,50	22,06	21,94	22,76	20,86	20,94	20,76	21,[illegible]4

Ich glaube nicht, daß man aus diesen Zahlen einen deutlichen Ausdruck für die entgegengesetzte Natur des Peltiereffektes von Nickel und von Eisen entnehmen kann. Für die dickeren Drähte zeigen allerdings die Zahlen für Nickel und für Eisen stellenweise beträchtliche Unterschiede, und es kann auffallen, daß am linken Draht die Zahlen für Nickel durchweg größer sind als für Eisen; dafür sind sie aber beim rechten Draht durchweg kleiner für Nickel als für Eisen. Bei den dünnen Drähten sind diese Unterschiede geringer und ungleichmäßiger und liegen hier offenbar innerhalb der Grenze der Versuchsfehler, wie der Vergleich mit den wiederholten Beobachtungen am Kupfer zeigt.

Ich stelle ferner in Tabelle II die Unterschiede der Abstände für die beiden Stromrichtungen zusammen, also diejenige Größe, welche die als Thomsoneffekt von mir gedeutete Wirkung darstellt. Ich teile zunächst die Differenzen der sämtlichen Zahlen der Tabelle I einzeln mit, um die Grenze der Unsicherheit dieser Zahlen damit zu kennzeichnen, und ich fasse schließlich diese Zahlen zu Mittelwerten zusammen.

Tabelle II.

Platindrähte von 0,20 mm Durchmesser.

	Cu Linker Draht	*Cu* Rechter Draht	*Ni* Linker Draht	*Ni* Rechter Draht	*Fe* Linker Draht	*Fe* Rechter Draht
2	1,86	2,42	2,24	1,18	2,72	2,78
3	2,50	2.26	1,34	1,94	1,46	2,18
4	1.28	1,32	1,48	0,84	1,56	1,58
5	—	—	1,70	1,34	1,08	1,58

Platindrähte von 0,15 mm Durchmesser.

	Cu Linker Draht	*Cu* Rechter Draht	*Ni* Linker Draht	*Ni* Rechter Draht	*Fe* Linker Draht	*Fe* Rechter Draht
2	1,58 2,04	2,40 2,30	1,98	0,98	2,10	2,22
3	1,22 0,98	2,22 1,34	1,36	2,16	1,54	1,60
4	1,42 1,42	0,88 1,34	1,08	1,42	1,56	1,20
5	1,14 0,60	1,64 1,42	1,22	1,12	1,[illegible]0	1,18

Mittelwerte.

	Platindrähte von 0,20 mm Durchmesser *Cu*	*Ni*	*Fe*	Platindrähte von 0,15 mm Durchmesser *Cu*	*Ni*	*Fe*
2	2,14	1,71	2,75	2.08	1,48	2.16
3	2.38	1,64	1,82	1,44	1,76	1,57
4	1,30	1,16	1,57	1,26	1,25	1,38
5	—	1,52	1,33	1,20	1,17	1,24

Bei den dickeren Drähten könnte es wieder auffallen, daß die Zahlen für Nickel überwiegend kleiner sind als für Eisen, wie man es nach der entgegengesetzten Wirkung von Thomson- und Peltiereffekt in diesem Falle erwarten

könnte. Allein gerade für den Punkt, der dem Drahtende am nächsten liegt (Knopf 5) ist es umgekehrt, und doch müßte sich der Peltiereffekt hier stärker als an den anderen Stellen geltend machen. Die Beobachtungen mit den dünneren Drähten sind durchweg genauer, sie sind auch hinsichtlich der Beobachtungen mit der Kupferkühlung noch vollständiger und mit noch schärferer Konstanz der Stromstärke durchgeführt worden. Auch hier sind die Werte am Nickel dreimal kleiner, einmal größer als am Eisen. Aber die Unterschiede sind überhaupt nur gering, und wenn sie für Knopf 2 etwas größer sind, so ist zu beachten, daß die Beobachtungen für diese Stelle bei dem geringeren Temperaturgefälle, das hier herrscht, überhaupt unsicherer sind als für die anderen Stellen. Beschränkt man sich auf die Stellungen 3, 4 und 5, für die der Peltiereffekt ja am ehesten in Betracht käme, so ist der Mittelwert der drei Zahlen bei den dickeren Drähten für *Ni* 1,44 für *Fe* 1,57 bei den dünneren Drähten aber für *Ni* 1,393, für *Fe* 1,397, während für Kupfer, dessen Peltiereffekt gegen Platin dasselbe Vorzeichen wie der des Eisens hat, der Mittelwert 1,30 betragen würde. Ich glaube aus dem Vergleich dieser Zahlen den Schluß ziehen zu dürfen, daß der Peltiereffekt an den Erscheinungen, so wie ich sie beschrieben habe, keinen wesentlichen Anteil hat.

Es liegt nahe zu fragen, ob man die Entscheidung des Problems nicht auch dadurch erreichen kann, daß man versucht, die absoluten Beträge des Thomsoneffektes aus der Ausmessung dieser Erscheinungen herzuleiten. Herr Worthing[1]) hat jüngst nach der von mir angegebenen optisch-pyrometrischen Methode die Koeffizienten des Thomsoneffektes für diejenigen Stoffe gemessen, die in Glühlampen Verwendung finden, Wolfram, Tantal und Kohle. Aber es fehlt für diese Stoffe an Messungen des Thomsoneffektes nach anderen Methoden und daher an einer Kontrolle der erhaltenen Zahlen. Bei mir hat Versuche in dieser Richtung einer meiner Schüler am Platin angestellt und wird darüber demnächst berichten.

1) A. G. Worthing, Phys. Rev. **34**, 152—154, 1912; (2) **5**, 445—451, 1915.

Gießen, April 1916.

(Eingegangen 19. April 1916.)

Über die Extinktion des Lichtes.

Von C. W. Oseen.

In zwei Aufsätzen habe ich untersucht, ob zwei heute aktuelle Theorien, die Plancksche Strahlungstheorie in ihrer zweiten (oder vierten) Form und die Bohrsche Atomtheorie, mit der Annahme verträglich sind, daß die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen außerhalb eines Atoms gültig sind[1]). In beiden Fällen fand ich, daß dies nicht der Fall ist. Ich vermied in diesen Aufsätzen, zu der Frage Stellung zu nehmen, ob man unter diesen Umständen diese Annahme aufgeben oder ob man vielmehr die erwähnten Theorien verwerfen soll. Wenn auch sehr viel zugunsten der neueren Theorien spricht, so ist doch die Zahl der Tatsachen, welche die Lorentzsche Elektronentheorie zu deuten vermag, so groß, daß es mir nicht möglich war, sie aufzugeben. Insbesondere gab es eine Gruppe von Erscheinungen, denen die auf der oben erwähnten Annahme fußende Theorie eine qualitativ und quantitativ so gut stimmende Erklärung zu geben schien, daß die völlige Aufgabe derselben unmöglich war. Es waren diejenigen Erscheinungen, die mit der Brechung, Dispersion und Extinktion des Lichtes zusammenhängen. Dieselbe Bedeutung scheinen diese Fragen für Poincaré gehabt zu haben[2]). „Nous ne pouvons guère pousser la fantaisie jusqu'à croire que le ciel n'est pas bleu."

Eine nähere Betrachtung hat mich zu der Überzeugung geführt, daß die elektromagnetische Theorie des Lichtes in ihrer jetzigen Fassung auch in bezug auf diese Erscheinungen zu Ergebnissen führt, die quantitativ unrichtig sind.

Die blaue Farbe des Himmels erklärt Lord Rayleigh bekanntlich folgendermaßen. Wenn eine Lichtwelle eine Luftmolekel überfährt, geht von dieser eine neue Lichtwelle aus. Diese zerstreuten Wellen geben zu der blauen Farbe des Himmels Anlaß. Gleichzeitig wird durch sie eine Extinktion der einfallenden Welle bewirkt. Für den Extinktionskoeffizienten findet Lord Rayleigh bekanntlich den Wert:

$$\frac{32\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4}.$$

Genau denselben Wert erhält Herr Planck aus seiner Theorie der Dispersion des Lichtes. Die Erklärung dieser merkwürdigen Überein-

1) Über die Möglichkeit ungedämpfter Schwingungen nach der Maxwell-Lorentzschen Theorie und über die Plancksche Strahlungstheorie. Ann. d. Phys. **43**, 1914. Das Bohrsche Atommodell und die Maxwellschen Gleichungen, diese Zeitschr. **16**, 395, 1915.

2) Les idées modernes sur la constitution de la matière, Paris, Gauthier-Villars 1913, S. 357 ff., bes. S. 368—370.

stimmung, die um so merkwürdiger ist, da die beiden Theorien zu ganz verschiedenen Gesetzen für die Dispersion führen, findet Herr Planck darin, daß in beiden Fällen die Zerstreuung durch Partikeln bewirkt wird, deren lineare Abmessungen im Verhältnis zu der Wellenlänge sehr klein sind.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) gibt Herr Lorentz u. a. ein kurzes Referat der Rayleighschen Theorie. Dieses Referat unterscheidet sich indessen in einem Punkte sehr wesentlich von den üblichen Darstellungen dieser Theorie[2]). Nach Herrn Lorentz soll nämlich die Extinktion des Lichtes nicht durch die Molekeln selbst bedingt sein, sondern durch die Schwankungen in der Zahl der Molekeln pro Volumeinheit. In Übereinstimmung mit dieser Auffassung behauptet Herr Lorentz, daß in einem Kristall keine Extinktion stattfinden soll.

Die Frage von der Fortpflanzung des Lichtes in einem Kristall ist kürzlich der Gegenstand einer sehr eingehenden Untersuchung von Herrn Ewald[3]) gewesen. Die Dispersionsformel, die Herr Ewald für sichtbares Licht und für ein kubisches Gitter findet, stimmt völlig mit der Lorentz-Planckschen Formel für einen isotropen Körper überein. Auch in einem Kristall findet also nach Herrn Ewald eine Extinktion des Lichtes statt. Die Lorentzsche Behauptung steht übrigens in Widerspruch mit der aus vielen neueren Arbeiten[4]) hervorgehenden Auffassung, wonach die durch die Resonatoren bewirkte Zerstreuung ein durchaus geordneter Vorgang ist, der für die Fortpflanzung des Lichtes von grundlegender Bedeutung ist, indem erst durch ihn die von außen einfallende Welle ausgelöscht wird.

Wie ist dieser auffallende Widerspruch zu erklären? Die Antwort lautet: Wenn die elektromagnetische Theorie des Lichtes richtig ist, so findet in einer Flüssigkeit oder einem Gas aus zwei verschiedenen Gründen eine Zerstreuung und eine dadurch bedingte Extinktion des Lichtes statt. Eine von ihnen, ich will sie kurz die Keesom-Einsteinsche[5]) nennen, fällt in einem Kristall weg. Die andere, ich nenne sie die Rayleigh-Plancksche, bleibt auch in einem Kristall bestehen.

Den Unterschied zwischen diesen beiden Zerstreuungen fasse ich in den folgenden Sätzen zusammen:

Die Rayleigh-Plancksche Zerstreuung wird von den Molekeln selbst hervorgerufen. Bei der Ableitung derselben nimmt man an, daß man so rechnen kann, als ob die Dichte (die Zahl der Molekeln pro Volumeinheit) eine regelmäßig variierende und in physikalisch kleinen Gebieten konstante Größe wäre. Dagegen wird die Keesom-Einsteinsche Zerstreuung durch die Schwankungen der Dichte hervorgerufen.

Die Rayleigh-Plancksche Zerstreuung ist ein geordneter Vorgang. Die zerstreute Energie wird nach außen emittiert. Insbesondere findet man diese Energie in der reflektierten Welle wieder. Dagegen ist die Keesom-Einsteinsche Zerstreuung ein ungeordneter Vorgang. Die zerstreute Energie findet sich zum Teil in ungeordneten Schwingungen der Resonatoren wieder.

Den Beweis, daß tatsächlich diese beiden Arten von Zerstreuung vorkommen müssen, führt man sehr leicht. Die elektromagnetische Theorie des Lichtes in der Planckschen Form ergibt unmittelbar die Rayleigh-Plancksche Zerstreuung. Wenn man nachträglich auf die Schwankungen der Dichte Rücksicht nehmen will, so kann man dies sehr leicht tun, indem man nach dem Vorgang von Lord Rayleigh den Volumelementen Dielektrizitätskonstanten beilegt, die um den durch die zuerst erwähnte Untersuchung bestimmten Mittelwert schwanken. Man erhält so die Keesom-Einsteinsche Zerstreuung.

Herr Lorentz hebt in seiner oben erwähnten Arbeit hervor, daß man einen Einwand gegen die Rayleighsche Theorie erheben kann, indem die von dieser Theorie gemachte Annahme, daß die Dielektrizitätskonstanten der Volumelemente konstant sind, nicht zutrifft. Ohne auf die mathematischen Einzelheiten einzugehen, will ich hier erwähnen, daß man die Keesom-Einsteinsche Zerstreuung leicht rein molekulartheoretisch ableiten kann.

Ich muß schließlich auf den Punkt hinweisen, wo die hier vertretene Auffassung sich von der Rayleighschen unterscheidet. In seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand äußert Lord Rayleigh[1]): „Were the particles absolutely motionless, the partial waves sent out in any direction from them would have permanent relations as to phase, and the total disturbance would have to be found by com-

1) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig, Teubner 1916, S. 42 ff.

2) Man sehe z. B. Rayleigh, On the transmission of light etc. Phil. Mag. 1899.

3) P. P. Ewald, Zur Begründung der Kristalloptik, Ann. d. Phys. 49, 1916.

4) W. Esmarch, Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dispergierenden Medien, Ann. d. Phys. 42, 1913; L. Natanson, On the Scattering of Light in a gaseous Medium, Bull. d. l'Acad. d. sc. de Cracovie 1914; C. W. Oseen, Über die Wechselwirkung zwischen zwei el. Dipolen usw., Ann. d. Phys. 48, 1915; P. P. Ewald, l. c.

5) Man vergleiche hierzu: Langevin et Broglie: La théorie du rayonnement et les quanta, Paris, Gauthier-Villars 1912, S. 216 ff.

1) On the light from the sky, Phil. Mag. 1871.



pounding the vibrations due to all the particles. Such a position, however, would be very wide of the mark; for, in consequence of the extreme smallness of λ, the slightest motion of any particle will cause an alteration of phase passing through many periods in a less time than the eye could appreciate. Our particles are, then, to be treated as so many unconnected sources of light; and instead of adding the vibrations, we must take the intensities represented by their squares. Only in one direction is a different treatment necessary, namely along the course of the primary light."

Diese Ausführungen des berühmten Autors sind selbstverständlich vollkommen richtig, wenn man annimmt, daß der mittlere Abstand zwischen zwei angrenzenden Partikeln von derselben Größenordnung wie die Wellenlänge oder größer als diese ist. Aber ganz andere Verhältnisse treten auf, wenn dieser Abstand gegen die Wellenlänge sehr klein ist. In diesem Falle wird ein Volumelement, dessen lineare Abmessungen im Verhältnis zur Wellenlänge klein sind, doch stets fast dieselbe Zahl von Partikeln enthalten. Man muß dann die von einem Volumelement zerstreute Welle in zwei Teile zerlegen. Der eine Teil entspricht der durchschnittlichen Zahl von Partikeln im Volumelement und stellt eine geordnete Strahlung dar. In bezug auf diesen Teil muß man also die Amplituden und nicht die Intensitäten zusammensetzen. Der andere Teil entspricht der momentanen Abweichung von der durchschnittlichen Zahl von Partikeln im Volumelement und stellt eine ganz ungeordnete Strahlung dar. Diese Zerlegung der zerstreuten Strahlung entspricht genau der oben durchgeführten.

Der Extinktionskoeffizient bekommt also in einem Gas, wenn man die elektromagnetische Theorie des Lichtes in der Planckschen Form annimmt, den Wert:

$$2 \cdot \frac{32\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4} = \frac{64\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4}.$$

Stimmt dieses Resultat mit den Tatsachen überein? Die Antwort scheint verneinend zu sein. Herr Fowle[1]) hat, unter Zugrundelegung des Rayleighschen Extinktionskoeffizienten, aus den Mount-Wilson-Beobachtungen über die Transmissibilität der Luft die Zahl, N_0, von Molekeln pro cm^3 bei 760 mm und 0^0 C berechnet. Er fand:

$$N_0 = 25{,}6 \cdot 10^{18}$$

in guter Übereinstimmung mit dem durch andere Methoden erhaltenen Wert. Dagegen würde der obige Wert:

$$N_0 = 51{,}2 \cdot 10^{18}$$

ergeben, was mit anderen Bestimmungen dieser Größe unverträglich ist. Ich glaube also, daß nicht nur in bezug auf die Wärmestrahlung, den photoelektrischen Effekt usw., sondern schon in bezug auf die Extinktion des Lichtes die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik in Widerspruch mit den Tatsachen steht.

Viele Vertreter der theoretischen Physik haben in den letzten Jahren angenommen, daß die Schwingungsgleichung eines Resonators kein Dämpfungsglied enthält. Es scheint mir von großem Interesse zu sein, daß man auf diese Weise auch der oben dargelegten Schwierigkeit entgeht. In der Tat würde dann die Rayleigh-Plancksche Extinktion wegfallen und nur die Keesom-Einsteinsche Extinktion zu berücksichtigen sein. Für den Extinktionskoeffizienten würde man wieder den Rayleighschen Wert bekommen. Daß auf der anderen Seite dieser Annahme noch sehr große, bis jetzt ungelöste Schwierigkeiten im Wege stehen, liegt auf der Hand.

Upsala, Mai 1916.

(Eingegangen 6. Mai 1916.)

1) F. E. Fowle, The non-selective transmissibility of radiation through dry and moist air, Astrophys. Journal, **38**, 1913.

Vorläufige Mitteilungen über die Kristallbildung im magnetischen Felde.

Von Arne Tveten.

(Mit Tafel VI u. VII.)

Schon Faraday hat Versuche über Kristallbildung und das Verhalten von Kristallen im magnetischen Felde ausgeführt (s. Pogg. Ann. 76, 144, 1849). Später ist die Bildung und besonders die Orientierung von Kristallen im magnetischen Felde von St. Meyer eingehender untersucht worden (s. Sitz.-Ber. d. Math.-Nat. Kl. d. Wien.Ak. d. Wiss. **106**, 2a; **108**, 2a). Auch A. Cotton und H. Mouton haben auf diesem Gebiete gearbeitet (s. Comptes Rend. 1908, 147).

St. Meyer fand, daß die Kristalle von Mangansulfat, Ferroammoniumsulfat, Kupferchlorid sowie einer Mischung von Kobalt- und Zinksulfat sich bei der Bildung in gesättigten, zwischen die Pole eines Magneten gebrachten Lösungen in eine bestimmte Lage mit Bezug auf die Richtung des Magnetfeldes einstellen.

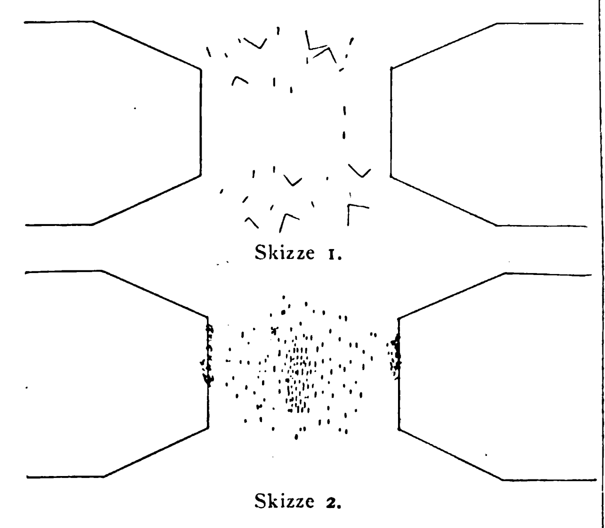
Bei ähnlichen Versuchen, die ich ohne Kenntnis der oben genannten Veröffentlichungen in den Jahren 1913 und 1916 unternahm, habe ich neben ähnlichen Erscheinungen, wie sie St. Meyer erwähnt, eine Reihe neuer beobachtet, über die ich hier kurz berichten will.

Bei meinen Versuchen bediente ich mich oft einer in folgender Weise hergestellten Lösung: Gleiche Teile einer 30proz. Lösung von zitronensaurem Eisenoxydulammoniak und einer 10proz. Lösung von rotem Blutlaugensalz werden gemischt und filtriert. Es wird Natronlauge hinzugefügt, und der sich dabei bildende braune Niederschlag durch Zusatz von wenig Tannin aufgelöst. Dann wird bis zur beginnenden Rotfärbung der Flüssigkeit Ammoniak zugegeben und filtriert. Aus dem Filtrat bilden sich unter normalen Verhältnissen tafelförmige, grünlichbraune Kristalle, die jedoch bei einem Überschuß von Natronlauge deutlich braun gefärbt sind. Eine geringe Verdünnung der Lösung mit Wasser wirkt günstig auf die Kristallbildung ein.

Ich beobachtete bei meinen Arbeiten die Versuchsflüssigkeiten auf Uhr- oder Deckgläschen durch ein Mikroskop, dessen besonders klein gehaltener Objekttisch zwischen den Polen eines Elektromagneten angebracht war. Die angewandten Feldstärken betrugen 500—4500 Gauß, selten mehr.

Bei diesen Versuchen machte ich die folgenden Beobachtungen:

I. Aus der oben beschriebenen Versuchslösung bilden sich außerhalb des Feldes, wie erwähnt, blatt- oder tafelförmige Kristalle, im Felde dagegen nadelförmige, deren Länge mit wachsender Feldstärke zunimmt (s. Skizze 1 und 2[1]).



Skizze 1.

Skizze 2.

II. Die im Felde gebildeten nadelförmigen Kristalle stellen sich zum größten Teil mit der Längsrichtung senkrecht auf die Kraftlinien ein. Häufig legen sich je zwei zu einem Winkel aneinander, dessen Scheitel nach dem stärksten Teil des Feldes weist (s. Fig. 3 und Fig. 7, 8, 9). Außerdem zeigen die Kristalle die Neigung, sich in den stärkeren Teilen des Feldes anzusammeln (s. Skizze 2). Fig. 6 zeigt eine Probe, die nach beginnender Kristallbildung im Felde um 90° gedreht ist; die Kristalle scheinen dabei in der ursprünglichen Richtung weiter zu wachsen.

III. Die nadelförmigen Kristalle sind beständig so lange wie das Feld aufrechterhalten wird. Kurze Zeit — etwa $^1/_2$ bis 2 Minuten — nach Unterbrechung des Elektromagnetstromes springen die scherenförmig aneinander gelagerten Kristallnadeln im Scheitel auseinander, und auch bei Wiedereinschaltung des Feldes behalten sie die so erlangte Stellung bei (s. Fig. 3). Bei länger andauernder Unterbrechung des Feldes beginnen bald die einzelnen Kristalle zn zerspringen (s. Fig. 5); sie zerteilen sich quer zu ihrer Längsrichtung und sind nach Verlauf einiger Minuten völlig zerstört. Diese Zerstörung geht in gleicher Weise vor sich, ob die Kristalle noch von Mutterlauge umgeben sind oder diese eingedampft ist (s. Fig. 4). Die nadelförmigen Kristalle bilden sich offenbar nur innerhalb des magnetischen Feldes, und nur hier sind sie formbeständig. Die außerhalb des magnetischen Feldes gebildeten blatt- oder tafelförmigen Kristalle werden, nachträglich in ein Feld gebracht, nach meiner Beobachtung in keiner Weise beeinflußt.

IV. Die hier behandelten Kristalle färben sich, ebenso wie die Kristalle der Ferrozyanwasserstoffsäure, an der Luft blau. Diese Blaufärbung wird in einem magnetischen Felde beschleunigt.

V. Die Kristallbildung in einer wässerigen Lösung roten Blutlaugensalzes geht innerhalb des magnetischen Feldes in auffallendem Maße rascher vor sich als außerhalb desselben.

VI. Unter gewöhnlichen Umständen gebildete Kristalle roten Blutlaugensalzes haben meist Rhomboeder-, aber auch Prismenform. Bei der Kristallbildung aus übersättigter Lösung im magnetischen Felde erhielt ich ausschließlich prismenförmige Kristalle, deren Längsachse meist senkrecht auf der Richtung des Feldes steht (s. Fig. 11). In der Nähe der Magnetpole häufen sich die Kristalle an (s. Skizze 2). In nicht übersättigter Lösung bilden sich innerhalb des magnetischen Feldes beiderlei Kristallformen, in der Mehrzahl jedoch Rhomboeder, die sich mit einer Diagonale parallel zu den Kraftlinien einstellen (s. Fig. 10).

[1] Die 12 Figuren befinden sich auf den Tafeln VI u. VII.

Fig. 12 zeigt unter sonst wie im Felde außerhalb dieses gebildete Kristalle roten Blutlaugensalzes. St. Meyer gibt an, bei Kristallen roten Blutlaugensalzes keine Orientierung wahrgenommen zu haben; hier komme ich also zu einem abweichenden Ergebnis.

Herr Professor O. E. Schiötz hat mir in zuvorkommender Weise gestattet, die oben beschriebenen Versuche an dem ihm unterstellten Physikalischen Institut der Universität Kristiania auszuführen, und ich möchte ihm auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Kristiania, im März 1916.

(Eingegangen 8. Mai 1916.)

BESPRECHUNGEN.

H. Henning, Ernst Mach, als Philosoph, Physiker und Psycholog. Eine Monographie. gr. 8°. XVIII und 185 Seiten. Leipzig, J. A. Barth. 1915. M. 5.—, geb. M. 6.—.

Wer die Einleitungen unserer Lehrbücher der Physik aufschlägt, wo sie sich über das Wesen der physikalischen Wissenschaft, ihre Ausgangspunkte, ihre Ziele, ihre Begrenzungen, ihre Methoden usw. allgemein auszusprechen versuchen, der wird fast überall von dem Gefühl krasser Unzulänglichkeit des Gebotenen e griffen. Wie oft fühlt man sich gedrängt, voller Verzweiflung an den Rand zu schreiben: „Mehr Mach!" Von andern sich aufdrängenden Randbemerkungen schon ganz zu schweigen.

Da ist es denn sehr zu begrüßen, wenn es ein Kenner unternimmt, in liebevollem Anschluß an die Persönlichkeit Machs dessen Lebenswerk einheitlich darzustellen. Nach einer vollständigen Titelübersicht über die Machschen Schriften wird zunächst die äußere und innere Lebensentwicklung Machs, zum Teil nach dessen eigenen Schilderungen, anziehend skizziert. Ein gutes Bild des Gelehrten vervollständigt, gewiß vielen willkommen, diese persönliche Bezugsetzung. Dann folgt die Darlegung der Machschen Gedankenarbeit in folgenden Abschnitten: 1. Philosophischer Teil, 2. Die Reform der Physik, 3. Psychologischer Teil, 4. Mach und die Biologie, 5. Machs Methodenlehre, 6. Machs Vorläufer, 7. Machs Kritiker.

In dem philosophischen Teil wird Machs grundlegender erkenntniskritischer Standpunkt dargelegt: wie er, den Anregungen der Darwinschen Theorie folgend, das ganze psychische Leben als biologische Erscheinung auffaßt; wie er demgemäß zunächst einmal das natürliche Weltbild, wie es jeder ohne sein Zutun beim geistigen Erwachen in sich vorfindet, analysiert, in Elemente auflöst; wie er die Begriffe dieses natürlichen Weltbildes als assoziativ erworbene „Empfindungskomplexe" erkennt, bei deren Bildung er die von Darwin erkannten biologischen Faktoren „Kampf ums Dasein", „Entwicklung" und „Auslese", genau so am Werk findet, wie bei der Bildung körperlicher Formen; wie dann jede Wissenschaft die systematische und bewußte Fortführung jenes Begriffsbildungsprozesses ist, durch die wir „unsere Gedanken den Tatsachen anpassen" und anpassen müssen, um uns üble Erfahrungen zu ersparen und angenehme zu verschaffen. Wie sich diese Anschauungen im einzelnen beim Verständnis des „Ich" und des „Substanz'begriffs, der Begriffe „Raum" und „Zeit" bewähren, wie sich dann das Kausalgesetz als die Empfindung der funktionalen Zusammenhänge zwischen Empfindungselementen oder Empfindungskomplexen ergibt.

Der zweite Abschnitt ist der speziell physikalischen Arbeit Machs gewidmet. Daß Mach auch die Physik unter dem Gesichtswinkel seiner allgemeinen erkenntniskritischen Betrachtungsweise sieht, ist es ja gerade, was seine noch längst nicht ausgeschöpfte Bedeutung für diese ausmacht. Wieviel er durch seine „historisch-kritischen" Betrachtungen der Mechanik und der Wärmelehre, ferner durch seine kritische Durchleuchtung der Atomhypothese und des langgehegten Ideals einer mechanischen Deutung der Welt zur Klärung der Anschauungen beigetragen hat, läßt sich nicht hoch genug stellen. Es wird vielleicht einmal eine dankbare Aufgabe sein nachzuweisen, wie stark am Ende Boltzmann, Planck, Einstein u. a. in ihrem Denken und Schaffen von Mach beeinflußt worden sind, trotzdem sie äußerlich zum Teil gelegentlich im Gegensatz zu ihm zu stehen scheinen. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip z. B. scheint ein konsequentes Weiterdenken des Machschen Grundprinzips von der Relativität aller Erkenntnis zu sein.

Von den Teilen 3 und 4 braucht hier nicht viel gesagt zu werden. In dem Abschnitt Methodenlehre finden sich all die schönen und so bestrickenden allgemeinen Gedanken der Machschen Erkenntnislehre noch einmal besprochen: Das Prinzip der Ökonomie der Wissenschaft, die Anpassung des Denkens an die Tatsachen, die Variation der assoziativen Koppelungen, welche der Auslese der geeignetsten Gedankenverbindung vorangeht und welche auch die Gedankengrundlage für das Experiment bildet: das Prinzip der Vergleichung; die Hypothese; Sinn und Wert der Naturgesetze usw. Viel Neues und Interessantes bringt der Abschnitt „Machs Vorläufer".

Diese Skizze wird zeigen, daß es ein reiches, anregendes Buch ist, welches hier vorliegt. Aber ich kann nicht verhehlen, daß es mir „das Buch Mach" doch noch längst nicht zu sein scheint, wie wir es brauchen. Noch fehlt uns eine von einer tiefdenkenden, physikalisch durchdrungenen Persönlichkeit ergriffene und durchleuchtete, knappe Darlegung der Machschen Gedankenreihe, befreit von allen Schlacken der Entstehungsgeschichte, und eine konsequente Formulierung ausdrücklich für den Gebrauch der Physiker. Die anderen Wissenschaftsgebiete mögen dann für das Entsprechende auf ihrem Gebiete sorgen. Das vorliegende Buch ist doch im wesentlichen referierend, eine selbständige in dem Gedankenschmelztiegel eines kongenialen Denkers geklärte Zusammenfassung der Machschen Lehre bringt es nicht; auch hat es sich bei der fortlaufenden Darstellung damit belastet, immer gleich die Einwände der Gegner anzuführen und zu widerlegen. So werden die Gedankenfäden, die an sich schwer und lang genug zu spinnen sind, immer wieder zerrissen.

H. Th. Simon.

Gustav Looser, Versuche aus der Wärmelehre und verwandten Gebieten, mit Benutzung des Doppelthermoskops. Vierte Auflage. gr. 8°. XV. u. 143 S. mit 71 Abbildungen. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn 1915. Geb. M. 4.—.

Das Loosersche Doppelthermoskop ist wohl jedem Physiker bekannt. Das Buch, welches in vierter, verbesserter und vermehrter Auflage vorliegt, beschreibt alle die zahlreichen Versuche, die sich mit dem Apparat anstellen lassen — Die Konstruktion des Looserschen Apparates ist aus dem Bedürfnis des physikalischen Elementarunterrichts hervorgegangen, mit möglichst einfachen Mitteln möglichst viel physikalische Anschauung geben zu können. Niemand wird leugnen, daß dieses Ziel von dem Verfasser der Schrift mit großem Geschick erreicht worden ist. Daß aber diese durch die ökonomische Lage der Schullaboratorien bedingte Absicht leicht dahin ausartet, die physikalischen Tatsachen mehr oder weniger gewaltsam den experimentellen Beschränkungen der Apparatur anzupassen, wird immer wieder beobachtet. Es kommt dann oft dahin, daß die zu demonstrierende Gesetzmäßigkeit durch ein kompliziertes Gebäude von Nebenbedingungen verbaut auftritt, und dann wird die Apparatur schließlich undurchsichtiger als die zu demonstrierende Erscheinung. Dann verliert sich die Grundbedingung, die jedes physikalische Experiment erfüllen muß, die interessierende Seite einer Erscheinung von störenden Nebenbedingungen frei hervortreten zu lassen. — Wo das Loosersche Instrumentarium und Buch, im Hinblick auf die angedeutete Gefahr, mit genügender kritischer Vorsicht benutzt werden, werden sie immer eine wertvolle Bereicherung unserer demonstrativen Hilfsmittel sein. Wo solche Selbstbeschränkung nicht geübt wird, werden sie aber auch leicht unheilvoll wirken können. Manche von den beschriebenen Experimenten haben jene Klippe sicherlich nicht umschifft, und man bekommt bei ihnen den Eindruck, als ob der Titel des Buches besser lauten müsse: Die Physik vom Standpunkte des Looserschen Doppelthermoskops. — In der Darstellung würde es sich nach meiner Ansicht empfehlen, stärker hervorzuheben, welche typischen Meßinstrumente das Thermoskop jedesmal vertritt, z. B. Thermometer, Kalorimeter, Strahlungsmesser, Amperemeter, usw. Das gäbe gegen eine gedankenlose Anwendung ein stärkeres Gegengewicht.

H. Th. Simon.

Max Dieckmann, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie für die Luftfahrt. 8°. X. und 214 S. mit 150 Abbildungen. München und Berlin, R. Oldenbourg. 1913. Geb. M. 8.—.

P. Ludewig, Die drahtlose Telegraphie im Dienste der Luftfahrt. Gr. 8. 82 S. mit 55 Abbildungen. Berlin, H. Meusser. 1914. M. 3.60.

In dem Augenblick wo die Luftfahrt durch Erfindung der Motorballone und der Aeroplane aus dem Stadium des Sports in das der Technik rückte, trat das Bedürfnis hervor, die drahtlose Telegraphie in ihren Dienst zu stellen. Die beiden vorliegenden Bücher berichten, was für Probleme besonderer Art dabei vorliegen und wie weit man in ihrer Bezwingung vor dem Kriege gekommen war.

Die beiden Bücher ergänzen sich gegenseitig glücklich. Das Dieckmannsche Buch soll vor allem eine Einführung in das Gebiet der drahtlosen Telegraphie sein, in der besonders solche Leser auf ihre Rechnung kommen, welche sich ihm von seiten der Luftfahrt aus gegenübergestellt finden. Fast Dreiviertel des Buches dienen dieser Einführung. Der Name des Verfassers bürgt für die Gediegenheit, mit der er seine Aufgabe angegriffen hat. Sie ist auch didaktisch vielfach in origineller Weise durchgeführt, so daß auch in diesem Teil der Physiker manches finden wird, was er verwerten kann. Die Kapitel IX bis XII enthalten dann das eigentlich auf die Luftfahrt Zielende. Die Überschriften: Zündungsgefahr, Bordstationen, Orientierung und meteorologische Beratung, Verkehr, kennzeichnen in großen Zügen die Fragen, um die es sich handelt. Hier findet der Physiker Gelegenheit zu erkennen, wieviel Einzelheiten interessanter Art noch der wissenschaftlichen Durcharbeitung harren.

Das Ludewigsche Buch kann als die Ausführung der genannten Anwendungskapitel des Dieckmannschen bezeichnet werden. Es setzt die Grundlagen voraus und spezialisiert lediglich auf den Luftfahrzweck. Die Kapitelüberschriften sind: 1. Antennenform, 2. Zündungsgefahr, 3. Sende- und Empfangsanordnungen, 4. Die wissenschaftlichen Aufgaben der Ballonstationen, 5. Die Ortsbestimmungen mittels drahtloser Telegraphie, 6. Der meteorologische Beratungsdienst. Alles das ist in klarer, wissenschaftlich durchdrungener Weise zusammengestellt und durch ausgezeichnete Abbildungen zur Anschauung gebracht. Man kann beide Werke als eine Bereicherung unserer Literatur über drahtlose Telegraphie begrüßen. Freilich ist anzunehmen, daß die drahtlose Telegraphie der Luftfahrt durch den Krieg eine explosive Entwicklung erfahren hat, so daß sie sachlich nach dem Kriege ein ganz anderes Bild bieten wird, als es noch die beiden Bücher geben konnten.

H. Th. Simon.

Hugo Kauffmann, Allgemeine und physikalische Chemie. gr. 8°. In zwei Bänden. Erster Teil, 149 S. mit 10 Figuren. Zweiter Teil, 142 S. mit 2 Figuren. Sammlung Göschen Nr. 71 und 698. Berlin u. Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung G. m. b. H. 1913. Gebunden je M. 0.90.

Band 1 enthält die Lehre von den Aggregatzuständen und Lösungen, die chemische Statik und Dynamik; Band 2 bringt je ein Kapitel über chemische Konstitution, Thermo-, Elektro- und Photochemie und über Elektronik. Bei dem knappen Raum, der dem Verfasser für jeden Abschnitt zur Verfügung steht, kann man ein Eingehen auf Einzelheiten nicht erwarten. Auch manches, was dem Referenten wesentlich erscheint, mußte wohl der Kürze halber fortbleiben. Mathematische Ableitungen sind fast ganz vermieden. Im allgemeinen ist es gelungen die richtige Auswahl zu treffen, und die Haupttatsachen sind klar und übersichtlich zusammengestellt, so daß man die beiden Bände als erste Einführung empfehlen kann.

Riesenfeld.

E. Nesper, Neuere Frequenz- und Dämpfungsmesser der Strahlentelegraphie. gr. 8°. 60 S. mit 65 Abbildungen. Leipzig, Hachmeister & Thal. 1913. M. 1.50.

Eine mit vielen und guten Schaltungsschematen, Konstruktionszeichnungen und Gesamtansichten ausgestattete systematische Aufzählung der zahlreichen Frequenz- und Dämpfungsmesser, mit denen uns die

drahtlose Telegraphie beschenkt hat. Auf die Theorie der Apparate wird wenig eingegangen, sondern mehr der konstruktive Gedanke in den Vordergrund gestellt. Immerhin ist die ziemlich vollständige Übersicht gewiß vielen recht willkommen und wertvoll.

H. Th. Simon.

Hans Witte, Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik. Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip. Sammlung Vieweg Nr. 17. 8⁰. IV u. 84 S. mit 17 Abbildungen. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 1914. Geh. M. 2,80.

Das kleine Heft gibt in guter und übersichtlicher Form eine Ableitung der raumzeitlichen Vorstellungen, die die Grundlage des Relativitätsprinzips bilden. Indem der Verfasser aus dem historischen Entwicklungsgang das Wesentliche herausschält, gelingt es ihm, durch systematischen Aufstieg den Leser scheinbar zwanglos in das Neuland des Einsteinschen Gedankenkreises einzuführen. Im Interesse der Allgemeinverständlichkeit ist dabei das Hilfswerkzeug der mathematischen Formeln ängstlich vermieden. Etwas zu ängstlich, wie mir scheinen will! Denn es wird dadurch ein unverhältnismäßig großer Raum zur Klarlegung gewisser Behauptungen in Anspruch genommen, die sich durch einfachste mathematische Formulierung in wenigen Zeilen hätten beweisen lassen.

F. Reiche.

W. Jänichen, Lichtmessungen mit Selen. Lex.-8⁰. VIII u. 76 S. mit Figuren und 5 Tafeln. Berlin, Administration der Fachzeitschrift „Der Mechaniker". 1914. M. 3.—.

Seit der Entdeckung des lichtempfindlichen Selens hat man sich bemüht, mit seiner Hilfe so etwas wie eine objektive, d. h. vom Auge unabhängige Photometrie zu erreichen. Der Verf. des hier vorliegenden gediegenen Buches hat sich der Mühe unterzogen, all die zahlreichen Vorschläge, die zu einer Selenphotometrie gemacht sind, kritisch zusammenzustellen und vor allem durch eigene sorgfältige Versuche ihren Wert zu prüfen. — Er unterscheidet zwei Gruppen von Vorschlägen: A) Methoden, bei welchen die Widerstandsänderung einer Selenzelle bei Belichtung direkt die photometrische Messung liefern soll; B) Methoden, bei denen Selenzellen lediglich die Rolle des Auges bei der gewöhnlichen Photometrie übernehmen, d. h. also als Vergleichsinstrumente dienen. Man lernt in der gegebenen klaren Übersicht über diese beiden Gruppen manchen geistreichen Vorschlag kennen, an dem man Freude und Anregung haben kann. Die Versuche des Verfassers selbst sind mit großer Sorgfalt angestellt. Sie ergeben, was jeder Kenner der Selenzellen voraussagen muß, daß die Methoden der Gruppe A unter allen Umständen völlig unzureichend sein müssen, solange die Lichtempfindlichkeit der Selenzellen eine so launische und mit der Zeit schwankende Eigenschaft bleibt, wie bisher. Dagegen liefern die Methoden der zweiten Gruppe B (die „Schwenkmethoden", weil die Zelle abwechselnd den beiden zu vergleichenden Lichtquellen zugeschwenkt wird) Meßergebnisse, die den besten sonstigen Photometern gleichstehen, vorausgesetzt, daß man sich auf den Vergleich völlig gleichfarbiger Lichtquellen beschränkt. Sollen verschieden gefärbte Lichtquellen verglichen werden, so macht der große Unterschied der Lichtempfindlichkeit für die verschiedenen Farben ein zuverlässiges Ergebnis unmöglich. Denn es werden unter Umständen erhebliche Strahlenanteile photometrisch unwirksam bleiben, weil sie auf die Zellen nur wenig wirken. Z. B. überwiegt die Rotempfindlichkeit im allgemeinen sehr stark, so daß rötlich gefärbte Lichter heller erscheinen werden, als sie wirklich sind. Nur wenn es gelänge Selenzellen zu finden, deren Empfindlichkeitskurve durch Sensibilisieren (und eventuell auch durch Farbfilter) der Empfindlichkeitskurve des Auges genau gleich wäre, würde dieser Fehler vermieden.

Das Buch ist eine recht wertvolle Bereicherung unserer Literatur über Selenzellen. Es enthält als Grundlage der photometrischen Messungen auch selbständige Untersuchungen über deren physikalische Eigenschaften.

H. Th. Simon.

Carl Leiß, Das Zielfernrohr, seine Einrichtung und Anwendung. 8⁰. 67 S. mit 35 Abbildungen. Neudamm, J. Neumann. 1912. M. 1.80. (1916 erschien eine 2. Auflage zu M. 2.—, die bei Abschluß der Nummer noch nicht vorlag.)

Referent erkennt die verdienstvolle Absicht des Verfassers an, Jägern, Jagdfreunden und Waffenfirmen einen Einblick in die Wirkungsweise der Zielfernrohre zu gewähren und dadurch die Handhabung zu erleichtern. Jedoch kann Referent nicht gutheißen, daß in Form einer dem Äußern nach völlig unparteiischen Schrift dem Unbefangenen eine Propagandaschrift vorgelegt wird, aus der der Laie den Eindruck gewinnen muß, als sei die gesamte Entwicklung der Zielfernrohre, ihre „Erfindung" inbegriffen, nur den vom Verfasser genannten Firmen und nicht zum mindesten ihm selbst zu verdanken.

Die in Anmerkung S. 7 gegebene Stellungnahme des Verfassers kann nach Ansicht des Referenten nicht davon entbinden, Literatur über die im Buche überhaupt nicht erwähnten Prismenzielfernrohre anzugeben, wenn der Verfasser vorzieht, diese Konstruktionen gar nicht zu behandeln.

Daß das Büchlein von Unklarheiten nicht ganz frei ist, hebt seinen Wert gleichfalls nicht. Referent verweist auf Fig. 1, in welcher der Strahlengang für die Okularlinse nicht einwandfrei und auch für die Bildorte B_1 und B_2 eine für den Laien zweifellos unerklärliche Knickung der Strahlen an den Bildorten dargestellt ist. Ferner steht beispielsweise der Satz auf S. 8: „Zielfernrohre, bei denen das Absehen bei B_2 eingesetzt ist, sind auf keinen Fall zu empfehlen" im Widerspruch mit der Empfehlung der Vergrößerungsansätze (S. 32) für welche naturgemäß als neuem, vor dem Abkommen gelegenen optischen Teil der Satz des Verfassers (S. 8) gilt: „Jede Lockerung und Lagenveränderung würde auch eine Lagenveränderung des in B_2 entworfenen Bildes bewirken." Zumal bei der exzentrischen Justierung der Negativlinse des Vergrößerungsansatzes eine Drehung des Ansatzes schon Fehler verursachen kann.

H. Schulz.

Hugo Bauer, Geschichte der Chemie. 8⁰. 2 Bändchen. Sammlung Göschen: 264, 265. 96 und 140 Seiten. 2. verbesserte Auflage, Berlin und Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung, G. m. b. H., 1915. geb. M. 1.80.

Der Verfasser zerlegt die Geschichte der Chemie in sieben Abschnitte: (Chemie der Alten bis zum 4. Jahrhundert n. Chr.; Zeitalter der Alchemie, bis zum 16. Jahrhundert; Zeitalter der Jatrochemie, bis

1700; Zeitalter der Phlogistontheorie, bis 1774; Zeitalter von Lavoisier, bis 1828; Zeitalter der Entwicklung der organischen Chemie, bis 1886; Chemie der Neuzeit) und behandelt die vier ersten davon im ersten, die übrigen im zweiten Teil des vorliegenden Werkchens. Ob diese Verteilung des Stoffes innerhalb der durch Anlage und Ziel der Sammlung Göschen gezogenen Grenzen zweckmäßig ist, ist eine Frage, die Ref. nicht ohne weiteres bejahen möchte. Der Raum, der danach auf die Schilderung der mit Lavoisier einsetzenden Entwicklung der modernen Chemie entfällt, steht nämlich in keinem rechten Verhältnis zum Umfang des zu bewältigenden Materials. Der Verfasser ist also gezwungen, sich um so kürzer zu fassen, je mehr er sich der Gegenwart nähert, und es dürfte wenigstens dem Nichtchemiker nicht immer ganz leicht werden, ihm dabei zu folgen. Im übrigen wird sich aber auch dieser gern und mit Vorteil von ihm in das behandelte Gebiet einführen und sich zu eingehenderer Beschäftigung damit anregen lassen. Borsche.

The Svedberg, Die Materie. Ein Forschungsproblem in Vergangenheit und Gegenwart. Deutsche Übersetzung von H. Finkelstein. gr. 8. III u. 162 S. mit 15 Abb. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 1914. geh. M. 6.50, geb. M. 7.50.

Das Buch behandelt das Problem der Materie in ganz leicht verständlicher Form ohne Anwendung von Mathematik in seiner historischen Entwicklung. Das Buch beginnt mit den Lehren der alten Griechen, die mit ihrer deduktiven Methode das physikalische Verhalten der Materie nicht näher analysieren konnten, aber mit Hilfe des reinen Denkens (Demokrit) zu dem Satze gelangten, der auch heutzutage den Grundpfeiler unserer Anschauungen über Materie bildet: „. . . . das Wirkliche sind die Atome und der leere Raum."

Dann wird die Geschichte der Alchemie, „die Geschichte eines ebenso ausgebreiteten wie tief eingedrungenen Irrwahns", geschildert: Die schwarze Kunst, die trotz unendlicher Mühe nur wenig wissenschaftlich wertvolle Früchte gezeitigt hat, weil ihr Antrieb nicht Wille zur Erforschung der Wahrheit, sondern Wille zum Reichtum und persönlichen Glück war. Erst Boyle erhob die Chemie zur Wissenschaft: „ich habe die Chemie nicht wie ein Arzt oder Alchimist behandelt, sondern so wie ein Philosoph sie ansehen muß." Nun schritt die chemische Forschung in gewaltigen Schritten weiter, durch die fundamentalen Entdeckungen von Cavendish, Scheele, Pristley und anderen wurde die schier unendliche Mannigfaltigkeit der irdischen Stoffe allmählich in eine geringe Zahl nicht mehr weiter verwandelbarer Grundelemente aufgelöst. Dalton brachte durch geniale Vereinigung der Ideen Demokrits mit den neuen experimentellen Befunden Klarheit in die quantitativen Beziehungen der chemischen Verbindungen. Immer weitere Entdeckungen entwickeln die Chemie auf Grund der Atomvorstellung zu einer Wissenschaft von wunderbarer Harmonie und Klarheit.

Die gleichzeitige Erforschung der Elektrizität aber gab uns die Hilfsmittel, das Atom, was man bislang für unwandelbar angesehen, in seinen spontanen Umwandlungen zu verfolgen (Radioaktivität). So löst sich die Materie in bestimmte Elementaratome, die materiellen Atome aber wieder in die Atome der Elektrizität auf.

Das Buch ist außerordentlich anregend und plastisch geschrieben, mit vielen sehr interessanten Figuren versehen, gut von H. Finkelstein aus dem Schwedischen übersetzt und kann dem Fachmann wie auch dem gebildeten Laien gleicherweise empfohlen werden.

H. Rausch von Traubenberg.

Tagesereignisse.

Die **98. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft** findet vom 6. bis 9. August 1916 in Tarasp-Schuls-Vulpera (Unterengadin) statt. Das ausführliche Programm wird später veröffentlicht.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Jena Dr. Hans Kaufmann für anorganische Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Franz Aigner für Experimentalphysik, an der Universität Wien Dr. Ludwig Flamm für Physik, an der Universität Padua Dr. L. S. da Rios für rationelle Mechanik.

Ernannt: Der Direktor der Remeis-Sternwarte in Bamberg Hofrat Professor Dr. Ernst Hartwig zum Honorarprofessor für Astronomie und Meteorologie an der Universität Erlangen, der Privatdozent an der Universität Rom Dr. G. Armellini zum a.o. Professor der rationellen Mechanik an der Technischen Hochschule Turin, der Associate Professor an der Universität von Kansas in Lawrence Dr. Charles H. Ashton zum ord. Professor der Mathematik an derselben Universität, der Privatdozent für analytische und projektive Geometrie an der Universität Palermo Dr. Pasquale Calupso zum a.o. Professor der Analysis an der Universität Messina, der a.o. Professor für algebraische Analysis an der Universität Catania Dr. Michele Cipolla zum ord. Professor ebendaselbst, der a.o. Professor der Mathematik an der Universität von Kentucky in Danville Dr. J. M. Davis zum ord. Professor an der gleichen Hochschule, Professor Dr. Z. Giambelli in Cagliari zum a.o. Professor der projektiven und darstellenden Geometrie an der Universität Messina, Professor Dr. N. C. Grimes zum Professor der Mathematik an der Universität Oregon, Dr. D. Jackson zum a.o. Professor der Mathematik an der Harvard University in Cambridge, Dr. E. H. Jones zum a.o. Professor der Mathematik an der Southern Methodist University, Dr. S. D. Killam zum a.o. Professor der Mathematik an der Universität von Alberta, der Privatdozent an der Universität Turin Dr. Ernesto Laura zum a.o. Professor der mathematischen Physik und der rationellen Mechanik an der Universität Messina, der a.o. Professor der Mathematik an der Universität Freiburg i. B. Dr. Alfred Loewy zum ord. Honorarprofessor an derselben Universität.

Verliehen: Den ord. Professoren an der Universität Leipzig Dr. Wilhelm Bjerknes (Geophysik) und Dr. Karl Paal (Angewandte Chemie) der Titel Geheimer Hofrat.

Gestorben: Der frühere Direktor der Ungar. Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus und Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Ó-Gyalla Hofrat Dr. Nikolaus Thege v. Konkoly (zuletzt Besitzer des Astronomischen Observatoriums in Nagy-Tagyos), der Privatdozent für projektive und deskriptive Geometrie an der Universität Pisa Dr. Ruggiero Torelli (am 10. Aug. 1915 am Isonzo gefallen), der a.o. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Hermann Thiele, der a.o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Würzburg Dr. Matthias Cantor (im Lazarett an den Folgen einer Verwundung), der Physiker Dr. Fritz Schulze in Berlin, der Chemiker Geh. Regierungsrat Professor Dr. Adolf Frank in Berlin.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

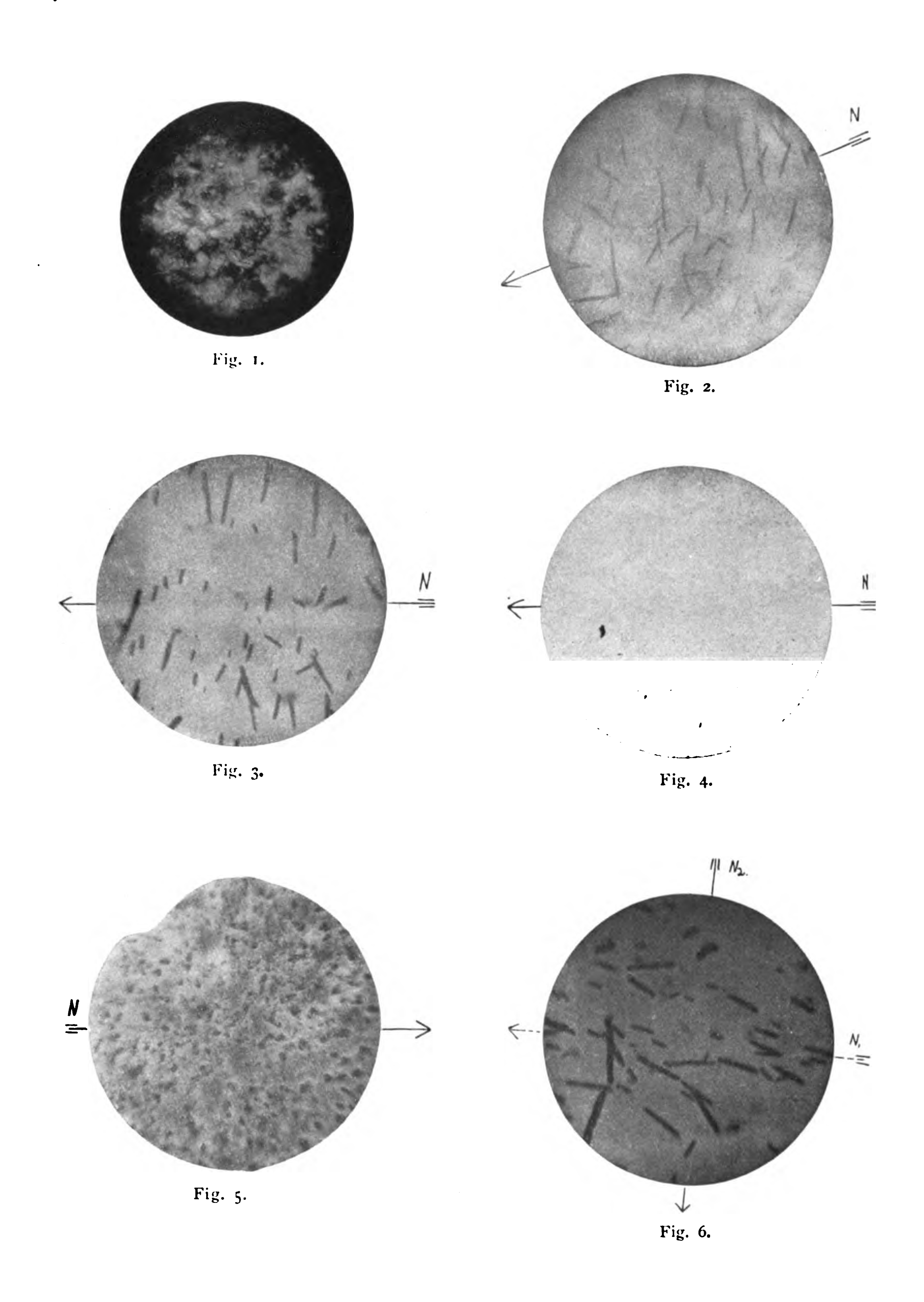


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

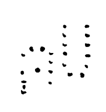
Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

A. Tveten, Vorläufige Mitteilungen über die Kristallbildung im magnetischen Felde.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.



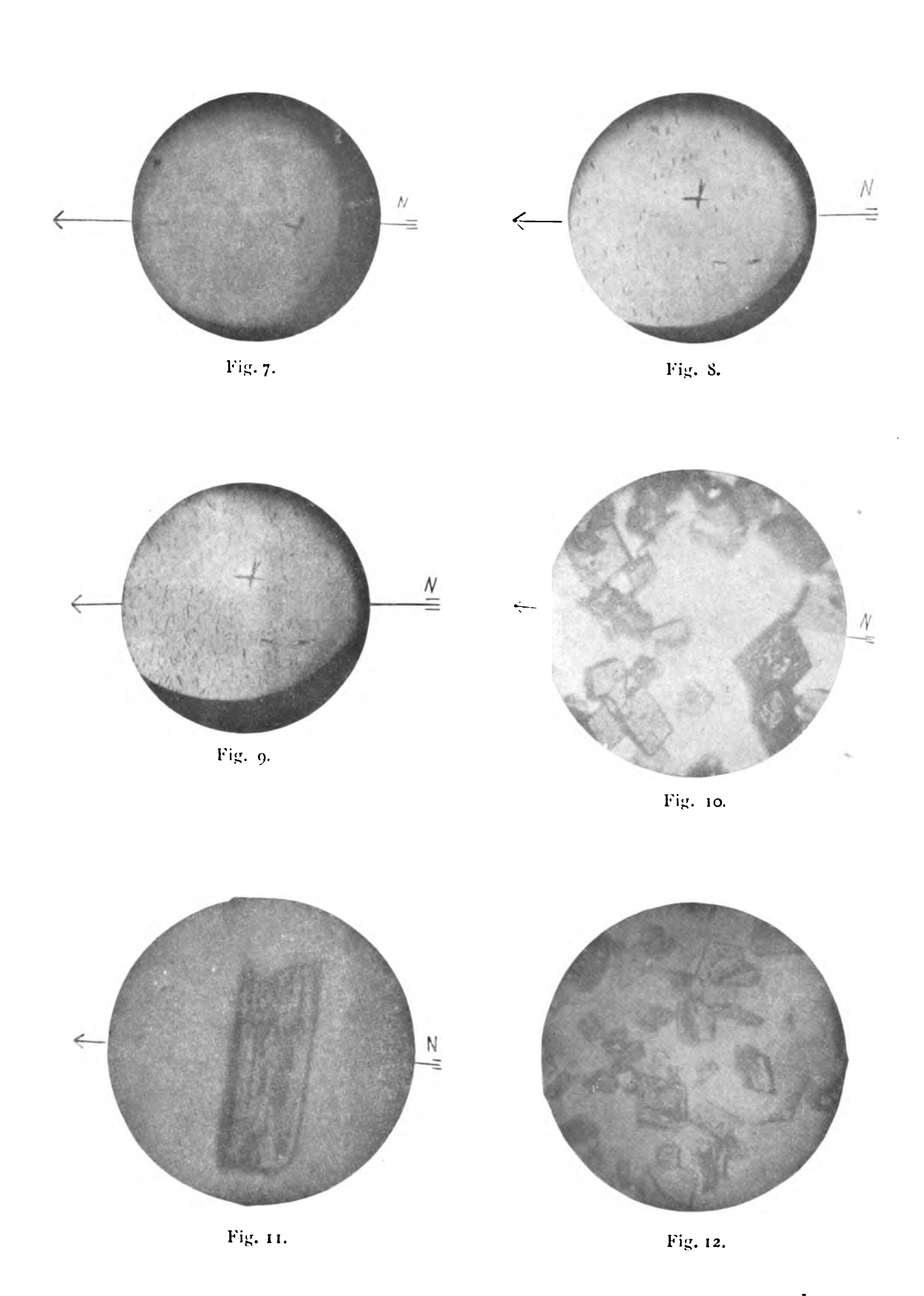


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

A. Tveten, Vorläufige Mitteilungen über die Kristallbildung im magnetischen Felde.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12. 15. Juni 1916. 17. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 13 am 24. Juni 1916.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die öligen Streifen schleimig- und tropfbarflüssiger Kristalle.

Von O. Lehmann.

Im März 1888 sandte mir Fr. Reinitzer, damals in Prag (jetzt Prof. d. Botanik in Graz), eine Probe des von ihm zur Ermittelung der chemischen Natur und physiologischen Funktion des Cholesterins hergestellten Cholesterylbenzoats mit dem Ersuchen, aufzuklären, warum diese Substanz seinen Beobachtungen zufolge, auch wenn sie ganz frei ist von Verunreinigungen mit chemisch anders zusammengesetzten Stoffen, eine trübe, farbenschillernde Schmelze liefert, die sich aber bei weiterem Erhitzen klärt. Er vermutete, die Trübung sei bedingt durch dünne farbenschillernde Blättchen einer physikalisch isomeren Modifikation, (so wie von mir öfters Trübungen in klaren harzigen Massen beim Erwärmen durch Ausscheidung kleiner Kriställchen physikalisch isomerer Modifikationen beobachtet worden waren[1])).

In seiner diesbezüglichen Publikation[2]) schreibt Reinitzer: „Die farbenerzeugende Substanz bewirkt ... auch die Trübung. Sie scheidet sich ... in Tropfen aus, in denen sich Kristalle vorfinden, und löst sich kurz vor dem Erstarren wieder auf“[1]).

1) O. Lehmann, Progr. d. Mittelsch. i. Mülhausen i. E. 1877; Zeitschr. f. Krist. **4**, 609, 1880. Die betr. Stelle von Reinitzers Brief lautet: „Die Substanz zeigt zwei Schmelzpunkte, wenn man sich so ausdrücken darf. Bei 145,5° schmilzt sie zunächst zu einer trüben, jedoch völlig flüssigen Flüssigkeit. Dieselbe wird erst bei 178,5° plötzlich völlig klar. Läßt man sie nun auskühlen, so tritt zunächst eine violette und blaue Farbenerscheinung auf, die aber rasch verschwindet, worauf die Masse milchig trübe wird, aber flüssig bleibt. Beim weiteren Abkühlen tritt dann abermals die violette und blaue Farbenerscheinung auf, und gleich darauf erstarrt die Substanz zu einer weißen, kristallinischen Masse. Durch Beobachtung unter dem Mikroskop läßt sich leicht folgendes feststellen. Beim Abkühlen treten zuerst sternförmige, später große strahlig nadlige (Kristall-)Aggregate auf; die ersteren bewirken die Trübung. Beim Schmelzen der festen Substanz zur trüben Flüssigkeit wird die Trübung jedoch nicht durch Kristalle, sondern durch eine Flüssigkeit bewirkt, welche in der geschmolzenen Masse **ölige Streifen** bildet und bei gekreuzten Nikols hell erscheint.“ (Gesperrtes ist von mir hervorgehoben. O. L.)

2) Fr. Reinitzer, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. **97** (1), 183, 1888.

1) W. Voigt (diese Zeitschr. **17**, 77, 1916) berichtet über diese Stelle, wie es ähnlich auch von andern geschehen ist, mit folgenden Worten; „Reinitzer fand, daß Cholesterylbenzoat in zwei flüssigen Phasen existiere ... Die erste Phase, die sich bei Beobachtung dünner Schichten mit freiem Auge trübe darstellte, erwies sich nun im Polarisationsapparat ziemlich stark doppeltbrechend.“ Wäre das zutreffend, so hätten diejenigen recht, welche mich der Willkür in historischer Darstellung beschuldigen (Johnsen, Besprechung, diese Zeitschr. **12**, 461, 1911; W. Nernst, Theoret. Chemie, 7. Aufl., S. 666 u. a.); ich darf deshalb nicht dazu schweigen. Eine Phase ist nach Definition (Gibbs 1876) eine homogene Substanz. Eine milchartige Emulsion, als welche sich Reinitzer die trübe Schmelze vorstellte, ist also keine Phase. Er betrachtete den flüssigen Hauptteil dieser Emulsion als identisch mit der klaren flüssigen Phase, somit kann nicht davon gesprochen werden, er habe die trübe Schmelze als zweite flüssige Phase betrachtet. Man könnte freilich sagen, die von ihm beobachteten „öligen Streifen“ seien eine zweite Phase. Auch das trifft nicht zu, denn dieselben sind identisch mit der Flüssigkeit, in welcher sie suspendiert sein sollen, es handelt sich um eine optische Täuschung. Daß die trübe Schmelze eine homogene doppeltbrechende Flüssigkeit ist und die scheinbar darin suspendierten Kriställchen und öligen Streifen lediglich Strukturstörungen, ist das Ergebnis meiner Beobachtungen. Der Briefwechsel mit Reinitzer, der vollständig erhalten ist, hat im Gegensatz zur Auffassung von W. Voigt zu dieser Aufklärung nichts beigetragen. Sicherlich hätte Reinitzer, wenn er durch spätere Versuche zur Erkenntnis gekommen wäre, die Emulsionstheorie sei unrichtig, die diesbezügliche Stelle seiner Publikation richtig gestellt. Er hat aber ausdrücklich weitere Untersuchungen mir allein anheimgegeben und erst mehr als ein Jahr nach Abbruch des Briefwechsels bin ich auf Grund fortgesetzter experimenteller Studien zur neuen Auffassung gelangt. Auch die später von andern ausgeführten Prüfungen der Emulsionstheorie, welche deren Unhaltbarkeit ergeben haben, haben nichts dazu beigetragen, meine Ansicht zu befestigen. W. Voigt gibt selbst an, ich hätte eine Menge von Beobachtungen gemacht, die nicht genügend berücksichtigt worden seien. Der Umstand, daß alle diese Beobachtungen über Form, Struktur und Verhalten der flüssigen Kristalle vom Standpunkt der Emulsionstheorie in keiner Weise gedeutet werden konnten, war mir ein viel zuverlässigerer Beweis

Da ich zunächst nur Reinitzers Beobachtungen bestätigen konnte und deshalb ebenso wie er der Meinung war, es handle sich um Ausscheidung einer physikalisch-isomeren Modifikation oder zweier solcher in Form feiner Kriställchen oder Tröpfchen (öliger Streifen) aus der isotropen Schmelze, so war meine erste Ansicht über die Doppelbrechung der „öligen Streifen" die, es handle sich um die von Vogelsang[1]) als „Fluidaltextur" bezeichnete Parallelrichtung feiner in einer zähen Flüssigkeit suspendierter doppeltbrechender Nädelchen oder Blättchen bei Strömung derselben infolge Geschwindigkeitsdifferenzen[2]), zumal nach Reinitzers Mitteilung die von ihm beobachteten, die Trübung veranlassenden sternförmigen, d. h. zentralfasrigen Aggregate leicht zerbröckeln, also in Fäserchen zerfallen sollten. Ich selbst konnte solche freilich nicht beobachten, sie mochten aber bei den mir zur Verfügung stehenden Vergrößerungen nicht mehr einzeln sichtbar sein. Jedenfalls stand mit dieser Auffassung das Verhalten der obigen Streifen im polarisierten Lichte scheinbar in Einklang[3]).

Ebenso wie Reinitzer, Quincke, Tammann, Rotarski, Nernst, Wulff, Bose, Dießelhorst u. a. hätte ich mich wohl mit der Annahme der Heterogenität beruhigt, wenn nicht die zahlreichen Studien mittels meines Kristallisationsmikroskops vorangegangen wären. Dazu gehört insbesondere die Entdeckung wahrer Plastizität bei Kristallen von Ammoniumnitrat[4]), d. h. der Fähigkeit dieser Kristalle ebenso wie amorphe pechartige Stoffe, also unter Störung des Raumgitters (welche optisch und durch Wachstumsstörung [Krümmung] nachgewiesen wurde) bei konstantem Kraftüberschuß über die Elastizitätsgrenze mit einer diesem proportionalen Geschwindigkeit zu fließen[1]).

Genaue quantitative Untersuchungen von W. Voigt[2]), die kurz zuvor angestellt worden waren, hatten ergeben, daß sich Steinsalz durchaus anders verhält. Sowie die Deformation einsetzt, die, wie E. Reusch[3]) bewiesen glaubte, sich ohne Raumgitterstörung, lediglich durch Parallelverschiebung längs der Rhombendodekaederflächen vollzieht, kommt sie sofort wieder, wegen automatischer Erhöhung der Elastizitätsgrenze, zum Stillstand, falls nicht auch die Kraft erhöht wird, was aber wieder weitere Verfestigung bedingt, wie man solche schon früher bei Metallen beobachtet hatte, so daß wahres Fließen wie bei zähen amorphen Stoffen unmöglich wird.

Bei Ammoniumnitrat beobachtete ich eine solche Verfestigung, die, wie auch das Auftreten doppeltbrechender Streifen im Steinsalz und das Verhalten des Kalkspats[4]) wahrscheinlich macht, auf teilweiser Umwandlung der Moleküle durch Schubkräfte[5]) beruht, allerdings ohne feinere Messung nicht[6]), und regulär kristallisiertes Jodsilber schien unter Umständen sogar ähnlich wie Öl zu fließen[7]).

Zu der Vorstellung, die Eigentümlichkeiten des kristallisierten und des flüssigen Zustandes, welche sich nach der alten allgemein üblichen Identitätstheorie der Aggregatzustände gegenseitig ausschließen sollten, könnten gleichzeitig bei demselben Körper vorhanden sein, haben aber nicht diese Beobachtungen für sich allein geführt, sondern die eingehenden Studien über Aggregatzustände, welche man in meinem Buche Molekularphysik (Bd. 1, 1888; Bd. 2, 1889) zusammengestellt findet. Während die (auch von W. Gibbs und J. H. van t'Hoff angenommene) Identitätstheorie der Polymorphie in polymorpher Umwandlung lediglich eine Raumgitterände-

von deren Unhaltbarkeit, wie alle sonstigen Versuche. Richtkräfte, wie ich sie beobachtete, sind zwischen suspendierten Kriställchen oder Tröpfchen nie beobachtet worden. Bezüglich der Literatur verweist W. Voigt auf die Schrift von Vorländer. Da ich mit dessen Ansichten in manchen Punkten durchaus nicht einverstanden bin (siehe diese Zeitschr. **15**, 617, 1914), möchte ich auf die Zusammenstellung meiner Arbeiten in J. Fricks Phys. Technik, 7. Aufl., Bd. II (2), S. 2067 u. ff. verweisen, in welchem Buche auch Anleitung gegeben ist, wie die flüssigen Kristalle dem gewöhnlichen physikalischen Lehrgang eingegliedert werden können (ebenda, Register S. 2039). Daß W. Voigt selbst nicht der Meinung ist, Reinitzer habe bereits den Begriff der flüssigen Kristalle, zu welchem ich schon früher auf anderem Wege gelangt war, zur Deutung der Erscheinungen bei seinen „trüben Schmelzen" benutzt, geht deutlich aus der Einleitung seines Berichts hervor, der im übrigen für mich besonders insofern von hohem Werte ist, als der hervorragendste Forscher auf dem Gebiete der Kristallphysik darin erklärt, meine Ansichten seien im Grunde mit seinen Ergebnissen recht wohl vereinbar.

1) Vogelsang, Philosophie der Geologie 1867, 138.

2) Siehe auch H. Dießelhorst u. H. Freundlich, diese Zeitschr. **17**, 117, 1916.

3) O. Lehmann, Molekularphysik **2**, 221, 1889.

4) Derselbe, Diss. Straßburg 1876; Zeitschr. f. Krist. **1**, 107, 110, 1877; Molekularphysik **1**, 64, 1888.

1) Siehe auch O. Lehmann, Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 413, 1913; J. Frick-O. Lehmann, Physik. Technik, 7. Aufl., II (2), 1326, 1909. Ann. d. Phys. 1916, im Druck.

2) W. Voigt, Diss. Königsberg 1874, Wied. Ann. **53**, 51, 1894.

3) E. Reusch, Pogg. Ann. **132**, 442, 1867.

4) W. Voigt, Wied. Ann. **67**, 208, 1899.

5) Förstner, Zeitschr. f. Krist. **9**, 348, 1884; O. Lehmann, Wied. Ann. **25**, 173, 1885; Ann. d. Phys. **21**, 381, 1906; E. Cohen, Zeitschr. phys. Chem. **71**, 304, 1910; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 1916, im Druck.

6) Vgl. auch G. Tammann, Ann. d. Phys. **7**, 198, 1902, der gleichmäßigen Ausfluß von Ammoniumnitrat beobachtete, so lange Umwandlung, die nach meiner Theorie der molekularen (physikalischen) Isomerie eine Umwandlung der Moleküle ist, nicht eintrat.

7) O. Lehmann, Wied. Ann. **24**, Taf. I, Fig. 27, 1885; Die neue Welt der flüssigen Kristalle, 1911, S. 165.

rung, also eine Änderung der Aggregation der Moleküle ohne Änderung der Moleküle selbst sah, welcher sich die innere Reibung entgegenstellen mußte, so daß die Übergangstemperaturen für Umwandlung im einen und andern Sinne verschieden sein mußten, fand ich (wieder zuerst bei Ammoniumnitrat) Gleichheit dieser Temperaturen für den Fall der Berührung beider Modifikationen analog der Gleichheit von Schmelz- und Erstarrungspunkt[1]) und Verwandtschaft mit der Dissoziationstemperatur von Molekularverbindungen. Waren aber die fünf festen Modifikationen des Ammoniumnitrats durch die Beschaffenheit ihrer Moleküle verschieden, warum sollte dies nicht auch für die Schmelze gelten? Sollte ein Stoff nicht auch zwei oder mehr flüssige Modifikationen (Schmelzen) haben können? Die Identitätstheorie gab nur die Möglichkeit einer flüssigen Phase zu; ich war geradezu genötigt, nach Fällen zu suchen, in welchen zwei oder mehr flüssige Phasen auftraten.

Der Identitätstheorie gemäß mußten sich bei der Erstarrung die im Flüssigkeitszustande regellos orientierten Moleküle zu einem regelmäßigen Punktsystem ordnen. Dieses war charakteristisch für den festen kristallisierten Zustand. Nun fand ich, daß Salmiak Kristalle im Widerspruch mit der damals gültigen Lehre von der Isomorphie Moleküle fremder, ein anderes Raumgitter anstrebender Stoffe (wie z. B. Eisenchlorid) in gleichmäßiger Verteilung wie bei Lösungen aufnehmen kann und daß dadurch ihr Raumgitter gestört, ihre Gestalt verkrümmt werde[2]). Ist aber Störung des Raumgitters möglich, sind dann nicht auch Übergänge vom kristallisierten zum flüssigen Zustand denkbar? Könnten nicht anisotrope Schmelzen existieren?

Mit diesen Fragen beschäftigte sich sonst niemand, da sie auf Grund meiner Beobachtungen entstanden waren, die in der zusammenfassenden Literatur keine Berücksichtigung fanden, weil im Widerspruch mit den in allen Schulen gelehrten Fundamentalsätzen der Identitätstheorie. Mich aber brachte fortgesetztes Nachdenken darüber in Verbindung mit Versuchen, die Stoffe durch Zusatz eines Lösungsmittels zu trennen[3]) zu der Vermutung, Reinitzers „isotrope Flüssigkeit", in der Kriställchen und Tröpfchen schweben sollten, sei keineswegs eine solche Emulsion, sie sei auch nicht, wie er annahm, identisch mit der klaren Schmelze, sondern eine zweite flüssige Phase[1]) und zwar eine doppeltbrechende, also kristallinisch-flüssige; ihre „Isotropie" sei eine optische Täuschung — ich nannte die Flüssigkeit deshalb „pseudoisotrop" —, weil sich infolge Anschmiegung der blättchenförmigen Moleküle an die Glasfläche — einer bis dahin unbekannten, auch heute noch in keinem Lehrbuch erwähnten Wirkung der Adsorptionskraft — die optische Achse in die Sehrichtung einstellt[2]). Trübung und Farbenschiller waren freilich durch die neue Annahme nicht aufgeklärt; und schon aus diesem Grunde wurde letztere verworfen, zumal die beiden Eigentümlichkeiten nur erklärlich schienen vom Standpunkt von Reinitzers Emulsionstheorie, die von ihm nicht zurückgenommen wurde.

Noch zahlreiche Untersuchungen an anderen Stoffen, insbesondere bei Ammoniumoleathydrat, dessen Myelinformen, die ich schon früher untersucht hatte, ebenfalls nur nach der Emulsionstheorie erklärbar schienen, bei welchem ich aber zuerst flüssige Kristalle beobachtete, waren erforderlich, bis es mir gelang, nachzuweisen, daß die Trübung von Reinitzers Schmelze lediglich bedingt ist durch (konische) Strukturstörungen (Zwillingsbildungen[3])).

Ebenso erkannte ich erst auf Grund meiner Entdeckung, daß Cholesterylkaprinat in zwei flüssig-kristallinischen Phasen auftritt, daß der Farbenschiller auf Mischung zweier solcher physikalisch-isomerer Modifikationen beruht[4]).

Was Reinitzers „ölige Streifen" anbelangt, so glaubte ich sie anfänglich als Stellen auffassen zu sollen, wo die blättchenförmigen Moleküle senkrecht zum Glase stehen[5]). Fortgesetzte Untersuchungen ergaben, daß dies nicht zutreffen kann; somit ging ich zu der nächst-

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 97, 1877; Ann. d. Phys. 21, 181, 1906.

2) Derselbe, Zeitschr. f. Kristallogr. 8, 433, 1883; N. Jahrb. f. Min. 1915 (2), 109.

3) Derselbe, Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 469, 1889.

1) Das Wort „Phase" ist erst zwei Jahre nach meinen Arbeiten über Ammoniumnitrat eingeführt worden.

2) O. Lehmann, Die neue Welt der flüssigen Kristalle S. 196; W. Voigt, diese Zeitschr. 17, 81, 1916 faßt meine Beobachtungen Heidelb. Sitzb. 1911 Nr. 22 Taf. 2, Fig. 16, u. Taf. 3 Fig. 17 u. 18 unrichtig auf. Die optischen Achsen liegen radial, nicht parallel der Rohrachse; auch hat nicht, wie er angibt, Vorländer, sondern F. Wallerant, Compt. rend. 143, 555, 1906 zuerst die Ringe im konvergenten Licht beobachtet.

3) Derselbe, Ann. d. Phys. 48, 739, 1915.

4) Derselbe, Zeitschr. f. phys. Chem. 56, 750, 1906; diese Zeitschr. 11, 575, 1910. Die Angabe von W. Voigt, Referat S. 87, nach welcher Vorländer die Dimorphie flüssiger Kristalle entdeckt haben soll, ist unzutreffend (vgl. Zeitschr. phys. Chem. 73, 607, 1910). Auch diese neue Beobachtung wurde angeregt durch meine oben erwähnten Betrachtungen über die Möglichkeit mehrerer flüssiger Phasen, die mich in Verbindung mit langer Übung im Beobachten von Umwandlungserscheinungen eine kaum bemerkbare plötzliche Änderung der Trübung von Cholesterylkaprinat gleich richtig deuten ließ.

5) Derselbe, diese Zeitschr. 7, 580, Fig. 2, 1906.

weniger einfachen Annahme über, die Blättchen seien schief gerichtet[1]). Das genaue Studium der Strukturstörungen bei einfachen Kristallindividuen ergab sodann, daß auch diese Annahme noch zu einfach ist, daß es sich vielmehr um eine besondere Art konischer Strukturstörungen handelt[2]), bedingt durch Hemimorphie der Moleküle.

Bei Zeichnung der Figuren a. a. O. ist leider ein Versehen unterlaufen, auf welches ich erst aufmerksam wurde, als Korrektur nicht mehr möglich war. Die Figuren 48 und 49, welche Durchschnitte durch eine infolge der Absorptionskraft der begrenzenden Glasflächen homogen halbisotrop gewordene Schicht, die am Rande rechts von einem öligen Streifen eingesäumt ist, darstellen sollten, die erste, indem sie die Richtung der optischen Achse für jede Stelle angibt, die zweite die Lage der blättchenförmig[3]) gedachten Moleküle, müssen durch Fig. 1 und Fig. 2 ersetzt werden. Dementsprechend muß

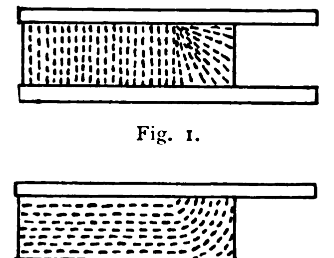


Fig. 1.

Fig. 2.

auch der letzte Satz auf S. 758, welcher sich auf glatte ölige Streifen inmitten einer solchen halbisotropen Schicht bezieht, geändert werden, d. h. die Struktur derartiger öliger Streifen ist nach gleicher Darstellungsart die in Fig. 3 bzw. Fig. 4 gezeichnete.

Aus den Versuchen bei einfachen schleimig-

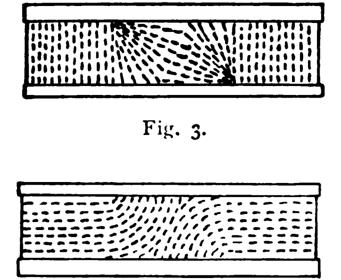


Fig. 3.

Fig. 4.

1) O. Lehmann, diese Zeitschr. 11, 582, Fig. 13, 1910.
2) Derselbe, Ann. d. Phys. 48, 725, 1915.
3) Derselbe, diese Zeitschr. 15, 617, 1914.

flüssigen Kristallen[1]) folgt nun, daß diese Anordnung nur dann stabil ist, wenn, wie in Fig. 5, die Orientierung der als hemimorph (schalenartig) zu denkenden blättchenförmigen Moleküle zu beiden Seiten des öligen Streifens, d. h. in den beiden halbisotropen Schichten, welche dort aneinander grenzen, eine gleichsinnige ist. Im entgegengesetzten Fall, wie ihn Fig. 6[2]) schema-

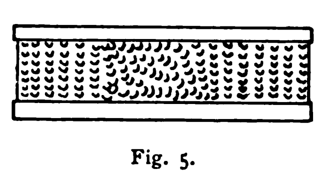


Fig. 5.

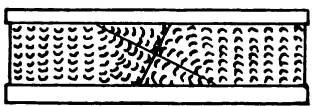


Fig. 6.

tisch darstellt, muß sich eine Kette von konischen Störungen bilden, wie a. a. O. in Fig. 58 und 59 bereits dargestellt wurde, aber ohne nähere Begründung. Der Grund ist, wie man sieht, der, daß sich die Zwillingsebene in Fig. 6 in eine Serie sich berührender Kreisflächen zerteilen muß, welche die Basisflächen der entstehenden doppeltkonischen Störungen sind, wobei aber die Achsen der Kegel, da sie sich gegenseitig beeinflussen, nicht gerade bleiben, wie in Fig. 7, sondern nach Herstellung des

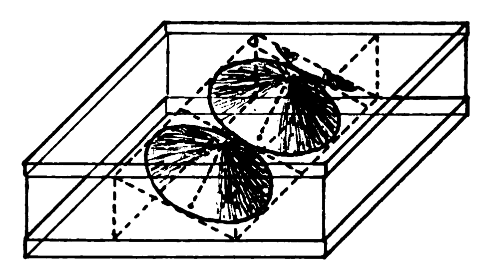


Fig. 7.

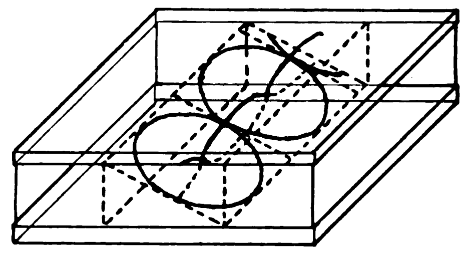


Fig. 8.

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 48, 740, 1915.
2) Die Lage der Moleküle an der Zwillingsebene ist hier nicht entgegengesetzt wie bei der Fig. 13 a. a. O., die der vorangehenden Fig. 11 entspricht, während Fig. 6 (oben) den Übergang zur Fig. 14 (a. a. O.) bildet.

Gleichgewichts ebenfalls Kreise bilden, die mit den genannten verschlungen sind, wie Fig. 8 darstellt. Die Fig. 9 zeigt solche aus verketteten konischen Störungen bestehende „ölige Streifen" in natürlichem, Fig. 10 bzw. 11 in polarisiertem Licht; Fig. 12 bietet die Ansicht einer halbisotropen Schicht, welche sowohl einen breiten glatten öligen Streifen enthält, wie einen kettenförmigen. Zwischen gekreuzten Nikols ist das Aussehen eines öligen Streifens der letzteren Art natürlich entsprechend kompliziert, wenigstens bei Para-

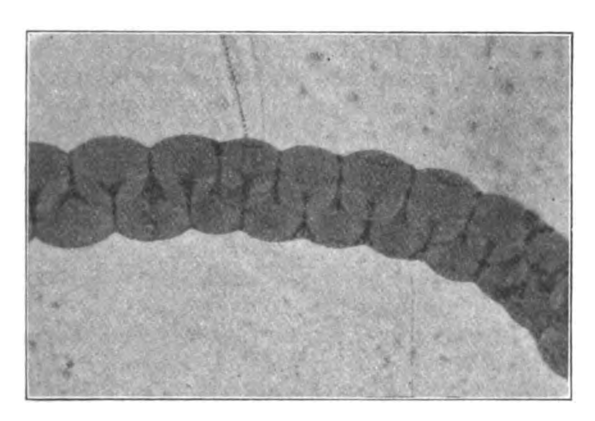


Fig. 9.

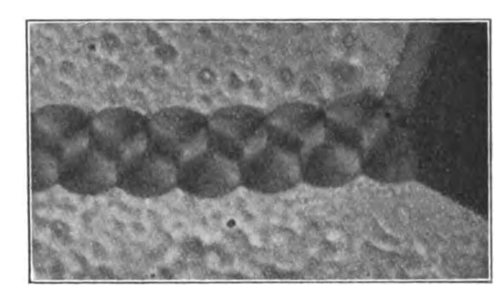


Fig. 10.

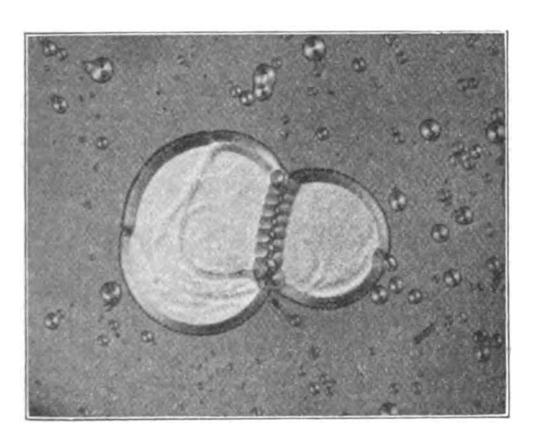


Fig. 11.

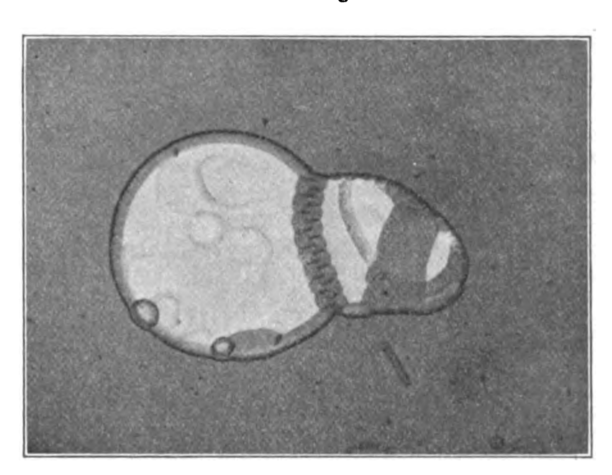


Fig. 12.

azoxyzimtsäureäthylester in Olivenöl (oder besser Cholesteryloleat), auf welchen sich die wiedergegebenen Figuren beziehen. Bei Ammoniumoleathydrat kann sich die Verkettung lösen, so daß scheinbar eine Aneinanderreihung von Sphärokristallen entsteht[1]), die in Wirklichkeit einzelne konische Störungen sind.

Das Auftreten öliger Streifen bei tropfbarflüssigen Kristallen beobachtete ich zuerst bei halbisotropen Schichten einer Mischung von Dibenzalbenzidin und Äthoxybenzalaldazin mit Kolophonium, die längere Zeit erhitzt war und sich dadurch chemisch geändert hatte[1]). Spätere Versuche ergaben, daß an Stelle des schwer zu beschaffenden Äthoxybenzalaldazins auch Anisaldazin treten kann[2]). Nimmt man etwa 2 Teile Dibenzalbenzidin und 1 Teil Anisaldazin und soviel Kolophonium als nötig ist, einzelne Kristalltropfen zu erhalten, so erscheinen letztere infolge der zahlreichen öligen Streifen (von fast genau gleichmäßiger Breite) mehr oder minder fein schraffiert, oft so fein, daß das Vorhandensein der Schraffierung auch bei stärkster mikroskopischer Vergrößerung nur durch das Auftreten von Beugungsfarben erkennbar ist[3]) Betrachtet man einen feinen Lichtpunkt durch ein solches Präparat, so erscheint dieser umgeben von prächtigen ringförmigen Beugungsspektren (innen blau, außen rot).

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle, 1904, Taf. 9, Fig. 6.

1) O. Lehmann, a. a. O., Taf. 29, Fig. 4.

2) Da bei den anzuwendenden Temperaturen gewöhnliche Objektträger leicht zerspringen, verwende ich solche aus Quarz- oder Tempaxglas.

3) Zahlreiche Abbildungen findet man a. a. O. Taf. 27 bis 35.

Indem man die Menge des Anisaldazins vergrößert und die des Kolophoniums vermindert oder an dessen Stelle Öl verwendet, kann man alle Übergänge zu den gewöhnlichen Kristalltropfen des Anisaldazins erhalten, die sich nicht wesentlich von denjenigen des Paraazoxyphenetols und -anisols unterscheiden. Die öligen Streifen gehen dabei in die Schichtung der großen Mischkristalltropfen, die ich früher bereits eingehend beschrieben habe[1]), sowie in die ebenfalls früher beschriebenen „Grenzlinien“[2]) über.

Aus meinen neuesten Versuchen ging hervor, daß letztere identisch seien mit der Zwillingsebene einfacher Kristalltropfen[3]). Ebenso wie bei den öligen Streifen der schleimigflüssigen Kristalle ist somit auch bei den tropfbar-flüssigen eine Zwillingsanordnung der Moleküle, welche durch fremde Beimischungen begünstigt wird, die eigentliche Ursache der Strukturstörungen. Zu deren klarer Erkenntnis muß man von einfachen Kristalltropfen mit geringer Beimischung ausgehen. Dabei zeigte sich folgendes.

Die Zwillingsfläche, welche bei reinen Kristalltropfen eine Ebene senkrecht zur Symmetrieachse (dem „Faden“) durch die Mitte des Tropfens ist (Fig. 13), verbiegt sich bei geringer Beimischung entsprechend der Rotationsrichtung, wie Fig. 14 zeigt, wobei der Rand der Zwillingsfläche auf der Rückseite punktiert angedeutet ist. Der beim normalen Tropfen in den Polen, den Enden der Symmetrieachse, endigende Faden wird nach beiden Seiten auf der Oberfläche des Tropfens in die entstandenen Ausbuchtungen der Randlinie der Zwillingsfläche hineingezogen, wie Fig. 15 von oben gesehen zeigt. Damit ist eine entsprechende Änderung der Struktur, somit auch der im Tropfen erscheinenden Schlieren

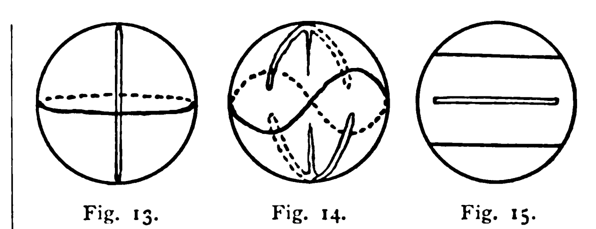


Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15.

verbunden, da von diesem Faden die Molekülreihen annähernd radial in Ebenen senkrecht zum Faden bis zur Zwillingsfläche sich hinziehen. Im Innern behält der Tropfen in der Nähe des Fadens seine Struktur; der Einfachheit halber kann man sich die Hälfte der Zwillingsfläche in der Mitte des Tropfens unverändert denken, den Rest gewissermaßen aus den geraden Linien zusammengesetzt, die von den Randpunkten des ungeänderten Teils der Fläche nach den entsprechenden Punkten des Umfangs des verbogenen Teils auf der Tropfenoberfläche verlaufen. Natürlich ist in Wirklichkeit die Fläche stetig gebogen.

Fortgesetzte Verdrillung infolge zunehmender Menge der Beimischung verwandelt den Rand der Zwillingsfläche in eine auf der Oberfläche der Kugel liegende doppelgängige Spirale, wie Fig. 16 von der Seite und Fig. 17 von oben gesehen zeigen, wobei sich auch der Faden (in

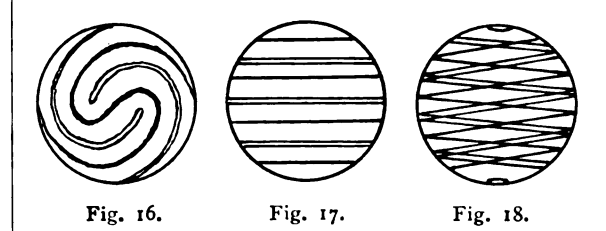


Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18.

der Figur durch eine Doppellinie angedeutet) zu einer zwischen deren Gängen liegenden Doppelspirale auszieht. Vermutlich verschwindet dabei der axiale Teil des Fadens und der ebene Rest der Zwillingsfläche ganz, die Struktur setzt sich nach dem Innern in der durch den Verlauf der Zwillingsfläche, (die aus von den Punkten des spiraligen Umfangs radial in die Tiefe gehenden Geraden gebildet gedacht werden kann) und den Verlauf des an der Oberfläche liegenden Fadens bedingten Weise fort. Bei kleinen freien Tropfen sieht man bei passender Lage deutlich die auf der Rückfläche in entgegengesetzter Neigung verlaufenden Spiralen durchschimmern (Fig. 18). Hieraus folgt, daß, wenn man den Tropfen umkehrt, so daß die Unterseite nach oben kommt, der Windungssinn der Spiralen wieder der in Fig. 16 und 17 gezeichnete ist. Die Verdrehung des Tropfens erfolgt also so, wie wenn die Unterseite gegen

1) O. Lehmann, diese Zeitschr. **12**, 540, 1911; Sitz.-Ber. d. Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 8; Ann. d. Phys. **35**, 219, 1911.

2) Derselbe, Ann. d. Phys. **2**, 682, 1900; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 17—19; Ann. d. Phys. **39**, 105, 1912.

3) Derselbe, Ann. d. Phys. **35**, 213, 1911; **39**, 80, 1912; **48**, 186, 765, 1915; W. Voigt, Referat S. 160 u. Gött. Nachr. 1916, 11. März glaubt die von uns bei Kristalltropfen beobachteten Erscheinungen (dunkles Kreuz, Quadrantenfärbung usw.) erklären zu können durch die Annahme, ein solcher Tropfen verhalte sich wie ein kugelförmiger einachsiger Kristall, welcher zugleich dichroitisch sei und die Polarisationsebene drehe. Das ist aber schon aus dem Grunde nicht möglich, weil bei Pressung des Tropfens zu einer flachen planparallelen Platte im parallelem Licht dieselben Erscheinungen auftreten. Eine wesentliche Rolle bei der Aufklärung spielte meine Entdeckung, daß sich die Molekülachsen in die Richtung der Kraftlinien zu begeben suchen. Nach W. Voigt, diese Zeitschr. **17**, 130, 1916, könnte man glauben, ich hätte nur die Drehung von Tröpfchen betrachtet, die ja gar nicht merkwürdig war. Dies ist durchaus nicht der Fall, vgl. diese Zeitschr. **13**, 556, 1912.

die Oberseite gedreht würde. Meine früher geäußerte Vermutung[1]), die Verdrillung sei die Folge der durch die Temperaturdifferenz von Unter- und Oberseite bedingten Flüssigkeitsströmung, insofern diese wegen Anisotropie der Reibung die Oberfläche gegen die innere Masse zu verdrehen sucht, weil letztere infolge ihrer Trägheit oder wegen Adhäsion am Glase nicht zu folgen vermag, ist also unzutreffend. Das Rotationsbestreben der Tropfen kann überhaupt nicht die Ursache der Verdrillung sein, weil sich diese in gleicher Weise auch bei den kleinsten freischwebenden beständig rollenden Tröpfchen zeigt, bei welchen Temperaturunterschiede oder Adhäsion gänzlich fehlen und weil die Ganghöhe der Spiralen durch das Mischungsverhältnis der Stoffe bedingt ist. Die Kräfte, welche die Verdrillung bewirken, sind augenscheinlich die Richtkräfte der Moleküle, welche normale Struktur anstreben, aber hieran durch die fremde Beimischung gehindert werden. Bei großen flachen auf dem Glase aufliegenden Tropfen fällt die Struktur der Unterseite fort, da sich dort die blättchenförmigen Moleküle, abgesehen von nächster Nähe der Zwillingsfläche, dem Glase anschmiegen. Letztere erhält in solchem Falle die Form eines hochkant stehenden, spiralig gewundenen Bandes, dessen Breite gleich der Dicke des Tropfens ist (Fig. 19). Bei

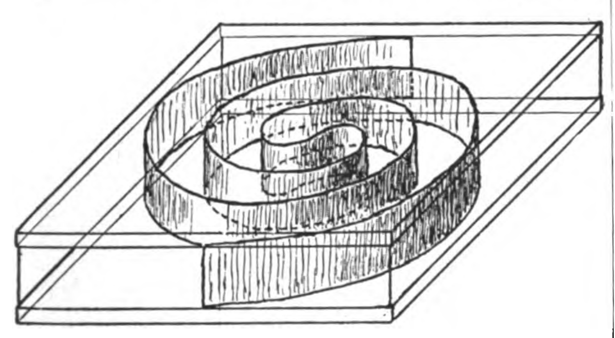


Fig. 19.

der Stellung Fig. 17 erscheint das Band in Form paralleler gerader Lamellen. Nur am freien Rande des Tropfens sind diese Lamellen um 90° gedreht (Fig. 20) und bei konkaver Form der Randkurve ist ihr Abstand oft erheblich gemindert, sofern sie senkrecht dazu verlaufen (Fig. 21), was aber nicht immer der Fall ist.

Werden, was bei Verminderung der Beimischung von Kolophonium und bei längerem starken Erwärmen infolge chemischer Veränderung von selbst eintritt, die Abstände der Zwillingsbänder sehr groß, so daß man deutlich ihre oberen und unteren Kanten sehen kann,

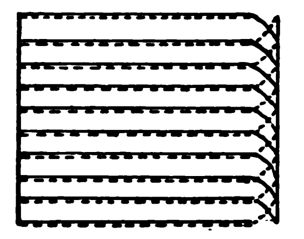


Fig. 20.

so verschwinden die zwischenliegenden Fäden und Reste von Kern- und Konvergenzpunkten (in der Sehrichtung, also in Projektion erscheinende Fäden), fast das ganze Gebiet zwischen zwei Grenzflächen wird einheitlich halbisotrop,

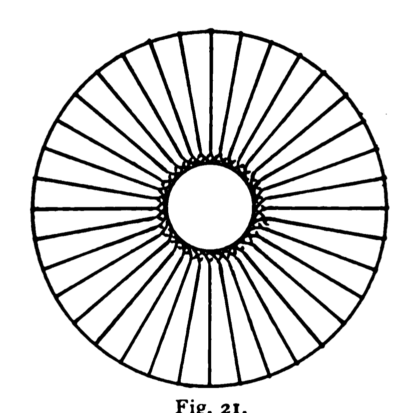


Fig. 21.

indem sich die Blättchenmoleküle dem Glase anschmiegen, die optische Achse also sich senkrecht zu diesem stellt.

Bei ausgedehnten, durch Zusammenfließen mehrerer Tropfen gebildeten Schichten zeigt

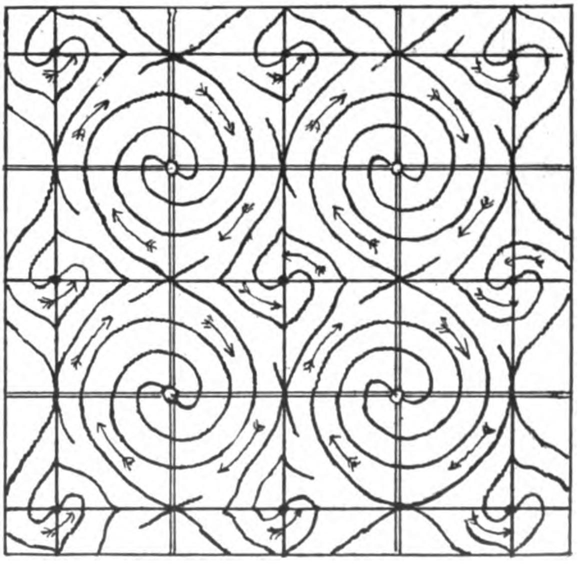


Fig. 22.

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle 1904, S. 73.



sich im einfachsten Falle eine gesetzmäßige Anordnung der Spiralen zu einem quadratischen Netz, wie Fig. 22 andeutet. Die Spiralen, welche ebenso gewunden sind wie die einfacher Tropfen, scheinen (infolge des Restes des axialen Fadens) im Zentrum einen dunkeln Punkt zu enthalten. Ihre Windungen sind (auf der oberen Seite) eingebogen quadratisch und die Lichtablenkung in den Ecken des Quadrats läßt (bei passender Tubusstellung) die dunkeln Zentralpunkte durch gerade dunkle Streifen verbunden erscheinen. Die Bildung dieser Spiralen bedingt infolge von Reibung wie bei Friktionsrädern, wie die Pfeile andeuten, die Bildung entgegengesetzt gewundener kreisförmiger Spiralen, deren Mitte hell ist. Auf der Unterseite sind diese Spiralen quadratisch, während die Unterseite der vorerwähnten quadratischen Spiralen aus kreisförmigen Spiralen besteht, so daß sich in den Knotenpunkten des Netzes, da wo die untere Schraffierung durchschimmert, eine Kreuzschraffierung zeigt (Fig. 23). Da sich die

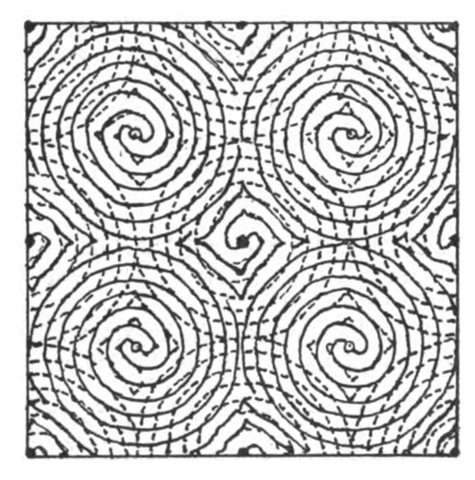


Fig. 23.

oberen und unteren Spiralen in der Mitte decken, während bei einem einfachen Tropfen (Fig. 16) naturgemäß Kreuzung der Spiralen der Oberseite und der durchschimmernden Spiralen der Unterseite stattfindet, folgt also, daß nicht wie bei den Tropfen (Fig. 18) Ober- und Unterseite gegeneinander verdreht sind. Die Spiralbänder verlaufen in Kegeln von abwechselnd entgegengesetzter Lage ähnlich den konischen Störungen bei schleimig-flüssigen Kristallen[1]). Die als helle Brennpunkte erscheinenden Mitten der oberen kreisförmigen Spiralen (Basisflächen der Kegel) sind scheinbar durch gerade weiße Streifen verbunden, was durch starke Neigung der Zwillingsbänder an den betreffenden Stellen bedingt ist. Die Figuren 24 und 25, welche Photographien stark verzerrter derartiger Bildungen nach der Natur sind, lassen diese Streifen noch deutlich erkennen.

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 48, 747, Fig. 33, 1915.

Infolge chemischer Änderung des Stoffs bei länger dauerndem Erhitzen verbreitern sich die Abstände der Zwillingsbänder, wie aus den

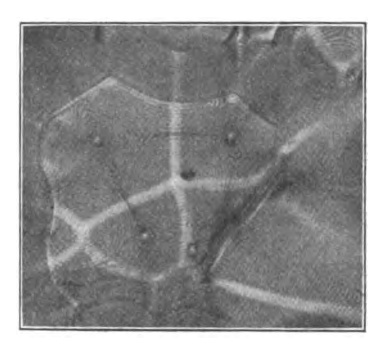


Fig. 24.

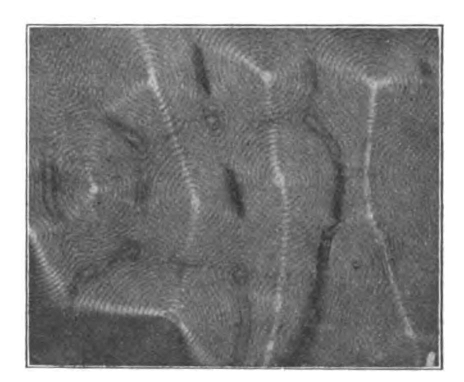


Fig. 25.

Photographien Fig. 26 und 27 zu ersehen ist. Die Moleküle der zwischen ihnen liegenden Massen schmiegen sich dem Glase an, so daß die optische Achse senkrecht zu letzterem wird, wodurch die Zwillingsbänder besonders deutlich werden, wie die Photographien Fig. 28 und 29 zeigen und schließlich verschwinden die Zwillingsbänder stückweise, so daß zunächst nur einzelne Strecken, die frei in der halbisotropen Schicht endigen und entsprechende Polarisationserscheinungen zwischen gekreuzten Nikols zeigen, übrig bleiben (Fig. 30), die sich aber allmählich verkürzen (Fig. 31) und endlich, indem ihre Länge Null wird, ebenfalls verschwinden, wodurch die ganze Schicht gleichmäßig halbisotrop (mit zum Glase senkrechter Achse) geworden ist. Eine solche Schicht hat also ganz die Struktur von Reinitzers „isotroper Flüssigkeit" und die etwa noch vorhandenen Reste von

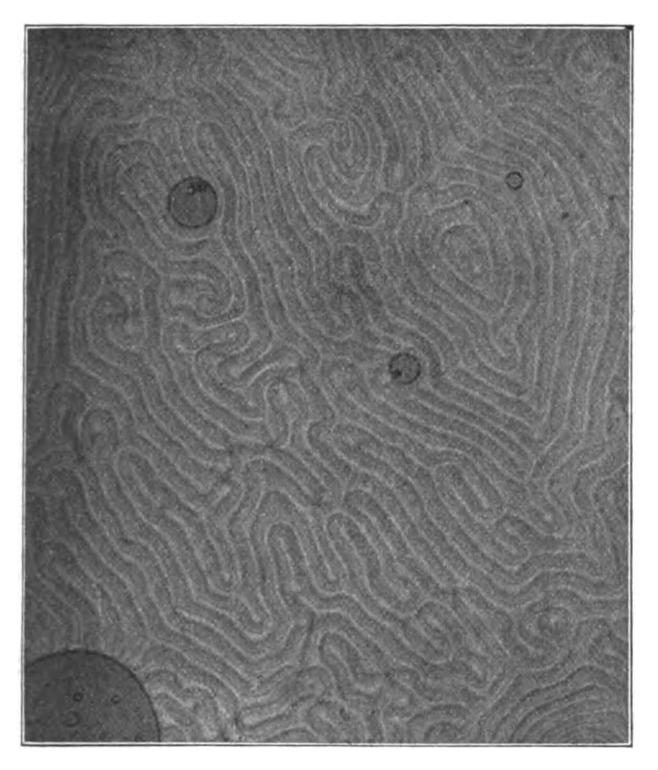


Fig. 26.

Fig. 27.

Zwillingsbändern in ihr verhalten sich ganz analog wie Reinitzers „ölige Streifen". Um eine deutlichere Vorstellung des Verlaufs der verkürzten Zwillingsbänder zu geben, füge ich in



Fig. 28.

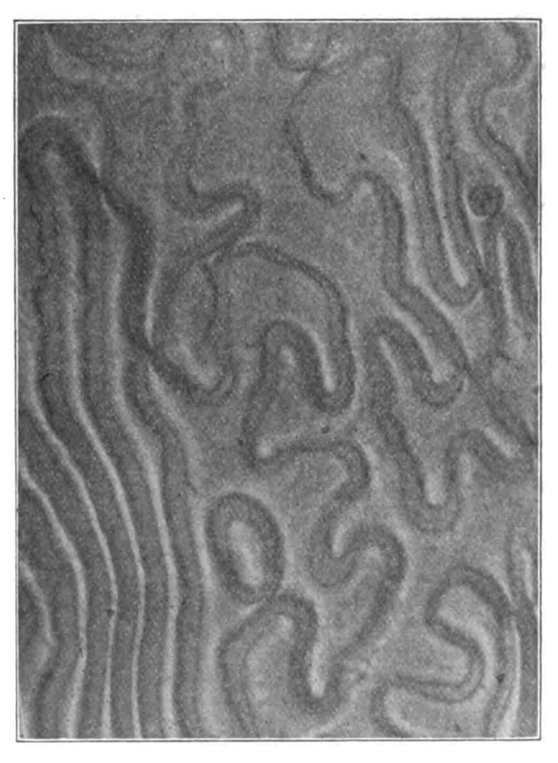


Fig. 29.



Fig. 32 noch eine Photographie nach der Natur bei.

Die zahlreichen Photographien, welche in

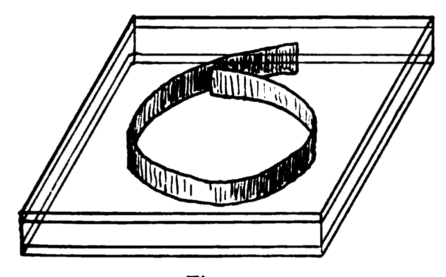


Fig. 30.

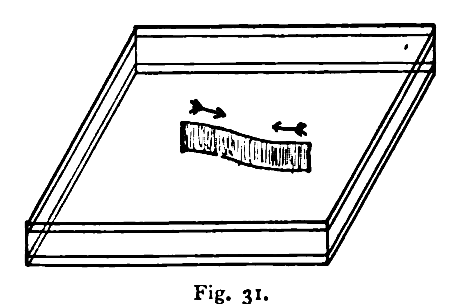


Fig. 31.

meinem Buch Flüssige Kristalle (1904) gegeben sind, werden nun, nachdem mit der Entdeckung der Zwillingsflächen der Schlüssel zur Deutung gefunden ist, dem Verständnis keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr bereiten und ebensowenig die kinematographischen Aufnahmen, welche in nächster Zeit im Handel zu haben sein werden[1]). Die vollkommene Unhaltbarkeit der Emulsionstheorie dürfte noch mehr wie zuvor jedem klar werden, der versucht, von diesem Standpunkt die Erscheinungen zu deuten.

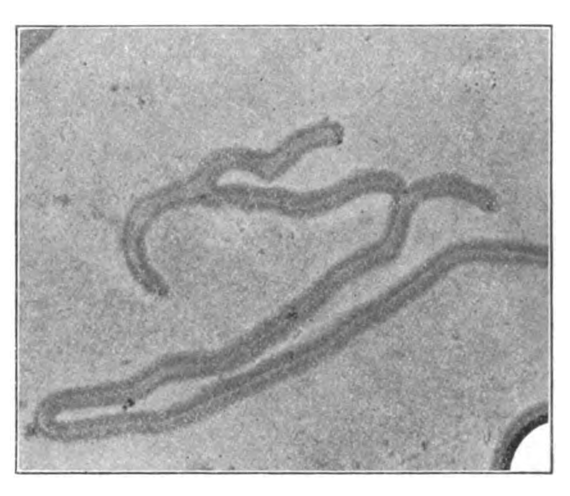


Fig. 32.

Wenn W. Voigt am Schlusse seines Berichts sich dahin äußert, zwischen festen und flüssigen Kristallen sei insofern eine scharfe Grenze, als erstere als Aggregate von Atomen, die durch starke chemische Kräfte verbunden sind, betrachtet werden müssen, flüssige Kristalle



Fig. 33.

1) Zu beziehen von der Firma H. Ernemann, Photokinowerk, Dresden-A., Schandauer Str. 48.

dagegen als Aggregate von Molekülen, deren gegenseitige Kraftwirkungen von der Art der Kapillarkräfte sind, so dürfte solcher Auffassung vor allem entgegenstehen, daß eine scharfe Grenze zwischen festen und flüssigen Kristallen aus deren Eigenschaften nicht zu erkennen ist. So wie zwischen den öligen Streifen der schleimig-flüssigen und der tropfbar-flüssigen Kristalle augenscheinlich eine nahe Verwandtschaft besteht, ebenso ist eine solche vorhanden zwischen den konischen Strukturstörungen der schleimig-flüssigen Kristalle (zu welchen auch die öligen Streifen gehören) und den fächerartigen Strukturstörungen der zähflüssigen Kristalle, wie solche zu ersehen sind aus Fig. 33, welche ein Präparat von saurem Ammoniumoleat zwischen gekreuzten Nikols zeigt und zwischen diesen und den sphärolithischen Strukturstörungen fester Kristalle[1]).

Allerdings nehme auch ich eine gewisse Grenze zwischen festen und flüssigen Kristallen an insofern, als erstere eine Elastizitätsgrenze besitzen, letztere nicht. Obiger „Atomgruppierungstheorie"[2]) zufolge müßte also die Elastizitätsgrenze durch chemische Kräfte bedingt sein. Nach dem Ergebnis von W. Voigt (Diss. 1874) können aber schon minimale mechanische Kräfte die Elastizitätsgrenze ändern, während die chemischen Kräfte (Referat Nr. 20) sehr beträchtlich sein sollen.

Vorläufig vermag übrigens die Atomgruppierungstheorie noch nicht einmal die Existenz der fünf festen Phasen des Ammoniumnitrats oder die der Salmiakmischkristalle oder die Plastizität des Ammoniumnitrats aus den chemischen Wertigkeiten abzuleiten. Die Röntgenstrahleninterferenzen erscheinen aber auch vom Standpunkt der Molekulartheorie verständlich, denn sie müssen in gleicher Weise auftreten, wenn der Durchmesser der Moleküle relativ groß und ihr Abstand klein ist, da dann das Ganze als Aggregat ineinandergestellter Raumgitter von Atomen aufgefaßt werden kann.

1) Anmerkung bei der Korrektur: Bei der in Wasser aufgequollenen 10-Bromphenanthren-3 oder 6-sulfosäure von Dr. Håkan Sandquist in Upsala erhält man je nach dem Wassergehalt alle Übergänge von leichtflüssigen Kristalltropfen bis zu zähflüssigen Kristallen doch ohne ölige Streifen.

2) Siehe auch Max Born, Dynamik der Raumgitter, Leipzig 1915.

(Eingegangen 8. Mai 1916.)

Über die Dispersion und Absorption von dünnen Metallschichten.

Von Béla Pogány.[1])

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich über Messungen bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit und des optischen Verhaltens von dünnen *Pt*-, *Pd*-, *Au*- und *Ag*-Schichten berichtet. Auf Grund dieser Messungen wurden die Kurven gezeichnet, welche den Verlauf von n^2-k^2 und $2nk$, des reellen und imaginären Teiles des komplexen Brechungsindex als Funktionen der Dicke darstellen. Die $2nk$-Kurven waren bei allen vier Metallen vom selben Typ. Die n^2-k^2-Kurve des Goldes z. B. unterschied sich aber auch qualitativ von derjenigen des *Pt* und *Pd*. Denn während bei letzteren n^2-k^2 eine mit wachsender Schichtdicke monoton abnehmende Funktion war, besaß die n^2-k^2-Kurve des Goldes ein Minimum. Und zwar war dies Minimum um so schärfer und tiefer, je größer die Wellenlänge des benutzten Lichtes war. Dieses Minimum von n^2-k^2 ist auf das Maximum von k zurückzuführen.

Die beobachteten Kurven wurden dann mit denjenigen verglichen, die man aus der Dispersionstheorie auf Grund des W. Planckschen Ansatzes[3])

$$r=r_0\left(1+\frac{\alpha}{D}\right) \qquad (1)$$

berechnen kann, wobei bedeuten: r die auf die freien Elektronen in der dünnen Schicht wirkende „Reibungskraft", r_0 dieselbe im massiven Metall, D die Schichtdicke und α eine positive Konstante. Der Vergleich führte zu dem Ergebnis, daß aus obigem Ansatz das optische Verhalten des *Pd* und *Pt* wohl, dasjenige des Goldes aber, wegen des Minimums von n^2-k^2, auch qualitativ nicht zu erklären ist. Weiterhin wurde mit Hilfe der Meierschen Zahlen die Dispersion des Maximums von $2nk$ bei Gold berechnet, was, wie ich gezeigt habe, ohne spezielle Voraussetzung bezüglich des Zahlenwertes von α möglich ist. Die so berechnete Dispersion war die Hälfte des beobachteten.

Aus diesen zwei Umständen geht hervor, daß der W. Plancksche Ansatz einer Erweiterung bedarf, falls man damit die hierher gehörigen Erscheinungen vollständig beschreiben will. Bevor ich dies unternommen hätte, wollte ich die an Goldschichten erhaltenen, von den Folgerungen des obigen Ansatzes abweichenden

1) Vorgelegt der Ung. Akademie d. Wiss. in d. Sitzung vom 10. April 1916.

2) B. Pogány, Ann. d. Phys. **49**, 531, 1916.

3) W. Planck, diese Zeitschr. **15**, 563, 1914.

Resultate noch einmal verifizieren, und zwar mit einem Verfahren, das sich von der indirekten Försterlingschen Methode, nach welcher obige Beobachtungen gemacht wurden, prinzipiell unterscheidet. Das war möglich. Der kritische Punkt ist nämlich das Minimum von $n^2 - k^2$ bzw. das Maximum von k, d. h. der Umstand, daß eine Goldschicht von gewisser Dicke einen größeren Absorptionsindex besitzt, als die dickeren und dünneren Schichten. Der Absorptionsindex mehr oder weniger durchsichtiger Metallschichten ist aber nach der Methode von E. Hagen und H. Rubens[1]) direkt meßbar. Bei den Bestimmungen dieser Forscher wurde der Absorptionsindex des massiven Metalls ins Auge gefaßt, deshalb beziehen sich ihre Messungen auf Schichten, die so dick waren ($> 50\,\mu\mu$), daß man auf Grund des schon konstant gewordenen Reflexionsvermögens schließen durfte, daß ihre optischen Konstanten schon die dem massiven Metall zukommenden Werte erreicht haben. Mich interessierten hier gerade die dünneren Schichten, da das zu erwartende Maximum von k bei ungefähr $12\,\mu\mu$ war. Da meine Messungen sich vorläufig nur auf das sichtbare Spektrum beziehen, so habe ich im Gegensatz zu Hagen und Rubens nicht eine bolometrische, sondern die gewöhnliche spektralphotometrische Methode benutzt.

Im ersten Teile wird nun über diese Messungen berichtet, im zweiten von der entsprechenden Erweiterung des W. Planckschen Ansatzes.

§ 1. Die spektralphotometrische Bestimmung der Absorptionsindizes von dünnen Goldschichten.

Bei der spektralphotometrischen Bestimmung der Absorptionsindizes wird die senkrecht einfallende Intensität J_0, mit der durchgegangenen J verglichen. Die Goldschichten befanden sich auf Glasplatten, das Licht hatte also drei Grenzflächen zu passieren. Bezeichnet man das Durchlässigkeitsvermögen der Grenzflächen der Reihe nach mit δ_1, δ_2 und δ_3, so wird die Intensität des wieder in Luft austretenden Lichtes:

$$J = J_0 \delta_1 \delta_2 \delta_3 \, e^{-\frac{4\pi k D}{\lambda} - \frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda}} \qquad (2)$$

wobei bedeuten, k den Absorptionsindex der Goldschicht, D deren Dicke, k_0 den Absorptionsindex der Glasplatte, D_0 deren Dicke und schließlich λ die in Luft gemessene Lichtwellenlänge. Das Photometer gestattet die Bestimmung des Verhältnises von $\frac{J}{J_0}$. Es ist

$$\lg \text{nat} \frac{J}{J_0} = \lg \text{nat}\, \delta_1 \delta_2 \delta_3 - \frac{4\pi k D}{\lambda} - \frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda}. \qquad (3)$$

Es war nun k_0 und D_0 dieselbe für jede Platte.

$$-\lg \text{nat} \frac{J}{J_0} = -\left[\lg \text{nat}\, \delta_1 \delta_2 \delta_3 - \frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda}\right] + \frac{4\pi k D}{\lambda}. \qquad (4)$$

Hat man es mit so dicken Schichten zu tun, daß k nicht mehr von D abhängt, so ist (4) als Funktion von D eine gerade. Es ist dann nämlich das in Klammer vorkommende $\lg \text{nat}\, \delta_1 \delta_2 \delta_3$ ebenfalls konstant. Die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels dieser Geraden gegen die D-Achse gibt dann den dem massiven Metall zukommenden Wert von k.

Es ist klar, daß dasselbe Verfahren im Prinzip auch auf dünne Schichten anwendbar ist, wo k im allgemeinen eine Funktion von D ist. Es wird da $-\lg \text{nat} \frac{J}{J_0}$ als Funktion von D im allgemeinen eine gekrümmte Linie sein. Beschränkt man sich aber auf ein hinreichend kleines Intervall um D_1, so kann man innerhalb eines solchen k als konstant betrachten. Innerhalb dieses Intervalls ist also $-\lg \text{nat} \frac{J}{J_0}$ als Funktion von D wieder eine Gerade, deren Neigungswinkel gegen die D-Achse wie vorher den Wert von k liefert. Mit anderen Worten, wenn ich zu einem Punkte von der Abszisse D_1 der Kurve $-\lg \text{nat} \frac{J}{J_0}$ eine Tangente ziehe, so liefert die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels dieser Geraden gegen die D-Achse den zur Dicke D_1 gehörigen Wert k_1 des Absorptionsindex. Ohne Zweifel ist die Genauigkeit eines solchen Verfahrens ziemlich beschränkt. Die indirekte Försterlingsche Methode zur Bestimmung von n und k ist bei dünnen Schichten ebenso die genauere, wie die Drudesche beim massiven Metall. Bei den unten mitzuteilenden Versuchen handelt es sich ja auch nicht darum, den Wert des Absorptionsindex von Goldschichten noch einmal und womöglich etwas genauer zu bestimmen als es schon nach der Methode Försterlings geschehen war, sondern lediglich darum, mit einer bestimmten, ziemlich beschränkten Genauigkeit, oder auch nur qualitativ aber nach einer prinzipiell anderen Methode zu konstatieren, daß Goldschichten von bestimmter Dicke einen größeren Absorptionsindex besitzen, als die dickeren und dünneren Schichten, mit anderen Worten, daß ein Teil der Kurve $-\lg \text{nat} \frac{J}{J_0}$ steiler ansteigt als einerseits

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8, 439, 6102.

die den dicken Schichten entsprechende Gerade, andererseits als der Teil der Kurve, der zwischen der genannten Dicke und $D = 0$ liegt.

Vom Standpunkte dieser Messungen bedeutet der Umstand, daß die Goldschichten sich auf einer Glasplatte befanden und das durchgehende Licht auch durch diese geschwächt wurde, keine Komplikation. Man könnte ja daran denken, dies aus der Messung dadurch zu eliminieren, daß man J nicht mit J_0 vergleicht, sondern mit J_1, wo J_1 die Intensität des durch die Glasplatte allein hindurchgegangenen Lichtes bedeutet:

$$J_1 = J_0 \delta_3{}^2 e^{\frac{-4\pi k_0 D_0}{\lambda}}. \quad (5)$$

Dividiert man (2) durch (5), so erhält man:

$$-\lg\text{nat}\frac{J}{J_1} = -\lg\text{nat}\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_3} + \frac{4\pi k D}{\lambda}. \quad (6)$$

Die $-\lg\text{nat}\frac{J}{J_1}$-Kurve unterscheidet sich also von der Kurve $-\lg\text{nat}\frac{J}{J_0}$ nur dadurch, daß sie gegen letztere in der Richtung senkrecht zur D-Achse und mit sich selbst parallel um ein Stück verschoben ist; die Gestalt der Kurve jedoch, welche für den Wert von k einzig maßgebend ist, blieb unverändert. Man kann sich also auch die kleine Mühe sparen, J statt mit J_0, mit J_1 zu vergleichen.

Zu den Messungen wurde ein Spektralphotometer nach Martens und Grünbaum benutzt. In Ermangelung einer genügend hellen monochromatischen Lichtquelle, habe ich den Spalt der Martens-Grünbaumschen Beleuchtungsvorrichtung mit einem Nernststift beleuchtet. Die Goldschichten die der Messung unterzogen wurden, waren dieselben, deren optische Konstanten nach der Methode Försterlings und deren spezifische Leitfähigkeit ich in meiner früheren Arbeit gemessen hatte. Die photometrischen Messungen wurden in drei verschiedenen Farben, $\lambda = 500, 600, 700\ \mu\mu$ ausgeführt. Es sei noch bemerkt, daß sämtliche Goldschichten in den zwei verschiedenen Stellungen photometriert wurden, wo das Licht erst die Gold- und dann die Glasschicht durchsetzt und umgekehrt. Die Ablesungen waren kaum verschieden und wurden gemittelt.

Die Messungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Die Dicke der Schicht	$-\lg\text{nat}\ J/J_0$		
	$\lambda = 700\ \mu\mu$	$\lambda = 600\ \mu\mu$	$\lambda = 500\ \mu\mu$
1,5 $\mu\mu$	0,65	0,51	0,35
3,4 "	0,72	0,59	0,41
5,4 "	0,74	—	0,44
6,5 "	0,75	0,57	0,50
6,7 "	0,77	—	0,49
7,2 "	0,82	0,59	0,57
9,2 "	0,87	0,62	0,62
12,0 "	1,33	0,94	0,84
17,3 "	1,65	1,29	1,04
23,1 "	2,26	1,74	1,37
28,6 "	2,60	2,03	1,56
30,9 "	—	2,16	—
31,9 "	—	2,28	1,70
32,2 "	2,82	2,28	1,69
39,5 "	3,42	2,80	—
43,7 "	3,76	3,10	2,30
50,3 "	4,31	3,57	2,67
69,2 "	—	4,90	—
113,2 "	—	7,66	—

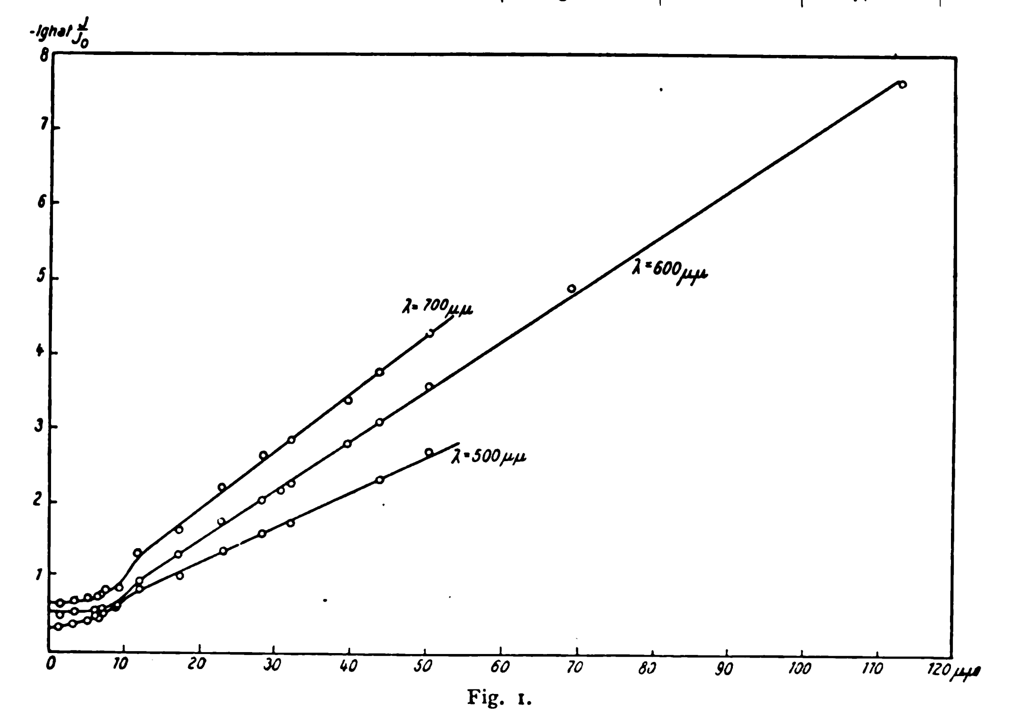


Fig. 1.

Auf Grund dieser Tabelle wurden die Kurven der Fig. 1 gezeichnet. Diese Kurven zeigen, daß die Ergebnisse der photometrischen Messungen mit denjenigen der Försterlingschen Methode übereinstimmen[1]). Die Kurven, entsprechend $\lambda = 700\,\mu\mu$ und $\lambda = 600\,\mu\mu$, besitzen tatsächlich einen deutlichen Inflexionspunkt, während derselbe im grünen Licht ($\lambda = 500\,\mu\mu$) gerade noch zu konstatieren ist. Die Tangenten zu diesen Inflexionspunkten geben die maximalen Werte von k. Diese maximalen Werte ergeben sich in der Umgebung von $D = 11\,\mu\mu$, also dort, wo sie zu erwarten waren. Die Punkte, die Schichten von einer Dicke $> 15\,\mu\mu$ entsprechen, liegen merklich auf einer Geraden. Aus der Figur ist auch ersichtlich, daß, in Übereinstimmung mit den früheren Beobachtungen, das Maximum von k sich um so mehr über den konstanten Wert erhebt, je größer die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist. Nachdem nun diese Abweichungen von den Folgerungen des W. Planckschen Ansatzes noch einmal experimentell festgestellt sind, kann man versuchen einen den Beobachtungen besser entsprechenden, erweiterten Ansatz einzuführen.

§ 2. Die Erweiterung des W. Planckschen Ansatzes.

Außer den in der Einleitung schon besprochenen Abweichungen[2]) von den Folgerungen des Ansatzes (1) die beide mit dem beobachteten Maximum von k zusammenhängen, gibt es noch eine andere Erfahrungstatsache, die mit demselben im Zusammenhange zu sein scheint. Die Goldschichten nämlich, die dicker als $12\,\mu\mu$ sind, erscheinen im durchgehenden Lichte olivgrün, die Farbe hellt sich natürlich mit abnehmender Schichtdicke immer mehr auf; bei den dünneren Schichten wechselt jedoch die Farbe, und diese erscheinen bei abnehmender Schichtdicke im durchgehenden Lichte sukzessive grün, blaugrün, hellblau und schließlich bei äußerst dünnen Schichten, unterhalb $1\,\mu\mu$, mit einem Stich ins Violette. Das reflektierte Licht erhält entsprechend eine mehr rötliche Färbung. Tatsächlich zeigt nun der Verlauf des Absorptionsindex mit der Schichtdicke und mit der Wellenlänge[3]), daß bei so dünnen (3 bis $12\,\mu\mu$ dicken) Goldschichten die Absorption am roten Ende des Spektrums immer mehr hervortritt im Verhältnis zur Absorption der kürzeren Wellenlängen; bei Schichten von bestimmter Dicke (in der Umgebung von ungefähr 11 bis $12\,\mu\mu$) überwiegt die Absorption der roten und gelben Strahlen, sogar diejenige einer gleich dicken Schicht im massiven Metall. Unterhalb $11\,\mu\mu$ nimmt der Absorptionsindex schnell ab. Der Plancksche Ansatz vermag nur von diesem Abnehmen des Absorptionsindex Rechenschaft zu geben, und zwar dadurch, daß infolge der im Sinne von (1) mit abnehmender Schichtdicke immer größer werdenden Reibungskraft, die Beweglichkeit der freien Elektronen und dadurch ihr Einfluß auf die Absorption verloren geht. Die Beobachtungen zeigten nun, daß bei Gold z. B. die Verhältnisse etwas komplizierter sind. Will man nun an der, dem Planckschen Ansatze zugrunde liegenden und durch die Leitfähigkeitsbeobachtungen ebenfalls gestützten Annahme festhalten, daß nämlich die veränderte Optik der dünnen Metallschichten auf dem veränderten Verhalten der freien Elektronen beruht, so kann man sagen, daß die von den freien Elektronen herrührende Absorption, die sich ja bei dicken Schichten auf das ganze Spektrum erstreckt, bevor sie infolge der zunehmenden Reibungskraft abnimmt, sich bei gewissen Schichtdicken auf ein bestimmtes, nach den Beobachtungen zu schließen rotes oder ultrarotes Gebiet des Spektrums konzentriert. Das kann man nun so deuten, daß außer dem Zunehmen der Reibungskraft, noch eine andere Veränderung mit den freien Elektronen vor sich geht, daß sie nämlich mit abnehmender Schichtdicke sukzessive gebundene Elektronen von ultraroter Eigenfrequenz werden, mit anderen Worten, daß ihre in dicken Schichten unendlich große Eigenwellenlänge sich einem endlichen Grenzwert nähert, wenn die Schichtdicke bis 0 abnimmt.

Wird das nun mathematisch formuliert in die Grundgleichungen der Dispersion eingesetzt, so erhält man für $n^2 - k^2$ und $2nk$ tatsächlich Kurven, welche den Beobachtungen entsprechen. Die Grundgleichungen der Dispersion sind:

$$\left.\begin{aligned} 2nk &= \frac{C_1 \lambda'_{10} \lambda^3}{\lambda^2 + {\lambda'_{10}}^2} + \sum\nolimits_1 \frac{C\,\frac{1}{\lambda\lambda'}}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2}} \text{ [1])} \\ n^2 - k^2 &= 1 - \frac{C_1 {\lambda'_{10}}^2 \lambda^2}{\lambda^2 + {\lambda'_{10}}^2} + \sum\nolimits_2 \frac{C\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2}} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

dabei bedeuten: λ die Lichtwellenlänge,

1) Vgl. S. 552 meiner vorigen Arbeit.
2) Vgl. S. 562, letzte Zeilen meiner zitierten Arbeit.
3) Vgl. Tab. 10 meiner zitierten Arbeit.

1) S. z. B. W. Meier, Ann. d. Phys. 31, 1036, 1910.

$$\lambda'_{10} = \frac{2\pi c m_1}{h_1}$$

eine Konstante von der Dimension einer Länge (c Lichtgeschwindigkeit, m_1 Masse der freien Elektronen, h_1 die auf sie wirkende Reibungskraft), λ' dieselbe Größe bezüglich der gebundenen Elektronen, λ_0 die Eigenwellenlänge der gebundenen Elektronen und schließlich

$$C = \frac{Ne\left(\frac{e}{m}\right)}{\pi c^2},$$

wo N die Anzahl der Elektronen der betreffenden Gattung pro cm³ ist. Das erste Glied in (I) bezieht sich auf die freien Elektronen, die Σ auf die gebundenen. Schreibt man (I) in der Form:

$$2nk = \frac{C_1 \frac{1}{\lambda\lambda'_{10}}}{\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2\lambda'^2_{10}}} + \sum\nolimits_1 \frac{C\frac{1}{\lambda\lambda'}}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2\lambda'^2}}$$

$$n^2 - k^2 = 1 - \frac{C_1 \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2\lambda'^2_{10}}} + \sum\nolimits_2 \frac{C\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2\lambda'^2}}$$

so sieht man gleich, daß das auf die freien Elektronen bezügliche Glied aus einem Glied der Σ so entsteht, daß man $\lambda_0 = \infty$ schreibt. Wir machen nun unter Beibehaltung des Ansatzes (1) die weitere Voraussetzung, daß die in dicken Schichten unendlich große Eigenwellenlänge, λ_e, der freien Elektronen mit abnehmender Schichtdicke einem endlichen Grenzwert, λ_0, zustrebt, nach der Gesetzmäßigkeit:

$$\lambda_e = \lambda_0 e^{\frac{\beta}{2}D}; \tag{7}$$

dabei bedeutet β eine positive Konstante und D die Schichtdicke. Überträgt man (1) von r_0 auf λ'_{10}, so hat man

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda'_{10}}{1 + \frac{\alpha}{D}}. \tag{8}$$

Substituiert man (7) und (8) in (I) so wird:

$$\left.\begin{aligned} 2nk &= \frac{\frac{C_1\left(1 + \frac{\alpha}{D}\right)}{\lambda\lambda'_{10}}}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{D}\right)^2}{\lambda^2\lambda'^2_{10}}} + \sum\nolimits_1 \\ n^2 - k^2 &= 1 + \frac{C_1\left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{D}\right)^2}{\lambda^2\lambda'^2_{10}}} + \sum\nolimits_2 \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Im Falle dicker Schichten geht (II) in (I) über; für $D = 0$ wird

$$2nk = \Sigma_1$$
$$n^2 - k^2 = 1 + \Sigma_2$$

Die Lage des Maximums von $2nk$ und des Minimums von $n^2 - k^2$ läßt sich in voller Allgemeinheit schwer diskutieren, selbst wenn man die Exponentialfunktion in (7) durch eine lineare approximiert.

Man kann sich aber über das Zustandekommen dieser Extremwerte in dem ins Auge gefaßten Spektralbereich doch einigermaßen orientieren. Wir setzen voraus, daß λ_0 im Ultraroten ist, also $\lambda_0 > \lambda$, das Glied der freien Elektronen folglich im Ausdruck des $n^2 - k^2$ stets negativ. Man muß somit nach den Maxima der Absolutwerte der auf die freien Elektronen bezüglichen Glieder in den Ausdrücken für $2nk$ und $n^2 - k^2$ suchen. Diese sind im wesentlichen durch das Minimum des den beiden Gliedern gemeinsamen Nenners bestimmt. Die Existenz eines Minimums von

$$\left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{D}\right)^2}{\lambda^2\lambda'^2_{10}}$$

hängt nun im wesentlichen von dem Werte der Konstanten α und β ab. Sind α und β und λ_0 hinreichend klein, so gibt es ein Minimum. Die Verhältnisse sind in den Fig. 2 und 3 illustriert. I. stellt das erste Glied, II. das zweite Glied des Nenners dar. Die punktierte Kurve ist der ganze Nenner als Funktion von D. In der Fig. 2 ist $\alpha = 22$, $\beta = 0{,}05$, in 3

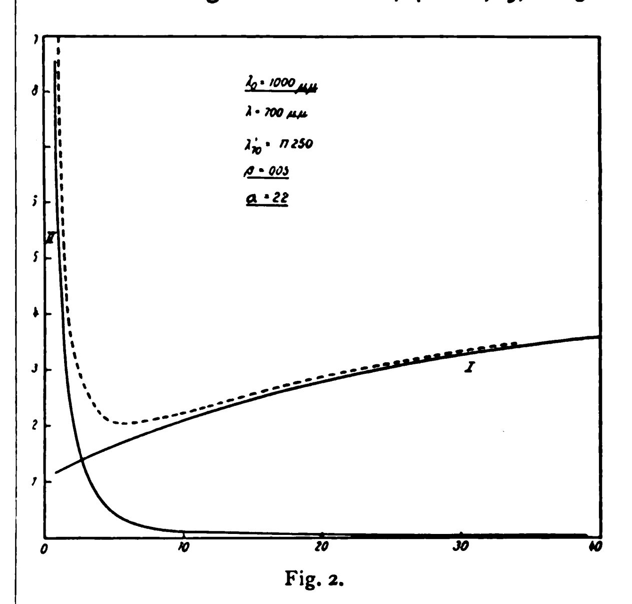


Fig. 2.

$\alpha = 22$, $\beta = 1$. Um gut darstellbare Dimensionen zu bekommen, wurde der ganze Aus-

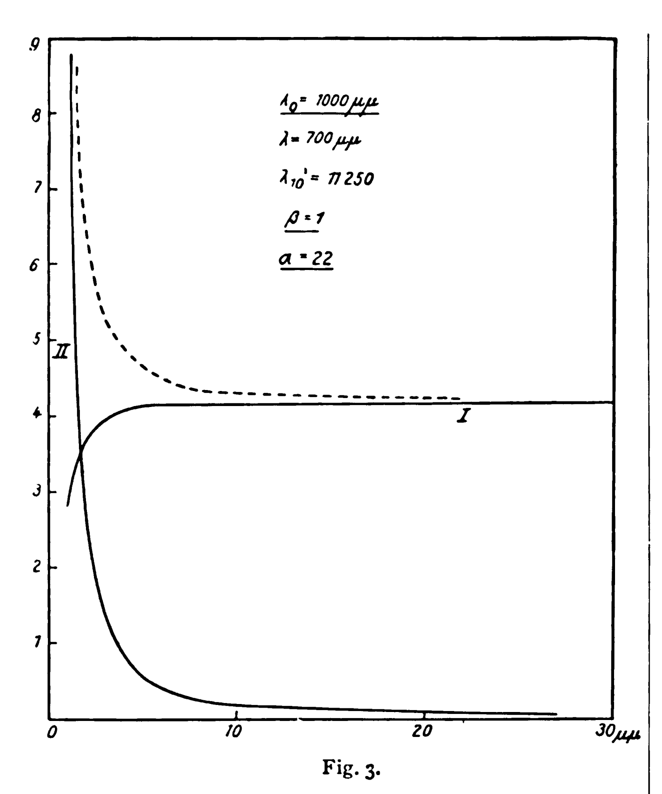


Fig. 3.

druck mit 10^{12} multipliziert. Es ist $\lambda = 700\,\mu\mu$ gewählt worden; λ'_{10} ist der von Meier[1]) bestimmte Wert. Diese Figuren zeigen, daß die Ansätze (7) und (8) bei entsprechender Wahl der Konstanten sowohl zur Erklärung des optischen Verhaltens von dünnen Gold- wie auch von Platinschichten, wo kein Minimum von $n^2 - k^2$ konstatiert wurde, herangezogen werden können.

Wir wollen nun zusehen, wieweit die auf Grund von (7) und (8) berechneten Kurven mit den beobachteten Kurven von $2nk$ und $n^2 - k^2$ übereinstimmen. Dabei muß etwas über die zur Berechnung benutzten Werte der Konstanten λ_0, β und α gesagt werden. Die Werte der Konstanten, λ_0 und β könnte man eventuell experimentell bestimmen. Man müßte zu diesem Zwecke die Absorption mehrerer verschieden dicker Schichten, etwa der Schichten von 3,4, 9,2, 12,0 und 17,3 $\mu\mu$ in größerem Wellenlängenbereich (im Ultraroten) untersuchen. Vorausgesetzt nun, daß die Eigenschwingungen, λ_e derart ausgeprägt sind, daß man ihre Lage aus der Absorptionskurve mit einer gewissen Genauigkeit ermitteln kann, so könnte durch solche Beobachtungen einerseits nach einer direkten Bestätigung des Ansatzes (8) gesucht werden, andererseits könnte man, wenn die Lage von λ_e in zwei Schichten 1 und 2 von verschiedener Dicke bekannt wäre, daraus λ_0 und β durch die Gleichungen

$$\frac{\lambda_{e_1}}{\lambda_{e_2}} = e^{\beta(D_1 - D_2)}$$

$$\lambda_{e_1} = \lambda_0 e^{\beta D_1}$$

berechnen. In Ermangelung solcher Beobachtungen war ich auf Rechnungsversuche angewiesen. Auf Grund dieser habe ich als Konstantenwerte $\alpha = 22$, $\beta = 0{,}05$, und $\lambda_0 = 1000\,\mu\mu$ angenommen. Den Wert von α habe ich fast unverändert aus meiner früheren Arbeit übernommen. Für die Parameter der Dispersion habe ich die Meierschen Zahlen benutzt. Leider war die Dispersion meiner dicksten Schichten etwas verschieden von derjenigen des Meierschen Spiegels; die auf Grund der Meierschen Parameterwerte zu berechnenden Kurven von $2nk$ und $n^2 - k^2$ würden deshalb für große Werte von D gegen etwas andere Werte konvergieren als die von mir beobachteten Kurven. Um diesen störenden Umstand nach Möglichkeit zu eliminieren, habe ich den Wert von C_1 entsprechend der Dispersion meiner dicksten Schichten im sichtbaren Spektrum um etwa 20 Proz. vermindert[1]). Es werden also die Parameter der freien Elektronen:

$$C_1 = 332 + 10^{-7} \text{ und } \lambda'_{10} = 11\,250.$$

Diejenigen der gebundenen sind unverändert beibehalten. Die so berechneten Kurven von $2nk$ und $n^2 - k^2$ sind in die Fig. 4, 5 und 6 — — — eingezeichnet neben den ausgezogenen, beobachteten Kurven, die den Fig. 14, 15, 16 meiner zitierten Arbeit entnommen sind. Zum Vergleich wurde auch die nach (7) allein berechnete Kurve von $n^2 - k^2$ in die Fig. 6 —. — . — gezeichnet.

Wie man sieht, werden nunmehr die beobachteten Kurven von den berechneten vollkommen nachgeahmt, auch ist die numerische Übereinstimmung gut. Die größte Abweichung ist beim Maximum von $2nk$ im Grünen. Aber auch beim Maximum von $2nk$ ist zu beachten, daß die berechnete Dispersion (7,7) mit der beobachteten (8,6) nunmehr nahe übereinstimmt. Diese Übereinstimmungen bilden eine indirekte Stütze für den Ansatz 8; es steht noch aus nach direkten Bestätigungen in der oben angegebenen Weise zu suchen. Es soll hierbei nicht unerwähnt bleiben, daß die an den dünnsten Goldschichten (1,0, 1,5, 3,4 $\mu\mu$ dick) bestimmten Werte von n und k es nicht als unwahrscheinlich erscheinen lassen, daß bei dünnen Goldschichten der Grenzwert λ_0 sogar im sichtbaren Spektrum liegt. Auf

1) W. Meier, l. c.

1) Diese Verminderung von C_1 ist etwas willkürlich, schon aus dem Grunde, da die ultraviolette Dispersion meiner Schichten nicht bekannt ist.

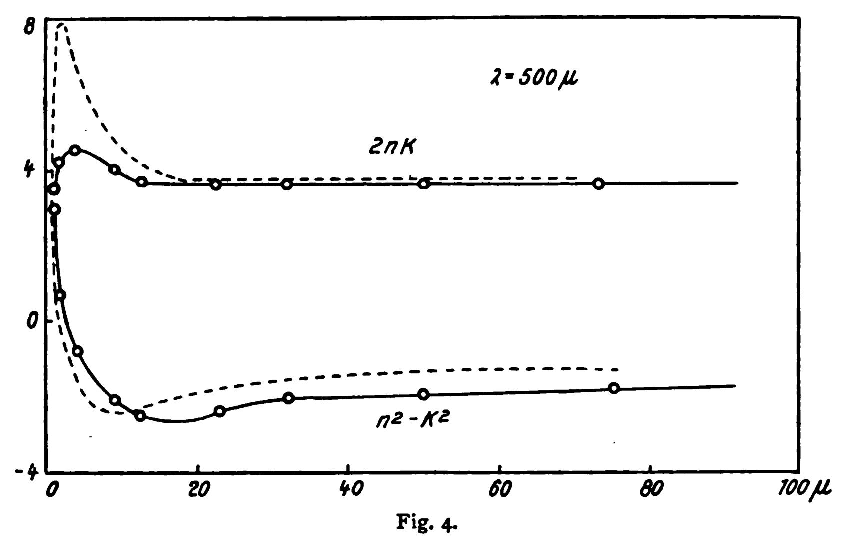


Fig. 4.

der Schicht $D = 3{,}4\ \mu\mu$, hat nämlich der Absorptionsindex den größten Wert im Roten, auf der Schicht $D = 1{,}5\ \mu\mu$ im Gelben und auf der 1,0 $\mu\mu$ dicken Schicht im Grünen. Auch ist im ganzen betrachteten Spektralbereich die Dispersion von n anormal im Gegensatz zu derjenigen dickerer Schichten[1]), so daß man den Eindruck gewinnt, als wäre der mit abnehmender Schichtdicke sich nach den kleineren Wellenlängen zu verschiebende Absorptionsstreifen, bei $D = 1{,}5\ \mu\mu$ bei ungefähr $\lambda = 600\ \mu\mu$ angelangt. Doch reichen die Beobachtungen zu einer sicheren Feststellung dieser Erscheinung nicht aus. Es wären dazu, wie gesagt, Beobachtungen an mehreren so dünnen Schichten und vor allem in einem, besonders nach dem Ultrarot zu aus-

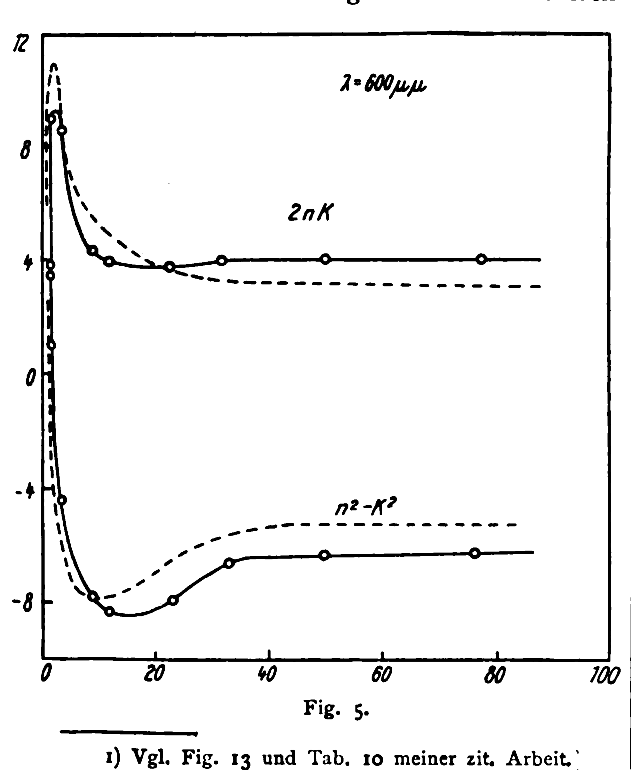


Fig. 5.

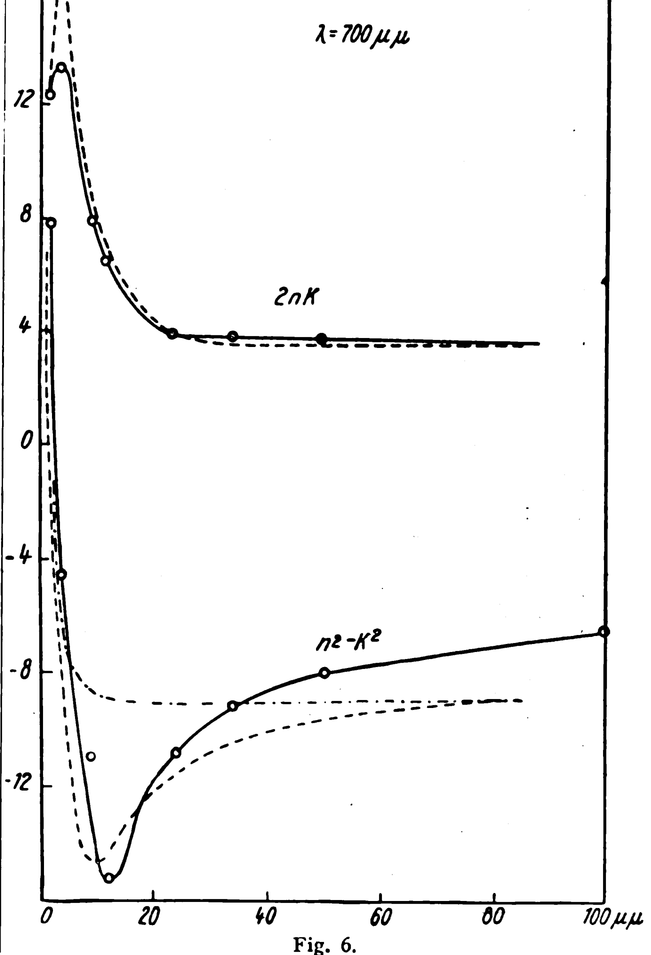


Fig. 6.

1) Vgl. Fig. 13 und Tab. 10 meiner zit. Arbeit.



gedehnteren Spektralbereich nötig. Man würde übrigens mit der Voraussetzung $\lambda_0 = 500\ \mu\mu$, $\beta = 0,1$ bis $0,2$ und $\alpha = 50$ im wesentlichen ähnliche Kurven bekommen wie die oben mitgeteilten. Auf die Details dieser Frage soll aber, da sie in Ermangelung von Beobachtungen kein unmittelbares Interesse besitzt, nicht eingegangen werden.

Es erübrigt sich noch, einige Worte über den Ansatz (8) im Zusammenhang mit der Leitfähigkeit der Schichten zu sagen. Wie der Vergleich der beobachteten Kurve des spezifischen Widerstandes als Funktion der Schichtdicke mit der auf Grund des W. Planckschen Ansatzes berechneten Kurve gezeigt hat[1]), ist die Übereinstimmung, besonders bei nicht zu kleinen Schichtdicken, gut. Bei sehr kleinen Werten von D ist aber eine Abweichung zu konstatieren, indem die theoretische Kurve, als Hyperbel, für $D = 0$ unendlich wird, die beobachtete Kurve jedoch schon bei endlichen Werten von D den Wert unendlich erreicht hat. Das könnte man vom Ansatze (8) her so erklären, daß schon bei endlichen Dicken, wie wir es z. B. beim optischen Verhalten der dünnen Goldschichten gesehen haben, die freien Elektronen quasielastischen Kräften unterworfen werden, die kommensurabel sind denen, die auf die gebundenen Elektronen wirken, so daß diese Schichten dann überhaupt aufhören die Elektrizität zu leiten, der spezifische Widerstand also unendlich wird. Die Gültigkeit des rein phänomenologischen Ansatzes (8) muß natürlich in bezug auf die Leitfähigkeit auf nicht zu dicke Schichten beschränkt werden. Das geschieht indessen gewissermaßen von selbst, indem die durch das optische Verhalten der Schichten gebotene Größenordnung der Konstanten es mit sich bringt, daß die Frequenz der Eigenschwingung mit wachsendem D schnell abnimmt. Die quasielastische Kraft ist dem Quadrat der Eigenfrequenz proportional. In einer Schicht von $100\ \mu\mu$ Dicke würde mit $\lambda_0 = 500\ \mu\mu$ und $\beta = 0,2$, $\lambda_e > 5,10^6\ \mu\mu$ sein. Die quasielastische Kraft wäre also rund 10^{-8} mal die quasielastische Kraft, die in der Schicht $D = 1\ \mu\mu$ wirkt. So kleine Kräfte sollten dann neben der „Reibungskraft" vernachlässigt werden. Es scheint das möglich zu sein. Betrachtet man nämlich die „Reibungskraft" als durch die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Molekeln hervorgebracht, so kommt obiges darauf hinaus, daß man die Schwingungszeit der Eigenschwingung als schon unendlich groß zu betrachten hat neben der Zeit, die zwischen zwei nacheinanderfolgenden Zusammenstößen des Elektrons verstreicht. Letztere wäre nun nach diesbezüglichen Berechnungen von D. Enskog[1]) von der Größenordnung 10^{-16} sec, während die Schwingungszeit in obigem Beispiel bei einer Schichtdicke von $100\ \mu\mu$ von der Größenordnung 10^{-11} sec, also tatsächlich viel größer ist.

Weiterhin habe ich beobachtet, daß Goldschichten bei $3\ \mu\mu$, Silberschichten bei $5\ \mu\mu$ aufhören den Strom zu leiten, während Platinschichten bis $1\ \mu\mu$ leitend sind. Das läßt sich durch dieselbe Annahme erklären, wie die Verschiedenheit im optischen Verhalten dieser Schichten. Wir haben gesehen, daß Goldschichten unterhalb gewisser Dicke in der Durchsicht ihre Farbe ändern und daß ihr Absorptionsindex ein Maximum besitzt, während Platinschichten ihre Farbe nicht ändern und auch ihr Absorptionsindex kein Maximum besitzt. Das bedingt bei Platin, wie wir gesehen haben, einen im Verhältnis zum Gold größeren Konstantenwert von β und vielleicht auch wohl von λ_0. Das bedeutet aber für die Leitfähigkeit nichts anderes, als daß bei Platin die quasielastische Kraft sich bei geringeren Dicken störend bemerkbar macht als bei Gold und daß infolgedessen Platin erst bei geringeren Dicken überhaupt aufhört den Strom zu leiten.

Zuletzt sei noch bemerkt, daß die durch den Ansatz (8) ergänzte Auffassung von den Vorgängen in den dünnen Metallschichten vielleicht auch zu einem Verständnis der Beobachtungen führen kann, nach denen die nach Herstellung der Schichten erfolgende Widerstandsabnahme derselben, durch Erwärmen und Stromdurchführung beschleunigt wird.

Zusammenfassung.

Frühere Beobachtungen ergaben, daß der Absorptionsindex von dünnen Goldschichten als Funktion der Dicke ein Maximum besitzt. Das konnte aus dem W. Planckschen Ansatz zur Erklärung der Absorption und Dispersion von dünnen Metallschichten nicht hergeleitet werden. Die neuen, nach anderem Prinzip ausgeführten Messungen, über die im ersten Teil berichtet wird, bestätigen das frühere Beobachtungsresultat. Im zweiten Teile wird gezeigt, daß man mit der, den Planckschen Ansatz ergänzenden Annahme, daß in den ganz dünnen Metallschichten die Leitungselektronen durch quasielastische Kräfte gebunden werden, wie es scheint, sowohl das optische Verhalten der dünnen Metall-

1) Vgl. Fig. 9 meiner zit. Arbeit.

1) D. Enskog, Ann. d. Phys. **38**, 731, 1912. In der Arbeit wird nicht nur der elastische Stoß, sondern auch das Maxwellsche und andere Kraftgesetze berücksichtigt.



schichten wie auch ihr Verhalten in bezug auf Leitfähigkeit erklären kann.

Die Beobachtungen wurden im Physikalischen Institute der Universität Kolozsvár ausgeführt. Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Karl Tangl schulde ich sowohl für sein freundliches Interesse, wie auch wegen der Beschaffung des Martens-Grünbaumschen Photometers aufrichtigen und tiefen Dank.

(Eingegangen 8. Mai 1916.)

Flammen als physikalische Apparate.

Von Bruno Thieme.

Das Verhalten von Flammen und der in ihnen enthaltenen Ionen hat bereits vielfach Beachtung gefunden[1]). Im Folgenden will ich kurz darstellen, in welcher Weise eine Flamme eine große Zahl anderer Apparate vollwertig ersetzen kann, da diese Verwendungen noch nicht bekannt sind.

Marbe[2]) verwendete eine stark rußende Flamme zur Messung von Reaktionszeiten in der Psychologie. 1905 fand ich die elektrische Abscheidung von Kohlenstoff aus Flammen, wobei nicht Voraussetzung war, daß diese bereits bis zum Rußen abgekühlt sein mußten. Es kamen normalheiße Flammen, z. B. gewöhnliche Kerzenflammen, zur Verwendung.

Allgemeine Darstellungen habe ich zusammenfassend an anderer[3]) Stelle gegeben. Hier will ich die einzelnen Verwendungen beschreiben.

Flammengalvanoskop.

Die einfachste Anwendung der Flamme ist die als Galvanoskop[4]). Ein solches Flammengalvanoskop hat die Vorteile, billig, unzerstörbar und jederzeit vorhanden zu sein. Es ist für Spannungen bis nahe zum Funkendurchschlag verwendbar, und zeigt Ströme bis zu 10^{-8} Ampere hinunter an. Da die Flamme selbst einen hohen Widerstand hat, schließen sich einige wenige Anwendungen aus, so das Anzeigen sehr geringer Spannungen. Vorzüglich ist es geeignet zum Erkennen von spannungsführenden Leitungen, zum Prüfen von Stromschluß in Apparaten (Drahtbruch im Transformatorspulen), wo in Fabriken z. B. unter normaler Netzspannung sämtliche Apparate statt mit empfindlichen Galvanoskopen mit den mechanisch gänzlich unempfindlichen Flammengalvanoskopen geprüft werden können.

Zu diesem Zweck werden zwei blanke 2 mm-Leitungen, am besten in einem Stativ, horizontal und untereinander in ca. 1,5 cm Abstand in eine gewöhnliche Kerzenflamme eingeführt, so daß der untere Draht sich etwas über dem blauen Flammenkegel befindet. Beim Stromdurchgang findet dann eine deutlich erkennbare, ruckweise Formänderung der Flamme statt.

1) B. Thieme, Zeitschr. f. physikalische Chemie 78, 490—499, 1912; ebenda 89, 693—727: 1915.

2) K. Marbe, Deutsche Patentschrift 197614, 1907; diese Zeitschr. 7, 543, 1906; ebenda 8, 92, 200, 415, 1907; Zeitschr. f. Psychologie 49, 206, 1908; Fortschr. d. Psychologie 1, 132, 1912.

3) B. Thieme, Verhdlg. d. D. Phys. Ges. 18, 195, 1916; ebenda 18, 221, 1916; diese Zeitschr. 16, 15, 1915.

4) B. Thieme, Zeitschr. f. phys. chem. Unt. 25, 82, 1912; Elektrotechn. Zeitschr. 34, 592, 1913; Zeitschr. f. phys. chem. Unt. 27, 37, 1914; Zeitschr. f. phys. Chemie 89, 703, 1915.

Frequenzmessungen[1]).

Die Flamme ist für Wechselströme weniger empfindlich. Sehr empfindlich dafür sind aber die bei genügender Spannung auf obige Weise erhaltenen Rußabscheidungen. Derartige Abscheidungen sind in weitestem Maße, da sie elektrolytisch erfolgen, frei von fremden Bestandteilen, was die große Schwärze des Rußes bedingt[2]). Die erzielten Rußstämmchen schwingen in der Frequenz des erregenden Stromes[3]).

Die Beobachtung geschieht durch ein Stroboskop, das so eingestellt wird, daß die schwingenden Stämmchen stillzustehen scheinen. Ist die Umdrehungszahl bekannt, so läßt sich leicht die Frequenz errechnen.

Für Frequenzen werden die losgerissenen, glühenden Rußteilchen zwischen zwei in der Frequenz geladenen Plattenelektroden durch das Stroboskop in ihrer Bahn verfolgt und in sonst gleicher Weise die Frequenzen errechnet.

Flammen-Polsucher.

Da bei den im Vorangehenden beschriebenen Abscheidungen infolge der positiven Ladung des Rußes nur negative Elektronen die Abscheidung hervorrufen, findet eine Rußabscheidung bei Gleichstrom nur am negativen Pol statt, so daß die einfache Kerzenflamme für alle Spannungen über 12 Volt ein brauchbarer Polsucher[4]) ist. Da eine Rückbildung des Rußes nicht möglich ist, so findet sich beim Wechselstrom die merk-

1) B. Thieme, Elektrotechn. Rdsch. 29, 240, 1912; Elektrotechn. Zeitschr. 34, 593, 1913; Zeitschr. f. phys. chem. Unt. 27, 37, 1914.

2) B. Thieme, Deutsche Patentschrift, 256675.

3) B. Thieme, Verhdl. d. D. phys. Ges. 18, 195, 1916.

4) B. Thieme, Zeitschr. f. phys. chem. Unt. 25, 104, 1912; ebenda 27, 302, 1914; Elektrotechn. Zeitschr. 34, 592, 1913; Vortrag im Elektrotechn. Verein Berlin, Oktober 1913.

würdige Erscheinung, daß der Ruß an beiden Elektroden abgeschieden wird.

Werden bei Gleichstrom, wie oben schon früher beschrieben, die beiden Poldrähte in den oberen Teil der Kerzenflamme gehalten, so erfolgt schnell eine elektrolytische Rußabscheidung am —Pol.

Elektrolytische Abscheidung der Influenzmaschine.

Da die Abscheidung schon bei sehr schwachen Strömen vor sich geht, so läßt sich mit ihr leicht die sonst immer schwer zu zeigende elektrolytische Wirkung des Stromes einer Influenzmaschine darstellen.

Stromuntersuchung.

Für viele Untersuchungen ist vollkommene Konstanz des Stromes Bedingung; daher werden z. B. Akkumulatorenströme an Stelle von Maschinenströmen verwendet. Wird nämlich die Rußabscheidung durch Maschinenströme hervorgerufen, so zeigt sich eine Rußbildung nicht nur an der negativen Elektrode, sondern auch an der positiven Elektrode, wenn auch in sehr geringem Maße, ein Zeichen, daß der Strom nicht vollkommen frei von Gegenströmen ist. Das bedingt sich durch die Kollektoren und die elektrischen Unregelmäßigkeiten im Bau der Maschine. Die Abscheidungen sind allerdings nicht ästig seitlich verzweigt, wie an der negativen Elektrode, sondern gehen senkrecht stielartig hoch, da sich die positive Ladung möglichst weit von der +Elektrode zu entfernen sucht.

Die Empfindlichkeit der Rußabscheidung ist somit ein sehr geeignetes Mittel, um Ströme auf ihre Verwendungsfähigkeit für besondere physikalische Zwecke hin zu prüfen.

Flammen als Detektoren.

Bei hochfrequenten Strömen ist die äußere Sichtbarkeit der Flammenbewegungen gering; wohl aber ist es möglich, wie ich früher[1]) zeigen konnte, mit einer Selenzelle, die hochempfindlich und annähernd frei von Nachwirkungen und Verzögerungen ist, eine bis auf das etwa hundertfache gehende lautverstärkende Wirkung zu erzielen. Beeinflußt der so erzielte verstärkte Strom einen feinen Galvanometerspiegel, von dem Licht auf einen Film fällt, so läßt sich in geeigneter Übertragung das gesprochene Wort kinematographisch in der wechselnden Belichtungsstärke festhalten und in leidlicher Weise wiedergeben; jedenfalls ist es trotz der durch die Filmbewegungen bedingten Nebengeräusche deutlich zu verstehen.

Sind die Elektroden in der Flamme erst einmal durch eine höhere Spannung gewissermaßen formiert, so lassen sich Unregelmäßigkeiten in den Schwingungen, insbesondere Rückströme aus dem Gegengewicht in die Antenne, oder Rückströme bei nicht vollkommener Stoßerregung leicht nachweisen, und so experimentell abstellen. —

Daß eine Flamme sonst noch als Leiter für die Elektrizität bestimmte Eigenschaften hat, die eingehend erforscht wurden, ist bekannt. Ebenso das Verhalten der Kohlenstoff-Flamme selbst zwischen hochgeladenen Plattenelektroden.

Diese vielen, ebenso interessanten wie wichtigen Eigenschaften lassen es als wünschenswert erscheinen, künftig der Flamme als physikalischem Apparat einen besonderen Abschnitt zu widmen.

Berlin, den 28. Mai 1916.

(Eingegangen 29. Mai 1916.)

1) B. Thieme, Zeitschr. f. techn. Physik 1, 10, 1913.

Über die Isotopen sämtlicher chemischen Elemente.

Von A. van den Broek.

Bekanntlich werden in der Thorium- wie in der Aktinium-Reihe von Radiothorium bzw. Radioaktiniumkörpern abgerechnet, also nach anfänglicher β-Strahlung, nacheinander 4 α- und dann 2 β-Teilchen ausgestoßen, wonach wieder α-Strahlung eintritt. Würde der Atomzerfall nach diesem einfachen Schema durch das ganze System bis hinab zu den beiden ersten Reihen fortgehen, so wäre für je 6 Ordnungszahlen die Atomgewichtsdifferenz durchschnittlich gleich 16, also eine einfache Beziehung zwischen diesen beiden Fundamentalgrößen gegeben, zu gleicher Zeit aber auch sämtliche Isotopen aller Elemente diesen beiden Größen nach bestimmt. Es muß betont werden, daß sich die Atomgewichtskurve einem solchen einfachen Zerfallschema namentlich der Aktiniumreihe in auffallender Weise anschließt. (Als Atomgewicht des Aktiniums wurde nach Fajans 227 angenommen.) Fassen wir den uns bekannten Teil der Uranradium-Reihe als einzige Ausnahme dieser Reihe auf, namentlich insoweit, als zuerst 5 α-Teilchen dann 2 β-, 1 α-, 2 β- 2 α-Teilchen ausgestoßen werden statt zweimal 4 α- und 2 β-Teilchen, verfolgen wir also auch diese Reihe nach dem oben angegebenen einfachen Schema, und nehmen wir

Ordnungszahlen
Atomgewichte
× Uranradiumreihe (4n+2)
+ Thoriumreihe (4n)
o Aktiniumreihe (4n+3)
— Atomgewichte
o Die theoretischen Atomgewichte der Aktiniumreihe.
· Die Atomgewichte. ● Beide zusammen.

auch für die Thoriumreihe dasselbe Schema mit Extraausstoßung von 2 β-Teilchen an — den Atomgewichten nach zwischen W und Tl, also nach Analogie mit der Radiumreihe wohl beim Atomgewicht 192 — so bekommen wir ein allgemeines Zerfallsystem, dem sich die bekannten Atomgewichte vollständig anschließen. Da die 3 bekannten Reihen nur α-Strahler an den geraden Ordnungszahlen entsprechenden Stellen kennen, müssen dabei für die ungeraden, die am Anfang des Systems bis Co eine ähnliche Differenz gleich 4 Atomgewichtseinheiten aufweisen wie die geraden, 3 Parallelreihen angenommen werden.

Für letztere Annahme spricht auch die beim Aktinium beobachtete α-Strahlung, weiter die beim Radioaktinium und Radiothorium beobachtete β-Strahlung. Auch der komplexe Zerfall der zweiten Strahler bei den C-Körpern wurde allgemein beibehalten. Für die beiden ersten Reihen des periodischen Systems, wo die Atomgewichtsdifferenz konstant gleich 2 geworden ist, wurde natürlich nur α-Strahlung angenommen. (Das Meta-neon wäre hier Radium-neon.) Wie beide Teile ineinander übergehen, wurde, wie der Verlauf der Parallelreihen dabei, aus den Atomgewichten abgeleitet.

Dem ganzen System liegt die Auffassung zugrunde, daß den Ordnungszahlen die Gesamtladung der Kerne von Rutherfordschen Atomen entspricht, und α- wie β-Teilchen dem Kerne entstammen.

Zusammenfassung: Obwohl der Atomzerfall, soweit uns bekannt, nicht vollkommen regelmäßig stattfindet, schließt sich die Atomgewichtskurve einem regelmäßigen Zerfall nach dem Schema α-, α-, α-, α-, β- β- in periodischer Folge bei einigen naheliegenden Annahmen in derart auffallender Weise an, daß die sich hieraus, wohl noch nicht ganz einwandsfrei, ergebenden Isotopen sämtlicher Elemente einer experimentellen Nachprüfung wohl wert wären.

(Eingegangen 27. Mai 1916.)

Über pulsierende Wirbelringe.

Von A. Korn.

Wie die Wechselwirkung pulsierender Teilchen in einer inkompressiblen Flüssigkeit der Wechselwirkung elektrischer Teilchen ähnelt, so ähnelt die Wechselwirkung zweier Wirbelringe in einer inkompressiblen Flüssigkeit der ponderomotorischen Wechselwirkung elektrischer Stromringe. Auf die erste Analogie hat bekanntlich zuerst C. A. Bjerknes aufmerksam gemacht, auf die zweite Analogie haben zuerst Helmholtz und Kirchhoff hingewiesen. Die Analogien sind in beiden Fällen nicht vollständig, so daß für eine Verwertung der Analogien für die Aufstellung einer mechanischen Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen wesentlich neue Voraussetzungen hinzugenommen werden müssen; auf die Präzisierung dieser Voraussetzungen und auf die Aufstellung einer strengen[1]), mechanischen Theorie habe ich seit fünfundzwanzig Jahren viele Mühe verwandt, und die Untersuchungen, welche im Laufe der Zeit meine vor etwa zwanzig Jahren veröffentlichten mechanischen Auffassungen[2]) modifiziert haben[3]), sind jetzt so weit gediehen, daß ich dieselben in der nächsten Zeit systematisch — wahrscheinlich in einer Folge kurzer Abhandlungen — veröffentlichen kann. In dem vorliegenden Aufsatz möchte ich eine Frage behandeln, welche auch ganz unabhängig von solchen mechanischen Theorien ein hohes Interesse beansprucht, ebenso wie die Betrachtung pulsierender Teilchen völlig unabhängig von jedem Gedanken an mechanische Theorien der elektromagnetischen Erscheinungen eine wichtige theoretische Bedeutung hat.

Denken wir uns in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit einen Wirbelring, in dessen ganzem Außenraume die Flüssigkeit wirbelfrei sein soll, dann sind die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, der Flüssigkeit an jeder Stelle (x, y, z):

$$u = \frac{1}{2} c R^2 \int_s \frac{\cos(sy)\cos(rz) - \cos(sz)\cos(ry)}{r^2} ds, \cdots \tag{1}$$

Dabei soll s die Kurve der Querschnittsmittelpunkte des Ringes bedeuten; die Richtungskosinusse

$$\cos(sx), \ \cos(sy), \ \cos(sz)$$

des Elementes ds sollen die Kosinusse der Tangentenrichtung sein, von welcher aus gesehen die Wirbelung im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers erfolgt; R soll der Radius des Ringquerschnittes sein, im Ringe

$$c = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(sx) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(sy) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(sz)\right\} \tag{2}$$

---

1) D. h. strenger mathematischer Deduktionen unter Zugrundelegung eines einheitlichen mechanischen Grundprinzips.

2) A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen. Berlin. 1. Aufl. 1891/94; 2. Aufl. 1896/98. Ferd. Dümmlers Verlag.

3) Ber. d. D. Phys. Ges. 1911, S. 249—256; 1913; S. 924—928.

die Wirbelgeschwindigkeit, welche mit der Zeit und längs s konstant ist, und es seien schließlich

$$\cos(rx),\ \cos(ry),\ \cos(rz)$$

die Richtungskosinusse der Richtung

$$ds(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x, y, z),$$

r die Entfernung dieser Punkte. Die Formel (1) gilt in erster Annäherung für solche Punkte (x, y, z), deren kleinste Entfernung von den ds groß gegen die Querschnittsradien R ist.

Die Aufstellung der exakten Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten hat bei Verwendung der Raumintegrale über den Ring an Stelle der Kurvenintegrale über s keine Schwierigkeit, ich beschränke mich hier aber absichtlich auf die angenäherten Ausdrücke (1), weil diese Form für die Zwecke dieser kurzen Untersuchung besonders geeignet ist.

Die Frage: Können wir uns mechanisch einen elektrischen Strom, wenn es sich um einen geschlossenen Stromring handelt, als einen solchen Wirbelring mit konstanter Wirbelgeschwindigkeit c vorstellen? ist ohne weiteres negativ zu beantworten. Um durch ein Zwischenmedium von außerordentlich geringer Dichte, wie es für eine mechanische Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen angenommen werden muß, merkliche ponderomotorische Wirkungen auf einen zweiten Wirbelring von (in der Größenordnung) etwa gleicher Wirbelgeschwindigkeit auszuüben, müßte die Wirbelgeschwindigkeit außerordentlich groß sein und sich durch gewaltige anderweitige mechanische Wirkungen bemerkbar machen. Aus diesem Grunde habe ich bei meinen mechanischen Vorstellungen die Wirbelgeschwindigkeit von Wirbelringen, welche elektrischen Strömen entsprechen sollen, nicht als konstant, sondern als mit der Zeit periodisch von derselben kleinen Periode angenommen, welche die Pulsationen elektrischer Teilchen besitzen sollen. Zur Trennung der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen wird angenommen, daß sich die Phasen der von elektrischen (pulsierenden) Teilchen bzw. von elektrischen Strömen (Wirbelringen mit periodischen Wirbelgeschwindigkeiten) ausgehenden periodischen Geschwindigkeiten um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Die Annahme periodischer Wirbelgeschwindigkeiten brachte nun zwei Schwierigkeiten mit sich:

1. Die Erzeugung bzw. Aufrechterhaltung von periodischen Wirbelgeschwindigkeiten kleiner Perioden bedarf wesentlich neuer Annahmen über die Konstitution der Materie in den Wirbelringen; bei den gewöhnlichen Annahmen der Hydrodynamik sind nur konstante Wirbelgeschwindigkeiten zu rechtfertigen.

2. Der Außenraum eines Wirbelringes ist ein mehrfach zusammenhängender Raum, das Geschwindigkeitspotential φ der Flüssigkeit in diesem Raume nicht eindeutig; da nun der Druck der Flüssigkeit durch die Formel gegeben ist:

$$p = -\mu\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\right\}, \ (\mu \text{ Dichte}), \tag{3}$$

so würde sich, wenn die Differenz $\triangle$, um welche sich die Werte des Geschwindigkeitspotentials φ in ein und demselben Punkte (x, y, z) unterscheiden können, nicht von der Zeit unabhängig wäre, der merkwürdige Fall ergeben, daß der Ausdruck für den hydrodynamischen Druck gleichfalls vieldeutig würde. Auf diesen mir schon vor längerer Zeit von meinem Freunde V. Bjerknes brieflich gemachten Einwand hatte ich zur Zeit nur antworten können, daß der hydrodynamische Druck in einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit die Realität verliert, welche er für zusammendrückbare Flüssigkeiten besitzt, und daß sich jedenfalls diese Schwierigkeit heben läßt, wenn man von einem ideal unzusammendrückbaren Medium zu wirklichen Flüssigkeiten übergeht bzw. überhaupt die Eigenschaften des Zwischenmediums ein wenig abändert; jedenfalls ist bei den gewöhnlichen Annahmen der Hydrodynamik wiederum nur eine konstante Wirbelgeschwindigkeit zu rechtfertigen.

Der Ausweg aus diesem Dilemma ist nun darin zu finden, daß die Wirbelringe gleichzeitig als pulsierend anzusehen sind, daß also die Radien R der Ringe von der Form sind

$$R = R_0 \pm \varepsilon \sin\frac{t}{T}2\pi, \tag{4}$$

und daß die Größen c als sehr große konstante Drehungsgeschwindigkeiten angenommen werden. Jeder elektrische Stromring soll aus zwei nahe aneinander liegenden pulsierenden Wirbelringen von entgegengesetzter Pulsation und entgegengesetzter Wirbelgeschwindigkeit angesehen werden.

Die Geschwindigkeiten, welche in dem Außenmedium durch ein solches Paar von Wirbelringen hervorgebracht werden, sind dann in erster Annäherung

$$\left.\begin{aligned} u = \Bigg[\frac{1}{2}c\left\{R_0 + \varepsilon\sin\frac{t}{T}2\pi\right\}^2 \\ -\frac{1}{2}c\left\{R_0 - \varepsilon\sin\frac{t}{T}2\pi\right\}^2\Bigg] \\ \int_s \frac{\cos(sy)\cos(rz) - \cos(sz)\cos(ry)}{r^2}\,ds, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so daß also nur die mit dem Faktor

$$\sin \frac{t}{T} 2\pi$$

behafteten Glieder für die Wirkung nach außen in Betracht kommen.

Die Untersuchung über die Vieldeutigkeit des Geschwindigkeitspotentials im Außenraume ergibt dann auch, daß die Schwierigkeit bezüglich der Vieldeutigkeit des Ausdruckes für den hydrodynamischen Druck fortfällt.

Mit Rücksicht auf die prinzipielle Frage, wie solche Paare von Wirbelringen entstehen können, möchte ich hier nur kurz auf meine Annahme des universellen Dralles verweisen, nach welcher in einem nicht wirbellosen Felde jede translatorische Bewegung mit einer Wirbelbewegung um eine der Richtung der ersteren parallele Achse verbunden ist; das ist in meinen Theorien kein neues Prinzip, sondern eine Anfangsbedingung; wenn die Bedingung überall zu irgendeiner Anfangszeit erfüllt ist, bleibt sie, wie die Bedingung der Wirbellosigkeit, bestehen. Wenn sich in einem Ringe positiv elektrische Teilchen in der einen, negativ elektrische Teilchen in der entgegengesetzten Richtung bewegen, so entsteht dann ein Paar von Wirbelringen, wie wir sie oben betrachtet haben.

Die kurze hier gegebene Untersuchung bezieht sich zunächst nur auf geschlossene Ströme, doch kann dieselbe auch verallgemeinert werden. Ich werde hierauf bei der systematischen Veröffentlichung meiner Theorie, welche sich vor allem auf die Voraussetzung des universellen Dralles[1]) und das Prinzip der Individualität[2]) stützt, weiter eingehen.

Die pulsierenden Wirbelringe werden neben den pulsierenden Teilchen stets wichtige Elemente jeder mechanischen Theorie der Naturerscheinungen sein.

1) Ber. d. D. Phys. Ges. 1911, S. 249—256; in den Definitionsformeln (6) daselbst sind auf der linken Seite die Geschwindigkeiten u, v, w mit der Dichte μ zu multiplizieren, was eine entsprechende Änderung der Formeln (8) und (9) daselbst zur Folge hat.

2) Ber. d. D. Phys. Ges. 1913, S. 924—928.

(Eingegangen 27. Mai 1916.)

BESPRECHUNGEN.

F. Voltz, Röntgenstrahl-Meßeinrichtungen und deren Vergleich. Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen Bd. XXIII, S. 465, 1915. Hamburg, Lucas Gräfe & Sillem.

In der vorliegenden ausführlichen Besprechung der Grundlagen der Meßtechnik im Röntgenwesen versucht der Verfasser die verschiedenen Meßmethoden gegeneinander abzuwägen. Zur Lösung der beiden Hauptaufgaben, der Bestimmung der Strahlenhärte und der Strahlenmenge, gibt es eine außerordentlich große Anzahl von Methoden und zwar mehr als 10 Härtemeßmethoden und mehr als 20 Dosierungsmethoden. Wenn sie alle auf richtigen Prinzipien beruhten, so wäre die große Zahl kein Fehler. Da das aber nicht der Fall ist, und da eine jede von ihnen eine andere Skala benutzt, so ist das Durcheinander auf diesem Gebiet unbeschreiblich. Es ist daher nur natürlich, daß immer wieder Stimmen laut werden, die eine Einheitlichkeit anstreben und endgültig Ordnung schaffen wollen. Diese Forderungen sind besonders häufig wiederholt worden, nachdem das Wesen der Röntgenstrahlen klar gestellt und damit eine Grundlage geschaffen worden ist, auf der in wissenschaftlich einwandfreier Weise aufgebaut werden kann. An diesem Beispiel sieht man so deutlich, wie nur selten, in welcher Weise neue physikalische Forschungen die Technik beeinflussen und Lösungen zeigen können, die bisher absolut unerreichbar waren. Allerdings sind heute erst Ansätze vorhanden und unter ihnen ist die vorliegende Arbeit eine der wichtigsten. Dem Physiker, den bisher nur die Physik der Röntgenstrahlen beschäftigt hat, und der sich über die hier in Frage kommenden Sonderaufgaben der praktischen Röntgentechnik unterrichten will, wird die Arbeit einen guten Überblick über das Gebiet geben. Sie will aber nicht nur zusammenfassen, sondern auch die Wege weisen, auf denen eine Lösung zu erreichen ist und stellt zum Schluß eine Anzahl Forderungen auf, auf Grund deren einwandfreie Messungen von Härte und Menge der Strahlen möglich sind. Das behandelte Gebiet muß deswegen den Physiker besonders interessieren, weil nur mit seiner Hilfe eine Vereinheitlichung durchführbar ist, und weil es eine Aufgabe der nächsten Röntgenkongresse sein wird, zu diesem Zwecke eine Kommission von Fachleuten zu wählen.

P. Ludewig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Tübingen Dr. Walter Gerlach für Physik, an der Technischen Hochschule Aachen Dr. A. Oppé für organische Chemie, speziell für theoretische Chemie.

Verliehen: Dem etatsmäßigen Professor für Mathematik und technische Mechanik an der Bergakademie Berlin und Rechnungsführer der Deutschen Physikalischen Gesellschaft Dr. Eugen Jahnke der Titel Geheimer Bergrat.

Preise: Der Liebenpreis der Wiener Akademie der Wissenschaften Privatdozent für Physik Dr. Fritz Paneth von der Universität Wien, der Haitingerpreis derselben Akademie dem Privatdozenten für physikalische Chemie an der Universität Wien und a.o. Professor für physikalische Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule daselbst Dr. Emil Abel.

Gestorben: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Halle Geh. Regierungsrat Dr. Ernst Dorn.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1916. Redaktionsschluß für No. 14 am 8. Juli 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

Dem Andenken der im Kriege gefallenen deutschen Physiker.

Mathias Cantor.

Von W. Wien.

Am 23. Mai starb an den Folgen einer schweren Verwundung, die er durch eine italienische Minensprengung in den Dolomiten erlitten hatte, Mathias Cantor, a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Würzburg. Österreicher von Geburt und Gesinnung, war er freiwillig zu seinen Fahnen geeilt, als die Italiener ihren Bundesgenossen in den Rücken fielen und die geliebten Tiroler Berge bedrohten. Wie in Österreich selbst war der Krieg so lange er mit Serbien und Rußland zu führen war, auch von Cantor nur als bittere Notwendigkeit empfunden. Aber als die Italiener glaubten die Gelegenheit benutzen zu können, um sich von der Donaumonarchie alle längst begehrten Landstriche zu holen, erwachte der österreichische Staatsgedanke in voller, von niemandem geahnter Stärke und vollbrachte die Leistungen, die Freund und Feind in Erstaunen setzten.





Cantor verschmähte es, sich seiner Stellung und seinem Alter entsprechend verwenden zu lassen. Er wollte als Soldat dienen und stieg als solcher durch seine Tapferkeit und Tüchtigkeit schnell empor. Kurz vor seinem Tode wurde ihm noch die große Tapferkeitsmedaille verliehen. Im Winter schrieb er mir aus dem Hochgebirge: „Es ist ein frisches, erquickendes Arbeiten in der herrlichen Bergluft, mitten in einer Landschaft, welche eine unbegreifliche Fülle von wundervollen Formen und Farben darbietet. Und dann fühlt man sich auch getragen von dem Strom des großen Geschehens, dessen Wellen auch an unserm Gestade spielen."

Mit Cantor ist ein eigenartiger Physiker dahingegangen. Er war besonders der jüngeren Generation der Fachgenossen fremd geworden, weil er seit Jahren wenig veröffentlichte und alle wissenschaftlichen Zusammenkünfte mied. So werden nur wenige sich ein Urteil über ihn und seine wissenschaftliche Persönlichkeit bilden können.

Cantors Leben wurde durch eine leidenschaftliche Liebe zur Wissenschaft und besonders zur Physik bestimmt. Das Feuer seiner Begeisterung für physikalische Erkenntnis loderte auch bei vorgerückten Jahren unvermindert fort und es ist kein Widerspruch in der Behauptung, daß diese Gesinnung ihn in der wissenschaftlichen Arbeit hinderte. Er schätzte nur wahren wissenschaftlichen Fortschritt und war der entschiedenste Gegner mittelmäßiger, mit sich selbst zufriedener Tätigkeit. So war er der schärfste Kritiker an sich und andern und nur wenige Abhandlungen, die einen wirklichen und sicher begründeten Fortschritt enthielten, ließ er gelten. Diese geistige Art konnte nicht häufig den eignen Ansprüchen genügen und daher hatte der Widerspruch zwischen Wollen und Vollbringen, welcher Enttäuschung und Verstimmung in jedes, auch das bedeutendste, wissenschaftliche Leben trägt, bei ihm einen Gegensatz von tragischer Gewalt geschaffen. Weit über Durchschnittsmaß befähigt, hätte er an der wissenschaftlichen Arbeit seiner Zeit lebhafteren Anteil nehmen können, wenn er sich seine Ziele nicht zu hoch gesetzt hätte. Während es meistens ein Jugendfehler ist, sich an die allerschwierigsten und unlösbaren Probleme zu wagen, hat Cantor diese Jugendlichkeit bis zuletzt behalten. Wenn er dann eine schwere Arbeit, die keine ihn befriedigenden Ergebnisse ergeben hatte, zurückstellte, kam es vor, daß er zur Ablenkung und Abspannung Experimente anstellte, deren Veröffentlichung ein ganz falsches Bild seiner wissenschaftlichen Arbeitsweise gab. Als er im Jahre 1903 von Straßburg nach Würzburg berufen wurde, traf er in größter Begeisterung und voller Hoffnung ein. Es lag nicht zum wenigsten an der Richtung, welche die Forschung genommen hatte, daß diese Erwartungen sich nicht erfüllten. Er hatte als Chemiker angefangen und war zur Physik übergegangen. Als Schüler Boltzmanns wurde er mit den neuen Grundlagen der elektromagnetischen Theorie und der statistischen Mechanik vertraut. Dann war er lange Jahre Assistent und Mitarbeiter von Braun. Er veröffentlichte sehr wichtige Untersuchungen über Kapillarität, untersuchte den Druck von Gasen bei gleichzeitiger chemischer Reaktion und zeigte sich als vielseitiger Forscher sowohl auf theoretischem wie experimentellem Gebiet. Mit der alten klassischen Theorie der Physik war er verwachsen und besonders lagen ihm Probleme, bei denen aus feststehenden Theorien sich durch rein mathematische Methoden sichere Folgerungen ziehen lassen.

Als er nach Würzburg kam, hatte die physikalische Forschung vielfach neue Bahnen eingeschlagen. Die neuen Strahlenarten herrschten auf experimentellem, die Elektrodynamik bewegter Körper und die Theorie der Wärmestrahlung auf theoretischem Gebiet vor. Cantor konnte sich mit diesen Methoden nicht befreunden; die bei der Neuheit der Gebiete unvermeidliche Unsicherheit in der Deutung der Beobachtungen gefiel ihm nicht. Vollends ablehnend verhielt er sich gegenüber den auf den inneren logischen Aufbau zunächst Verzicht leistenden Theorien, wie der Quantentheorie. Die Relativitätstheorie interessierte ihn sehr, genügte ihm aber nicht in ihrer Begründung. Er arbeitete eine ganz andere, auf

die Längenmessung durch optische Beobachtungen gegründete Theorie aus, konnte sich aber nicht zur Veröffentlichung entschließen. Es hätte nahe gelegen, daß Cantor seine eingehende Kenntnis der Boltzmannschen statistischen Theorie zur Bearbeitung der vielen Spezialprobleme auf diesem Gebiet anwendete, die später so große Bedeutung erlangten wie die Brownsche Bewegung und die Knudsenschen Gasströmungen. Aber er wollte keine zweifelhaften Hypothesen machen, wie sie nötig sind, um die Durchführung der Rechnungen zu ermöglichen und den Beobachtungen sich anzupassen. Auch hier war er nicht zu bewegen, seine Untersuchungen für die Veröffentlichung abzuschließen. Eine Fülle wissenschaftlicher Ideen und Anregungen würden ans Licht kommen, wenn seine Arbeiten gesichtet und veröffentlicht werden könnten. In den letzten Jahren beschäftigte sich Cantor, dessen Vielseitigkeit erstaunlich war, mit der Verbesserung der Explosionsmotoren. Er ging von dem richtigen Gedanken aus, daß die gewöhnlichen Motoren den großen Nachteil haben, daß die Geschwindigkeit im Moment des höchsten Drucks Null ist, so daß der hohe Druck nicht zur Arbeitsleistung ausgenutzt wird. Natürlich stieß er auf die Schwierigkeiten, seine Ideen konstruktiv auszuführen. Durch den Krieg wurde diese Arbeit unterbrochen. Auch trug er sich mit Plänen, die Sublimation im hohen Vakuum zu untersuchen, weil er hoffte, Aufschluß über die Kristallisationskraft zu erhalten.

Wie Cantor sich bei wissenschaftlichen Problemen nicht genug tun konnte an Strenge der Beweisführung und dadurch häufig bis zu den Wurzeln der Erkenntnis geführt wurde, so war er in seinen Vorlesungen unermüdlich in dem Bestreben, seinen Schülern volle Klarheit zu verschaffen. Es war ihm unmöglich, unfertige oder logisch lückenhafte Theorien vorzutragen. Er verwendete ungemein viel Arbeit und Sorgfalt auf die Vorlesungen und übernahm kein Referat für das Kolloquium, für das er sich nicht auf das sorgsamste vorbereitet hätte.

Cantor war immer seine eigenen Wege in der Wissenschaft gegangen und dadurch einsam geworden, und doch litt er an dieser selbstgewählten Einsamkeit. Seine ungebrochene Begeisterungsfähigkeit, die Überzeugung, daß die Idee das Höchste ist, ließ ihn in der kriegerischen Zeit für sein Vaterland die Waffe ergreifen und im harten Ausharren im winterlichen Hochgebirge Zufriedenheit finden. Als er durch Steinschlag einer italienischen Minensprengung am Kopf verwundet war, hielt er noch mehrere Tage aus, um seinen Nachfolger zu instruieren, ehe er sich ins Lazarett schaffen ließ. Wahrscheinlich hätte er gerettet werden können, wenn er sich gleich in ärztliche Behandlung begeben hätte.

So ist ein Leben, das voll von inneren Kämpfen war, im äußeren Kampf gegen den Feind des Vaterlandes zu versöhnendem Abschluß gekommen.

Die Zurückbleibenden werden sich der Erkenntnis nicht verschließen, daß das schlichte Heldentum nicht leicht hoch genug gewertet werden kann. Wir können nicht wissen, welche Kämpfe in Zukunft durch die Mißgunst unserer Feinde uns noch bevorstehen. Und für diese brauchen wir Männer von heldenhafter Gesinnung, die in Krieg und Frieden bereit sind, für Ideale zu kämpfen und das eigne Leben dem der Gesamtheit aufzuopfern.

W. Wien.



ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Stromschwankungen in Vakuumröhren bei Gegenwart von Alkalimetallen, ihre Bedeutung für den Entladungsvorgang und für die Messung äußerst kleiner Lichtintensitäten.

Von J. Elster und H. Geitel.

In einer früheren Abhandlung[1]) haben wir die gelegentliche Wahrnehmung erwähnt, daß in dunkel gehaltenen photoelektrischen Alkalimetallzellen, sobald die zur Beschleunigung der Photoelektronen angelegte Potentialdifferenz nahe an diejenige herankommt, bei der die kontinuierliche leuchtende Entladung durch das die Zelle erfüllende Gas einsetzt, Stromstöße auftreten, die an einem an die Zelle angeschlossenen Elektrometer bemerkbar werden. Stromschwankungen ähnlicher Art sind schon von E. Meyer[2]) unter dem Einfluß der γ-Strahlen des Radiums an Luftkondensatoren bei niedrigen Drucken beobachtet. Das Wesentliche in unseren Versuchen liegt darin, daß die Stromstöße auch ohne Radiumpräparat auftreten; nähert man ein solches der Zelle oder läßt die geringste Spur Licht einfallen, so vermehrt sich die Häufigkeit der Stöße unter gleichzeitiger Abnahme ihrer Stärke, so daß selbst noch bei äußerst kleinen Beleuchtungsintensitäten der Elektrometergang schon gleichförmig wird.

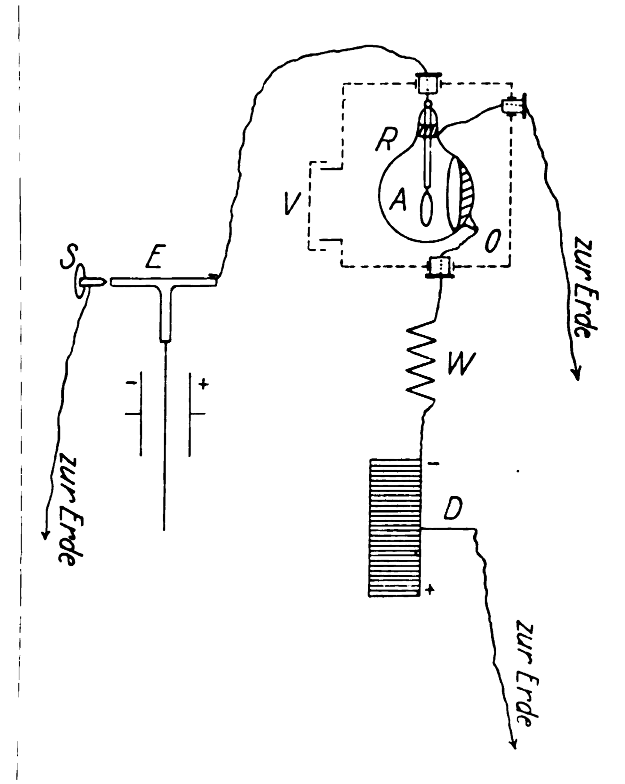
Wir haben diese Erscheinung nach zwei Richtungen hin verfolgt, indem wir einerseits die Bedingungen untersuchten, unter denen sie zustandekommt, andrerseits die ungemeine Empfindlichkeit feststellten, mit der sie die geringsten Spuren von Licht anzeigt. Der erste Teil der Untersuchung hat zu einigen Aufschlüssen über den Vorprozeß der leuchtenden Entladung in Vakuumröhren überhaupt geführt, indem ein überraschend großer Einfluß gewisser Verunreinigungen der Elektrodenoberflächen nachgewiesen wurde, der zweite setzte uns in den Stand, die untere Grenze der Lichtempfindlichkeit der Photozellen wesentlich hinauszuschieben; in bestimmten Fällen über die des dunkel angepaßten Auges hinaus.

I.

Aus nebenstehender Figur geht die angewandte Schaltung hervor, die im übrigen der für Photozellen üblichen entspricht.

1) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. 14, 744, 1913.
2) Edgar Meyer, diese Zeitschr. 11, 215, 1910.

Der negative Pol einer Akkumulatorenbatterie B von 166 Zellen steht dauernd durch einen (nur zum Schutze dienenden) Widerstand W von 4000 Ω mit der lichtelektrischen Oberfläche O der Zelle (Silberkalotte mit darauf niedergeschlagenem Alkalimetall) in Verbindung. Der Gasinhalt der Zelle besteht in der Regel aus Argon von etwa 0,1 bis 0,5 mm Druck. Ein geerdeter Draht D kann durch einen beweglichen Kontakt mit beliebigen Elementen der Batterie in Verbindung gebracht werden, so daß eine stufenweise Erhöhung der beschleunigenden Spannung um je 2 Volt bis zum Höchstbetrage von 332 Volt möglich ist. Erforderlichenfalls ließ sich durch Zuschalten einer Trockenbatterie (bestehend aus Elementen, wie sie bei Taschenlampen angewandt werden) oder auch der Spannung des städtischen Beleuchtungsnetzes eine weitere Vermehrung bis zu 650 Volt erreichen.



Der Anodendraht A der Zelle führt zu einem Einfadenelektrometer E (kleine Empfindlichkeit; etwa 10 Skt. = 1 Volt), das für gewöhnlich durch einen mittelst einer Schraube S herstellbaren Kontakt geerdet ist; kurz vor jeder Beobachtung wird durch eine kleine Drehung der Schraube die Erdung unterbrochen.

Die Zelle ist in ein lichtdichtes, durch Natrium trocken gehaltenes Gehäuse mit abnehmbarem Verschlusse *V* eingebaut, ein außen um die Zelle gelegter geerdeter Schutzring *R* aus Stanniol verhindert das Überfließen freier Ladungen über die äußere Glaswand zum Elektrometer.

Hält man die an die Zelle gelegte Spannung tief (etwa 30 Volt) unter dem Entladungspotential, so steht bei vollkommenem Lichtabschluß der Elektrometerfaden fast ganz ruhig. Steigert man nun die Spannung durch schrittweises Zuschalten je eines Akkumulators, so erreicht man, bei Zellen, deren Belag aus Kalium oder Rubidium besteht, leicht den Punkt, bei dem das stoßweise Wandern des Elektrometerfadens auftritt. Um quantitativ vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, kann man entweder die Anzahl Sprünge zählen, die der Faden macht, um einen bestimmten Ausschlag, etwa 30 Skt., zu erreichen, oder man leitet das Elektrometer durch einen sehr hohen (Xylol) Widerstand zur Erde ab und zählt die Fadenschwankungen, die in einer gegebenen Zeit erfolgen.

Die Größe der Sprünge und ihre Häufigkeit hängt sowohl von der Natur der Zelle (Gasdruck und Art des Alkalimetalls), wie von der angelegten Spannung ab. Während bei Kalium und Rubidium die Erscheinung mit großer Regelmäßigkeit auftritt, am deutlichsten, wenn seit der letzten Belichtung mindestens einige Minuten verflossen sind, ist sie anscheinend bei Natrium und auch bei Cäsium (letzteres Metall wurde nicht eingehend untersucht) schwerer zu erhalten; man muß näher an das Entladungspotential herangehen, und es kommt daher leicht vor, daß nach einigen Fadensprüngen die leuchtende Entladung einsetzt. Besonders häufig geschieht dies, unter vorhergehender starker Vermehrung der Sprünge, sobald man γ-Strahlen oder minimale Spuren von Licht auf die Zelle fallen läßt.

Auf Grund seiner Versuche an einem Kondensator, der mit Luft variabler Dichtigkeit erfüllt und den γ-Strahlen eines Radiumpräparats ausgesetzt war, hat E. Meyer[1]) eine Theorie der Erscheinung aufgestellt, die seinen Beobachtungen auch quantitativ gerecht wird. Nach dieser erreichen schon unterhalb des Entladungspotentials gewisse vereinzelte Elektronen im Gasraume eine genügend große freie Weglänge, so daß sie imstande sind beim Zusammenstoß mit Gasmolekülen diese in Ionen zu zerspalten. Die hierdurch vermehrte Ionenzahl führt die plötzliche Vergrößerung der Stromstärke im Kondensator herbei; jeder Stromstoß zeigt uns also an, daß hin und wieder einige Elektronen im Gasraume die zur Stoßionisation erforderliche Mindestweglänge unter der angelegten Potentialdifferenz zurückgelegt haben. Die aus dieser Auffassung sich ergebende Abhängigkeit der Größe der Stromschwankungen vom Gasdruck findet Meyer durch den Versuch gut bestätigt.

1) l. c. S. 219.

Läßt man γ-Strahlen von Radium auf einen Kondensator, oder Spuren von Licht auf eine Photozelle fallen, so ist die Herkunft der von der Theorie vorausgesetzten freien Elektronen ohne weiteres verständlich; im ersten Falle sind es die δ-Strahlen, die an den Wänden des Kondensators erregt werden, im zweiten die mit diesen ihrem Wesen nach übereinstimmenden Photoelektronen. Schwierigkeit macht das Verständnis der Stromschwankungen nur in dem Falle, daß sie an einer Zelle im Dunkeln und ohne Radiumstrahlung beobachtet werden. Bei den Zellen mit Kathodenflächen aus Kalium oder Rubidium könnte man an die eigene Radioaktivität dieser Metalle denken, deren Größenordnung derart ist, daß sie für den beobachteten Effekt vielleicht gerade noch ausreichen würde. Rechnet man die von diesen Metallen pro cm^2 ausgestrahlte Elektronenladung zu etwa 10^{-18} bis 10^{-19} Amp.[1]) so kommt man auf eine Emission von 1—6 Elektronen in der Sekunde für jedes Quadratzentimeter Oberfläche.

Es ist daher möglich, daß die natürliche Aktivität der beiden genannten Alkalimetalle die Ursache der Leichtigkeit ist, mit der man an Zellen aus diesem Material auch bei völligem Lichtabschluß die Stromstöße erhält. Da aber an Natriumzellen die gleiche Erscheinung, wenn auch vielleicht bei größerer Annäherung an das Entladungspotential auftritt, so durfte der eigentliche und wesentliche Grund nicht in der Aktivität des Zellenmaterials gesucht werden.

Der weitere Verlauf der Untersuchung ergab zunächst das unerwartete Resultat, daß die Gegenwart freien Alkalimetalls in den Zellen für das Zustandekommen der Erscheinung überhaupt nicht erforderlich zu sein schien. Ein einfacher Silberbelag als Kathode, ein Platindraht als Anode in einer Glaskugel und einer Argonatmosphäre von etwa 0,1 mm Druck gaben bei derselben Schaltung wie die Photozelle sprungweise Entladungen. Allerdings war ein Unterschied in dem Verhalten bemerkenswert. Während die Photozellen im allgemeinen ein niedriges Entladungspotential (etwa 120—180 Volt) zeigen, das sich im wesentlichen als

1) Vgl. E. Henriot, Le Radium 9, 224, 1912.



konstant erweist, mußte an die Silberzelle zunächst eine weit höhere Potentialdifferenz (bis gegen 550 Volt) angelegt werden, um überhaupt die leuchtende Entladung darin einzuleiten. Sobald dies aber einmal geschehen war, sank das Entladungspotential sofort um etwa 100 Volt herab, und dicht unter dieser neuen Grenze zeigten sich nun erst die Stromstöße in voller Deutlichkeit. Zugleich ergab sich ein unverkennbarer Einfluß des zerstreuten Tageslichts oder künstlicher Beleuchtung; die Stromstöße, die im Dunkeln regelmäßig in Pausen von einigen Sekunden erfolgten, wurden bei Belichtung häufiger und flossen sogar in eine kontinuierliche Bewegung des Elektrometerfadens zusammen.

Durch die leuchtende Entladung war also mit der Silberzelle eine Veränderung vor sich gegangen, die sie in ihrem Verhalten einer Alkalimetallzelle ähnlich machte.

Ihre Empfindlichkeit gegen gewöhnliches Licht wies darauf hin, daß freies Alkalimetall in der Zelle vorhanden sein konnte. Da die Änderung in dem Verhalten der Zelle erst nach mindestens einmaligem Durchgange der leuchtenden Entladung gefunden wurde, so mußte, wenn Alkalimetall zugegen war, dieses erst durch jene Entladung in Freiheit gesetzt sein. Da bekanntlich die Spektralreaktion zeigt, daß alle mit der Luft in Berührung gewesenen Gegenstände Spuren von natriumhaltigem Staube an ihrer Oberfläche tragen, so war das gleiche von den Elektrodenflächen der Silberzelle anzunehmen. Gesetzt nun, diese Spuren von Alkaliverbindungen erlitten während der leuchtenden Entladung eine Zersetzung, so könnten auf diesem Wege sehr wohl kleine Mengen freien Natriums in die Zelle hineingelangen.

Um diesen Gedanken zu prüfen, stellten wir uns eine weitere Zelle mit Silberbelag als Kathode und Platinring als Anode her und ließen eine geringe Menge verdünnter Chlornatriumlösung (weniger als 1 mg $NaCl$ enthaltend) auf der Silberfläche eintrocknen. Dann wurde die Zelle an die Pumpe gebracht und in bekannter Weise mit verdünntem Argon gefüllt. Weder im Tageslicht noch in dem durch eine 10 mm dicke Platte aus schwerem Flintglas (zur Absorption des Ultravioletts) filtrierten Lichte einer Quecksilberbogenlampe zeigte sie eine Spur photoelektrischer Empfindlichkeit, ebensowenig war bei fortgesetzter Steigerung der angelegten Potentialdifferenz ein regelmäßiges Springen des Elektrometerfadens zu erzielen. Sobald aber bei etwa 310 Volt die leuchtende Entladung einmal eingesetzt hatte, ließ sie sich nun schon bei der viel niedrigeren Spannung von 220 Volt einleiten. Durch diese Behandlung war die Zelle zugleich stark empfindlich gegen Tageslicht geworden (sie gab in mäßig hellem Lichte bis $3 \cdot 10^{-9}$ Amp.), auch die Stromstöße stellten sich bei Lichtabschluß in der Nähe des Entladungspotentials mit größter Regelmäßigkeit ein, und eine geringe Lichtzufuhr oder auch Radiumbestrahlung bewirkte das bekannte Anwachsen ihrer Häufigkeit. Größere Beleuchtungsstärken führten zu einer gleichförmigen Bewegung des Elektrometerfadens. Bei Umkehrung der Richtung des elektrischen Feldes in der Zelle behielt sie im wesentlichen ihre Lichtempfindlichkeit bei, die empfindliche Substanz mußte demnach sowohl an der Kathode wie an der Anode abgelagert sein.

Ganz dieselbe Wirkung erzielten wir durch Behandlung mit dem Glimmstrom an einer anderen Zelle, in der wir zuvor eine winzige Spur von Chlorkaliumlösung auf dem Silberbelage eindampfen ließen.

Die Sicherheit, mit der sich durch Einführung von Alkalisalzen in eine Zelle sowohl ihre Lichtempfindlichkeit wie die Stromschwankungen in der Nähe des Entladungspotentials mittelst der Glimmentladung hervorrufen lassen, macht es zweifellos, daß die stets an den Elektrodenflächen haftenden Spuren solcher Salze die Ursache der gleichen Erscheinung an nicht besonders vorbereiteten Zellen oder Entladungsröhren jeder Art sind.

Es dürfte schwierig sein, Elektroden von vollkommener Reinheit in Vakuumröhren einzuführen, da ja schon durch die Behandlung des Glases beim Einschmelzen Alkalidämpfe mit ihnen in Berührung kommen. So erwiesen sich auch Elektroden aus Aluminium nach Einleitung des Glimmstromes in Wasserstoff stark lichtempfindlich.

Dagegen erscheint es möglich, die Elektroden nachträglich mit einem alkalifreien Überzuge zu bekleiden, indem man, wie wir es bei Herstellung der Zink- und Kadmiumzellen angegeben haben[1]) aus einer Seitenkammer bei verhältnismäßig niedriger Temperatur Kadmium (oder auch Zink) im hohen Vakuum in die Zelle hineindestilliert. Solche mit Kadmium belegte Elektroden werden durch die leuchtende Entladung, die man nach Einleiten von Argon in der Zelle hervorruft, nicht lichtempfindlich gegen sichtbares Licht gemacht, sie büßen vielmehr einen Teil ihrer Ultraviolettempfindlichkeit, nämlich gerade gegen das weniger brechbare Ultraviolett, ein. Durch das Bedecken der Elektroden mit Kadmium

1) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. **15**, 3, 1914.



ist das Alkali zwar nicht beseitigt, aber doch der Einwirkung der Glimmladung entzogen.

Wenn im vorigen von einer Abscheidung freien Alkalimetalles durch den Glimmstrom die Rede war, so braucht man nicht notwendig an eine elektrolytische Zersetzung der Salze zu denken. Es können wohl auch thermische Dissoziationen vorkommen; beobachtet man doch häufig an den Elektroden Lichtbüschel, die das gelbe Licht des Natriumdampfes zeigen, und von denen aus Spuren des Metalls in den Gasraum gelangen mögen. Vorzugsweise kommen wohl die Veränderungen in Frage, die zuerst von Goldstein[1]) mit Hilfe von Kathodenstrahlen an Alkalisalzen hervorgerufen sind. Solche Salze zeigen die für das entsprechende kolloide Alkalimetall kennzeichnenden Färbungen und sind, wie wir vor längerer Zeit[2]) nachgewiesen haben, in ähnlicher Weise lichtempfindlich wie die Alkalimetalle selbst. Sie stehen in ihren Eigenschaften den Phosphoren nahe. Bei Zutritt von Luft und Feuchtigkeit sowie im hellen Lichte verschwinden die Färbungen langsam zugleich mit der lichtelektrischen Empfindlichkeit der Salze. In Übereinstimmung hiermit nimmt auch die lichtelektrische Empfindlichkeit der Elektroden von Vakuumzellen ab, die dem Glimmstrome ausgesetzt waren, sobald man sie mit Sonnenlicht einige Stunden lang bestrahlen läßt. Da es sich hier um molekulare Spuren zersetzter Substanz handelt, so werden auch äußerst kleine Mengen nicht indifferenten Gases in der Zelle, wie *O*, *H* und *N*, eine allmähliche Rückbildung des empfindlichen Belages (zu Oxyd, Hydrid oder Nitrid) herbeiführen können; tatsächlich tritt eine gewisse Empfindlichkeitsabnahme der nach obigem Verfahren präparierten Zellen auch im Dunkeln ein. Durch wiederholte Einwirkung des Glimmstromes kann man die Empfindlichkeit (anscheinend in nicht ganz dem früheren Grade) erneuern, läßt man dagegen Luft von Atmosphärendruck eintreten, so zeigt sie sich, selbst nach Wiederherstellung des günstigsten Druckes fast vernichtet. Andrerseits ist ein sehr geringer Betrag von Lichtempfindlichkeit auch in verdünnter Luft und verdünntem Sauerstoff durch den Glimmstrom erreichbar. Bei weitem am kräftigsten ist aber die Wirkung in Argon und Wasserstoff. Diese Tatsachen sind in voller Übereinstimmung mit der Vorstellung, daß die lichtempfindliche Substanz aus den Alkalisalzen durch Einwirkung von Elektronenstrahlung entsteht und sich bei Gegenwart reaktionsfähiger Gase zurückbildet.

1) E. Goldstein, Wied. Ann. **54**, 371, 1895.
2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **59**, 487, 1896.

Hiernach sind die Stromschwankungen in Alkalimetallzellen sowohl wie in andern, die dem Glimmstrome ausgesetzt waren, auf dieselbe Ursache, nämlich die Gegenwart photoelektrisch hochempfindlicher Stoffe zurückgeführt; es ist ohne weiteres verständlich, daß auch bei schwächster Belichtung die zur Auslösung der Stromstöße erforderlichen Elektronen in den Gasraum gelangen werden.

Dagegen bleibt noch aufzuklären, wie ein Rest derselben Erscheinung auch bei anscheinend völligem Lichtabschlusse noch bestehen bleiben kann.

Zieht man in Betracht, daß die Lichtempfindlichkeit der Alkalimetalle bis ins Ultrarot reicht, beachtet ferner die Geringfügigkeit der Lichtreize, die, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, ausreichen, das Tempo der Stromstöße zu beschleunigen, so wird man zu der Annahme geleitet, daß auch bei „dunkel" gehaltenen Zellen noch eine äußerst geringe Emission von Elektronen an den Alkalimetallen bestehen bleibt, die nicht radioaktiver Natur ist und vielleicht auf unbekannten Lichtquellen, wie etwa der Phosphoreszenz der Glaswand der Zelle beruht oder die sogar mit der Gleichgewichtsstrahlung der Temperatur in der Zelle und der umhüllenden Kapsel zusammenhängt[1]). Man könnte auch an die allgemeine an der Erdoberfläche bestehende durchdringende γ-Strahlung als erregende Ursache denken, doch müßte dann, entgegengesetzt unserer Erfahrung, eine Abschirmung der Zelle durch Bleimäntel die Stromstöße zum Verschwinden bringen oder ihre Häufigkeit vermindern. Außerdem wäre dann wieder die Rolle nicht verständlich, die die Alkalimetalle bei dem Zustandekommen der Erscheinung zweifellos spielen. Nimmt man aber beim metallischen Natrium eine äußerst kleine Elektronenemission (nicht radioaktiver Art) auch bei anscheinend völligem Lichtabschluß an, so wird man das gleiche auch dem Kalium und Rubidium gegenüber einräumen müssen. Die schwache Eigenaktivität dieser Elemente ist dann für die Entstehung der Stromstöße keine wesentliche Vorbedingung.

Bei der Glimmentladung in verdünnten Gasen wird man nach den mitgeteilten Erfahrungen einen Unterschied zwischen dem ersten Stromdurchgang und den darauffolgenden festhalten müssen. Der erstere erfolgt bei verhält-

1) Zu der gleichen Auffassung bezüglich des „Dunkeleffekts" gelangte auch E. Müller, Ber. der Deut. Phys. Ges. **11**, 77, 1909.



nismäßig hoher Potentialdifferenz; die Herkunft der zu seiner Auslösung erforderlichen Elektronen dürfte schwer feststellbar sein. Bei der durch das hohe Spannungsgefälle geschaffenen labilen Lage genügen hier vielleicht die δ-Strahlen, die durch die allgemeine Verbreitung der radioaktiven γ-Strahlung an den Elektroden frei werden, vielleicht sind es die radioaktiven Beimengungen, die sich in jedem Materiale in kleinsten Mengen vorfinden, die hin und wieder ein Elektron in das elektrische Feld entsenden.

Sobald aber die erste Entladung eingeleitet ist, hat sich in dem Rohre eine genügende Menge lichtempfindlichen Alkalimetalls gebildet, um den Glimmstrom nun auch bei weit geringerer Spannung und selbst im Dunkeln zu zünden.

Auf jeden Fall wird man bei dem häufig angewandten Verfahren, Elektrodenflächen im Vakuum durch Glimmentladungen zu reinigen, sowie auch bei der Herstellung von Metallschichten durch kathodische Zerstäubung damit rechnen müssen, daß infolge der Gegenwart von Alkaliverbindungen Substanzen von abnorm hoher photoelektrischer Empfindlichkeit durch ebendenselben Prozeß gebildet werden. Erst bei fortgesetzter Zerstäubung alkalifreien Metalls wird man die zuerst abgelagerten Schichten, die vorzugsweise die lichtempfindlichen Stoffe enthalten, durch übergelagertes reineres Metall unwirksam machen.

Auch bei glühelektrischen Versuchen ist die aufgezeigte Fehlerquelle vielleicht nicht ohne Bedeutung.

II.

Bei unsern früheren Versuchen[1]) über die Empfindlichkeit der Alkalimetalle gegenüber sehr geringen Lichtintensitäten hatten wir die Belastung der Zelle stets so tief unter dem Entladungspotential gehalten, daß Stromstöße nicht beobachtet wurden. Die untere Grenze für die Beleuchtungsintensität, die noch einen meßbaren Photostrom ergab, fand sich bei etwa 10^{-6} MK. oder einer Energiezufuhr von der Ordnung 10^{-7} Erg. für das Quadratzentimeter und die Sekunde[2]).

Es war von vornherein zu erwarten, daß bei größerer Annäherung an das Entladungspotential die Empfindlichkeitsgrenze noch hinausgerückt werden würde[3]), die dann eintretenden Stromschwankungen machten aber eine Messung des Photostroms im alten Sinne unmöglich. Nun zeigte sich leicht, daß die Vermehrung der zu einer bestimmten Aufladung des Elektrometers erforderlichen Stromstöße durch das Licht in eindeutiger Weise von der Lichtstärke abhing und zugleich ein ungemein empfindliches Anzeichen der Lichtwirkung darstellte.

So fand sich z. B., daß nach Einschließung der Zelle in eine unserer Meinung nach lichtdichte Kapsel, die in einem verdunkelten Raume stand, die Stromstöße sofort an Häufigkeit zunahmen, wenn die Zellenkapsel von außen einer Beleuchtungsstärke von weniger als einer MK. ausgesetzt wurde. Es stellte sich nach langem Suchen schließlich heraus, daß bei dem Einkitten einer Drahtzuleitung mit Picein ein feiner Kanal geblieben war, durch den das Licht eindrang.

Da es sich um quantitative Bestimmungen, zum mindesten um zuverlässige Schätzungen geringer Beleuchtungsintensitäten handelte, so mußten wir, wie in unserer früheren Untersuchung, von einer Lichtquelle bekannter Leuchtkraft ausgehen und diese in meßbarer Weise bis zu beliebig geringen Beträgen abschwächen.

Als Quelle diente uns wiederum die Hefnerlampe, deren spektrale Energieverteilung nach Ångström bekannt ist. Da wir Kalium als lichtempfindliche Substanz verwandten, so kommt wesentlich die Blaustrahlung der Lampe als photoelektrisch wirksam in Betracht. Rechnet man die wirksamen Wellenlängen von 550 μμ bis zu den kürzesten hinab, so dürfte die auch in der früheren Arbeit zugrunde gelegte Schätzung von 0,42 Erg., cm^{-2} sec^{-1} für die in Betracht kommende Strahlung der Hefnerlampe nicht zu niedrig bewertet sein. Auf die übrige sichtbare Strahlung von Gelb bis Rot würden dann nach Ångström 8,18 Erg. kommen. Durch einen besonderen Versuch haben wir uns überzeugt, daß bei der jetzt benutzten Zelle dieser langwellige Teil der Strahlung nur etwa 4 Proz. des gesamten photoelektrischen Stromes hervorrief. Bei dieser Messung wurde zunächst eine Metallfadenlampe mittelst eines Widerstandes so reguliert, daß der durch ihre Strahlung erregte Photostrom demjenigen gleich wurde, den eine Hefnerkerze in 1 m Abstand ergab. Von dem Faden wurde alsdann ein Bild entworfen und dieses durch ein Schwefelkohlenstoffprisma in ein Spektrum zerlegt. Durch einen Spalt mit dahinter geschalteter Zylinderlinse ließen sich einerseits das Grün bis Violett, andererseits Gelb bis Rot auf der Zelle vereinigen, und in beiden Fällen der Photostrom galvanometrisch

1) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. **13**, 468, 1912.

2) In naher Übereinstimmung fanden E. Marx u. K. Lichtenecker den Grenzwert $6 \cdot 10^{-8}$ (Ann. d. Phys. **41**, 124, 1913).

3) Entsprechend den Versuchen von H. Kreusler, Ann. d. Phys. **6**, 409, 1901.



bestimmen. Hierbei ergab sich das genannte Verhältnis von 4 Proz. Vorausgesetzt ist, was wohl nahe genug zutrifft, daß die Energieverteilung im Spektrum der stark unterbelasteten Metallfadenlampe der der Hefnerkerze gleich war.

Bei Vergleichungen der Farbenempfindlichkeit des Auges mit der der Zelle benutzten wir nach mehrfachem Probieren mit verschiedenen Farbstoffen schließlich nur noch Lösungen von Kupferoxydammoniak und von Kaliumbichromat. Bei richtiger Abmessung der Konzentration und der Schichtdicke ergänzen sich die durchgelassenen Lichtmengen sehr nahe zu dem vollen Spektrum.

Die Schwächung des Lichtes in einem genau angebbaren Grade ist eine Aufgabe, die recht schwierig wird, sobald man sich der unteren Empfindlichkeitsgrenze des Auges nähert. Unbemerktes Nebenlicht kann stärker wirken als dasjenige, das man zu messen glaubt.

Wir haben die besten Resultate mit einem Verfahren gewonnen, das auf Absorption des Lichtes beruht und das beim ersten Anblick ziemlich roh zu sein scheint.

Bei homogenem Lichte wächst die Absorption mit der Schichtdicke des absorbierenden Stoffes, oder, bei gleichbleibender Dicke mit der Konzentration. Es gilt das Beersche Gesetz, nach dem die durchgelassene Lichtmenge nach einer Exponentialfunktion der Konzentration abnimmt.

Die Herstellung genügend homogenen und dabei konstanten Lichtes bereitet aber die größten Schwierigkeiten. Man wird davon unabhängig, wenn man ein absorbierendes Medium verwendet, das alle Wellenlängen in gleichförmiger Weise abschwächt. Wir haben als solches Tuschelösungen angewandt, deren Absorption in beliebiger Stärke gewählt werden kann. Wir ließen in ein von parallelen Glaswänden begrenztes Absorptionsgefäß von 350 cm³ Inhalt, das bis nahe zum Rande mit destilliertem Wasser gefüllt war, Tropfen starker Tuscheaufschwemmungen aus einem Tropfglase hineinfallen und vermischten die Flüssigkeiten durch Umrühren mit einem Glasstabe. Da das Volum eines Tropfens klein gegen das Gesamtvolum der absorbierenden Schicht ist, so kann man dies letztere konstant setzen und die Konzentration der Tuschelösung als direkt proportional der zugefügten Tropfenzahl annehmen. Es ist überraschend, wie gut die photoelektrisch gemessene durchgelassene Lichtstärke nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe mit der Tropfenzahl abnimmt. Jedenfalls ist der Fehler, der durch ungleiche Tropfengröße entsteht, in so vollkommener Weise vom Zufall abhängig, daß er bei größeren Tropfenmengen von selbst unwirksam wird.

Mit zunehmender Tropfenzahl wird die Flüssigkeit bald so undurchsichtig, daß das anfänglich zur Messung des Photostroms verwendbare Galvanometer nicht mehr ausreicht. Um die Absorption weiter zu verfolgen, kann man zunächst etwa die Stärke der Lichtquelle vergrößern oder durch Erhöhung der Belastung der Zelle ihre Empfindlichkeit vermehren. Wenn auch diese Hilfsmittel nicht mehr ausreichen, setzt man das Einfadenelektrometer an Stelle des Galvanometers, indem man die Zeiten mißt, in denen der Elektrometerfaden eine bestimmte Strecke der Skala durchwandert, die Stromstärken sind den reziproken Zeiten proportional.

Wir teilen eine Messungsreihe mit, bei der das Schwächungsverhältnis für den Zusatz eines Tropfens nahe gleich $^1/_2$ getroffen war;

Lichtquelle: Hefnerlampe mit Kupferoxydammoniakfilter. Absorbierende Flüssigkeit: Wasser mit tropfenweis zugesetzter Tuschelösung.

Reihe a. Meßinstrument: Galvanometer, Empfindlichkeit 1 Skt. $= 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ Amp.

Anzahl der Tropfen	Photostrom in $2{,}6 \cdot 10^{-11}$ A.	Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Ablesungen
0	377	
		2,04
1	185	
		2,08
2	89	
		2,02
3	44	
		1,83
4	24	
		2,00
5	12	
		2,00
6	6	

Reihe b. Lichtquelle: Nitralampe von 2000 Kerzen. Sonst alles wie unter a.

10	20,9	
		2,07
11	10,1	

Zelle stärker belastet:

15	15,0	
		2,00
16	7,5	

Reihe c. Lichtquelle 20 Voltlampe zu 9 Kerzen. Der Strom wird durch Aufladung des Einfadenelektrometers gemessen. Aufladung gleich 1,43 Volt. An Stelle des Photostroms ist die Aufladezeit in Sekunden gesetzt.

15	51,5″	
		1,98
16	102,0″	
		2,00
17	204,0″	

Als Mittelwert des Schwächungskoeffienten ergibt sich 1 : 2,00.

die Durchlässigkeit der Flüssigkeit sank daher bei Zusatz von 17 Tropfen auf den 2^{17} Teil (etwa das $7,6 \cdot 10^{-6}$ fache) der anfänglichen. Man erkennt, mit welcher guten Annäherung das Verhältnis zweier aufeinander folgender Ablesungen gleich 2 : 1 bleibt, auch wenn die Flüssigkeit nur noch den hunderttausendsten Teil ihrer Durchlässigkeit behalten hat.

Man wird voraussetzen dürfen, daß auch über diesen Bereich hinaus jeder folgende Tropfen die Durchlässigkeit auf die Hälfte der vorher bestehenden herabsetzen würde.

(Streng genommen ist die Absorption des Lichtes in der Tuschelösung nicht völlig von der Wellenlänge unabhängig, vielmehr zeigt sich wie bei andern trüben Medien, eine etwas größere Durchlässigkeit für die langen Wellen. Da aber gerade diese photoelektrisch weniger wirksam sind, so ist jenes selektive Verhalten der Tusche beim Photoeffekt unmerklich, wie eben aus der mitgeteilten Tabelle hervorgeht.)

Die Versuche zur Bestimmung der unteren Grenze der Lichtempfindlichkeit wurden nun in der Weise ausgeführt, daß wir die Anzahl der Tropfen einer bestimmten Tuschelösung feststellten, die dem Wasser des Absorptionsgefäßes zugesetzt werden mußten, bis die Beschleunigung der Fadensprünge durch das durchgehende Licht nicht mehr merklich war. Um jedes Nebenlicht auszuschließen, wurde auf die Öffnung der Zellenkapsel, die der Lichtquelle zugewandt war, ein Rand aus schwarzem Sammet aufgeklebt, gegen den wir das Absorptionsgefäß fest andrückten. Die Lichtquelle (Hefnerlampe oder eine auf diese bezogene Metallfadenlampe) war in einem Gehäuse aus Schwarzblech aufgestellt, dessen Fugen, soweit sie noch Licht durchließen, mit schwarzem Papier oder dunklem Filz gedichtet wurden, durch einen zylindrischen Ansatz aus Schwarzblech trat ein Lichtbündel in der gewünschten Richtung in das verdunkelte Zimmer, unmittelbar davor fanden die mit Kupferoxydammoniak oder Kaliumbichromatlösungen gefüllten planparallelen Glasgefäße Platz, die zur Zerlegung des Lichtes in die beiden Spektralgebiete dienten, die etwa im Gelbgrün aneinander grenzen. Besondere Vorkehrungen, bestehend aus Diaphragmen und Schirmen aus schwarzem Papier, dienten dazu, dasjenige Licht abzublenden, das aus den Glaswänden der Absorptionsgefäße durch diffuse Zerstreuung im Innern des Glases, an den Rändern der Glasplatten nach außen drang.

Wir rechneten nun, wie oben bemerkt, nach Ångström die Energie des blauen Anteils des Hefnerlichts, der dem Restspektrum des durch Kupferoxydammoniak filtrierten Lichtes entspricht, wenn die Konzentration der Lösung so gewählt war, daß von Gelb und Rot im Spektrum gerade nichts mehr zu sehen war, zu 0,42 Erg., für den roten Anteil, der durch Kaliumbichromat bis zu etwa derselben Spektralgrenze durchgelassen wurde, daher 8,18 Erg.

Nun ist zu beachten, daß ein Farbfilter selbst in dem Gebiete der von ihm vorzugsweise durchgelassenen Wellenlängen noch eine gewisse Absorption ausübt; um diese in Rechnung ziehen zu können, bestimmten wir photoelektrisch die Schwächung sowohl für das durch Kupferoxydammoniak wie das durch Kaliumbichromat filtrierte Licht beim Durchgang durch ein weiteres Absorptionsgefäß, das mit Flüssigkeit derselben Konzentration gefüllt war. In den so ermittelten Schwächungskoeffizienten geht zugleich der Reflexions- und Absorptionsverlust an und in den Glaswänden des Gefäßes mit ein. Die betreffenden Zahlen waren für das Kupferoxydammoniak 0,46, für das Kaliumbichromat 0,77.

Wir teilen zunächst eine Versuchsreihe für blaues Licht mit. Die Hefnerlampe befand sich in 1 m Abstand von der Zelle. Die Tuschelösung war von der in der vorigen Tabelle angegebenen Konzentration, je ein Tropfen brachte die Intensität des durchgelassenen blauen Lichtes auf die Hälfte.

Anzahl der zugesetzten Tropfen	Anzahl der Fadensprünge bis 30 Skt. (Mittel aus 5 Ablesungen)	
	Zelle im Dunkeln	Zelle belichtet
10	3	Fadengang kontinuierlich
15	3	dgl.
20	2,5	3,5
26	2,5	fast 3

Bei 26 Tropfen war die Vermehrung der Sprünge noch eben mit Sicherheit zu erkennen.

Hieraus folgt als Grenzenergie des schwächsten noch wirksamen Lichtes:

$$0{,}46 \cdot \frac{0{,}42}{2^{26}} = 2{,}88 \cdot 10^{-9} \text{ Erg.}$$

In einer andern Versuchsreihe war die Hefnerkerze durch eine kreisförmige Mattglasfläche ersetzt, die von der Rückseite durch eine Glühlampe beleuchtet wurde. Die Intensität der letzteren war so einreguliert, daß die Beleuchtung am Orte der Zelle 1,5 MK. (photoelektrisch gemessen) betrug. Die Messungen wurden mit gelbrotem und blauem Lichte durchgeführt.

I. Gelbrotes Licht (Kaliumbichromatfilter):

Anzahl der Tropfen	Anzahl der Fadensprünge bis 30 Skt. (Mittel aus 5 Beobachtungen)	
	Zelle im Dunkeln	Zelle belichtet
23	5	Fadengang kontinuierlich
30	5,5	9
34	5	6
36	4,5	5,5

Schwächungskoeffizent für einen Tropfen (vorher galvanometrisch bestimmt): 1 : 1,63.

Daher ist die Grenzenergie:

$$\frac{8{,}18 \cdot 1{,}5}{(1{,}63)^{36}}\, 0{,}77 = 2{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ Erg.}$$

II. Blaues Licht (Kupferoxydammoniakfilter):

Anzahl der Tropfen	Anzahl der Fadensprünge bis 30 Skt.	
	Zelle im Dunkeln	Zelle belichtet
20	3	7
22	4	6
23	3,5	4,5

Schwächungskoeffizent für einen Tropfen (galvanometrisch bestimmt): 1 : 2,16.

Grenzenergie:

$$\frac{0{,}42}{(2{,}16)^{23}} \cdot 0{,}46 = 3{,}9 \cdot 10^{-9} \text{ Erg.}$$

Der Unterschied der Ergebnisse dieser beiden Messungsreihen ist auf die bekannte starke Blauempfindlichkeit der Kaliumzellen zurückzuführen. In keinem Falle konnte ein dunkeladaptiertes Auge nur den geringsten Lichtschein erkennen, wenn es vom Orte der Zelle aus gegen die Lichtquelle blickte.

Sowohl die Hefnerlampe wie die von der Rückseite erleuchtete Mattscheibe stellen eine Oberfläche dar, die vom Orte der Zelle aus gesehen unter einem beträchtlichen Raumwinkel erschien. Bei Lichtquellen dieser Art ist die Photozelle dem Auge an Empfindlichkeit überlegen.

Anders dagegen stellt sich das Verhältnis heraus, wenn lineare oder punktförmige Lichtquellen verwandt werden. Ihnen gegenüber ist das Auge dadurch im Vorteil, daß es die gesamte, durch die Pupille eingelassene Lichtmenge auf einem sehr kleinen Teile der Netzhaut vereinigt. So war es uns möglich, das Bild eines Glühfadens durch die Tuschelösung gerade noch zu erkennen, als das von ihm ausgehende Licht die Fadensprünge kaum merklich vermehrte und die Energie auf $8{,}5 \cdot 10^{-9}$ Erg. gesunken war.

Wir haben die beschriebene Anordnung zu zwei Versuchen benutzt, die den Zweck hatten, etwaige Abweichungen im Verhalten äußerst geringer Lichtmengen von dem normalen aufzusuchen.

Der erste betraf die Frage, ob bei diesen minimalen Lichtenergien der Photostrom noch der Lichtstärke proportional bleibt. Wir ersetzten die Tuschelösung im Absorptionsgefäß zunächst durch reines Wasser und entwarfen mittelst einer Linse das Bild des Glühfadens einer Lampe, deren Licht das Wasser passiert hatte so, daß es gerade auf den Kaliumbelag der Zelle fiel. Nähert man die Zelle der Linse, so wird die belichtete Fläche größer, die Intensität auf der Flächeneinheit kleiner, aber so, daß die Gesamtlichtmenge konstant ist, so lange der Belag der Photozelle größer als der Querschnitt des Lichtkegels bleibt. Man weist leicht durch den Versuch nach, daß der in diesem Falle galvanometrisch zu messende Photostrom hierbei nahe unverändert bleibt, wenn der Kaliumbelag der Zelle gleichförmig und senkrecht zum Lichtkegel ist. Wurde nun dem Wasser soviel an Tusche zugesetzt, daß die Lösung dem Auge fast undurchsichtig war, so konnte auch das von der Linse entworfene Bild des Glühfadens nicht mehr gesehen werden. Die Beschleunigung des Tempos der Stromstöße am Elektrometer war aber deutlich erkennbar und blieb bei Verschiebung der Linse in weiten Grenzen unverändert. Es mußte also selbst in diesem äußersten Falle die Zahl der von der Flächeneinheit des Kaliums ausgesandten Elektronen der Beleuchtungsstärke proportional sein[1]).

Der zweite Versuch bezog sich auf die Frage, ob die Reflexion so kleiner Lichtenergien noch nachweisbar ist oder ob das Zustandekommen der Reflexion an eine gewisse untere Grenze der Beleuchtungsstärke gebunden ist. Die Tatsache, daß Spiegelteleskope anscheinend keine Beschränkung infolge der Lichtschwäche der durch sie zu beobachtenden Objekte zeigen,

1) Zweifel an der Allgemeingültigkeit der Proportionalität von Photostrom und Lichtstärke sind kürzlich von E. Ives geäußert. In einer neuesten Arbeit desselben Verf. und der Herrn S. Dushman u. E. Karrer ist die Richtigkeit dieses Gesetzes an einer besonderen von den Verf. angegebenen Zellenform bestätigt gefunden. (Astrophysical Journal **43**, 30, 1916.)

wenn nur die Größe des Spiegels hinreichend vermehrt wird, spricht allerdings von vornherein gegen die Annahme einer solchen unteren Grenze, doch gewinnt dieselbe Frage einen neuen Sinn, wenn man das Licht, dessen Reflexion man feststellen will, zugleich eine photoelektrische Energieleistung an der reflektierenden Fläche ausüben läßt.

Wir ließen, um die Zelle zunächst richtig einzustellen, das Licht einer Glühlampe wiederum durch das mit klarem Wasser gefüllte Absorptionsgefäß auf eine spiegelblanke Oberfläche von flüssiger Kaliumnatriumlegierung in einer großen evakuierten Glaskugel fallen und von dieser aus direkt in die Zellenkapsel hineinreflektieren. Die Legierung wurde, wie bei einer Photozelle, an den einen Pol einer Säule aus Trockenelementen angeschaltet, deren anderer mit einer oberhalb der Legierung eingeführten Platinelektrode in Verbindung war. Durch einen Stromwender konnte die Feldrichtung zwischen Draht und Legierung schnell umgekehrt werden, so daß das eine Mal die an der letzteren erregten Photoelektronen beschleunigt, das andere Mal zurückgehalten wurden. Wurde nun das Wasser des Absorptionsgefäßes wiederum durch Zusatz von Tusche für das Auge undurchsichtig gemacht, so konnte (im völlig verdunkelten Raume) an der Beschleunigung der Fadensprünge des Elektrometers leicht erkannt werden, ob noch reflektiertes Licht die Meßzelle traf und ob ein Unterschied in dessen Intensität auftrat, wenn die durch dasselbe schwache Licht ausgelösten Elektronen von der reflektierenden Kalium-Natrium-Metallfläche entfernt, oder zu ihr zurückgeführt wurden.

Das Ergebnis war, daß die Reflexion auch für diese äußerst kleinen Lichtintensitäten bestehen bleibt und daß ein Unterschied in dem Reflexionsvermögen der Metallfläche nicht bemerkbar war, mochten die Photoelektronen sie verlassen oder zu ihr zurückkehren.

Es ist diese Erfahrung in vollem Einklange mit dem anderweit festgestellten Befunde, daß die Energie des Photoeffekts allein auf Kosten derjenigen Lichtenergie geht, die von dem in Betracht gezogenen Körper gemäß seinen optischen Konstanten absorbiert wird, daß also durch den lichtelektrischen Vorgang kein weiterer Energieverbrauch bedingt wird. Immerhin dürfte es von Interesse sein, diese Erfahrung auch für solche Lichtintensitäten bestätigt zu sehen, die unter der Empfindlichkeitsgrenze des Auges liegen.

Ergebnisse.

I. Bei Gegenwart von freiem Alkalimetall treten in Vakuumröhren nahe unterhalb der für die Einleitung des Glimmstromes erforderlichen Potentialdifferenz sprungweise Stromstöße auf. Sie zeigen sich schon im Dunkeln und sind die Folge einer geringen Elektronenemission jener Metalle auch bei Lichtabschluß. Durch schwaches Licht und durch Radiumstrahlen wird ihre Häufigkeit vermehrt, bis bei stärkerer Bestrahlung der Strom gleichförmig wird.

II. Dieselbe Erscheinung beobachtet man an Vakuumröhren beliebiger Art, sobald die Glimmentladung vorher einmal hindurchgegangen ist. Als Ursache wird die Entstehung lichtelektrisch empfindlicher Schichten auf den Elektroden nachgewiesen. Sie enthalten freies Alkalimetall, das durch die Glimmentladung aus den alkalihaltigen Verunreinigungen (meist $NaCl$) der Elektroden abgeschieden ist.

III. Die Vermehrung der Stromstöße in Alkalimetallzellen durch Licht ist ein äußerst empfindliches Anzeichen für die geringsten Beleuchtungsstärken; als untere Grenze der Empfindlichkeit für blaues Licht ergab sich $3 \cdot 10^{-9}$ Erg. cm^{-2} sec^{-1}, für gelbrotes $2 \cdot 10^{-7}$ Erg. cm^{-2} sec^{-1}.

IV. Auch für Beleuchtungsstärken dieser Größenordnung erfolgt die Elektronenemission an den Alkalimetallen noch proportional der Lichtintensität.

V. Die Reflexion des Lichtes an einer spiegelnden Oberfläche der K-Na-Legierung ist auch bei diesen kleinsten Beleuchtungsstärken unabhängig davon, ob die durch das schwache Licht ausgelösten Elektronen die reflektierende Fläche verlassen oder zu ihr zurückkehren.

Die zu dieser Untersuchung aufgewandten Mittel sind uns aus der Jagorstiftung in Berlin überwiesen.

(Eingegangen 20. Juni 1916.)



Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. I.

Von P. Debye und P. Scherrer[1]).

(Mit Tafel IX.)

Vor einiger Zeit hat der eine von uns auf eine Methode aufmerksam gemacht, die dazu dienen kann sowohl über die Zahl, wie über die gegenseitige Anordnung der Elektronen im Atom auf experimentellem Wege Aufschluß zu erlangen[2]). Die Möglichkeit einer solchen Messung beruht, wie damals hervorgehoben wurde darauf, daß, wenn eine Regelmäßigkeit der Anordnung der Elektronen im Atom vorhanden ist, dieselbe auch dann noch erkennbar bleibt, wenn viele solche Atome in regelloser Orientierung miteinander gemischt vorkommen.

Im einzelnen konnte nämlich gezeigt werden, daß wenn eine solche Substanz mit der vorausgesetzten inneren Regelmäßigkeit der Elektronenanordnung versehen mit monochromatischen Röntgenstrahlen bestrahlt wird, die dadurch hervorgebrachte Sekundärstrahlung nicht (im wesentlichen) gleichmäßig von der Substanz aus in den Raum hinein ausgestrahlt wird, sondern Maxima und Minima zeigen muß. Dieselben liegen auf Kegeln, deren Achse mit der Richtung der primären Strahlung zusammenfällt und deren Spitze sich im Innern des als klein angenommenen Sekundärstrahlers befindet. Damit die fraglichen Maxima und Minima zustandekommen ist noch obendrein nötig, daß die Wellenlänge der benutzten Primärstrahlung von derselben Größenordnung, wie die gegenseitigen Elektronenabstände ist. Daß diese zweite Forderung experimentell erfüllbar sein dürfte, wurde damals geschlossen aus einem Vergleich der Wellenlänge der Fluoreszenz-Röntgenstrahlung mit den nach den Bohrschen Quantenansätzen zu erwartenden Elektronenabständen.

Versuche, welche inzwischen von uns in dieser Richtung angestellt wurden, zeigten den erwarteten Erfolg. Nebenbei aber fanden sich in einigen Fällen über den erwarteten Effekt übergelagert anders geartete Interferenzen, welche durch die Schärfe der auftretenden Maxima klar erkennen ließen, daß für sie nicht die regelmäßige Anordnung der doch voraussichtlich recht kleinen Zahl von Elektronen im Atom verantwortlich gemacht werden konnte. In dieser vorliegenden ersten Mitteilung wollen wir uns auf die Beschreibung und Erklärung dieser einen Erscheinung allein beschränken; auf die eigentlichen Elektroneninterferenzen und verwandte Erscheinungen beabsichtigen wir in einer späteren Mitteilung näher einzugehen.

Die Interferenzen sind scharf, also muß es sich um eine Erscheinung handeln, bei der eine recht große Zahl von Strahlungszentren zusammenwirkt. Ist dem aber so, dann liegt es nahe in den Fällen, wo die Interferenzen beobachtet wurden, dieselben zurückzuführen auf die kristallinische Struktur der durchstrahlten Substanz, auch wenn letztere, wie es stets der Fall war, als anscheinend amorphes Pulver benutzt wird, oder sogar als „amorph“ in der Chemie bezeichnet wird. Dieser von uns tatsächlich angenommene Standpunkt mag befremdlich erscheinen mit Rücksicht auf das von Friedrich, Knipping und v. Laue in ihrer ersten Arbeit angegebene Versuchsergebnis[1]), wonach ein fein gepulverter Kristall keine Interferenzen mehr aufkommen ließ. In Wirklichkeit läßt sich aber einerseits diese Behauptung, wie die hier mitgegebenen Aufnahmen zeigen, nicht aufrecht erhalten, andererseits folgt die Erscheinung mit Notwendigkeit aus der von v. Laue entworfenen Theorie der Kristallinterferenzen, wie im folgenden ausgeführt wird. Mit Rücksicht auf unser Endziel bemerken wir, daß die in dieser Notiz besprochenen Beobachtungen auch als experimenteller Beweis für die Richtigkeit der an die Spitze gestellten Behauptung angesehen werden können.

Erklärt man sich mit den nachfolgenden Überlegungen einverstanden, dann liefert die Beobachtung der fraglichen Interferenzen ein einfaches Mittel, um mit absoluter Sicherheit über den (mikro-)kristallinischen oder amorphen Zustand einer Substanz zu entscheiden. Die in § 3 vorgeführte Diskussion dreier Photogramme soll zeigen, wie man über die einfache Feststellung einer jener Tatsachen hinausgehend die photographische Aufnahme benutzen kann, um den inneren Aufbau des Einzelkristalls zu erforschen. Tatsächlich gelingt es mit Hilfe einer einzigen Photographie die gegenseitige Lage und die Abstände der Atome im Kristall zu bestimmen, ähnlich wie das bekanntlich Bragg durch die elektrometrische Untersuchung der Reflexion an den verschiedenen Netzebenen eines großen Kristalls gelungen ist. Man kann mit gutem Grund sogar behaupten, daß diese ganze Frage mit Hilfe eines vollständig amorph aussehenden Pulvers nach unsrer Methode erheb-

1) Eine Notiz mit im wesentlichen gleichem Inhalt wurde am 3. Dezember 1915 der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vorgelegt. Eine Notiz II vom 17. Dezember 1915 befaßt sich mit Interferenzen an Flüssigkeiten (Benzol usw.). Auf letztere beabsichtigen wir ausführlicher zurückzukommen.

2) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen vom 27. Febr. 1915, Ann. der Phys. **46**, 809, 1915.

1) Sitz.-Ber. d. Kgl Bayer. Ak. d. W. 1912, S. 315.



lich leichter beantwortet werden kann, als es durch Beobachtungen an einem großen gut ausgebildeten Kristalle möglich ist.

Hat man für irgendeine Substanz die Atomanordnung bestimmt, dann kann man dieselbe in Pulverform auch umgekehrt benutzen als Gitter zur Analysierung der auffallenden Strahlung nach Wellenlängen. Da natürlich von einer Orientierung der „amorphen" Substanz keine Rede ist und auf dem Diagramm eine einzige Linie des auffallenden Spektrums an vielen (z. B. an 10) getrennten Orten als klarer schmaler Strich vorhanden ist, dürfte die nachher zu beschreibende Anordnung auch zur Bestimmung der Wellenlängen, welche in der auffallenden Strahlung vorkommen, mit Vorteil anwendbar sein. Unsere Anordnung stellt so aufgefaßt wohl das einfachste Spektroskop überhaupt dar.

§ 1. Die Versuche.

Die zu untersuchende in Pulverform vorliegende Substanz (es wurden u. a. untersucht Graphit, von Kahlbaum bezogenes: amorphes Bor, amorphes Silizium, Borstickstoff, Lithiumfluorid usw.) wurde in Form eines Stäbchens gepreßt mit etwa 2 mm Durchmesser und etwa 10 mm Länge[1]). Das Stäbchen wurde aufgestellt in der Mitte einer zylinderförmigen Kamera von 57 mm Durchmesser, welche durch einen Deckel lichtdicht abgeschlossen werden konnte. Der Eintritt wurde den Röntgenstrahlen in diese Kamera in horizontaler Richtung gestattet durch ein längeres in der Mitte mit einer Bohrung von 2,5 mm versehenes Bleiröhrchen, das in eine Messingröhre eingegossen war. Aus der Kamera trat das scharf begrenzte Strahlenbündel, ohne die Wandung derselben zu berühren, hinaus, verlief dann weiter in ein längeres aus schwarzem Papier angefertigtes, an die Kamera angeschraubtes Rohr und durchsetzte schließlich den ebenfalls aus dünnem schwarzen Papier gebildeten Boden desselben. In dieser Weise war dafür gesorgt, daß keine merkliche Sekundärstrahlung an der Kamera selbst erzeugt wurde. Tatsächlich zeigte ein mehrmals wiederholter Kontrollversuch ohne zerstreuende Substanz, der sich über dieselbe Zeitdauer (gewöhnlich zwei, gelegentlich vier Stunden) erstreckte wie der Zerstreuungsversuch, keine Spur zerstreuter Strahlung.

Das Strahlenbündel traf das oben erwähnte Stäbchen in der Mitte; die von demselben ausgehende Sekundärstrahlung wurde photographisch aufgenommen auf zwei halbkreisförmig gebogenen an der Wand der Kamera anliegenden Films. Auf denselben konnte die Strahlung aufgefangen werden in einem Winkelbereich von 9^0 bis 171^0, einer Filmlänge von etwa 80 mm entsprechend. Die an beiden Seiten fehlenden Bereiche von der jeweiligen Winkelausdehnung 2×9^0 waren durch das Vorhandensein der oben erwähnten Ein- und Austrittsvorrichtung bedingt. Gelegentlich wurde zur Vervollständigung der Übersicht über die ganze Erscheinung eine besondere Aufnahme mit einem kleineren, die Austrittsöffnung bedeckenden Filmstück gemacht.

Die Primärstrahlung wurde erzeugt mit Hilfe von Röntgenröhren, welche einem von Herrn Rausch v. Traubenberg entworfenen Modell im wesentlichen nachgebildet waren. Sie blieben während des Betriebs dauernd an der Pumpe. Die Strahlung verließ die Röhre durch ein Aluminiumfenster von 0,05 mm Dicke. Der Abstand Antikathode—zerstreuende Substanz betrug etwa 12 cm.

Die Fig. 1 auf der beigegebenen Tafel zeigt eine Aufnahme mit LiF als zerstreuende Substanz[1]). Der linke Rand der Reproduktion ist derjenige, welcher der Austrittsöffnung am nächsten lag. Von der Mitte dieser Öffnung aus zählen wir im folgenden stets die Winkel, der linke Rand entspricht also 9^0. Man sieht wie auf dem Film kreisförmige, scharfe Interferenzstreifen auftreten, welche sich gegen 90^0 hin gerade strecken, um nach Überschreiten von 90^0 und bei Annäherung an 180^0 allmählich wieder in kreisförmige Linien mit wachsender Krümmung überzugehen. Die Aufnahme zeigt also, wie vom LiF-Stäbchen als Mittelpunkt aus besonders große Intensitäten auf einzelnen Kegeln in den Raum hinausgestrahlt werden. Der Durchschnitt eines dieser Kegel mit dem zylindrisch gebogenen Film entspricht einer solchen photographierten Linie. Der Winkelbereich, in dem von einem Raumelement des Stäbchens merkliche Strahlung ausgeht, muß jeweilig sehr gering sein. Tatsächlich ist nämlich die Breite der photographierten Linien bei genügend harter Strahlung identisch mit der Dicke des zerstreuenden Stäbchens und kann also für spektroskopische Zwecke wesentlich verringert werden.

Bei diesem Versuch stammte die Primärstrahlung von einer Kupferantikathode.

In Fig. 2 ist das Photogramm reproduziert, welches mit demselben LiF-Stäbchen jetzt aber bei Bestrahlung mit Röntgenlicht von einer Platinantikathode erhalten wurde.

Die Fig. 3 zeigt eine Reproduktion der Zer-

1) Gelegentlich war es nötig, dem Stäbchen durch einen dünnen Kollodiumüberzug einen festeren Halt zu geben.

1) Das LiF bildete ein feines Pulver von dem Aussehen gebrannter Magnesia.



streuung von „amorphem Silizium“ mit Kupferstrahlung erhalten.

Ganz ähnliche Erscheinungen lieferten auch die anderen oben genannten Substanzen.

Bekanntlich hat zuerst Friedrich[1]) bei der Durchstrahlung von Wachs und Paraffin Ringe um den Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen mit der Platte photographiert. Es blieb damals unklar, wie dieselben zustande kamen. Es fehlen zwar bei Friedrich entscheidende Experimente, auch ist die Konstitution der benutzten Substanzen unbekannt. Trotzdem glauben wir nach der Schärfe der Ringe in der Reproduktion urteilend, daß auch dort regellos gelagerte Kriställchen für die Erscheinung verantwortlich zu machen sind[2]).

§ 2. Die Theorie.

Die Laue-Braggsche Theorie der Kristallinterferenzen führt bekanntlich zu den folgenden beiden Hauptsätzen:

I. Fällt ein Röntgenstrahl auf einen Kristall auf, dann können „reflektierte“ Strahlen entstehen, die man so konstruieren kann, als ob sie durch gewöhnliche optische Reflexion an den Netzebenen desselben hervorgebracht wären.

II. Die in dieser Weise konstruierten Strahlen sind indessen nur dann wirklich vorhanden, wenn die an zwei zugehörigen aufeinander folgenden Netzebenen reflektierten Strahlen einen Gangunterschied aufweisen, der ein ganzzahliges Vielfaches der auffallenden Wellenlänge ist.

Die Formeln, welche diese Sätze ausdrücken, schreiben wir hier nur für das reguläre System hin[3]); sie lauten dann folgendermaßen: Nennt man den Winkel des monochromatisch vorausgesetzten einfallenden Strahles mit der gerade betrachteten Netzebene φ, die (ganzzahligen) Indizes dieser Ebene h_1, h_2, h_3, die Wellenlänge λ und die Seitenlänge des elementaren Kubus des kubischen Raumgitters a, dann sind zunächst nur solche Winkel möglich, welche die Bedingung

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{2a}\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \qquad (1)$$

erfüllen. Dabei betrachten wir die Indizes 3, 2, 1 z. B. als verschieden von 6, 4, 2 oder 9, 6, 3, damit in Formel (1) zugleich die Interferenzen höherer Ordnung mit enthalten sind.

Befinden sich die strahlenden Zentren nur in den Ecken des Raumgitters und sind sie alle gleicher Natur, dann ist durch (1) alles erledigt. Sobald indessen im Elementarkubus mehrere strahlende Zentren enthalten sind, können noch gewisse von den nach (1) möglichen Reflexionsrichtungen ausfallen, nämlich solche, in denen durch Interferenz eine Auslöschung stattfindet. Diesem wird Rechnung getragen durch die zu (1) hinzukommende Bemerkung, daß die Intensität des reflektierten Strahles dem Quadrate des absoluten Betrages des sogenannten Strukturfaktors S proportional ist. Letzterer ist durch die Gleichung

$$S = \sum_n A_n e^{i 2\pi (p_n h_1 + q_n h_2 + r_n h_3)} \qquad (2)$$

definiert, in der h_1, h_2, h_3 die schon obengenannten Indizes der reflektierenden Netzebene bedeuten, während

$$p_n a, q_n a, r_n a$$

die Koordinaten des n^{ten} zum Aufbau des Gitters notwendigen Eckpunktes im Elementarwürfel sind. Die Faktoren A_n bedeuten die vom n^{ten} Strahlungszentrum ausgesandten Amplituden. Die Summe $\sum_n$ ist über alle diese Punkte zu erstrecken und enthält also ebensoviel Glieder, als Gitter ineinander geschachtelt wurden.

Abschließend wird die Bemerkung über die Intensität vervollständigt durch die Angabe, daß dieselbe außerdem noch proportional einem Ausdruck ist von der Form

$$\frac{e^{-\alpha T (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)}}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2},$$

in welchem α eine dem Kristall eigentümliche, die Beweglichkeit des Atoms messende Konstante, und T die absolute Temperatur bedeutet. Derselbe zeigt, wie die reflektierte Intensität mit zunehmender Quadratsumme der Indizes abnimmt[1]).

Läßt man nun auf ein regelloses Gemisch von kleinen Kristallen monochromatische Röntgenstrahlung auffallen und greift eine bestimmte Netzebene h_1, h_2, h_3 heraus, dann wird nach (1) dieselbe nur dann reflektieren können, wenn sie so orientiert ist, daß der Winkel zwischen dieser Ebene und dem einfallenden Strahl den aus (1) folgenden Wert φ hat. Nun kommt es aber natürlich auf die absolute Orientierung der Kriställchen im Raum nicht an; die an h_1, h_2, h_3, reflektierten Strahlen erfüllen deshalb einen Kegel, dessen halber Öffnungswinkel ϑ den Wert 2φ hat, da die Achse des Kegels von dem einfallenden Strahl und jede Erzeu-

1) Diese Zeitschr. 14, 317, 1913.

2) Man bemerke, daß nach dieser Aussage unser Standpunkt bezüglich der Friedrichschen Beobachtung sich nicht völlig mit dem in der Notiz vom 27. Febr. 1915 angenommenen deckt.

3) Der allgemeine Fall läßt sich ebenfalls ohne Mühe erledigen. Es ist dazu nur eine geeignete Kombination derjenigen Formeln nötig, welche M. v. Laue in der Enz. d. math. Wiss. V 24, 457 ff. zusammengestellt hat.

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 43, 49, 1914.

gende von einem reflektierten Strahl gebildet wird.

Im übrigen ist der fragliche Kegelmantel nicht allein Träger der an der betreffenden $h_1 - h_2 - h_3$-Netzebene reflektierten Strahlung. Es fallen vielmehr alle Strahlungen in diesem Mantel zusammen, welche von Netzebenen herrühren, die aus h_1, h_2, h_3, durch Permutation oder Ersetzung der positiven durch negative Indizes entstehen. In jedem dieser Fälle nämlich bleibt

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$$

und damit auch nach (1) der Winkel $\vartheta = 2\varphi$ ungeändert. Man zählt leicht ab, daß es im allgemeinen 48 solche Netzebenen im obigen Sinne gibt. Das ist der allgemeine Fall; diese Zahl kann aber u. a. erheblich kleiner ausfallen. Es gelten die folgenden Regeln:

α) Sind zwei Indizes gleich, dann ist die Zahl der Ebenen $\frac{48}{2} = 24$.

β) Sind die drei Indizes gleich, dann ist die Zahl der Ebenen $\frac{48}{2 \times 3} = 8$.

γ) Kommt unter den Indizes eine Null vor, dann ist die fragliche Zahl nachträglich noch mit $^1/_2$ zu multiplizieren.

δ) Kommen unter den Indizes zwei Nullen vor, dann ist die fragliche Zahl nachträglich noch mit $^1/_4$ zu multiplizieren.

Eine über 48 hinausgehende Vermehrung der dem betreffenden Kegel zugehörigen reflektierenden Ebenen tritt dann ein, wenn es zwei verschiedene Triplets von Indizes gibt, deren Quadratsumme den gleichen Wert hat (Beispiel: 3, 3, 3 und 5, 1, 1). Ordnet man nun schließlich die Indizestriplets nach steigender Quadratsumme, dann entspricht jeder folgenden dieser Summen nach (1) ein Kegel mit größerer Öffnung. Unsre Behauptung geht dahin, daß die von uns photographierten Linien die Schnittlinien solcher Kegel mit unsrem kreisförmig gebogenen Film darstellen.

Ist dem so, dann muß es möglich sein, nach Ausmessung der den Einzellinien entsprechenden Kegelöffnungen 2ϑ, festzustellen, daß die aufeinander folgenden Werte von $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ in Übereinstimmung mit (1) sich wie ganze Zahlen verhalten. Unsre Aufnahmen erfüllen, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird, tatsächlich diese Forderung.

Über dieses hinausgehend zeigt sich aber, daß eventuell gewisse Kombinationen von ganzen Zahlen in den nach steigender Quadratsumme geordneten Indizestriplets als Linien auf dem Photogramm vollständig fehlen. Das ist jeweilig nur auf Grund einer speziellen Bauart des Strukturfaktors zu verstehen, der dann für solche Richtungen verschwinden muß. So ist man imstande, aus den fehlenden Linien auf den Bau von S und damit auf die gegenseitige Lage der als strahlende Zentren angenommenen Atome zu schließen. Letzteres ist im Wesen identisch mit der Braggschen Schlußweise. Der skizzierte Weg führte z. B. zu der Feststellung (vgl. den nächsten § 3), daß LiF ein Gitter bildet wie $NaCl$, KCl usw., dessen Eckpunkte abwechselnd mit Li-Atomen und F-Atomen besetzt sind, während das sogenannte amorphe Silizium eine Gitterstruktur aufweist, welche mit der von Diamant identisch ist. Diese letzte Feststellung ist besonders deshalb interessant, weil Si im periodischen System unmittelbar unter C steht.

§ 3. Diskussion dreier Beispiele.

a) Fig. 1 zeigt eine Reproduktion des bei Bestrahlung eines aus äußerst fein gepulvertem LiF gepreßten Stäbchens erhaltenen Films in natürlicher Größe. Die Primärstrahlung bestand wesentlich nur aus der K-Serie der Cu-Antikathode. Auf dem Original waren im ganzen 16 Linien zu erkennen. Die Ausmessung der Photographie ergab für den jeweiligen halben Öffnungswinkel ϑ des zugehörigen Kegels die in Spalte 2 der Tabelle I in Grad angegebenen Werte. Die erste Spalte enthält die Bezeichnungen s. s. = sehr schwach, s. = schwach, m. = mittel, st. = stark, welche eine ungefähre Schätzung der Linienschwärzung bedeuten sollen. Die Hauptintensität der Cu-Strahlung wird bekanntlich nach Moseley geführt von der α-Linie (Wellenlänge $1{,}549 \cdot 10^{-8}$ cm), die zu derselben Serie gehörige zweite Linie an Intensität ist die β-Linie mit einer Wellenlänge von $1{,}402 \cdot 10^{-8}$ cm. Der erste Schritt zur Entwirrung der in Tabelle I gegebenen Werte von $\sin \frac{\vartheta}{2}$ bestand nun darin, daß nach Verhältnissen von der Größe $\frac{1{,}402}{1{,}549}$ gesucht wurde, denn wenn α- und β-Linie an der gleichen Netzebene reflektiert vorkommen, müssen sich nach (1) die zugehörigen Verhältnisse von $\sin \frac{\vartheta}{2}$ wie die Wellenlängen verhalten.

Das führte unter Berücksichtigung der angegebenen Intensitätsverhältnisse zu einer Ausscheidung von 6 Linien. Die übrigen in der Tabelle I großgedruckten Zahlen wurden nun als zur α-Linie allein gehörig betrachtet. Jetzt galt es, für diese die Indizes der reflektierenden Ebenen zu finden. Es zeigte sich bald, daß nur ein Gitter abwechselnd mit Li- und F-Atomen in konstanten Abständen besetzt paßte. Die

Li-Atome sowie die *F*-Atome eines solchen Gitters gehen nämlich je aus der Parallelverschiebung eines Würfels mit besetzten Mitten der Seitenflächen hervor. Von den *Li*-Atomen sind also als Grundstock im Elementarwürfel 4 Exemplare anzunehmen, für welche das Schema gilt

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0, & q_1 = 0, & r_1 = 0, \\ p_2 = 0, & q_2 = 1/2, & r_2 = 1/2, \\ p_3 = 1/2, & q_3 = 0, & r_3 = 1/2, \\ p_4 = 1/2, & q_4 = 1/2, & r_4 = 0. \end{array}$$

Tabelle I (*LiF*, Kupferstrahlung).

Schwärzung	ϑ in Grad	$\sin\frac{\vartheta}{2}$	h_1, h_2, h_3	$\frac{\sin\vartheta/2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Zahl der Ebenen	Intensität
s. s.	30,0	0,259	1, 1, 1.	0,150	8	—
s.	33,8	0,290	1, 1, 1.	0,168	8	—
st.	**37,8**	**0,323**	**1, 1, 1.**	**0,187**	**8**	**3,85**
st.	**44,2**	**0,377**	**2, 0, 0.**	**0,189**	**6**	**10,2**
s.	56,2	0,472	2, 2, 0.	0,167	12	—
st.	**63,8**	**0,528**	**2, 2, 0.**	**0,187**	**12**	**10,2**
s. s.	67,4	0,554	3, 1, 1.	0,167	24	—
s. s.	71,4	0,583	2, 2, 2.	0,168	8	—
m.	**76,6**	**0,620**	**3, 1, 1.**	**0,187**	**24**	**3,15**
m.	**80,8**	**0,647**	**2, 2, 2.**	**0,187**	**8**	**4,51**
m.	**97,8**	**0,753**	**4, 0, 0.**	**0,188**	**6**	**1,86**
s.	**111,0**	**0,824**	**3, 3, 1.**	**0,189**	**24**	**1,82**
st.	**116,0**	**0,848**	**4, 2, 0.**	**0,190**	**24**	**8,10**
st.	**137,6**	**0,932**	**4, 2, 2.**	**0,190**	**24**	**6,75**
s. s.	153,2	0,973	4, 4, 0.	0,172	12	—
st.	**166,6**	**0,993**	**{3, 3, 3. / 5, 1, 1.}**	**0,191**	**{8 / 24}**	**1,71**

Entsprechend gilt für die *F*-Atome

$$\begin{array}{lll} p_1 = 1/2, & q_1 = 1/2, & r_1 = 1/2, \\ p_2 = 1/2, & q_2 = 1, & r_2 = 1, \\ p_3 = 1, & q_3 = 1/2, & r_3 = 1, \\ p_4 = 1, & q_4 = 1, & r_4 = 1/2. \end{array}$$

Bildet man nun mit Hilfe dieser Angaben den Strukturfaktor S, dann findet man

$$S = (A_{Li} + e^{i\pi(h_1+h_2+h_3)} A_F) \quad (3)$$
$$\left\{1 + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)} + e^{i\pi(h_1+h_2)}\right\}$$

wenn A_{Li} die vom *Li*-Atom und A_F die vom *F*-Atom zerstreute Amplitude bedeutet.

Aus der angegebenen Form von S folgt:

α) Netzebenen mit gemischten Indizes reflektieren nicht,

β) Netzebenen mit ungeraden Indizes reflektieren eine Intensität, welche proportional 16 $(A_{Li} - A_F)^2$ ist,

γ) Netzebenen mit geraden Indizes reflektieren eine Intensität, welche proportional 16 $(A_{Li} + A_F)^2$ ist.

Nun ist A_{Li} sicher wesentlich kleiner als A_F, da die Atomgewichte von *Li* bzw. *F*: 7 bzw. 19 betragen. Die unter β) und γ) genannten Ebenen werden also beide merklich reflektieren.

Ordnet man nun die Indizestriplets nach steigenden Quadratsummen und läßt mit Rücksicht auf α) die gemischten Indizes fort, dann bekommt man die in Tabelle I in der vierten Spalte groß gedruckten Zusammenstellungen. Ist das Modell richtig, dann muß jede beobachtete Linie denselben Wert von

$$\frac{\sin\vartheta/2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

liefern. Daß dem tatsächlich so ist, zeigen die großgedruckten Zahlen der fünften Spalte. Der kleine Gang der Zahlen von 0,187 bis 0,191, der übrigens nur etwa 2 Proz. ausmacht, ist außerdem leicht erklärlich durch den Umstand, daß das Stäbchen in der Kamera nicht genau im Mittelpunkt gestanden hat.

Eine Kontrolle liefert die Ausführung derselben Rechnung an den in kleinem Druck angegebenen auf die β-Linie bezüglichen Zahlen der Tabelle. Auch sie liefern eine gute Konstanz des oben genannten Verhältnisses und bestätigen damit das Modell von neuem. Die zu alleroberst in der Tabelle I aufgeführte, sehr schwache Linie bildet die einzige Ausnahme. Sie ist nicht mit Sicherheit reell. Wir führen sie trotzdem mit auf, weil die Tabelle dem tatsächlichen Gang der Beobachtungen entsprechen soll, bei welcher zuerst der Film ausgemessen wurde, ohne eine Tabelle der erwarteten Gesetzmäßigkeit zur Hand zu haben, während nachher die Gesetzmäßigkeiten an Hand der Zahlen festgestellt wurden, ohne die Aufnahme weiter zu berücksichtigen.

Tabelle I wird vervollständigt durch eine 6. Spalte, in der für jede Linie die Zahl der mitwirkenden Netzebenen angegeben ist. In der 7. Spalte stehen die mit Hilfe dieser Zahl und mit Rücksicht auf das im vorigen Paragraphen hervorgehobene Resultat über die Abhängigkeit der Intensität von $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ für dieselbe ausgerechneten Werte. Da es sich nur um Werte handelte, welche den rohen Intensitätsschätzungen der ersten Spalte gegenüber zu stellen sind, wurde $\alpha = 0$ gesetzt und damit der Einfluß der Wärmebewegung außer acht gelassen. A_{Li} wurde gleich 7; A_F gleich 19 gesetzt. Die Zahlen widerspiegeln nur im Groben den Gang der Angaben aus Spalte 1.

Aus dem auf die α-Linie bezüglichen Mittelwert der Spalte 5 folgt unter der Annahme $\lambda_\alpha = 1{,}549 \cdot 10^{-8}$ cm aus (1) für die Seitenlänge des Elementarkubus des *LiF*:

$$a = 4{,}11 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Aus den β-Linien der Aufnahme folgt mit $\lambda_\beta = 1{:}402 \cdot 10^{-8}$ cm

$$a = 4{,}17 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Beide Größen stimmen innerhalb der zu erwartenden Beobachtungsfehler miteinander überein.

b) Die zweite Figur der Tafel zeigt eine Aufnahme der Zerstreuung an demselben *LiF*-Stäbchen, nunmehr aber mit Platinstrahlung bestrahlt. Man sieht, wie jetzt die Linien näher zusammengerückt und in größerer Zahl als bei der vorigen Aufnahme vorhanden sind. Daß dieses mit dem kleineren Wert für $\lambda_\alpha = 1{,}316 \cdot 10^{-8}$ cm der hier wirkenden *L*-Strahlung von Platin ohne weiteres zusammenhängt, zeigt die Tabelle II

Tabelle II (*LiF*, Platinstrahlung).

Schwärzung	in ϑ Grad	$\sin\frac{\vartheta}{2}$	h_1, h_2, h_3	$\frac{\sin\vartheta/2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Zahl der Ebenen	Intensität
m.	28,6	0,247	1, 1, 1.	0,143	8	—
st.	32,8	0,283	1, 1, 1.	0,164	8	3,85
st.	38,2	0,327	2, 0, 0.	0,163	6	10,2
m.—s.	43,6	0,372	2, 2, 0.	0,132	12	—
m.	54,2	0,456	2, 2, 0.	0,165	12	10,2
s.	65,8	0,543	3, 1, 1.	0,164	24	3,15
s.	69,2	0,568	2, 2, 2.	0 164	8	4,51
s. s.	75,8	0,614	4, 2, 0.	0,137	24	—
s. s.	81,8	0,655	4, 0, 0.	0,164	6	1,86
s. s.	90,6	0,710	3, 3, 1.	0 163	24	1,82
m.—s.	93 6	0,729	4, 2, 0.	0,163	24	8,10
m.—s.	105,8	0,797	4, 2, 2.	0,163	24	6,75
s. s. s.	109,6	0,817	5, 3, 1.	0,138	48	—
s.	115,4	0,845	{3,3,3 / 5,1,1}	0,163	{8 / 24}	1,71
m.	134,4	0,922	4, 4, 0.	0,163	12	2,54
m.	149,2	0,964	5, 3, 1.	0,163	48	1,71
st.	155,4	0,975	{4,4,2 / 6,0,0}	0,162	{24 / 12}	5,63

zahlenmäßig. Dieselbe ist genau so wie die vorhergehende eingerichtet und enthält die der α-Strahlung zukommenden Linien ebenfalls groß gedruckt. Die auf Grund der Wellenlänge $\lambda_\beta = 1{,}121 \cdot 10^{-8}$ cm der β-Linie zuzuschreibenden Streifen sind im kleinen Druck angegeben. Spalte 5 zeigt, wie vorzüglich konstant der Wert von $\sin\frac{\vartheta}{2}/\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$ für die α-Linie ist. Alle Ebenen, welche überhaupt strahlen können, sind tatsächlich in der Tabelle vertreten. Aus dem aus der Tabelle folgenden Mittelwert 0,1634 für jenes Verhältnis ergibt sich mit $\lambda_\alpha = 1{,}316 \cdot 10^{-8}$ cm für die Seitenlänge a des Elementarkubus bei *LiF*:

$$a = 4{,}03 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Bei der vorher besprochenen Aufnahme desselben Materials mit *Cu*-Strahlung wurde dafür als Mittelwert

$$a = 4{,}14 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

erhalten.

c) Fig. 3 zeigt eine Aufnahme mit „amorphem" Silizium als strahlende Substanz. Schon rein äußerlich betrachtet zeigt sie den Zusammenhang der photographierten Interferenzen mit der Kristallstruktur durch das Auftreten kleiner stärker geschwärzter Pünktchen, welche auf den Linien zerstreut sind. Diese rühren offenbar von etwas größeren Kriställchen her, die in ihrer zufälligen Lagerung gerade richtig orientiert waren, um die *Cu*-Strahlung reflektieren zu können. So liefert diese Aufnahme schon qualitativ betrachtet eine Bestätigung unserer Ansicht. Daß diese auch quantitativ stattfindet, soll durch die Zahlen der Tabelle III gezeigt werden. Sie ist ebenso angeordnet wie Tabelle I.

Tabelle III (*Si*, Kupferstrahlung).

Schwärzung	in ϑ Grad	$\sin\frac{\vartheta}{2}$	h_1, h_2, h_3	$\frac{\sin\vartheta/2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Zahl der Ebenen	Intensität
s. s.	26,0	0,225	1, 1, 1.	0,130	8	—
st.	28,8	0,248	1, 1, 1.	0,143	8	1,33
s. s.	43,2	0,369	2, 2, 0.	0,130	12	—
st.	47,8	0,405	2, 2, 0.	0,143	12	1,50
s.	51,8	0,437	3, 1, 1.	0,132	24	—
m—st	56,2	0.471	3, 1, 1.	0,142	24	1,09
s. s.	63,0	0,522	4, 0, 0.	0,131	6	—
m.	68,6	0.563	4, 0, 0.	1,141	6	0,275
m.	76,6	0,620	3, 3, 1.	0,142	24	0,630
s. s. s.	81,2	0,651	4, 2, 2.	0,133	24	—
m—st	87,4	0.691	4, 2, 2.	0,141	24	1,00
m.	94,8	0,736	{3,3,3 / 5,1,1}	0,142	{8 / 24}	0,595
s. s. s.	99,0	0,760	4, 4, 0.	0,134	12	—
s.—m.	107,2	0,805	4, 4, 0.	0,142	12	0,375
m—st	114,0	0,839	5, 3, 1.	0,142	48	0,690
m—st	127,4	0,896	6, 2, 0.	0,142	24	0,600
s. s. s.	132,4	0,915	4, 4, 4.	0,132	8	—
m.	136,0	0,927	5, 3, 3.	0,141	24	0,278
s.	146,2	0,957	7, 1, 4,	0,134	48	—
m.	158,8	0,983	4, 4, 4.	0,142	8	0,167

Der einzige Unterschied besteht darin, daß nun nicht dasselbe Modell wie bei *LiF* zur Erklärung paßte. Es fehlen jetzt nämlich nicht allein die gemischten Indizes bei den nach steigender Quadratsumme geordneten Triplets der Spalte 5, sondern außerdem noch die geraden Indizes, deren Summe $(h_1 + h_2 + h_3)$ kein Vielfaches von 4 ist. Das Fehlen dieser Indizes bei der Reflexion im monochromatischen Licht ist aber für das Braggsche Diamantmodell charakteristisch. Dasselbe enthält nämlich im Elementarwürfel 8 Grundpunkte, von denen aus das Gitter aufgebaut werden kann, mit den relativen Koordinaten

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = 0,$$
$$p_2 = 0, \quad q_2 = 1/2, \quad r_2 = 1/2,$$
$$p_3 = 1/2, \quad q_3 = 0, \quad r_3 = 1/2,$$



$$p_4 = 1/2,\quad q_4 = 1/2,\quad r_4 = 0,$$
$$p_5 = 1/4,\quad q_5 = 1/4,\quad r_5 = 1/4,$$
$$p_6 = 1/4,\quad q_6 = 3/4,\quad r_6 = 3/4,$$
$$p_7 = 3/4,\quad q_7 = 1/4,\quad r_7 = 3/4,$$
$$p_8 = 3/4,\quad q_8 = 3/4,\quad r_8 = 1/4.$$

Dieser Zusammenstellung entsprechend hat der Strukturfaktor die Form:

$$S = \left\{1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)}\right\} \left\{1 + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)} + e^{i\pi(h_1+h_2)}\right\}$$

und zeigt die eben genannten zur Einordnung der Zahlen der Tabelle nötigen Eigenschaften.

Aus dem Mittelwert der zu Cu_α gehörigen groß gedruckten Zahlen der 5. Spalte ergibt sich für die Kantenlänge des Elementarkubus bei *Si* der Wert

$$a = 5{,}46 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Die auf die β-Linie bezüglichen, in kleinem Druck angegebenen Zahlen ergeben mit der eben genannten Zahl in guter Übereinstimmung den Wert

$$a = 5{,}31 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Der kürzeste Abstand zweier *Si*-Atome beträgt somit $2{,}33 \cdot 10^{-8}$ cm.

d) Fig. 4 zeigt eine Aufnahme von Graphit[1]), (mit *Cu*-Strahlung), aus welcher hervorgeht, daß derselbe trigonal kristallisiert. Mit 12 Atomen im rhomboëdrischen Elementarbereich, dessen Seitenlänge sich zu $4{,}69 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt[2]).

1) Es wurde von Geh. Reg.-Rat Prof. Tammann uns gütigst zur Verfügung gestellter Flinzgraphit (Bayern) sowie Ceylongraphit von den Nürnberger Bleistiftwerken (J. Faber) und Graphit von L. E. C. Hardtmuth untersucht. Den betreffenden Herren danken wir auch an dieser Stelle für die Überlassung der Materialproben.

2) Näheres hierzu, sowie die Anleitung zur Verwendung der Aufnahmen bei beliebigem Kristallsystem soll demnächst mitgeteilt werden.

Göttingen, Phys. Inst. 28. Mai 1916.

(Eingegangen 31. Mai 1916.)

Ergänzung zu dem Aufsatze über die Fortpflanzungseigentümlichkeiten des Schalles.

Von Fr. Nölke.

In dem früheren Aufsatze[1]) haben wir ausgeführt, daß die bei heftigen Explosionen, beim Geschützdonner usw. gemachten Beobachtungen über die Schallfortpflanzung wahrscheinlich nicht auf Grund der v. d. Borneschen Hypothese, nach welcher eine Zurückbiegung der Schallstrahlen in der Übergangsschicht zwischen der unteren Luft- und einer sie in ungefähr 70 km Höhe überlagernden Wasserstoffatmosphäre erfolgen soll, zu erklären seien, sondern daß man sie auf Reflexionen an Inversionsschichten zurückzuführen habe, betonten aber dabei mit Nachdruck, daß diese letzte Erklärung nur dann zu dem gewünschten Ergebnisse führe, wenn auf die Beugung der Schallstrahlen Rücksicht genommen werde, da nicht gebeugte Strahlen gemäß dem Brechungsgesetze nur dann zur Erde zurückkehren könnten, wenn die nur in seltenen Fällen zutreffende Annahme einer die Temperatur an der Erdoberfläche übertreffenden Höhentemperatur zugrunde gelegt werde. Wir wollen unsere früheren Auseinandersetzungen noch durch einige, das Verständnis der Erscheinung fördernde Angaben ergänzen.

1) Diese Zeitschrift **17**, 31, 1916.

I.

1. In dem früheren Aufsatze haben wir bereits darauf hingewiesen, daß die in der kühleren Jahreszeit vorliegende größere Gleichmäßigkeit der Temperaturverhältnisse in den unteren Luftschichten die akustische Durchlässigkeit der Luft erhöhe, weil sie eine geringere Schwächung der Schallenergie bewirke, als die zu vielfachen inneren Reflexionen Veranlassung gebenden großen Temperaturgegensätze der wärmeren Jahreszeit. Die größere Gleichmäßigkeit bedeutet aber noch in anderer Hinsicht einen der Schallausbreitung günstigen Umstand. Sie bewirkt, daß die Kurven der Schallstrahlen in den unteren Luftschichten nur wenig gekrümmt sind, und der Schall daher in wagerechter Richtung weiter reicht, als es bei einer kräftigen Aufwärtskrümmung der Schallstrahlen der Fall wäre. In seinem Aufsatze „The propagation of sound in the atmosphere"[1]), den der Verfasser die Freundlichkeit hatte mir zu übersenden, stellt van Everdingen die auf einigen holländischen und deutschen meteorologischen Stationen gemachten Beobachtungen über Wind- und Temperaturverhältnisse der Atmosphäre zusammen, die an mehreren Tagen heftigen Geschützdonners an der Westfront herrschten, für welche ihm Angaben über die Hörbarkeit desselben vorlagen. Aus seiner Übersicht geht hervor, daß die Atmosphäre tatsächlich stets eine oder mehrere zum Teil sehr kräftige Inversionen aufwies, und daß die Höhentemperatur in vielen Fällen sogar nur wenig unter der Temperatur an der Erdoberfläche lag.

Wenn in den unteren Atmosphärenschich-

1) Kon. Acad. van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings Vol. Nr. 6, Vol. XVIII.

ten die Temperatur ungefähr gleichmäßig ist, so kann man die Schallstrahlen in erster Näherung als **gerade** betrachten. Bedeutet h die Entfernung der Inversionsschicht von der Erdoberfläche, e die Entfernung der Schallquelle von dem Punkte, wo der wagerecht ausgehende gerade Strahl die Inversionsschicht trifft, und r den Erdradius, so besteht, wie man leicht erkennt, die Gleichung $e^2 = 2rh$. Für $h = 500$ m ist z. B. $e = 80$ km, und der reflektierte Strahl kommt in 160 km Entfernung von der Schallquelle zur Erdoberfläche zurück. Da die Strahlen in Wirklichkeit mehr oder weniger aufwärts gekrümmt sind, so muß die Inversionsschicht höher als 500 m liegen, wenn der reflektierte Strahl dieselbe Entfernung erreichen soll.

Die **Beugung** führt den Schall eine gewisse Strecke um die gekrümmte Erdoberfläche herum. Da aber in unmittelbare Nachbarschaft der Erdoberfläche immer nur solche Strahlen gelangen können, die von bereits vorher mehrfach gebeugten wieder abgebeugt wurden, so erfolgt die schnellste Schwächung an der Erdoberfläche, und sie ist um so geringer, je weiter man sich von ihr in senkrechter Richtung entfernt. Die Zone des Schweigens beginnt daher als dünne der Erdoberfläche anliegende Schicht und erreicht erst in größerer Entfernung eine größere Ausdehnung in senkrechter Richtung. In wagerechter Richtung hört sie auf, wo in der Inversionsschicht zur Umkehr gezwungene Strahlen von neuem die Erdoberfläche erreichen, und in senkrechter Richtung, wo die Luftschichten noch von gebeugten direkten Strahlen durcheilt werden.

Nach der Größe des Temperaturgradienten in den unteren Atmosphärenschichten und der Höhe der Inversionsschicht kann man 4 Normalfälle unterscheiden:

a) Der Temperaturgradient ist klein, die Aufwärtskrümmung der Schallstrahlen also gering.

1. Die Inversionsschicht liegt ziemlich hoch. In diesem Falle teilt sich das Hörbarkeitsgebiet in zwei Teile, ein äußeres und ein inneres Gebiet, die durch eine Zone des Schweigens voneinander getrennt sind. Diese Zone liegt unterhalb und jenseits der Stelle, wo in der Inversionsschicht die Umbiegung der Strahlen erfolgt.
2. Die Höhe der Inversionsschicht ist gering. In diesem Falle erreichen reflektierte Strahlen die Erdoberfläche bereits wieder in einer Entfernung von der Schallquelle, in die auch noch direkte (gebeugte) Strahlen gelangen. Die beiden Zonen der Hörbarkeit sind nicht mehr deutlich voneinander getrennt; die Zone des Schweigens verschwindet.

b) Der Temperaturgradient ist größer, die Aufwärtskrümmung der Schallstrahlen also kräftiger.

1. Liegt die Inversionsschicht ziemlich hoch, so kommen wieder zwei Hörbarkeitsgebiete zur Ausbildung. Die Grenze des inneren Gebiets und daher auch die Zone des Schweigens befindet sich aber der Schallquelle näher als im Falle a_1.
2. Ist die Höhe der Inversionsschicht gering, so verschwindet die Zone des Schweigens. Da auch die zur Erdoberfläche zurückkehrenden Strahlen diese schon in verhältnismäßig geringer Entfernung von der Schallquelle erreichen, so ist die Gesamthörweite des Schalles ziemlich begrenzt.

In diese 4 Gruppen lassen sich alle beobachteten Fälle leicht einordnen.

Unsere Erklärung bezieht sich in erster Linie auf die Tatsache der **weiten Hörbarkeit** des Schalles, während die Zone des Schweigens nach ihr nur von sekundärer Bedeutung ist, da ihr Auftreten von gewissen Bedingungen abhängt. Die Übersicht **van Everdingens** zeigt auch, daß nur in 6 von 15 Fällen die Zone des Schweigens einigermaßen deutlich erkennbar ist. In einigen anderen Fällen wird sie wenigstens dadurch angedeutet, daß jenseits einer gewissen Entfernung von der Schallquelle der Ton wieder in verstärktem Maße hörbar ist, und in noch anderen Fällen ist sie überhaupt nicht nachweisbar. Fig. 1 gibt

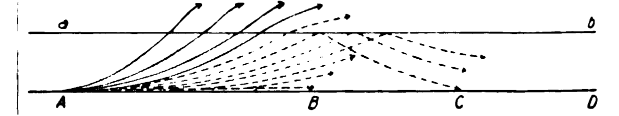


Fig. 1. A Schallquelle, AB innere Hörbarkeitszone, BC Zone des Schweigens, CD äußere Hörbarkeitszone, ab Inversionsschicht. Die ausgezogenen Kurven bedeuten nicht gebeugte, durch Beugung aber allmählich schwächer werdende Schallstrahlen, die punktierten Kurven gebeugte Strahlen. Die untere Grenze der Inversionsschicht ist als Sprungschicht gedacht, so daß sie totale Reflexion zuläßt. Die Zeichnung ist in senkrechter Richtung bedeutend überhöht; auf die Krümmung der Erde ist keine Rücksicht genommen.

eine Vorstellung der Schallausbreitung in dem Falle, wo eine Zone des Schweigens[1]) vorliegt.

1) Fr. **Lux** will die Zone des Schweigens durch Interferenzwirkung direkt fortgepflanzter und reflektierter Schallwellen erklären (Naturw. Wochenschrift, Jahrg. 1916, Nr. 22, S. 321). Diese Erklärung ist zurückzuweisen, erstens, weil der Geschützdonner sich aus Wellen sehr verschiedener Länge zusammensetzt, so daß durch Interferenz immer nur gewisse Wellen ausgelöscht werden könnten, während andere sich verstärken müßten, und

Weist die Atmosphäre nicht nur eine, sondern mehrere Inversionsschichten auf, was man häufig festgestellt hat (vgl. van Everdingen, a. a. O.), so ist es möglich, daß gewisse Strahlen auch in den höheren Schichten zur Umkehr gezwungen werden. In diesem Falle wird die Erscheinung sehr kompliziert.

2. Bis jetzt haben wir der Kürze des Ausdrucks wegen meistens nur von Reflexionen der Schallstrahlen an der Inversionsschicht gesprochen. Da die Inversionsschichten nur äußerst selten einen wirklichen Sprung darstellen, in den meisten Fällen aber eine Dicke von einigen bis zu hunderten von Metern besitzen, so erfolgt in Wirklichkeit eine kontinuierliche Brechung des Strahles. Sehr flach einfallende Strahlen werden daher nur den unteren Teil der Inversionsschicht durcheilen, steiler einfallende aber eine dickere Schicht derselben durchlaufen müssen, bis sie zur Umkehr gezwungen werden. Die Strahlen treffen die Inversionsschicht um so schiefer, je weiter ihre Eintrittsstelle in die Schicht von der Schallquelle entfernt ist; sie fallen also divergent auf. In die Inversionsschicht divergent eindringende Strahlen treten aber, da der in dieser Schicht liegende aufsteigende Kurvenast jedes Strahls dem absteigenden kongruent ist, im allgemeinen[1]) konvergent aus. Zwei ursprünglich benachbarte Strahlen schneiden sich also nach Durchlaufen der Inversionsschicht; d. h. es entsteht eine Brennlinie der Schallstrahlen, und zwar unmittelbar jenseits der Zone des Schweigens; vgl. Fig. 2. Daß am inneren Rande der äußeren Hörbarkeitszone der Schall mit großer Kraft wahrnehmbar war, ist vielfach beobachtet worden.

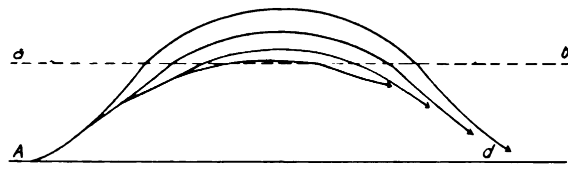


Fig. 2. *A* Schallquelle, *ab* untere Grenze der Inversionsschicht, *cd* Brennlinie der Schallstrahlen. Die Zeichnung ist bedeutend überhöht.

zweitens, weil bei einem Interferenzwinkel im Betrage von mindestens 1°, dessen Sinus die Breite der Interferenzzone umgekehrt proportional ist (bei einem inneren Halbmesser der Zone des Schweigens von 80 km und einer Höhe der Reflexionsschicht von 1 km würde der Interferenzwinkel bereits 1½° betragen und im Falle geringerer Entfernung der Zone des Schweigens von der Schallquelle und größerer Höhe der reflektierenden Schicht sich noch vergrößern), und bei einer Wellenlänge von ungefähr 20 m, welche die Schallwellen in der Luft höchstens besitzen, die Zone des Schweigens nur einige hundert Meter Breite haben dürfte, während sie in Wirklichkeit viele Kilometer mißt.

1) Nur wenn die Strahlen sich im Innern der Schicht kreuzen würden, was aber nur bei weit voneinander entfernt liegenden Eintrittspunkten möglich wäre, würden divergent eintretende Strahlen auch divergent austreten.

Im oben betrachteten Falle liegen die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei der anomalen terrestrischen Strahlenbrechung des Lichtes. Wenn die Schallstrahlen als Lichtstrahlen betrachtet werden dürften, so würden in dem über die Zone des Schweigens hinübergreifenden vorderen Teilgebiete der äußeren Hörbarkeitszone, wohin direkte und reflektierte Strahlen gelangen, von der Lichtquelle ein aufrechtes und ein über ihm schwebendes umgekehrtes Bild erkennbar sein.

Die entfernteren Gebiete der äußeren Hörbarkeitszone werden nur noch von solchen Strahlen erreicht, die in großer Entfernung von der Schallquelle die Inversionsschicht treffen. Da sie durch stetig fortgesetzte Beugung von ihrem ursprünglichen Wege weit abgelenkt sind, so nimmt ihre Intensität schnell ab.

3. Durch zahlreiche Beobachtungen im Winter und Sommer 1915 ist festgestellt und durch neue Beobachtungen im letzten Winter und gegenwärtigen Frühling bestätigt worden, daß die weite Hörbarkeit des Geschützdonners sich vorwiegend auf die kühle Jahreszeit beschränkt. Die Ursachen für diese Tatsache sind folgende. Im Winter nimmt die Temperatur in den unteren Luftschichten nur langsam mit der Höhe ab, und fast regelmäßig treten kräftige Inversionen auf; im Sommer erfolgt eine schnelle Temperaturabnahme mit der Höhe, und Inversionen fehlen[1]) oder sind nur schwach ausgeprägt. Daher beschreiben die Schallstrahlen im Winter in den unteren Luftschichten eine ungefähr geradlinige Bahn und können in den kräftigen Inversionsschichten leicht zur Erde zurückgebogen werden, während sie sich im Sommer schnell aufwärts krümmen und die schwachen Inversionsschichten fast ohne Richtungsänderung durchsetzen.

4. Außer der jährlichen ist auch eine tägliche Periode der Hörbarkeit festgestellt worden. In der Nacht und in den frühen Morgenstunden ist die Hörbarkeit besonders gut, nicht weil es um diese Zeit stiller wäre, sondern weil am Morgen die Inversionen ihr Maximum erreichen[2]) und die Temperatur in den unteren Luftschichten am gleichmäßigsten ist.

II.

Wir wollen noch auf einige Punkte aufmerksam machen, die zugunsten unserer Er-

1) Abgesehen von der sog. oberen Inversion in ungefähr 12 km Höhe, die aber für unser Phänomen nicht in Frage kommt, weil ihr Temperaturgradient sehr klein (vgl. V. Kommerell, Die Bahn der Schallstrahlen in der Luft unter dem Einfluß der Temperatur; diese Zeitschr. 17, 172, 1916) und die Temperatur selbst bereits sehr niedrig ist (ungefähr —50° C).

2) W. Brand, Reichweite des Geschützdonners nach Kriegsbeobachtungen; Sitzungsberichte der Ges. z. Beförd. der ges. Naturw. zu Marburg, 1915, Juliheft, S. 50. van Everdingen, a. a. O. § 9c.

klärung sprechen, und ihnen Erläuterungen über einige merkwürdige Beobachtungen anschließen.

1. In bedeutender Höhe (2000 bis 3000 m) über der Zone des Geschützfeuers befindliche Flugzeugführer haben, auch wenn sie nach Abstellen des Motors durch das Geräusch desselben nicht mehr gestört wurden, den Donner der Geschütze nicht oder nur schwach wahrnehmen können. Dies beweist, daß die Zurückbiegung der Schallwellen nicht erst, wie die v. d. Bornesche Hypothese voraussetzt, auf dem Umwege über Höhen von 50 und mehr km, sondern schon in den unteren Luftschichten erfolgt.

2. Eine direkte Entscheidung darüber, ob die Schallwellen nur die unteren Luftschichten durcheilen, oder den Umweg durch die höheren Schichten machen, würde möglich sein, wenn sich die Zeitdifferenz zwischen der Schallerzeugung und der Schallwahrnehmung genau feststellen ließe. Ganz zuverlässige Angaben darüber liegen noch nicht vor. Die Feststellungen de Quervains bei der Explosion an der Jungfraubahn scheinen auf den Weg durch die unteren Luftschichten zu deuten.

Da die beobachteten heftigen Geräusche eine gewisse Zeit hindurch andauerten und bei den bis jetzt vorliegenden Angaben sich nicht beurteilen läßt, ob die Beobachter den Beginn ihrer Schallwahrnehmung oder den Augenblick der größten Intensität festgestellt haben, so dürften erst planmäßig über diesen Punkt anzustellende Versuche endgültigen und sicheren Aufschluß bringen.

3. Die Angabe mancher Beobachter, daß sie den Schall mehr mit dem ganzen Körper als mit dem Ohre wahrgenommen hätten, könnte dadurch erklärt werden, daß sehr langwellige Schallstrahlen, wie man es bei den tiefen Tönen einer Orgel feststellen kann, tatsächlich auf den ganzen Körper einwirken, vielleicht aber auch dadurch, daß eine Schallwahrnehmung, die den Beobachter zum Zeugen weit entfernter, furchtbarer Ereignisse macht, ihn in eine seelische Erregung versetzt, die den ganzen Körper in Mitleidenschaft zieht.

4. Gelegentlich hat es den Beobachtern geschienen, als ob die Schallwellen nicht dem Erdboden parallel, sondern in größerem Winkel zu demselben anlangten. Unsere Erklärung schließt zwar eine Neigung der in der äußeren Hörbarkeitszone wahrnehmbaren Schallwellen gegen die Erdoberfläche nicht aus; trotzdem glauben wir die Vermutung aussprechen zu dürfen, daß sich die betr. Beobachter, was erfahrungsgemäß sehr leicht möglich ist, über die Schallrichtung getäuscht haben, oder daß, weil die ankommenden Schallwellen über hohe, in der Nähe befindliche Gegenstände, Häuser, Bäume u. dgl. ihren Weg nehmen mußten, nur um diese Gegenstände herumgebeugte Schallstrahlen den Beobachter erreichten.

5. Da als feststehend betrachtet werden kann, daß die Erscheinung von den Jahreszeiten und daher von der Beschaffenheit der Atmosphäre abhängt, so dürfte eine Schallfortpflanzung durch den Erdboden, trotz einiger Beobachtungen, die darauf hinzudeuten scheinen, nicht in Frage kommen. Doch ist es nicht ausgeschlossen, daß die bei großen Minensprengungen hervorgerufenen Erschütterungen weit durch den Erdboden fortgeleitet werden.

6. Das Schwächerwerden und gänzliche Aufhören des Geschützdonners im Frühling wollen manche Beobachter mit der Belaubung der Bäume in Verbindung bringen; doch besteht zwischen beiden Erscheinungen kein kausaler Zusammenhang. Die Beugung, welcher die Schallstrahlen, besonders langwellige, unterliegen, ist so groß, daß bei Wäldern von einem Schallschatten keine Rede sein kann.

Da die Hypothese trotz ihrer physikalischen Unzulässigkeit immer von neuem wieder ausgesprochen wird, wollen wir noch auf einige Konsequenzen derselben aufmerksam machen, die ebenfalls, auch wenn man von der Wirkung der Beugung ganz absieht, ihre Unrichtigkeit deutlich erweisen. Der wagerecht ausgehende, ungebeugte Schallstrahl streicht schon in einigen 100 m Entfernung von der Schallquelle mehrere Meter hoch über dem Boden hin (vgl. den früheren Aufsatz, Abschn. II). Wenn er durch Bäume aufgehalten werden soll, so ist man also zu der Annahme gezwungen, daß alle deutschen und französischen Geschütze nirgends auf freier Fläche, sondern sämtlich im Walde oder höchstens einige 100 m westlich eines Waldes aufgestellt seien und daß alle explodierenden Granaten in oder höchstens einige 100 m westlich eines Waldes einschlagen. An östlichen Berghängen (bewaldeten oder unbewaldeten) dürften überhaupt keine Geschütze aufgestellt sein oder Granaten einschlagen. Außerdem ist zu beachten, daß Ende August bis Anfang September, wo der Kanonendonner bereits wieder in größerer Entfernung hörbar wird (vgl. Brand, a. a. O., S. 28—34), noch wenig Laub fällt; erst Ende Oktober und Anfang November tritt kräftiger Laubfall ein.

7. Eine Fortführung des Schalles durch den Wind kommt im allgemeinen nicht in Frage. Zahlreiche Beobachter bestätigen, daß der Geschützdonner an der Westfront mehrfach lauter bei Ost- als bei Westwind gehört worden sei.

Zwar haben diese Beobachter nur die Windrichtung an der Erdoberfläche festgestellt; aber auch der Luftbewegung in größeren Höhen kann keine wesentliche Rolle zugeschrieben werden. van Everdingen führt a. a. O. mehrere Beispiele auf, aus denen hervorgeht, daß weder die in den unteren, noch in den oberen Luftschichten herrschende Windrichtung der Ausbreitung des Schalles günstig war. Natürlich soll hiermit nicht geleugnet werden, daß die Windrichtung unter Umständen der Ausbreitung des Schalles auch förderlich sein kann.

Bremen.

(Eingegangen 3. Juni 1916.)

Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle I. Vorkommen und Eigenschaften der zentrisch-symmetrischen Erregungen.

Von W. Voigt.

1. Zahlreiche ältere und neuere Beobachtungen über pyroelektrische Erscheinungen, die (im Gegensatz zu den gewöhnlichen polaren Wirkungen an Kristallen ohne Symmetriezentrum) in zentrischer Symmetrie an zentrisch-symmetrischen Kristallen stattfinden, haben mich vor längerer Zeit zu der doppelten Untersuchung veranlaßt, 1. ob und welche sekundären Ursachen etwa diese Erscheinungen bedingen könnten, 2. ob primäre oder wirkliche zentrische pyroelektrische Erregungen den früher untersuchten polaren zur Seite gestellt werden könnten und wie dieselben sich äußern müßten. Als „primär" oder „wirklich" bezeichne ich dabei Erregungen, die in regelmäßig konstituierten, von Einschlüssen und Beimengungen freien Kristallen durch Vorgänge in der normalen Substanz zustande kommen. An die zweite Frage schloß sich dann die entsprechende Untersuchung über die Möglichkeit und die Gesetze zentrischer Piezoelektrizität[1]).

Das Resultat meiner Überlegungen zu 1, — daß tatsächlich sekundäre Einflüsse zu zentrisch-symmetrischen Erregungen von Pyroelektrizität zu führen vermögen —, wurde gestützt durch die Resultate zu 2, über die Art, in der sich primäre Effekte in Wirklichkeit äußern müßten, da die bislang beobachteten Erscheinungen im allgemeinen durchaus anders verliefen. Eigne, unter Benutzung der theoretischen Resultate angestellte Beobachtungen vermochten dann das Vorkommen wirklicher auf der Kristallstruktur beruhender, zentrisch symmetrischer Pyro- und auch Piezoelektrizität sehr wahrscheinlich zu machen.

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1905, S. 394.

Dieses Resultat gewinnt gegenwärtig, wo bedeutungsvolle Anfänge gemacht sind, um die physikalischen Eigenschaften und speziell auch die azentrische oder polare Piezoelektrizität der Kristalle aus den modernen Vorstellungen über deren Konstitution abzuleiten[1]), ein neues Interesse. Es darf allerdings ausgesprochen werden, daß speziell für das Problem der polaren Piezoelektrizität, wie auch der Elastizität, die neue Auffassung, die Bausteine der Kristalle seien die chemischen elektrisch geladenen Atome, der älteren, von mir schon 1893 formulierten, die Bausteine seien molekulare Polsysteme aus positiven und negativen Ladungen[2]), bisher rechnerisch äquivalent geblieben ist; die neue Auffassung rückt die Pole der Systeme in größere Abstände auseinander, aber dieser Umstand kommt in der vorliegenden Theorie der genannten Gebiete nirgends zur Geltung. Das Elementarparallelepiped des Raumgitters ist bei der neuen Betrachtungsweise durchaus an Stelle des früheren Polsystems getreten, und die gegenseitigen Abstände der in ihm befindlichen Pole bleiben ganz beliebig. In der Tat entsprechen die allgemeinen von Herrn Born[3]) gegebenen Ansätze für die polare Piezoelektrizität, ebensogut meiner ältern wie der modernen Auffassung[4]). Diese nach anderer Richtung so fruchtbaren Ansätze haben mir indessen die Anregung gegeben, das Analogon für zentrische elektrische Erregungen zu liefern und zu diskutieren, worüber in den folgenden Mitteilungen zu berichten sein wird.

Da die zentrischen elektrischen Erregungen von Kristallen im allgemeinen nach theoretischer und experimenteller Seite sehr wenig bekannt sind, und eine Vorstellung von ihren Gesetzmäßigkeiten und Wirkungen doch erwünscht ist, so gebe ich in dieser ersten Mitteilung eine Zusammenstellung der wichtigsten hierher gehörigen Resultate, teilweise unter Gegenüberstellung der entsprechenden Ergebnisse für die polaren Erregungen.

2. Wie die polaren Erregungen sich durch Vektoren ausdrücken, so werden die zentrischen durch Tensortripel oder (kürzer) Tensoren charakterisiert. Im Interesse der Kürze werde ich für die letzteren eine vor längerer Zeit vorgeschlagene und zum Teil von andern Autoren angenommene Symbolik[5]) benutzen, die hier auseinandergesetzt werden mag.

Ich bezeichne Tensoren und ihre Kompo-

1) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig 1915.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, S. 669; Wied. Ann. 51, 658, 1894.
3) M. Born l. c.
4) S. auch die Anmerkung am Schluß dieser Arbeit.
5) W. Voigt, Gött. Nachr. 1904, S. 495.

nenten durch griechische Buchstaben ($T, \Pi, \cdot\cdot$), die Konstituenten eines Tripels durch die Indizes 1, 2, 3 (also T_1, T_2, T_3). Die Konstituenten stehen senkrecht aufeinander. Die sechs Komponenten des Tripels[1]) werden durch zwei auf die Koordinatenachsen bezügliche Indizes angedeutet. Charakteristisch ist für diese T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, $T_{yz} = T_{zy}$, $T_{zx} = T_{xz}$, $T_{xy} = T_{yx}$, daß sie sich transformieren wie x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy. Fallen die x-, y-, z-Achsen in die Richtungen von T_1, T_2, T_3, so ist $T_{xx} = T_1$, $T_{yy} = T_2$, $T_{zz} = T_3$, $T_{yz} = T_{zx} = T_{xy} = 0$.

Von elementaren Tensoroperationen nenne ich folgende.

Das Tensorprodukt[2]) aus zwei Vektoren

$$T =]\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{V}[=]\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{U}[\qquad (1)$$

ist ein Tensor mit den Komponenten

$$T_{xx} = \mathfrak{U}_x\mathfrak{V}_x, \cdot\cdot \quad T_{yz} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_z + \mathfrak{U}_z\mathfrak{V}_y\right\}, \cdot\cdot \qquad (1')$$

Das Vektorprodukt aus einem Vektor und einem Tensortripel resp. Tensor

$$\mathfrak{U} = [\mathfrak{V}\cdot T] = [T\cdot\mathfrak{V}] \qquad (2)$$

hat die Komponenten

$$\mathfrak{U}_x = \mathfrak{V}_x T_{xx} + \mathfrak{V}_y T_{xy} + \mathfrak{V}_z T_{xz}, \cdot\cdot \qquad (2')$$

Das Tensorprodukt

$$\Pi =]\mathfrak{V}\cdot T[= -]T\cdot\mathfrak{V}[\qquad (3)$$

aus einem Vektor und einem Tensor ist definiert durch die Komponenten

$$\Pi_{xx} = \mathfrak{V}_y T_{xz} - \mathfrak{V}_z T_{xy}, \cdot\cdot \qquad (3')$$

$$\Pi_{yz} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{V}_x\{T_{yy} - T_{zz}\} + \{\mathfrak{V}_z T_{xz} - \mathfrak{V}_y T_{xy}\}\right\}, \cdot\cdot$$

Das skalare Produkt aus zwei Tensoren ist definiert durch

$$(T\cdot\Theta) = (\Theta\cdot T) = T_{xx}\Theta_{xx} + \cdot\cdot + 2\{T_{yz}\Theta_{yz} + \cdot\cdot\}. \qquad (4)$$

Das Vektorprodukt aus diesen beiden Tensoren

$$\mathfrak{W} = [T\cdot\Theta] = -[\Theta\cdot T] \qquad (5)$$

hat die Komponenten

$$\mathfrak{W}_x = \{T_{yy} - T_{zz}\}\Theta_{yz} - \{\Theta_{yy} - \Theta_{zz}\}T_{yz} + T_{yx}\Theta_{zx} - T_{zx}\Theta_{yx}, \cdot\cdot \qquad (5')$$

1) Eine etwas allgemeinere Art zweiseitiger gerichteter Größen, mit neun statt sechs Komponenten ist von R. Weber (Angewandte Elementarmathematik, Bd. III[1], Leipzig 1910) und E. Budde (Tensoren und Dyaden, Braunschweig 1914) als unsymmetrische Tensoren behandelt worden. Diese Größen lassen sich als Superposition eines Vektors und eines symmetrischen Tensors auffassen, die im allgemeinen physikalisch sehr verschiedene Bedeutung haben. Aus diesem Grunde sehe ich von ihrer Einführung ab.

2) Ich stelle den Symbolen (-), [-] für das skalare und das vektorielle Produkt das neue Symbol]-[für das tensorielle Produkt gegenüber.

Das Tensorprodukt aus zwei Tensoren

$$\Psi =]T\cdot\Theta[=]\Theta\cdot T[\qquad (6)$$

ist definiert durch die Komponenten

$$\Phi_{xx} =]T\cdot\Theta[_{xx} = T_{yy}\Theta_{zz} + T_{zz}\Theta_{yy}, \cdot\cdot$$
$$\Phi_{yz} =]T\cdot\Theta[_{yz} = 2\{T_{zx}\Theta_{xy} + T_{xy}\Theta_{zx}\} - \{T_{xx}\Theta_{yz} + T_{yz}\Theta_{xx}\}, \ldots \qquad (6')$$

Diese Funktionen kann man noch in mannigfacher Weise umgestalten, indem man allgemeine Eigenschaften der Tensoren benutzt. Bezüglich der letzteren sei erwähnt, daß einerseits ein gemeinsamer skalarer Faktor an alle $T_{xx}, \ldots$ angebracht den Tensorcharakter nicht ändert, und ebenso die Addition desselben Skalars (S) zu T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, bei unveränderten T_{yz}, T_{zx}, T_{xy}. Da $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = S$ ein Skalar ist, so existiert z. B. ein dem Tensortripel T zugeordnetes Tripel T' mit den Komponenten

$$-(T_{yy} + T_{zz}),\ -(T_{zz} + T_{xx}),\ -(T_{xx} + T_{yy}),\ T_{yz},\ T_{zx},\ T_{xy}.$$

Auf Grund dieser Bemerkungen kann man leicht aus (6) ein Tensortripel

$$\Psi = \Phi' + T(\Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz}) + (T\cdot\Theta) \qquad (7)$$

bilden mit den Komponenten

$$\Psi_{xx} = 2\{T_{xx}\Theta_{xx} + T_{yz}\Theta_{yz} + T_{zx}\Theta_{zx} + T_{xy}\Theta_{xy}\}, \cdot\cdot \qquad (7')$$

$$\Psi_{yz} = 2\{T_{zx}\Theta_{xy} + T_{xy}\Theta_{zx}\} + \{T_{yy} + T_{zz}\}\Theta_{yz} + \{\Theta_{yy} + \Theta_{zz}\}T_{yz}, \ldots$$

Die Divergenz eines Tensortripels

$$\mathfrak{V} = (\operatorname{div} T) \qquad (8)$$

ist ein Vektor mit den Komponenten

$$\mathfrak{V}_x = \operatorname{div}_x T = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \ldots \qquad (8')$$

Bezeichnet S einen Skalar, so ergibt eine einfache Rechnung die Beziehung

$$\operatorname{div} S\, T = S \operatorname{div} T + [T\cdot \operatorname{grad} S]. \qquad (8'')$$

Die zweite Divergenz eines Tensortripels ist hiernach der Skalar

$$\operatorname{div}\operatorname{div} T = \operatorname{div}^2 T = \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \cdot\cdot + 2\frac{\partial^2 T_{yz}}{\partial y\,\partial z} + \cdot\cdot \qquad (9)$$

Der zweite Gradient eines Skalars S, also

$$\operatorname{grad}\operatorname{grad} S = \operatorname{grad}^2 S = T \qquad (10)$$

ist ein Tensortripel mit den Komponenten

$$T_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \cdot\cdot\ T_{yz} = \frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}, \cdot\cdot \qquad (10')$$

Hiernach ist also z. B.

$$(T\cdot\operatorname{grad}^2 S) = T_{xx}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \cdot\cdot + 2\,T_{yz}\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z} + \cdot\cdot \qquad (11)$$

Diese Beziehungen genügen für die folgenden Anwendungen.

3. Die Potentialfunktion φ einer beliebigen elektrisch neutralen, d. h. gleich viel positive und negative Ladung enthaltenden Masse läßt sich für einen Punkt außerhalb der Umhüllungskugel in eine Reihe nach harmonischen Funktionen entwickeln. Setzt man

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \tag{12}$$

so ist bekanntlich

$$\varphi_1 = \left(\mathfrak{M} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right), \quad \varphi_2 = \left(M \cdot \operatorname{grad}^2 \frac{1}{r}\right), \ldots \tag{12'}$$

und es bezeichnet $\mathfrak{M}$ das Moment erster, M dasjenige zweiter Ordnung, ... $\mathfrak{M}$ ist gemäß unserer Symbolik ein Vektor, M ein Tensortripel. Man kann in dieser Weise auch zu höheren Gliedern fortschreiten, doch mag dies unterbleiben. Bezeichnet $\mathfrak{R}_k$ den Radiusvektor vom Kugelzentrum aus, so ist

$$\mathfrak{M} = \Sigma e_k \mathfrak{R}_k, \quad M = \frac{1}{2} \Sigma e_k \,]\mathfrak{R}_k^2[\,, \tag{13}$$

und $]\mathfrak{R}_k^2[$ das tensorielle Quadrat (1), also

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma e_k x_k, \ldots, \quad M_{xx} = \frac{1}{2} \Sigma e_k x_k^2 \ldots, \quad M_{yz} = \frac{1}{2} \Sigma e_k y_k z_k, \ldots \tag{13'}$$

Wegen der Bedingung

$$\Sigma e_k = 0 \tag{14}$$

ist für die Definition von $\mathfrak{M}$ der Anfangspunkt des Vektors $\mathfrak{R}_k$, bzw. des Koordinatensystems, ohne Einfluß, für diejenige von M nur dann, wenn das Moment erster Art verschwindet, — ein Fall, der zwar der überwiegend häufige ist, im folgenden aber nicht vorausgesetzt werden soll.

Besteht ein Körper k aus einem System äußerst zahlreicher gleichartiger kleiner neutraler Massensysteme, so kann man die Potentialfunktion eines seiner Volumenelemente dk für jeden Punkt in endlicher Entfernung gemäß (12) und (12') ausdrücken, wenn man nur die Anzahl der Massensysteme in dk als Faktor anbringt. So erhält man als Wirkung der Momente erster und zweiter Ordnung

$$\psi_1 = \int \left(\mathfrak{P} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dk, \quad \psi_2 = \int \left(\Pi \cdot \operatorname{grad}^2 \frac{1}{r}\right) dk. \tag{15}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{P}\, dk = S e_k \mathfrak{R}_k, \tag{16}$$

die Summe S über das Volumenelement erstreckt und $\mathfrak{R}_k$ von einem beliebigen Punkt aus gerechnet. Man kann in engerem Sinne auch

$$\Pi\, dk = S e_k \,]\mathfrak{R}_k^2[\tag{17}$$

setzen. Liegen nämlich in dk im ganzen n neutrale Elementarmassen (j) und die Zentren derselben an durch $\mathfrak{A}_j$ charakterisierten Punkten, so daß $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{A}_j + \mathfrak{B}_k$, so ist

$$\begin{aligned} \Pi\, dk &= S e_k (]\mathfrak{A}_j^2[+ 2\,]\mathfrak{A}_j \cdot \mathfrak{B}_k[+]\mathfrak{B}_k^2[) \\ &= 2 \Sigma \mathfrak{A}_j \Sigma e_k \mathfrak{B}_k + n \Sigma e_k \,]\mathfrak{B}_k^2[\\ &= 2 \mathfrak{M} \Sigma \mathfrak{A}_j + n M. \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei ist das erste Glied wieder gleich Null, wenn das Moment erster Ordnung verschwindet; man kann dasselbe aber auch, falls letzteres nicht stattfindet, durch die Wahl des Anfangspunktes der Vektoren $\mathfrak{A}_j$ zu Null machen. Bei einer solchen Verfügung sind dann $\mathfrak{P}$ und Π ganz analog definiert, und es besteht darnach eine weitgehende Analogie zwischen den beiden Potentialen ψ_1 und ψ_2.

Ein Unterschied liegt allerdings darin, daß man den Ausdruck (15^1) für ψ_1 widerspruchslos auf unendlich nahe und selbst innere Punkte anwenden darf, den (15^2) für ψ_2 aber nicht, für ψ_2 vielmehr in einem solchen Falle vom Integral zur Summe zurückgehen muß. Praktisch hat dies zunächst kaum Bedeutung, da bei Beobachtungen, wenn überhaupt, in unendlich kleine Entfernung von einem Kristallpräparat auch nur unendlich kleine Massen gelangen. Im folgenden sei jedenfalls der Aufpunkt stets in endlicher Entfernung von jedem Punkt des Kristalls befindlich gedacht.

Die gesamte Wirkung der elektrischen Verteilung in einem Kristall wird durch eine Summe von Gliedern der Art (15) mit steigender Ordnungszahl dargestellt. Wegen der immer schnelleren Abnahme der Elementarpotentiale (12') mit der Entfernung werden im allgemeinen stets die höheren Glieder gegenüber den niedrigeren bzw. der Wirkung zurücktreten. Allerdings kommt der Fall vor (bei Kristallen ohne ausgezeichnete Richtung), daß das Moment $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{P}$ in Strenge gleich Null ist, ψ_1 verschwindet, und dann die Wirkung in erster Linie durch ψ_2 bestimmt wird. Ist ψ_1 aber nicht gleich Null, so kann man doch u. U. ψ_2 merklich machen, weil die Wirkungen der Momente erster und zweiter Ordnung ganz verschiedene Symmetriegesetze befolgen, sich also durch die Beobachtung trennen lassen. Wir werden demgemäß bei der Entwicklung der Eigenschaften von ψ_2 die Existenz des Potentials ψ_1 nicht ausschließen.

4. Wie das Potential erster, so läßt sich auch dasjenige zweiter Ordnung durch teilweise

Integration in bemerkenswerter Weise umformen. Der bekannten Beziehung

$$\psi_1 = \int \mathfrak{P}_n \frac{do}{r} - \int \operatorname{div} \mathfrak{P} \frac{dk}{r} \tag{19}$$

(unter n die äußere Normale auf do verstanden) tritt gegenüber

$$\psi_2 = \int \left([\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do - \int \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dk, \tag{20}$$

wobei nach (2′) ist

$$[\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathfrak{n}]_x = \boldsymbol{\Pi}_{xx}\alpha + \boldsymbol{\Pi}_{xy}\beta + \boldsymbol{\Pi}_{xz}\gamma, \ldots \tag{20′}$$

und α, β, γ die Richtungskosinus der äußeren Normale bezeichnen. Eine zweite teilweise Integration führt zu

$$\psi_2 = \int \left([\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do - \int \operatorname{div}_n \boldsymbol{\Pi} \frac{do}{r} + \int \operatorname{div}^2 \boldsymbol{\Pi} \frac{dk}{r}. \tag{21}$$

Hierin ist nach (8′)

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_{xz}}{\partial z}, \ldots \tag{21′}$$

und $\operatorname{div}_n \boldsymbol{\Pi}$ die Komponente von $\operatorname{div} \boldsymbol{\Pi}$ nach der äußeren Normalen, d. h. es gilt

$$\operatorname{div}_n \boldsymbol{\Pi} = \alpha \operatorname{div}_x \boldsymbol{\Pi} + \beta \operatorname{div}_y \boldsymbol{\Pi} + \gamma \operatorname{div}_z \boldsymbol{\Pi}. \tag{21″}$$

Weiter ist nach (9)

$$\operatorname{div}^2 \boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Pi}_{xx}}{\partial x^2} + \ldots + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Pi}_{yz}}{\partial y \partial z} + \cdots \tag{21‴}$$

Die Umformung verwandelt also ψ_2 in ein gewöhnliches Oberflächen- und ein gewöhnliches Raumpotential von den bzw. Dichten

$$\sigma = -\operatorname{div}_n \boldsymbol{\Pi}; \quad \varsigma = \operatorname{div}^2 \boldsymbol{\Pi}, \tag{22}$$

und eine Art von Doppelbelegungspotential.

Während für ein gewöhnliches Doppelflächenpotential gilt

$$\psi_0 = \int \left(\mathfrak{N}_0 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do,$$

und das Moment $\mathfrak{N}_0$ in die Richtung von $\pm n$ fällt, haben wir hier bei $[\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathfrak{n}] = \mathfrak{N}$ analog

$$\psi_2' = \int \left(\mathfrak{N} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do, \tag{23}$$

aber $\mathfrak{N}$ fällt jetzt nicht mit $\pm n$ zusammen. Dies kommt darauf hinaus, daß in unserm Falle die durch entgegengesetzt gleiche Ladungen verknüpften Elemente der Doppelfläche einander nicht in der Richtung der Normalen n, sondern derjenigen des Vektors $\mathfrak{N}$ gegenüberliegen.

Zerlegt man $\mathfrak{N}$ in eine Komponente ($\mathfrak{N}_1$) normal, eine andere ($\mathfrak{N}_2$) tangential zu do und schreibt

$$\psi_2' = \int \left(\mathfrak{N}_1 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do + \int \left(\mathfrak{N}_2 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do \tag{24}$$

so stellt das erste Integral das Potential einer gewöhnlichen Doppelfläche dar, das zweite aber dasjenige einer speziellen einfachen Oberflächenbelegung; in der Tat kann man das Element

$$\left(\mathfrak{N}_2 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)$$

auffassen als das Potential eines in der Oberfläche liegenden Dipoles, und eine Schar von dergleichen ist auf einer stetig gekrümmten Fläche einer gewissen Oberflächendichte äquivalent, während an Grenzlinien, z. B. scharfen Kanten, noch äquivalente lineäre Ladungen auftreten. Denkt man nämlich auf der Oberfläche eine Schar von Linien gezeichnet, deren Elemente ds überall die Richtung von $\mathfrak{N}_2$ haben, und zerlegt die so entstehenden Streifen durch Querlinien $S\,dp$, wobei dp für denselben Streifen konstant ist und S eine Funktion von s bezeichnet, in Flächenelemente, so kann man schreiben

$$\int \left(\mathfrak{N}_2 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do = \iint N_2 S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} ds\,dp = \iint \left\{ \frac{\partial (N_2 S/r)}{\partial s} - \frac{\partial N_2 S}{r \partial s} \right\} ds\,dp; \tag{25}$$

das zweite Glied in der Klammer stellt ein gewöhnliches Flächenpotential dar; das erste ist über s integrabel und gibt, wenn die s-Streifen Grenzen haben, die Potentiale von Ladungen an diesen Grenzen. Es wird unten ein praktisch wichtiges Beispiel für diese Umformung vollständig gegeben werden. Hier sei nur zur Illustration der einfachste Fall angeführt, daß es sich um eine Kugelfläche handelt, auf der $\mathfrak{N}_2$ überall in den Meridianen liegt. Dort ist in bekannter Bezeichnung $ds = R\,d\vartheta$, $S\,dp = R \sin\vartheta\, d\omega$, also

$$\int \left(\mathfrak{N}_2 \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do = R^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial (N_2 \sin\vartheta / r)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial N_2 \sin\vartheta}{r \partial \vartheta} \right\} d\vartheta; \tag{26}$$

es verschwindet das erste Integral wegen der Grenzen und bleibt nur das Potential der Flächenbelegung übrig.

5. Wir wollen uns nun mit den beobachtbaren Wirkungen der Momente zweiter Ord-

nung beschäftigen und uns dabei auf den einfachsten Fall der **homogenen** Erregung beschränken, der zunächst praktisch allein in Betracht kommt, wollen vorläufig auch über die Ursache der Erregung keinerlei Annahme machen.

Die Wirkung der Momente erster Ordnung ist bekanntlich in dem entsprechenden Falle sehr anschaulich durch das Resultat von (19) gegeben, daß bei homogener Erregung (div $\mathfrak{P} = 0$) der Kristall einer bloßen Oberflächenladung von der Dichte $\mathfrak{P}_n$ äquivalent ist. Auch liefert (15[1]) direkt, wenn

$$\int \frac{dk}{r} = \varphi$$

gesetzt wird,

$$\psi_1 = (\mathfrak{P} \cdot \operatorname{grad} \varphi) = |\mathfrak{P}| \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \qquad (27)$$

wobei λ die Richtung des Momentes $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

Dieser letzteren Formel kann man bei homogener Erregung nach (15[2]) das Analogon geben

$$\psi_2 = (\boldsymbol{\Pi} \cdot \operatorname{grad}^2 \varphi) = |\boldsymbol{\Pi}_1| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_1^2} + |\boldsymbol{\Pi}_2| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_2^2} + |\boldsymbol{\Pi}_3| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_3^2}, \qquad (28)$$

wobei $\pm\lambda_1$, λ_2, λ_3 die zu einander normalen Richtungen der Konstituenten $\boldsymbol{\Pi}_1$, $\boldsymbol{\Pi}_2$, $\boldsymbol{\Pi}_3$ des Tensortripels bezeichnen.

Für die homogen erregte Kugel vom Volumen k liefert (27) die Äquivalenz mit einem im Zentrum befindlichen, zu λ parallelen Dipol $(-+)$ vom Moment $|\mathfrak{P}|\,k$, analog (28) die Äquivalenz mit drei zu den Achsen λ_1, λ_2, λ_3 parallelen Polquadrupeln $(+--+)$ mit den Momenten $|\boldsymbol{\Pi}_1|\,k$, $|\boldsymbol{\Pi}_2|\,k$, $|\boldsymbol{\Pi}_3|\,k$. Ist die Erregung rings um die Richtung λ_3 zentrisch symmetrisch, also $|\boldsymbol{\Pi}_1| = |\boldsymbol{\Pi}_2|$, dann wird

$$\psi_2 = (|\boldsymbol{\Pi}_3| - |\boldsymbol{\Pi}_1|) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_3^2}. \qquad (29)$$

Hier bleibt nur **ein** Polquadrupel vom Moment $(|\boldsymbol{\Pi}_3| - |\boldsymbol{\Pi}_1|\,k)$ wirksam. Es treten dabei aus der Kugel in polaren Zonen von ca. 55^0 Kraftlinien **aus** und in der äquatorialen Zwischenzone **ein**.

Die Formel (20) liefert bei homogener Erregung wegen div $\boldsymbol{\Pi} = 0$

$$\psi_2 = \int \left([\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) do, \qquad (30)$$

wobei $[\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathfrak{n}]$ durch (20') definiert ist.

Legt man die Achsen x, y, z in die Richtungen $\boldsymbol{\Pi}_1$, $\boldsymbol{\Pi}_2$, $\boldsymbol{\Pi}_3$ so gibt dies

$$\psi_2 = |\boldsymbol{\Pi}_1| \int \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} do + |\boldsymbol{\Pi}_2| \int \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} do + |\boldsymbol{\Pi}_3| \int \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} do, \qquad (31)$$

wobei wieder α, β, γ die Richtungskosinus der äußeren Normale $\mathfrak{n}$ auf do bezeichnen.

Ist $\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{\Pi}_2$, so gilt noch einfacher

$$\psi_2 = (|\boldsymbol{\Pi}_3| - |\boldsymbol{\Pi}_1|) \int \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} do. \qquad (32)$$

An diese letzte Formel seien zunächst einige Bemerkungen angeknüpft.

Die Erinnerung an bekannte Beobachtungsmethoden der **polaren** Pyro- und Piezoelektrizität legt nahe, für Beobachtungen über die analogen **zentrischen** Erregungen ein Präparat in Form eines geraden Zylinders parallel zur z-Hauptachse in Betracht zu ziehen. Nach (32) ist ein solches äquivalent mit zwei (gewöhnlichen) zur Mitte des Zylinders symmetrischen Doppelbelegungen der Grundflächen; es würde also aus den Grundflächen aus- und in die Mantelfläche eintretende Kraftlinien liefern, die aber nur in der unmittelbaren Nähe der Grundkanten größere Dichte haben könnten. Dieser Fall würde sich wegen der unmittelbaren Nachbarschaft stärkster $+$ und $-$ Äquivalent-Ladungen bei der stets vorhandenen oberflächlichen Leitfähigkeit der Kristalle für die Beobachtung nach gewöhnlicher Methode — nämlich mit aufgelegten metallischen Armierungen — weniger eignen.

Frei von diesem Übelstand ist die Form eines rhombischen (oder quadratischen) Prismas mit einer Diagonale parallel zu z, der Längsachse normal dazu, etwa parallel x. Hier liefert die in (25) angedeutete Umformung für ψ_2 den Ausdruck

$$\psi_2 = (|\boldsymbol{\Pi}_3| - |\boldsymbol{\Pi}_1|) \left\{ \gamma\beta \, S \left(\pm \frac{1}{r} \right) dx + \gamma^2 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do \right\}. \qquad (33)$$

Dabei sind γ, β die Richtungskosinus der äußern Normalen auf der Fläche zwischen $+y$ und $+z$; die Summe S bezieht sich auf die vier Seitenkanten des Prismas, und ist das positive Vorzeichen für die $+z$ und $-z$ zugewandten Kanten zu nehmen, das negative für die mittleren. Diese Kanten tragen also gemäß dem zu (25) ausgeführten äquivalente **lineäre** Ladungen. Zu ihrer Wirkung tritt in dem letzten Glied noch die Wirkung einer gewöhnlichen homogenen Doppelbelegung der vier Seitenflächen des Prismas, während die Grundflächen ohne Wirkung sind. Da eine geschlossene homogen belegte Doppelfläche auf äußere Punkte keine Wirkung ergibt, so kann man diese vier Seitenflächen auch durch die beiden Grundflächen mit einer inversen Belegung ersetzen. Dieselben dürften, wie oben gesagt, in der Praxis merkliche Effekte kaum liefern; dagegen bieten die

Ladungen der Seitenkanten ein günstiges Beobachtungsobjekt.

Dem oben betrachteten Prisma wirkt in mancher Hinsicht analog ein Rhomboeder oder ein quadratisches Oktaeder mit der Hauptachse parallel z. Hier nehmen alle Polkanten die eine, alle Mittelkanten die andere Ladung an.

Hat die Erregung des Kristalls nicht die durch $|\Pi_1| = |\Pi_2|$ definierte Symmetrie, so gilt für ein rhombisches Prisma, das mit seiner Achse in die x-, mit den Diagonalen in die y- und z-Richtung fällt, bezüglich der Ladung der Kanten Ähnliches, wie oben ausgeführt. Die Erregung wird durch $|\Pi_3| - \Pi_2|$ gemessen und bei zyklischer Vertauschung der Orientierungen gelangt man zu Erregungen, die mit $|\Pi_1| - |\Pi_3|$ und $|\Pi_2| - |\Pi_1|$ proportional sind.

6. Die zentrische elektrische Erregung kann sowohl durch Temperaturänderung, als durch Deformation bewirkt werden, und, wie bei der polaren, bleibt es zunächst unentschieden, ob die thermische Erregung ganz oder nur zum Teil auf der die Temperaturänderung begleitenden Deformation beruht, ob also die zentrische Pyroelektrizität einen nicht auf Piezoelektrizität zurückführbaren Anteil (wahre Pyroelektrizität) enthält. Ebenso bleibt es zunächst unentschieden, ob ein Teil der beobachteten Erregung, und welcher, darauf beruht, daß infolge der rein geometrischen Veränderungen die ursprünglich die innern Momente kompensierende Oberflächenladung nach der Deformation diese Kompensation nicht mehr vollständig leistet. Beide Fragen sind, wenn es sich nur um den Nachweis der Existenz wirklicher zentrischer Erregungen handelt, zunächst irrelevant, da sie quantitative Verhältnisse betreffen, und es sich für die Beobachtung vorerst nur um qualitative Feststellungen handelt; sie sind deshalb auch bei den von mir seinerzeit durchgeführten orientierenden Beobachtungen mit Absicht zurückgestellt.

Jene nach Anleitung der oben entwickelten theoretischen Betrachtungen angestellten Beobachtungen betrafen die Wirkung einer merklich homogenen Erwärmung und einer homogenen Deformation durch einseitigen Druck, und zwar ebensowohl an Kristallen, die bei den benutzten Erregungsarten nach Symmetrie der Bedingung $\Pi_1 = \Pi_2$ genügen (Kalkspat, Dolomit, Beryll) als an solchen, die sie nicht erfüllen (Topas, Baryt, Cölestin). Die sämtlichen untersuchten Kristalle gehörten Gruppen an, die nach Symmetrie polare Erregungen überhaupt nicht liefern können; Störungen durch dergleichen waren also als ausgeschlossen anzusehen. Die Präparate hatten die Form gerader rhombischer Säulen, wie sie bei Formel (33) vorausgesetzt waren. Bei Kristallen des Typus $\Pi_1 = \Pi_2$ war das Präparat mit der Richtung der längeren Querschnittsdiagonale parallel der Hauptachse des Kristalls orientiert, bei den übrigen wurden die drei Orientierungen benutzt, in denen die Symmetrieachsen des Präparats mit denjenigen des Kristalls zusammenfielen. Die Präparate waren längs der Seitenkanten mit schmalen Metallbelegungen armiert und das eine Paar gegenüberliegender Belegungen mit dem einen, das andere mit dem andern Quadrantenpaar eines Elektrometers verbunden.

Die Wirkungen einer Temperaturänderung bzw. eines axialen Druckes wurden dann nach den Ausschlägen des Elektrometers abgeschätzt. Sie ergaben sich bei den Kristallen des ersten Typus gering, bei denen des zweiten im allgemeinen beträchtlich. Verschiedene Kontrollbeobachtungen ließen es kaum möglich erscheinen, daß es sich bei diesen Erscheinungen um sekundäre Effekte handelte; es ist hier aber nicht der Ort, darüber zu berichten. Nur ein Argument dafür, daß die Beobachtungen wirklich die im vorstehenden theoretisch bearbeiteten Erscheinungen betroffen haben, mag angeführt werden. Nach dem am Ende von § 5 Gesagten kommen bei drei Präparaten aus rhombischen Kristallen mit den drei oben beschriebenen (zyklischen) Orientierungen bei gleichen Erregungen die drei Differenzen $|\Pi_2| - |\Pi_3|$, $|\Pi_3| - |\Pi_1|$, $|\Pi_1| - |\Pi_2|$ zur Geltung. Diese Differenzen können nicht sämtlich gleiches Vorzeichen haben, und die durchgeführten Beobachtungen bestätigten dies in allen Fällen.

Es darf somit als wahrscheinlich gemacht bezeichnet werden, daß wirkliche zentrisch-symmetrische Pyro- und Piezoelektrizität existiert. Daraus folgt dann die Berechtigung, ihre Theorie weiter zu entwickeln, wozu, wie schon im Eingang bemerkt, in den folgenden Mitteilungen zum Teil auch durch Heranziehung der Gittertheorie ein Beitrag geliefert werden soll.

Anmerkung.

Nach Vollendung der vorliegenden Arbeit ist mir die Besprechung des (oben zitierten) Bornschen Buches über Dynamik der Kristallgitter bekannt geworden, die Herr Ewald in dieser Zeitschrift (17, 212, 1916) veröffentlicht hat. Die in derselben enthaltenen teils direkten, teils indirekten Bezugnahmen auf meine Arbeiten über Kristallphysik, speziell über Elastizität und Piezoelektrizität sind einigermaßen irreführend, so daß ich genötigt bin, ihnen entgegenzutreten.

Der Versuch Poissons, zu einer allgemeineren Elastizitätstheorie für Kristalle durch Vertauschung der gewöhnlichen Zentralkräfte mit

polaren zu gelangen, hat bekanntlich nicht zum Ziele geführt. Der Übergang von der rari- zu der multikonstanten Theorie gelang mir aber 1887 durch Heranziehung der mit polaren Kräften nach dem Energieprinzip notwendig verbundenen Drehungsmomente und der darauf beruhenden molekularen Drehungen. Eine quasiwillkürliche „Annahme", wie sich Herr Ewald ausdrückt, lag dabei nicht vor. Das Wort der geringen „Beliebtheit" einer solchen hat somit auch keinen Sinn. Faktisch sind mir in den verflossenen nahezu 30 Jahren Einwendungen nicht begegnet, sondern nur Zustimmungen, und neuerdings haben die Eigenschaften der flüssigen Kristalle die wechselseitigen Richtungstendenzen von Molekülen derartig evident gemacht, daß ihre Annahme oder Ablehnung gewiß nicht mehr von Eines „Belieben" abhängt. In der Tat hat Herr Born selbst einer soeben erschienenen Theorie der flüssigen Kristalle (Berl. Ber. Mai 1916) eben jene beanstandeten Drehungsmomente zugrunde gelegt.

Diese Drehungsmomente stehen mit Zentralkräften an sich nicht im Widerspruch, wenn nur die Moleküle nicht als einzelne Punkte angesehen werden; elektrische Dipole sind die einfachsten derartigen Gebilde. In der Tat habe ich mir die Drehungsmomente jederzeit auf derartige Weise bewirkt gedacht. Die von mir vorausgesetzten Moleküle waren also Gebilde mit sechs Freiheitsgraden, zwischen deren Teilen Zentralkräfte wirkten. Die für sie von mir durchgeführten Rechnungen gehen den Bornschen genau parallel; die Dreiteilung des Potentials, die Herr Ewald als charakteristisch für die letzteren bezeichnet, findet sich schon bei mir, ebenso der Hinweis, daß die verborgenen Bewegungen es sind, welche den Übergang zur multikonstanten Theorie bedingen. Herr Ewald kennt offenbar meine Arbeit, die er kritisch abtut, nicht und ignoriert auch die billige Beurteilung, die ihr Herr Born zuteil werden läßt.

Daß nun eine noch größere Zahl von Freiheitsgraden, dergl. Lord Kelvin in seiner Idee von 1890, oder ich in der meinigen von 1893[1]), oder die moderne Gittertheorie gegenwärtig heranzieht, a fortiori zur multikonstanten Theorie führen muß, ist völlig selbstverständlich. Daß die allgemeine Gittertheorie in der Kristallelastizität bisher etwas geleistet habe, was im Effekt und prinzipiell über das von mir Erreichte hinausgeht, kann ich daher im Gegensatz zu Herrn Ewald nicht zugeben. Was sie in Zukunft etwa leisten wird, kommt hier nicht in Frage.

Mit der Gewinnung meines phänomenologischen Ansatzes für die Piezoelektrizität aus der Gittertheorie verhält es sich ähnlich. Riecke hat 1892 für eine ziemliche Anzahl von Kristallgruppen gezeigt, daß man jenen Ansatz bei Heranziehung je einer sehr kleinen Anzahl von Freiheitsgraden ableiten kann. Es war völlig selbstverständlich, daß man denselben gewinnen mußte, wenn man die Zahl der Freiheitsgrade beliebig ließ. Demgemäß habe ich auch meine Vorstellung von 1893 in diesem Sinne gar nicht rechnerisch verwertet.

Die positive Leistung der von Herrn Born in Elastizität und Piezoelektrizität an die Gittertheorie angeknüpften Rechnungen ist der Nachweis, daß allgemein ein direkter Zusammenhang zwischen den elastischen und den piezoelektrischen Konstanten, der die Berechnung der einen aus den andern ermöglicht, nicht besteht. Die Wendung, die Herr Ewald in bezug hierauf gebraucht, scheint gerade das Entgegengesetzte auszudrücken. Was die Wirkung der kompensierenden Oberflächenladung und die damit zusammenhängende Frage der Beobachtbarkeit der absoluten Größe der dielektrischen Momente angeht, so beschränkt sich Herr Born darauf, ein von mir gegebenes Resultat auf seinen Gitteransatz anzuwenden. Diese Anwendung ist aber unzulässig infolge eines Fehlers, den der Bornsche Ansatz enthält und auf den ich in der nächsten Arbeit eingehen werde. Auch hier ist die Darstellung des Herrn Ewald irreführend.

Die Arbeit des Herrn Born ist in ihrer Gesamtheit so bedeutend — nach meiner Bezeichnung in einer Besprechung (Deutsche Literaturzeitung 1916 Nr. 23) „die wichtigste Förderung der Kristallphysik seit langer Zeit" — daß dergl. kleine Ausstellungen ihr gegenüber gar nicht ins Gewicht fallen. Dem Referat gegenüber, das gerade an nicht ganz einwandfreie Stellen schiefe Urteile über frühere Leistungen knüpft, mußte indes Verwahrung eingelegt werden.

Göttingen, Ende Mai 1916.

(Eingegangen 7. Juni 1916.)

1) Siehe dazu die vorstehende Arbeit S. 283.

BESPRECHUNGEN.

Heinrich Leiser, Die Welt der Kolloide. Bücher der Naturwissenschaft, herausgegeben von Siegmund Günther, Nr. 21. 8⁰. 121 S. mit 15 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Leipzig, Philipp Reclam jun. o. J. (1914). Geh. 0,40, in Leinen geb. 0.80 und in Leder oder Halbpergament geb. M. 1.50.

Die vorliegende kleine Schrift gibt eine Übersicht über die Grundbegriffe der Kolloidchemie in einer sehr populären und im großen und ganzen richtigen Darstellung. Ein eigenartiges sprachwissenschaftliches Versehen ist dem Verfasser insofern untergelaufen, als er an mehreren Stellen des Buches das Wort „Kolloid" anstatt vom griechisch-lateinischen *πόλλα* = colla = Leim vom lateinischen collum (= Hals) ableitet.

Werner Mecklenburg.

E. Leyst, Variationen und Störungen des Erdmagnetismus. 8⁰. 224 S. 10 Taf. Moskau 1914.

Der Zweck dieser umfangreichen Arbeit ist es, zu einer Einteilung der Störungen zu gelangen, da es zur Erforschung unübersichtlicher Naturerscheinungen (z. B. der Wolken) zweckmäßig sei, irgendein Sonderungsverfahren zu besitzen; man habe dann wenigstens eine erste Handhabe, die, wenn sie auch unvollkommen sei, doch zur Vertiefung der Erkenntnis den Weg weisen könne.

Das Material bilden 24 Jahre magnetischer Beobachtungen zu Petersburg, und die während dieser Zeit dort vorzeichneten 1010 Störungen. Als die gesuchte Einteilung wird die Unterscheidung in Deklinations-, Horizontalintensitäts- und Vertikalintensitätsstörungen vorgeschlagen, je nachdem welches der drei Elemente von der Störung vornehmlich betroffen wird. Diese Einteilung will dem Referenten als wenig glücklich erscheinen, da sie eine durch das Zusammenspiel der Schwere- und magnetischen Kräfte der Erde bedingte Eigentümlichkeit unserer Meßkunst als eine natürliche hinstellt, als eine rein erdmagnetisch gegebene. Wir beobachten eben meist D, H und Z, weil sie der unmittelbaren Beobachtung leichter zugänglich sind als etwa die rechtwinkligen Komponenten längs geographischer Hauptachsen. Aber auch diese sind nicht das unmittelbar Gegebene, sondern es sind dies die Intensität und die Richtung. Trotzdem ist es nicht zwecklos, diesen Vektor irgendwie zu zerlegen, etwa um zahlenmäßige Verhältnisse zu gewinnen, allein dann müssen die Komponenten auch in einerlei Maß gemessen sein, man kann nicht, wie hier geschehen, zwei davon in Gauß und den dritten in Bogenminuten ausdrücken.

Beachtet man diese Bedenken beim Betrachten der Ergebnisse, so sind diese doch von Wert, indem sie dartun, wie sich in den einzelnen Jahren und in Petersburg anders als in dem vergleichsweise herangezogenen Potsdam die Störungen auf die Richtung und die Intensität des Feldes verteilen.

Ein großer Teil der Arbeit ist den täglichen Gängen gewidmet, wobei aber nicht der Mittelwert, sondern der Zentralwert der Untersuchung zugrunde gelegt wird. Dem liegt der (von Lamont eingeführte) bei geophysikalischen Beobachtungsreihen stets berechtigte Verdacht unter, daß für das betrachtete Element der Mittelwert nicht der wahrscheinlichste ist. Hat man diesen Verdacht, so muß man gestörte Tage und ruhige voneinander trennen; eine jede dieser beiden Reihen aber kann durch nichts physikalisch besser gefaßt werden, als durch den Mittelwert (siehe auch die weiteren Ausführungen von Ad. Schmidt über diesen Punkt in d. Erg. d. magn. Beob. Potsdam i. J. 1913, S. 31).

Was den Untersuchungen trotz dieser Einwände erhöhte Bedeutung verleiht, das ist die große Vertrautheit des Verfassers gerade mit dem Petersburger Material, das er in früheren Arbeiten einer scharfen kritischen Beurteilung unterworfen hat.

A. Nippoldt.

J. Goldschmied, Handbuch der voraussetzungslosen Fundamentalwissenschaft. gr. 8. XIV u. 724 S. mit 76 geometrischen Figuren. Wien und Leipzig, Wilhelm Braumüller. 1915. 24 Kronen = M. 20.—

Die „voraussetzungslose Fundamentalwissenschaft" ist nach Ansicht des Verf. „berufen, in Zukunft an die Stelle der theoretischen Physik zu treten." (S. VIII.) Es ist klar, daß die Sicherheit der Ergebnisse einer Wissenschaft die korrekte Anwendung einer richtigen Methode zur notwendigen Voraussetzung hat, mit der Methode steht und fällt jede derartige Untersuchung. Dies kommt auch in den folgenden Sätzen des Vorworts zum Ausdruck: „Für die Richtigkeit der angenommenen Anschauungen bürgt nicht nur die strenge Konsequenz ihrer Ableitung, sondern auch ihre innere Widerspruchslosigkeit und Einheitlichkeit". (S. VIII.) „Die strenge Konsequenz der Ableitung ist schon an und für sich dazu geeignet, die Richtigkeit der durch sie gewonnenen Erkenntnis zu verbürgen". (S. V.) Hier drängt sich zunächst eine Frage auf. Die bloße Konsequenz im Schließen ist, wenn auch notwendig, so doch sicher nicht hinreichend, es müssen vielmehr auch die Voraussetzungen, aus denen geschlossen wird, feststehen. Ist auch nur eine Prämisse falsch, so dient alle nur denkbare Strenge der Schlüsse nur dazu, den Irrtum aus einem Schlusse in den nächsten hinüberzunehmen. Wenn nun auch die Prämissen wieder durch Schlüsse begründet sein mögen, so müssen wir doch einmal zu Voraussetzungen gelangen, die ohne Beweis feststehen. In einer voraussetzungslosen Wissenschaft könnten dies logischerweise nur Definitionen sein. So verfährt der Verf. in der Tat:

„Da nur die aus Definitionen hervorgehenden Distinktivprämissen nicht abgeleitet werden, so müssen alle Deduktivprämissen ursprünglich aus Distinktivprämissen abgeleitet worden sein; somit müssen alle begründeten, also korrekten Prämissen ihre Begründung in der Definition ihres Themas finden." (S. 106.)

Der Verf. glaubt also aus bloßen Definitionen, also inhaltlich leeren Sätzen, neue Sätze erschließen zu können. Hier liegt sein methodischer Grundirrtum. Denn auf Grund einer Definition allein, einer willkürlichen Verbindung von Merkmalen zu einem neuen Begriff, läßt sich nie etwas über die Wirklichkeit aussagen, mag auch der definierte Begriff vollkommen widerspruchsfrei sein. Ebensowenig erweitert die Einführung einer neuen Bezeichnung

unsere Erkenntnis. Wo der Verf. dennoch zu Aussagen über die Wirklichkeit gelangt, muß dies auf einer inkonsequenten Anwendung seiner Methode beruhen.

Ich greife zwei Beispiele heraus. Der Verf. will auf S. 56 zeigen, daß alles Reale etwas Räumliches ist, sich also im Raume befindet:

„Soll der Bestand eines realen Substrats überhaupt möglich sein, so muß dasselbe irgendwo vorkommen; denn würde man letzteres leugnen, so käme das Substrat nirgends vor; dies ist aber identisch mit seinem Nichtbestande."

Man sieht ohne weiteres, daß der letzte Satz gerade die zu beweisende Behauptung enthält. Wir haben es also mit einer Petitio principii zu tun. Die Begründung der Behauptung ist also jedenfalls mißlungen, man mag sie im übrigen für richtig oder falsch erklären.

Die Konstanz der Materie sucht der Verf. auf S. 47 folgendermaßen zu beweisen:

„Da Nichts unleugbar dasjenige ist, was nicht Etwas ist (2.), so kann Nichts unter keinen Umständen zu Etwas werden; keine Sache kann daher aus Nichts hervorgehen; somit kann auch kein Wesensindividuum und kein Stoffteil aus Nichts hervorgehen (entstehen). Die Menge irgendeines Stoffes kann daher auch nicht vermehrt werden."

Gleich zu Anfang wird hier entweder die falsche stillschweigende Voraussetzung zugrunde gelegt, daß allgemein logisch ein Ding nicht zu einem anderen werden kann. Oder aber, spezieller gefaßt, müßte die fehlende zweite Prämisse lauten: unter keinen Umständen kann, was nicht Etwas ist, zu Etwas werden. Dies ist der erschlossene Satz, bloß daß hier das „Nicht Etwas" „Nichts" genannt wird. Das Ganze läuft auf die offene Einführung einer neuen Bezeichnung und die versteckte Einführung des zu beweisenden Satzes hinaus. Der Gewinn ist, sowohl vom Standpunkt des Physikers als auch des Philosophen betrachtet, bloßer Schein.

So muß es auch sein, denn die bloße Logik ist nicht imstande, uns zu inhaltlich neuen Erkenntnissen der Wirklichkeit zu führen, diese müssen vielmehr aus anderen Quellen stammen. Jede Grundlegung der Naturwissenschaften muß nach Ansicht des Ref. auf Irrwege geraten, die ihre Aufgabe unternimmt, ohne sich die Frage gestellt und sie beantwortet zu haben, welches denn diese Quellen sind. Es ist die von Hume aufgeworfene Frage nach dem Ursprung der menschlichen Erkenntnis, das eigentliche philosophische Grundproblem, dessen Auflösung Kant und Fries gegeben haben.

In durchaus anerkennender Weise muß der Ref. dazu Stellung nehmen, daß der Verf. im vorliegenden Buch die Frage nach den Grundlagen der Physik aufwirft und zu beantworten sucht. Für den Ernst des Verf. spricht die mühsame Arbeit, die in den schwierigen und ausgedehnten Schlußketten und den Definitionen des Verf. enthalten ist. In umso höherem Maße ist es zu bedauern, daß ein solcher Arbeitsaufwand durch die Unzulänglichkeit der angewandten Methode im wesentlichen seiner Früchte beraubt wird.

M. Hasselblatt.

A. Cohen-Kysper, Die mechanischen Grundgesetze des Lebens. 8. VIII und 373 S. Leipzig, J. A. Barth. 1914. M. 7.—, geb. M. 8.—.

Cohen-Kysper stellt zwei Grundgesetze für die Vitalmechanik der Lebewesen auf, das Prinzip des Ausgleiches und dasjenige der höherstufigen Integration.

Unter „Ausgleich" versteht er Streben nach Gleichgewichtslage, also die Tatsache, daß jedes lebende System ebenso wie andere materielle Systeme auf dem zulässig kürzesten Wege und innerhalb der Grenzen seines Zwanges einer Ruhelage zustrebt, in welcher die Kräfte des Systems sich gegenseitig „ausgleichen", also in Gleichgewicht miteinander geraten.

Äußere Einflüsse (= Reize) der Umwelt oder Einwirkungen eines Bestandteiles des Organismus auf einen anderen Bestandteil desselben Individuums heben aber einen entstandenen Ausgleich immer wieder auf, und bringen durch dieses Aufheben das vitale System, das dann wieder nach Ausgleich strebt, immer wieder zum Funktionieren. So muß das Vitalsystem immer wieder in einen Zustand gebracht werden, von dem aus es, nach Ausgleich strebend, seine vitalen Funktionen vollziehen kann.

Der Vorgang, der das lebende System in den funktionsfähigen Zustand — vergleichbar dem jedesmaligen Verkürzungsvorgang nach vorübergehender Zugwirkung bei einem in periodischem Wechsel lang gezogenen und wieder frei gelassenen elastischen Stabe — zurückversetzt, braucht nun nicht immer zu ein und denselben Ausgangszuständen zurückzuführen, sondern er kann die Bildung von Vitalsystemen höherer Ordnung zur Folge haben; er wird in solchen Fällen dann vom Verfasser als „Integration" bezeichnet. Diese „Integration", d. h. demnach der Übergang eines mechanischen Systems während seines Ausgleiches zu einem System höherer Ordnung, vollzieht sich nach dem gleichen Prinzip, nach welchem sich zwei Atome H mit einem Atom O in eine neue Ausgleichslage H_2O begeben, die mit ganz neuen Eigentümlichkeiten ausgestattet ist. Auch in der unbelebten Natur integrieren sich zwar Atome zu Molekülen und Moleküle integrieren sich zu den höheren Systemen der Molekularverbände fester und flüssiger Körper (die molekulare Integration ist dadurch alsdann zur „molaren" Integration geworden); vitale Systeme aber setzen ihre Integration da fort, wo die molekulare Integration der unbelebten Systeme ihr Ende erreicht. Die molaren Integrationen von Molekülen werden nämlich in der Vitalmechanik weiter bis zur Zelle und von dieser aus bis zum vielzelligen Organismus integriert, der dadurch seinen Entwicklungsgang vom Keim zum ausgebildeten Zustand erhält. Die Größe des Problems der Vitalmechanik läßt sich „daran ermessen, daß sich auch die besonderen Bedingungen noch nicht angeben lassen, unter welchen sich zwei Atome Wasserstoff mit einem Atom Sauerstoff zu einem Molekül Wasser vereinigen."

Obgleich die Darstellung des Verfassers reichlich abstrakt gehalten ist, läßt sich nicht leugnen, daß das Buch dem Biologen und Vitalmechaniker eine in mancher Beziehung vielleicht recht nützliche und fruchtverheißende Anschauungsform oder wenigstens eine praktisch verwendbare Bezeichnungsweise bietet auch für die Gebiete der Zelldynamik, der Psychomechanik, der Ontogenie und der Phylogenie, die in besonderen Abschnitten, allerdings ohne Eingehen auf spezielle, einer Kritik unmittelbar zugängige und als Prüfsteine für die Theorie verwendbare Beispiele, behandelt werden.

Rhumbler.

L. Wunder, Physik für Lehrer aller Schulgattungen. gr. 8. XVI und 351 S. mit 181 Abbildgn. im Text. Hildesheim u. Leipzig, August Lax. 1914. Preis geh. M. 6.—, geb. M. 7.—.

Die vorliegende Schrift bildet den ersten Band des von A. Pabst herausgegebenen Sammelwerkes: Der naturwissenschaftliche Unterricht auf der Grundlage des Arbeitsschulgedankens. Seit etwa 10 Jahren haben ja auf dem Gebiete des naturwissenschaftlichen Unterrichts Reformbewegungen eingesetzt, die darauf abzielen, die bisherigen Demonstrationsversuche aus der Hand des Lehrers in die des Schülers zu verlegen. Der Schüler soll einen Vorgang nicht bloß an seinen Augen vorbeiziehen lassen, sondern er soll ihn auch innerlich miterleben, indem er ihn unter seinen eigenen Händen und unter Mitwirkung seiner sämtlichen Sinne entstehen und vergehen sieht. Indem sämtliche Schüler einer Klasse so zur Selbsttätigkeit herangezogen werden, wird der Unterricht zur sogenannten „Arbeitsschule". Naturgemäß können nicht alle Experimente, die vom Lehrer bisher ausgeführt wurden, nun vom Schüler übernommen werden. Für diesen kommen nur solche in Frage, die sich mit naheliegenden und leicht zu beschaffenden Hilfsmitteln ausführen lassen. In dem vorliegenden Buche hat sich nun der Verf. das Verdienst erworben, für jedes Gebiet der Physik eine große Auswahl ganz einfacher und mit den billigsten Mitteln ausführbarer Versuche zusammenzustellen. Es ist erstaunlich zu sehen, welche Unmenge reizvoller Versuche sich mit Zwirn, Nägeln, Steinen, Christbaumkerzchen, Weißblechabfällen, Zündhölzern usw. ausführen lassen. Besonders gelungen ist der 4. Abschnitt: „Von den mechanischen Hilfsmitteln der Arbeitsschule", in dem die verschiedenen Verfahren des Weich- und Hartlötens, das Arbeiten mit Gasrohren und Wasserleitungsrohren, mit Stahl, Holz, Glas usw. eingehend behandelt werden. R. Lucas.

H. Boruttau, Die Arbeitsleistungen des Menschen. Einführung in die Arbeitsphysiologie. 8. 88 S. m. 14 Figuren. 539. Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt". Leipzig, B. G. Teubner. 1916. M. 1.—, geb. M. 1,25.

Bei dem Versuch, den Menschen in seiner Eigenschaft als Arbeitsmaschine zu betrachten und seine Leistungen möglichst zahlenmäßig in mkg auszudrücken, beginnt der Verf. mit einer Erörterung der physikalischen Grundbegriffe von Kraft und Kraftmaß, der beiden thermodynamischen Hauptsätze und ihrer Anwendung auf die Wärmekraftmaschinen, bespricht dann die hauptsächlich am isolierten Froschmuskel gefundenen Gesetzmäßigkeiten der Muskelzuckung, ihren Nutzeffekt und die neueren Befunde, nach denen der Muskel kein Wärmemotor, sondern eine chemische Maschine ist, und führt im 3. Kap. die Untersuchungen an, die über das Zusammenwirken der Muskeln und die Mechanik der Fortbewegung mit Hilfe der graphischen und kinematographischen Registrierung angestellt sind. Es zeigt sich, daß die Arbeit, die ein Mensch beim Gehen leistet, auf direkte Weise noch zu schwierig zu messen ist aber mittelbar aus dem gleichzeitigen Sauerstoffverbrauch oder der Kohlensäureproduktion berechnet werden kann, wobei besonders die Zuntzschen Versuche herangezogen werden. Die die Muskelbewegung hervorrufenden Nervenprozesse entziehen sich als auslösende Faktoren einer Bestimmung nach physikalischen Maßen. Im Schlußkapitel wird eine Berechnung angestellt, wonach die Tagesleistung sämtlicher Menschen der Erde auf 42,5 Billionen mkg geschätzt wird, die sämtlicher Zugtiere etwa ebenso hoch, im Gegensatz zu den 320 Billionen mkg, die von den künstlichen Kraftmaschinen im Dienste des Menschen geleistet werden, und wird auf die Wichtigkeit der Bemühungen hingewiesen, die menschliche Arbeit zu rationalisieren und die Leistungsfähigkeit zu steigern. Durch Bezugnahme auf das neu gegründete Institut für Arbeitsphysiologie wird dem aktuellen Interesse Rechnung getragen. U. Ebbecke.

K. Kraus u. H. Böttger, Grundriß der Chemie für Lehrer- und Lehrerinnen-Seminarien und verwandte Lehranstalten. gr. 8. 222 S. mit 62 Holzschnitten. 6. Aufl. Leipzig, A. Pichlers Witwe & Sohn. 1915. Preis gebunden M. 1.70.

Das bereits in 6. Auflage vorliegende Buch gliedert sich in 4 Abteilungen, die Chemie der Metalloide (1—110), die Chemie der Metalle (110—158), die organische Chemie (159—201) und die physiologische Chemie (206—216). Auf die Beziehungen zum praktischen Leben ist besonders Wert gelegt, insbesondere findet man die verschiedenen „küchenchemischen" Fragen eingehend erörtert. Wertvoll ist der einem jeden Kapitel beigefügte Übungsstoff, der den Leser zur Selbsttätigkeit anregt und ihm das Material zur Einübung und selbständigen Anwendung des Gelernten bietet. R. Lucas.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Prof. v. Laue hat seinen Mitarbeitern an der ersten Untersuchung über Röntgenstrahlinterferenzen Herren Dr. W. Friedrich und Dr. P. Knipping, vom Nobelpreis je 15000 M. überwiesen.

Habilitiert: An der Universität Münster Dr. Erwin Ott für Chemie.

Ernannt: Der a.o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Theodor Pöschl zum ord. Professor für allgemeine und theoretische Mechanik ebenda, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Rudolf Fueter in gleicher Eigenschaft an der Universität Zürich.

Verliehen: Dem Privatdozent der Chemie an der Universität Berlin Dr. Gustav Witt der Titel Professor, dem etatsmäßigen Professor für Chemie der Nahrungsmittel und Geschichte der Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Karl v. Buchka der Titel Wirklicher Geheimer Oberregierungsrat.

Vom Lehramt zurück: Der Professor der technischen organischen Chemie an der Technischen Hochschule Trondhjem B. F. Holvorsen (zwecks Übertritt zur Norsk Hydroelektrisk Kvaelstofaktieselskab in Kristiania).

Gestorben: Der ord. Professor für Physik an der Universität London, sowie auswärtiger Sekretär der Physical Society Silvanus P. Thompson, der frühere a.o. Professor für chemische Technologie an der Universität Göttingen Dr. Ferdinand Fischer, der frühere ord. Professor der Physik an der Universität Zürich Dr. Alfred Kleiner, der englische Physiker Henry G. J. Moseley (gefallen am 10. August 1915 an den Dardanellen).

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

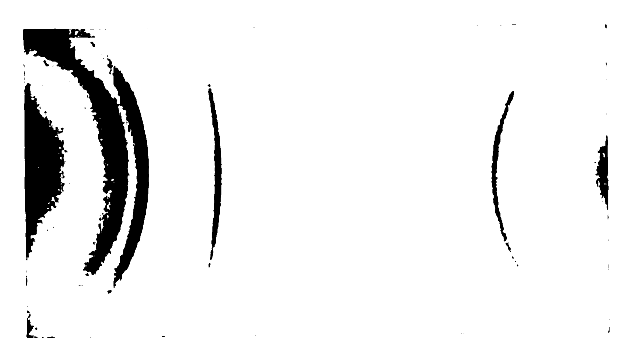


Fig. 1.

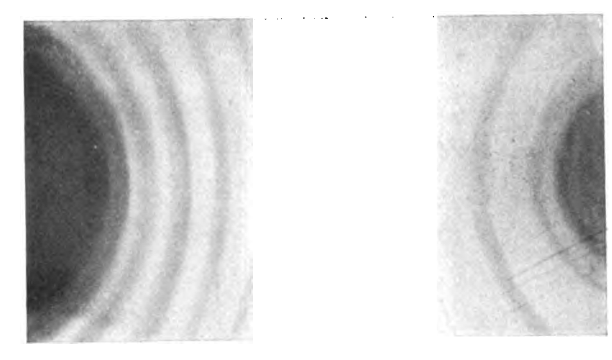


Fig. 2.

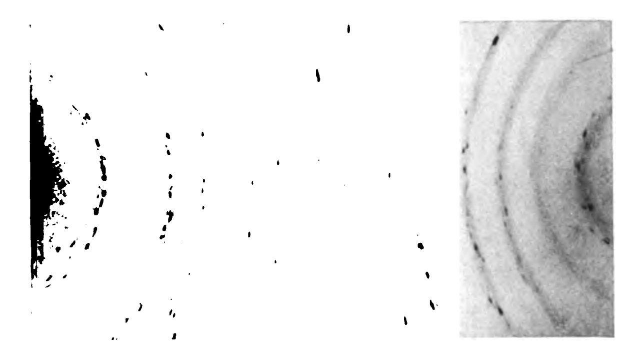


Fig. 3.

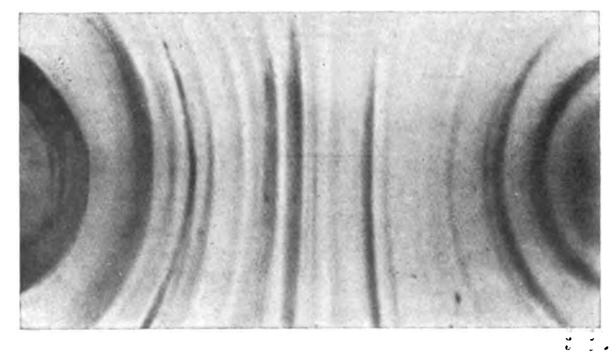


Fig. 4.

P. Debye u. P. Scherrer, Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. I.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. | 15. Juli 1916. Redaktionsschluß für No. 15 am 22. Juli 1916. | 17. Jahrgang.

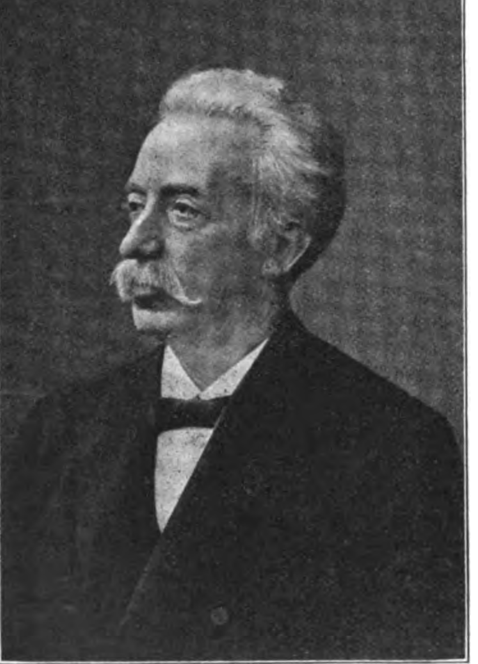
INHALT:

Ernst Dorn.

Von Albert Wigand.

Im Alter von nicht ganz 68 Jahren ist Dorn uns am 13. Juni 1916 durch den Tod genommen worden. Ein unerwarteter Schlaganfall setzte seinem an Arbeit und Erfolgen reichen Leben ein Ziel und riß ihn plötzlich heraus aus seinem Amt und mitten aus freudigem Schaffen. Die Tage und Wochen zuvor waren mit seiner gewohnten Tätigkeit im Halleschen Institut und Hörsaal ausgefüllt, und noch wenige Stunden vor seinem Tode beschäftigte ihn eine für die Kriegstechnik wichtige wissenschaftliche Untersuchung.

Wer kann die unsichtbaren stillen Wirkungen aufdecken, die in dieser schweren Kriegszeit an eines jeden Leben nagen und Lebenskräfte, die im Frieden für viele Jahre ausgereicht hätten, schnell verzehren! Wir freuten uns schon darauf, in zwei Jahren Dorns 70. Geburtstag festlich zu begehen. Und doch ist sein Schicksal um seiner selbst willen nicht zu beklagen; denn er starb so, wie er sichs manchmal wünschte, plötzlich wie durch einen Blitzschlag, ohne körperliches oder seelisches Leiden. Wir andern müssen uns damit abfinden und wollen dankbar sein für das Leben dieses als Forscher, Lehrer und Mensch gleicherweise hervorragenden Mannes.



E. Dorn

Dorn wurde am 27. Juli 1848 in dem ostpreußischen Landstädtchen Guttstadt geboren. In Königsberg war er in den Jahren 1865—1869 Student und fand von 1870—1872 eine erste berufliche Tätigkeit als Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten in Königsberg und Berlin. Seine mathematisch-physikalische Ausbildung empfing Dorn von Franz Neumann, dessen Einfluß auch für seine ersten produktiven Arbeiten bestimmend war. Und noch später zeigt er sich durch die Herausgabe von Franz Neumanns Vorlesungen über theoretische Optik (1885) als Angehöriger jener frühen klassischen Physikerschule in Königsberg.

Bei seiner Doktorpromotion 1871 in Königsberg und seiner Habilitation als Privatdozent der Mathematik in Greifswald 1873 beschäftigten den jungen Dorn die Transformationen elliptischer Integrale und ultraelliptischer Funktionen. Daneben befaßte er sich mit einem geophysikalischen Problem, indem er die Königsberger Beobachtungen über die Temperatur der Erde in verschiedenen Tiefen mehrere Jahre lang zusammenfassend bearbeitete.

Bereits das Jahr seiner Habilitation 1873 brachte dem 25-Jährigen einen Ruf als Extraordinarius der Physik nach Breslau, wohin ihn

O. E. Meyer zog, und zugleich die Wendung zu überwiegend experimental-physikalischen Arbeiten. Im Jahre 1881 folgte er einem Ruf an die Technische Hochschule in Darmstadt als Ordinarius der Physik, und seit 1886 hat er dann an der Universität Halle in der gleichen Stellung gewirkt, seit 1895 auch als Direktor des Physikalischen Instituts, das als einer der ersten Eigenbauten dieser Art in Deutschland unter seiner Leitung vollendet und mustergültig ausgestattet wurde.

Was Dorn in diesem Hause, in dem er auch wohnte und starb, ebenso wie schon in früheren Jahren, seinen Schülern gewesen ist, kann hier nur kurz ausgesprochen werden. Seine meisterhafte Kunst des Unterrichts und des Experiments, die er mit warmer persönlicher Anteilnahme und oft geradezu aufopfernder Hingabe verband, hat in der langen Zeit seines Wirkens bei einer großen Anzahl von Schülern gediegene Grundlagen physikalischer Bildung geschaffen. Dem hochverehrten Lehrer folgt über das Grab hinaus dankbare Erinnerung dafür. Die Wirkungen seines vorbildlichen vornehmen Charakters und des Beispiels, das er mit seinem Leben strengster Pflichterfüllung gab, werden dauernd sein.

In seinem wissenschaftlichen Leben hat Dorn die gewaltige Entwicklung der Physik der vier letzten Jahrzehnte mitschaffend durchlebt. Bis in seine letzten Lebensjahre hinein verfolgte er mit bewundernswürdiger Elastizität auch die kühnsten Fortschritte der Physik, prüfte sie mit der ihm eigenen Gründlichkeit, nahm Stellung zu ihnen und arbeitete als Forscher selbst mit, allein oder zusammen mit seinen Assistenten und Doktoranden. Eine erschöpfende Darstellung seines Lebenswerkes kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Wir müssen zahlreiche Untersuchungen auf verschiedenen Gebieten der Physik übergehen und uns mit einer kurzen Betrachtung von vier Hauptgruppen seiner Arbeiten begnügen: absolute Widerstandsmessung, Röntgenstrahlen, Radioaktivität, flüssige Kristalle.

Seit seiner Breslauer Zeit beschäftigte sich Dorn mit elektrischen Messungen, die ihn viele Jahre lang ausschließlich in Anspruch nahmen und als Frucht eine der wertvollsten Ohmbestimmungen ergaben. 1882 begann er in Darmstadt die Reihe von Untersuchungen, die eine absolute elektrische Widerstandsmessung zum Ziele hatten. Es war damals eine der wichtigsten Zeitaufgaben der Physik, von gleicher Bedeutung für die weitere Forschung wie für die zu erlassenden gesetzlichen Bestimmungen, durch die exakte Bestimmung der Widerstandseinheit für die Elektrizitätsmessung ebenso genaue wissenschaftliche Grundlagen zu schaffen, wie sie für die Längen- und Temperaturmessung bereits in den Pariser Normalien vorlagen. Die Aufgabe reizte Dorn, und er bestimmte zunächst die Siemenseinheit in absolutem Maß. Hierzu wie zu der späteren Ohmbestimmung (1883—1888) verwendete er die dritte Methode von W. Weber in veränderter Form: Es wird die Dämpfung eines einzelnen kräftigen Magneten durch die ihn eng umschließenden Windungen eines Multiplikators beobachtet und die Galvanometerfunktion durch Vergleich mit einer Tangentenbussole ermittelt. Eine Anzahl von experimentellen und theoretischen Nebenuntersuchungen diente dem Studium der Fehlerquellen; mit besonderer Sorgfalt wurden die magnetischen Einflüsse beseitigt. Die verwendeten Drahtwiderstände sind mit den in Würzburg konstruierten Normalquecksilberröhren von F. Kohlrausch verglichen worden. Für die Länge derjenigen Quecksilbersäule von 1 mm^2 Querschnitt, die bei 0^0 einen elektrischen Widerstand von 1 Ohm $= 10^9$ $cm \cdot sek^{-1}$ besitzt, ergab sich der Wert $1{,}0624_3$ m.

Eine Anerkennung für diese mühevolle Arbeit fand Dorn darin, daß ihn Helmholtz aufforderte, sich über den wahrscheinlichsten Wert des Ohm zu äußern; in zwei größeren Abhandlungen von 1893 und 1895 hat er daraufhin die bis 1890 ausgeführten Ohmbestimmungen kritisch verglichen.

Gleich nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen studierte Dorn eifrig ihre Eigenschaften. Er zeigte, daß sie transversale Schwingungen sind (1896), beobachtete ihre Sichtbarkeit (1897—1898) und wies zuerst ihre erwärmende Wirkung durch quantitative Messungen nach (1897). Besonders hervorzuheben ist, daß Dorn als erster die Entladung negativ geladener Körper durch Röntgenstrahlen beobachtete (1896), daß er den kathodenstrahlartigen Charakter der hierbei entstehenden Sekundärstrahlen durch Absorptionsmessungen und magnetische Ablenkungsversuche entdeckte und die Geschwindigkeit dieser Elektronenstrahlen bestimmte (1900). Die Benennung „Dorn-Strahlen" für diese Sekundärstrahlen der Röntgenstrahlen wäre daher füglich gerechtfertigt.

Unter Dorns Arbeiten auf dem Gebiete der Radioaktivität ist vor allem seine Entdeckung der Radiumemanation zu nennen. Er fand dieses neue Gas im Jahre 1890 gleich nach Rutherfords Entdeckung der Thoremanation und stellte seine wichtigsten Eigenschaften fest. Die zahlreichen, meist von Doktoranden ausgeführten Untersuchungen der Radio-

aktivität von Quellen, Bodenluft und Gesteinen sollen nicht unerwähnt bleiben.

Die schwierige Frage nach der Natur der flüssigen Kristalle konnte nur durch quantitative physikalische Messungen einwandfrei entschieden werden. Das hat Dorn als einer der ersten erkannt. Man verdankt ihm und seinen Schülern eine große Anzahl exakter Bestimmungen von Konstanten flüssiger Kristalle (seit 1906). Besonders die optischen Eigenschaften wurden untersucht (Brechungsindex, Doppelbrechung, Rotation, anomale Rotationsdispersion, magnetische Rotation, Absorptionsspektrum), aber auch andere Konstanten (Dielektrizitätskonstante, innere Reibung, Kapillarität, Dichte), die für das Verständnis der eigenartigen Erscheinungen an diesen Körpern von Bedeutung sind.

Durch seine mustergültigen Messungen und seine weiterführenden Entdeckungen, auch in manchen der hier nicht genannten Arbeiten, wird Dorns Gedächtnis in der Geschichte der Physik fortleben, noch dauernder als das Denkmal der Erinnerung, das er sich in den Herzen seiner Schüler und Fachgenossen gesetzt hat.

Albert Wigand.

(Eingegangen 13. Juli 1916.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur kinetischen Theorie der Verdampfung.

Von A. March.

1. Die Abhängigkeit des Druckes gesättigter Dämpfe von der Temperatur zu bestimmen, war das Ziel einer außerordentlich großen Zahl von theoretischen Arbeiten. Soweit diese Versuche von rein thermodynamischer Grundlage ausgehen, wenden sie sämtlich den zweiten Hauptsatz auf den Vorgang der Verdampfung an und suchen die auftretende Differentialgleichung mit Hilfe möglichst einfacher Annahmen zu integrieren, indem sie etwa die Verdampfungswärme als lineare Funktion der Temperatur annehmen, auf den Dampf die Gesetze idealer Gase anwenden und das spezifische Volumen der Flüssigkeit gegenüber dem des Gases vernachlässigen. Das Resultat ist in den weitaus meisten Fällen dasselbe: es ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$\lg p = A - \frac{B}{T} - C \log T,$$

in der p den Dampfdruck, T die absolute Temperatur und A, B, C Konstanten bedeuten. Diese Gleichung, die unter dem Namen Dupré-Rankinesches Dampfspannungsgesetz bekannt ist, zeigt in der Tat vorzügliche Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn die Werte der Konstanten aus den beobachteten Daten bestimmt werden. Dagegen bleiben die Versuche, die Konstanten aus der Theorie heraus zu bestimmen, sämtlich erfolglos, wie schon vor längerer Zeit Juliusburger[1]) in einer sehr sorgfältigen Untersuchung gezeigt hat. Man muß daraus schließen, daß die empirische Gültigkeit des Gesetzes mit seiner thermodynamischen Herleitung zumindest für hohe Temperaturen nichts zu tun hat und der Erfolg der Theorie also bloß ein zufälliger ist.

Die zweite Möglichkeit einer Theorie ist die molekular-kinetische Betrachtung des Verdampfungsvorganges. Das Gleichgewicht zwischen Dampf und Flüssigkeit kommt dadurch zustande, daß in jedem Zeitelement eine Anzahl Moleküle vermöge der Energie ihrer Wärmebewegung die Flüssigkeit verlassen und in den Dampfraum hineinfliegen und umgekehrt aus dem Dampfraum eine gleiche Zahl von Molekülen auf die Oberfläche der Flüssigkeit auftreffen und von ihr aufgenommen werden. Gelingt es also, die Zahl der Moleküle zu berechnen, die in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit austreten, so kann man ohne weiteres auf Dichte und Druck des Gases schließen, das mit dem Kondensat im Gleichgewicht steht. Bei der Berechnung dieser Zahl nun ist zu berücksichtigen, daß an der Oberfläche der Flüssigkeit Kräfte wirksam sind, die nach innen gerichtet sind und das Herausfahren der Flüssigkeitsmoleküle erschweren und daß also bloß jene Moleküle, deren Energie einen gewissen kritischen Betrag übersteigt, die Oberflächenschichte durchstoßen können. Wenn die Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle nach dem Maxwellschen Verteilungssatz erfolgt, so ist die Zahl der auftreffenden Moleküle mit einer Geschwindigkeitskomponente u senkrecht zur Oberfläche, die $> s$ ist

$$N_i \sqrt{\frac{hm}{\pi}} \int_s^\infty u e^{-hmu^2} du = \frac{N_i}{2\sqrt{hm\pi}} e^{-hms^2}$$

Dabei bedeutet N_i die Zahl der Moleküle im ccm der Flüssigkeit. Die Zahl der aus dem

1) P. Juliusburger, Ann. d. Phys. 3, 618, 1900.

Dampfraum in der Zeiteinheit sich kondensierenden Moleküle beträgt, wenn N_a die Molekülzahl im ccm des Gasraumes bedeutet

$$N_a \sqrt{\frac{hm}{\pi}} \int_0^\infty u e^{-hmu^2} du = \frac{N_a}{2\sqrt{hm\pi}}$$

Die Gleichgewichtsbedingung führt somit zur Gleichung

$$N_a = N_i e^{-hms^2}.$$

Könnte man die Größe der kritischen Mindestgeschwindigkeit s bestimmen, so könnte aus dieser Gleichung bei bekanntem N_i die Molekülzahl N_a und somit auch der Druck des gesättigten Dampfes berechnet werden. Aber die Bestimmung von s stößt auf Schwierigkeiten, denn es zeigt sich, daß es unzutreffend wäre, die Größe $\frac{1}{2} ms^2$ als Verdampfungswärme aufzufassen. Die Gründe dafür sind von Dieterici[1]) und Voigt[2]) klargestellt worden und liegen darin, daß beim Durchgang der Moleküle durch die Grenzschichte die Energie bei jedem Zusammenstoß eine Strecke überspringt, ohne dabei einer Verkleinerung durch die Oberflächenkräfte ausgesetzt zu sein. Um $\frac{1}{2} ms^2$ zu erhalten, muß von der Verdampfungswärme der Betrag Pv abgezogen werden, wenn P den von van der Waals mit $\frac{a}{v^2}$ bezeichneten Druck bedeutet. Damit ist die Aufgabe auf die Bestimmung der Verdampfungswärme und des spezifischen Volumens v als Funktionen der Temperatur zurückgeführt.

Van der Waals[3]) hat in Anlehnung an das Gesetz der übereinstimmenden Zustände für die Dampfspannungskurve die Gleichung angegeben

$$\log \frac{\pi_0}{p} = a\left(\frac{\vartheta_0}{T} - 1\right)$$

worin π_0 und ϑ_0 kritischen Druck und kritische Temperatur der Substanz bedeuten und a innerhalb gewisser Grenzen eine Konstante ist. Da diese Gleichung in ziemlich naher Übereinstimmung mit der Erfahrung steht, kann man vermuten, daß der Theorie auch noch eine andere Möglichkeit offen steht, zu einem Dampfspannungsgesetz zu gelangen: nämlich die, ein molekularmechanisches Modell anzugeben, dessen Eigenschaften durch die kritischen Daten bestimmt sind und das den Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und Dampf veranschaulicht.

1) C. Dieterici, Wied. Ann. **66**, 826, 1898.
2) W. Voigt, Gött. Nachr. S. 341, 1896, S. 19 u. 261, 1897.
3) van der Waals, Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes.

2. Ein solches Modell nun, das den angegebenen Forderungen genügt, ist das folgende: Zwei Flüssigkeitsmoleküle sollen mit einer der gegenseitigen Entfernung r proportionalen Kraft $a^2 r$ einander anziehen; doch soll diese Anziehungskraft nur auf eine gewisse Entfernung s reichen. Vermöge der Wärmeenergie wird dann das eine Molekül das zweite in einer Ellipse umlaufen; wir nehmen an, daß diese Bewegung in einer Kreisbahn erfolgt. Die Geschwindigkeit des Moleküls ist dann

$$u = 2\pi \nu r,$$

wenn r den Abstand und ν die Umlaufszahl in der Zeiteinheit bedeuten. Weil sich Zentrifugalkraft und anziehende Kraft $a^2 r$ einander das Gleichgewicht halten, ist

$$a^2 r = m 4 \pi^2 \nu^2 r. \qquad (1)$$

Die lebendige Kraft des Moleküls, die nach der statistischen Mechanik proportional ist der absoluten Temperatur, beträgt

$$\frac{1}{2} m 4 \pi^2 \nu^2 r^2 = \frac{a^2 r^2}{2} = kT. \qquad (2)$$

Nach der Quantentheorie ist noch eine Nullpunktsenergie im Betrage von $\frac{1}{2} h\nu$ in Rechnung zu ziehen, so daß wir dann erhalten

$$\frac{1}{2} a^2 r^2 + \frac{1}{2} h\nu = kT. \qquad (2')$$

Der Radius der Kreisbahn wird also mit wachsender Temperatur zunehmen. Von der Anziehungskraft haben wir angenommen, daß sie nur innerhalb einer gewissen Entfernung s wirksam ist, so daß sich zwei Moleküle, deren gegenseitiger Abstand größer als s geworden ist, unabhängig voneinander bewegen. Es liegt nun nahe, anzunehmen, daß diese Entfernung s bei der kritischen Temperatur erreicht wird; denn diese Temperatur ist ja gerade dadurch bestimmt, daß ihr die höchstzulässige Wärmebewegung entspricht, bei der ein Zusammenhalt der Moleküle noch stattfindet. Demnach ist s durch das kritische Volumen φ_0 bestimmt und wir können setzen

$$\alpha s^2 = \frac{\varphi_0}{N}, \qquad (3)$$

wenn N die Zahl der Moleküle und α eine (später zu bestimmende) Konstante von der Dimension einer Länge bedeutet. Für die kritische Temperatur ϑ_0 erhalten wir also aus (2')

$$\frac{1}{2} a^2 \frac{\varphi_0}{N\alpha} + \frac{1}{2} h\nu = k\vartheta_0. \qquad (4)$$

Vernachlässigen wir $\frac{1}{2} h\nu$, so wird

$$a^2 = 2k\vartheta_0 \frac{N\alpha}{\varphi_0}. \qquad (5)$$

Es sei jetzt mit χ_r die potentielle Energie eines

Moleküls bezeichnet, wenn dessen Abstand vom Nachbarmolekül gleich r ist; χ_s bedeutet also die potentielle Energie für die Entfernung $r \geq s$, d. h. eines Moleküls im freien Zustande. Nach dem früher Gesagten ist χ_r gegeben durch

$$\chi_r = \frac{a^2 r^2}{2}; \qquad (6)$$

es ist aber anzunehmen, daß auch der innere Zustand des Moleküls durch die Nähe des zweiten Moleküls beeinflußt wird. Auch von der Kraft dieser inneren Veränderung nehmen wir an, daß sie proportional der Entfernung r sei, so daß wir den Ausdruck (6) noch mit einer von der Natur der Substanz abhängigen Zahl β zu multiplizieren haben.

Auf Grund dieser Voraussetzungen ist es jetzt möglich, mit Hilfe des Boltzmannschen e-Satzes die Dampfdichte zu bestimmen. Die Art dieser Berechnung ist bereits von O. Stern[1]) gezeigt worden, der eine Dampfdruckformel für feste, einatomige Körper abgeleitet hat. Bezeichnen wir nämlich die Moleküldichten im Gasraum und in der Entfernung r mit n_0 und n_r, so ist nach Boltzmann

$$n_0 : n_r = e^{-\frac{\chi_s}{kT}} : e^{-\frac{\chi_r}{kT}}$$

oder

$$n_r = n_0\, e^{\frac{\chi_s}{kT}} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}}.$$

Da die mittlere Zahl der in einer Anziehungssphäre enthaltenen Moleküle gleich 2 ist, so ist

$$\int_0^s n_r 2\pi r\, dr = 2$$

oder

$$\int_0^s n_0 e^{\frac{\chi_s}{kT}} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}} 2\pi r\, dr = 2,$$

somit

$$n_0 = \frac{2}{2\pi e^{\frac{\chi_s}{kT}} \int_0^s e^{-\frac{\chi_r}{kT}} r\, dr}, \qquad (7)$$

die potentielle Energie beträgt nach (6) $\frac{a^2 r^2}{2}\beta$, so daß

$$\int_0^s e^{-\frac{\chi_r}{kT}} r\, dr = \int_0^s e^{-\frac{a^2 r^2 \beta}{2kT}} r\, dr.$$

Ist $\frac{a^2 \beta s^2}{2kT}$ genügend groß, so können wir für die obere Grenze des Integrals ∞ nehmen und wir erhalten durch die Substitution

$$\frac{a^2 \beta r^2}{2kT} = x^2; \quad r\, dr = 2x\, dx \cdot \frac{kT}{a^2 \beta}$$

$$\int_0^s e^{-\frac{\chi_r}{kT}} r\, dr = \int_0^s e^{-x^2} 2 \frac{kT}{a^2\beta} x\, dx = \frac{kT}{a^2 \beta}.$$

Die potentielle Energie χ_s hat den Wert

$$\frac{a^2 \beta s^2}{2} = \beta k \vartheta_0.$$

Somit wird

$$n_0 = e^{-\beta \frac{\vartheta_0}{T}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a^2 \beta}{kT} \qquad (8)$$

und nach Einsetzen des Wertes für a^2 aus (5)

$$n_0 = \frac{2kN\alpha\beta}{kT \cdot \pi} \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta \frac{\vartheta_0}{T}}. \qquad (8')$$

Um den Dampfdruck zu erhalten, müssen wir n_0 mit kT multiplizieren und erhalten

$$p = \frac{2\alpha\beta}{\pi} \cdot kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta \frac{\vartheta_0}{T}}. \qquad (9)$$

Um die Konstante α zu bestimmen, berechnen wir den kritischen Druck, indem wir für T den Wert ϑ_0 einsetzen. Es ergibt sich

$$\pi_0 = \frac{2\alpha\beta}{\pi} \cdot kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta}.$$

Nach der Zustandsgleichung von van der Waals soll nun aber sein

$$\pi_0 = \frac{3}{8} kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0}.$$

Somit wird

$$\frac{2\alpha\beta}{\pi} e^{-\beta} = \frac{3}{8}$$

oder

$$\frac{2\alpha\beta}{\pi} = \frac{3}{8} e^{\beta}.$$

Unter Benutzung dieser Beziehung erhalten wir aus (9)

$$p = \frac{3}{8} kN \cdot \frac{\vartheta_0}{\varphi_0} e^{-\beta\left(\frac{\vartheta_0}{T} - 1\right)} \qquad (10)$$

oder

$$p = \pi_0\, e^{-\beta\left(\frac{\vartheta_0}{T} - 1\right)}. \qquad (11)$$

Das Ergebnis der Rechnung ist also die van der Waalssche Dampfdruckformel.

3. Es ist durchaus nicht wahrscheinlich, daß das den angestellten Betrachtungen zugrunde gelegte Modell der Wirklichkeit entspricht; denn die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte sind zweifellos von komplizierterer Art als hier angenommen wurde. Wenn gleichwohl die Theorie zu einem zutreffenden Resultate führt,

1) O. Stern, diese Zeitschr. 14, 629, 1913.

so mag der Grund dafür darin liegen, daß eben mehrere Arten von molekularen Mechanismen möglich sind, deren makroskopische Äußerungen mit der Erfahrung Übereinstimmung zeigen, und daß es nicht so sehr das Kraftgesetz, als vielmehr gewisse durch die kritischen Daten bestimmte Eigenschaften des Mechanismus sind, von denen die Größe des Dampfdruckes abhängt. Das Theorem der übereinstimmenden Zustände würde zutreffen, wenn die Größe β für alle Substanzen denselben Wert hätte; da diese Größe aber von der Zahl der inneren Freiheitsgrade des Moleküls abhängt, wird sie sich mit der Natur der Substanz ändern. Dieser letzte Punkt ist von besonderer Bedeutung; die inneren Veränderungen eines Moleküls brauchen dabei durchaus nicht bloß in einer Änderung der gegenseitigen Lage der Atome zu bestehen; es ist vielmehr wahrscheinlich, daß auch die Atome selbst innerer Veränderungen von unbekannter Art fähig sind.

Innsbruck, den 16. Juni 1916.

(Eingegangen 19. Juni 1916.)

Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen.

Von Karl Uller.

Zweck dieser Abhandlung ist die Darstellung der Schallwellen in der Art, wie ich sie den elastischen und elektromagnetischen Wellen von elementarer Schwingungsform bereits gegeben habe. Während die bisher übliche nur für einfache Wellen gilt, gibt diese neue den allgemeinsten Bau der Wellen, und zwar in einheitlicher Fassung. Eine erste Anwendung davon werde ich für die Akustik der Atmosphäre machen.

1. Die zwei Arten von Wellen. Ist $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit und D die Massendichte in einem (unendlich) kleinen Volumenelement, so stellt ein Geschwindigkeitsfeld ($\mathfrak{V}$) im Verein mit einem Dichtefelde (D) eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar, wenn zwischen beiden die Beziehung

$$-D \operatorname{div} \mathfrak{V} = dD/dt = \dot{D} + (\mathfrak{V}, \operatorname{grad} D) \qquad (1)$$

erfüllt ist, welche die Natur des Flüssigen zum Ausdruck bringt. Für die Spannungen ($\mathfrak{T}$) bekommt man aus den Annahmen, daß die Hauptdrucke mit den Verrückungsachsen zusammenfallen und bezüglich der inneren Reibung lineare Funktionen der Dilatationsgeschwindigkeiten in jenen Achsen sind,

$$\mathfrak{T} = -\{P - \mathfrak{f}_v \operatorname{div} \mathfrak{V}\}\,\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{f}_g\,(\mathfrak{n}\nabla)\,\mathfrak{V} + \mathfrak{f}_g[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{V}]. \qquad (2)$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{n}$ die Einheitsnormale einer (unendlich) kleinen Flächeneinheit, P den Betrag des „isotropen Druckes“, $\mathfrak{f}_g$ und $\mathfrak{f}_v$ die beiden Friktions- oder Zähigkeitskoeffizienten der Flüssigkeit; letztere sind nach obigem unabhängig von der Geschwindigkeit gedacht, für P jedoch besteht keine Voraussetzung.

Als Bewegungsgleichung erhalten wir mit (2)

$$\begin{aligned} D \cdot \mathfrak{G} - \operatorname{grad} P + (2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{V} - \mathfrak{f}_g \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{V} \\ + 2(\operatorname{grad} \mathfrak{f}_g \nabla)\,\mathfrak{V} + \operatorname{div} \mathfrak{V} \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{f}_v - [\operatorname{rot} \mathfrak{V} \operatorname{grad} \mathfrak{f}_g] \\ = D \cdot d\mathfrak{V}/dt = D\{\dot{\mathfrak{V}} + (\mathfrak{V}\nabla)\mathfrak{V}\} \qquad (3) \\ = D\{\dot{\mathfrak{V}} + {}^1\!/_2 \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V}^2 - [\mathfrak{V} \operatorname{rot} \mathfrak{V}]\}. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet ($\mathfrak{G}$) das äußere Kraftfeld, wie z. B. die Schwere, auf die Masseneinheit bezogen.

Die Betrachtung der aus diesen Grundgleichungen ableitbaren Energie-Vergeudungsgleichung zeigt, daß $\mathfrak{f}_g$ und $2\mathfrak{f}_g + 3\mathfrak{f}_v \geqq 0$ sein müssen; gewöhnlich nimmt man an, daß der letzte Ausdruck gerade verschwindet.

Einschränkend setzen wir jetzt voraus:

a) daß das äußere Kraftfeld ($\mathfrak{G}$) keinen merklichen dynamischen Einfluß ausüben kann, sondern merklich nur einen hydrostatischen Druck

$$\mathfrak{T}_0 = -P_0\,\mathfrak{n}. \qquad (4)$$

Wir dürfen dann $D \cdot \mathfrak{G}$ durch den lokalen zeitlichen Mittelwert ersetzen und schreiben

$$\overline{D \cdot \mathfrak{G}} = \operatorname{grad} P_0 \qquad (5)$$

b) es sei $(\mathfrak{V}\nabla)\,\mathfrak{V}$ so klein gegen $\dot{\mathfrak{V}}$, daß dies Glied der Beschleunigung gegen jenes vernachlässigt werden darf.

Bedenken wir nun, daß der isotrope Normaldruck P keine Drehung der Teilchen hervorrufen, sondern nur Dichteänderungen bewirken kann, daß somit P nur in lamellarer Welle auftreten kann, so kommen wir, indem wir $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_g + \mathfrak{V}_v$ setzen und statt $-\operatorname{grad}(P - P_0)$ schreiben: $-(dP/dD) \operatorname{grad} D$, zu folgenden zwei Gleichungssystemen:

Die Flüssigkeits-Scherungswellen:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{V}_g = 0 \\ &D \cdot \dot{\mathfrak{V}}_g = -\mathfrak{f}_g \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{V}_g - [\operatorname{rot} \mathfrak{V}_g \operatorname{grad} \mathfrak{f}_g] \\ &\qquad + 2(\operatorname{grad} \mathfrak{f}_g \nabla)\mathfrak{V}_g; \\ &\mathfrak{T}_g = 2\,\mathfrak{f}_g(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{V}_g + \mathfrak{f}_g[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{V}_g]. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die Flüssigkeits-Verdünnungswellen:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathfrak{V}_v = 0 \\ &D\,\dot{\mathfrak{V}}_v = -\operatorname{grad}\{P - P_0\} \\ &\qquad + (2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{V}_v + 2(\operatorname{grad} \mathfrak{f}_g \nabla)\mathfrak{V}_v \\ &\qquad + \operatorname{div} \mathfrak{V}_v \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{f}_v; \\ &\mathfrak{T}_v = -\{P - \mathfrak{f}_v \operatorname{div} \mathfrak{V}_v\}\,\mathfrak{n} + 2\,\mathfrak{f}_g(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{V}_v; \\ &\operatorname{grad}\{P - P_0\} = (dP/dD) \operatorname{grad} D \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

merklich, gemäß der Einschränkung (a).

Beide Systeme haben nur noch die Dichte D gemeinsam, falls beide zugleich im selben Raume existieren.

Die Widerständigkeit der Flüssigkeit

$$-\Gamma = \frac{dP}{dD} = \left(\frac{dP}{dD}\right)_\Theta + \left(\frac{dP}{dD}\right)_D \cdot \frac{d\Theta}{dD},$$

sowie P, $\mathfrak{f}_g$ und $\mathfrak{f}_v$ sind Funktionen der Temperatur Θ und der Dichte D, welche beide durch äußere und innere Ursachen bestimmt werden. Die äußeren wie z. B. in bezug auf die Erdatmosphäre die Sonnenstrahlung und die Erdschwere, können als gegeben angesehen werden, somit auch die von ihnen hervorgerufenen Temperaturen und Dichten, während die inneren Ursachen von der Welle selbst herrühren und Temperaturen und Dichten bewirken, die Funktionen des Geschwindigkeitsfeldes sind. — Das Auftreten der Größe $d\Theta/dD$ zeigt, daß die Wärmeerzeugung und Wärmeverteilung einerseits und der Wellenbau andererseits sich gegenseitig beeinflussen.

Wir sehen also, daß die Bewegungsgleichungen streng genommen nicht linear sind. Dennoch sind Wellen von elementarer Schwingungsform möglich, allemal nämlich

c) wenn die von den Wellen hervorgerufenen Dichte- und Temperaturschwankungen klein sind, was allermeist auch zutrifft. Dann lassen sich zeitliche Mittelwerte einführen.

Bezeichnen wir nunmehr mit $\bar{\mathfrak{f}}_g$ den zeitlichen Mittelwert des ersten Zähigkeitskoeffizienten, so nimmt das System (6) dieselbe Form an wie das System (6) des § 4 der vorigen Abhandlung[1]). Es gelten also auch alle aus diesem ableitbaren Folgerungen. Der Bau einer Flüssigkeits-Scherungswelle ($\mathfrak{v}_g \cdot e^{i\Phi_g}$) ist also derselbe wie der einer elastischen Scherungswelle. Für das Quadrat des Wellennormalenpaares in einer umkehrbaren Welle finden wir $\mathfrak{w}^2 = a_0{}^2/D_0 \cdot D/a$, was in $a_0{}^2/a$ übergeht, falls Wellen dieser Art allein im selben Gebiet vorhanden sind. Zu beachten ist indessen, daß die Zusammensetzung der Wellencharakteristik a eine andere ist als bei den elastischen Wellen, es ist nämlich hier

$$a = -i\nu D/\mathfrak{f}_g, \tag{8}$$

also $a' = \nu'' D \mathfrak{f}_g$ und $a'' = -\nu' D \mathfrak{f}_g$.

Nicht so einfach und nicht in ganz so guter Annäherung gestalten sich Flüssigkeits-Verdünnungswellen ($\mathfrak{v}_v \cdot e^{i\Phi_v}$) von elementarer Schwingungsform, selbst wenn sie allein im Raum auftreten. Früher[2]) habe ich gezeigt, daß einem Geschwindigkeitsfeld

$$\mathfrak{V} = \tfrac{1}{2} \cdot \{V \cdot e^{i\nu t} + V^* \cdot e^{-i\nu^* t}\}$$

in einer Flüssigkeit eine lokale Dichte von der Form

$$D = \bar{D} - \tfrac{1}{2} \cdot \{\Delta/i\nu \cdot e^{i\nu t} - \Delta^*/i\nu^* \cdot e^{i\nu^* t}\} \tag{9}$$

entspricht; denn dieser Ansatz befriedigt in guter Annäherung die Kontinuitätsgleichung (1) in der Form

$$\dot{D} + (\mathfrak{V} \operatorname{grad} \bar{D}) = -\bar{D} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{V}, \tag{10}$$

wenn gesetzt wird

$$\Delta = \bar{D} \operatorname{div} V + (V, \operatorname{grad} \bar{D}). \tag{11}$$

Überstreichung einer Größe soll ihren zeitlichen Mittelwert anzeigen.

Wir erhalten auch für die nach der Zeit differentiierte Bewegungsgleichung, der zweiten unter (7), die elementare Schwingungsform als Lösung, wenn wir in ihr für die Reibungskoeffizienten $\mathfrak{f}_g$, $\mathfrak{f}_v$ und für die Dichte D ihre Mittelwerte einsetzen, was unbedenklich geschehen kann. Aber auch für die Widerständigkeit $\Gamma = dP/dD$ sind wir zur Bestimmung von V genötigt den Mittelwert einzusetzen, was eben die weniger gute Annäherung zur Folge hat. Damit geht nun die genannte Bewegungsgleichung über in

$$\left.\begin{aligned} &\nu^2 \bar{D} V + \{\bar{\Gamma}\bar{D} + i\nu(2\bar{\mathfrak{f}}_g + \bar{\mathfrak{f}}_v)\} \operatorname{grad}\operatorname{div} V \\ &\qquad + \bar{\Gamma} \operatorname{grad}(V \operatorname{grad} \bar{D}) \\ &+ \{\bar{\Gamma} \operatorname{grad} \bar{D} + i\nu \operatorname{grad} \bar{\mathfrak{f}}_v\} \operatorname{div} V \\ &\qquad + i\nu 2(\operatorname{grad} \bar{\mathfrak{f}}_g \nabla) V = 0. \\ &\text{mit der Nebenbedingung } \operatorname{rot} V = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dies System ist formal ähnlich dem System (7) im § 4 der genannten Grundlegung, das elastische Verdünnungswellen darstellt; für $\bar{\Gamma} = 0$ sind beide gleich.

Die Voraussetzung (b) verlangt, daß

$$|(V\nabla)V| / \sqrt{(VV^*)} << |\nu|$$

sei; es kann also das Geschwindigkeitsfeld räumlich um so stärker variieren, je größer die Frequenz ist.

Ein elliptisch schwingendes Geschwindigkeitsfeld in einer Flüssigkeit oder in einem Gase bewirkt eine Massenabwanderung, wie ich an dem oben angeführten Ort gezeigt habe. Diese mißt der Ausdruck

$$\overline{D \cdot \mathfrak{V}} = e^{i(\nu - \nu^*)t} / 2\nu\nu^* \cdot 1/2i \cdot \{\Delta^* \nu V - \Delta \nu^* V^*\} \tag{13}$$

Für den Mittelwert der kinetischen Energie in der Volumeneinheit haben wir noch

$$\overline{\tfrac{1}{2} D \cdot \mathfrak{V}^2} = e^{i(\nu - \nu^*)t} / 4 \cdot \bar{D}(VV^*). \tag{14}$$

2. Die Verdünnungswelle. Für eine Welle ($\mathfrak{v} \cdot e^{i\Phi}$) nimmt das System (12) des vorigen Abschnittes die Form an

---

1) K. Uller, Grundlegung usw. I (diese Zeitschr. 17, 168, 1916).

2) K. Uller, Über Flüssigkeitsbewegung bei vibratorischer Erregung (Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 813, 1914).

$$\left.\begin{array}{l}\{\nu^2\overline{D}+2\nu(\mathfrak{w},\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_g)\}\,\mathfrak{v}-\{\overline{\Gamma}\overline{D}+i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)\}\\ \quad\times\{(\mathfrak{v}\mathfrak{w})+i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\}\,\mathfrak{w}\\ +\{\overline{\Gamma}\overline{D}+i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)\}\{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}-i\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{w})\}\\ \quad -i\,\overline{\Gamma}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\overline{D})\mathfrak{w}\\ +\overline{\Gamma}\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\overline{D})+\{\mathrm{div}\,\mathfrak{v}-i(\mathfrak{v}\mathfrak{w})\}\times\\ \quad\{\overline{\Gamma}\mathrm{grad}\,\overline{D}+i\nu\,\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_v\}+i\nu 2(\mathrm{grad}\,\overline{\mathfrak{f}}_g\nabla)\mathfrak{v}=0\\ \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}+i[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]=0.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Im Gegensatz zu der bei den elastischen Verdünnungswellen auftretenden Größe

$$\nu^2 D/(\varepsilon_v+{}^4/_3\cdot\varepsilon_g)=a$$

hat hier die entsprechende Größe

$$\nu^2\overline{D}/\{\overline{\Gamma}\,\overline{D}+i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)\}=a\qquad(2)$$

verwickeltere Zusammensetzung, indem wir streng genommen bekommen:

$$a'=\frac{(\nu'^2-\nu''^2)\overline{\Gamma}+\nu''(\nu'^2+\nu''^2)(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)/\overline{D}}{|\overline{\Gamma}+i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)/\overline{D}|^2}$$

$$a''=\frac{2\nu'\nu''\overline{\Gamma}-\nu'(\nu'^2+\nu''^2)(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)/\overline{D}}{|\overline{\Gamma}+i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g+\overline{\mathfrak{f}}_v)/\overline{D}|^2}.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß in unserer Verdünnungswelle der Wellenvektor $\mathfrak{v}$ dem Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}=-\mathrm{grad}\,\Phi$ vermöge der Nebenbedingung proportional ist. Sucht man nämlich die Bedingung für die Lage der Verrückungsachsen $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ in einem Punkt der Welle, so ergibt sich aus dem Verschwinden der Schubspannungen auf diesen Achsen, wenn man die Tensornormale mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet

$$2\overline{\mathfrak{f}}_g\cdot\{[\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{v}]-i(\mathfrak{n}\mathfrak{w})[\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\}=0.\qquad(3)$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ kommt bei Berücksichtigung der Nebenbedingung unter (1)

$$([\mathfrak{n}\mathfrak{v}](\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{v})=0=(\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\nabla)\mathfrak{v})+(\mathfrak{n}[[\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}]),$$

also, da $(\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v})=i(\mathfrak{n}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}])$ und $(\mathfrak{w}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v})=0$ sein muß, (4)

$$(\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{v}]\nabla)\mathfrak{v})=-(\mathfrak{n}\mathfrak{v})(\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v})=-i(\mathfrak{n}\mathfrak{v})(\mathfrak{n}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]).$$

Bei skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{w}$ liefert (3) andererseits:

$$([\mathfrak{n}\mathfrak{w}](\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{v})=(\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{w}]\nabla)\mathfrak{v})+(\mathfrak{n}[[\mathfrak{n}\mathfrak{w}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}])$$
$$=(\mathfrak{n}\mathfrak{w})(\mathfrak{n}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}),\ \text{also}$$
$$(\mathfrak{n}([\mathfrak{n}\mathfrak{w}]\nabla)\mathfrak{v})=0.\qquad(5)$$

Die Bedingungen (4) und (5), die gelten, welches auch der N.-P. der Zeitzählung sei, ergeben

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=0,\ \text{also}\ \mathfrak{v}=-\mathrm{grad}\,\Psi=\sigma\cdot\mathfrak{w}\qquad(6)$$

zunächst nur auf den genannten Achsen, aber offenbar auch außerhalb derselben und somit in der ganzen Welle, denn $\mathfrak{v}$ ist unabhängig von der Tensornormalen $\mathfrak{n}$. Wenn aber $\mathrm{grad}\,\Psi=\sigma\cdot\mathrm{grad}\,\Phi$, ist σ notwendig eine Konstante. In einer gegebenen Verdünnungswelle ($\mathfrak{V}$) ist demnach Φ bis auf eine additive Konstante bestimmt, $\mathfrak{w}$ also vollständig. Diese eindeutige Größe $\mathfrak{w}$ nennen wir das Wellennormalenpaar. Umgekehrt gelangen wir somit zu dem Ergebnis:

Sind Frequenz und Dämpfung der Welle sowie die Körpereigenschaften gegeben, so ist die Verdünnungswelle durch das Wellennormalenpaar bestimmt — bis auf eine multiplikative Konstante, die willkürlich sein muß und vom N.:P. der Zeitzählung abhängt.

Dies Ergebnis gilt auch in einer elastischen Verdünnungswelle.

Ich habe den hier vorgetragenen Beweisgang, der zu (6) führt, schon früher[1]) beschritten, hier indessen die Gelegenheit wahrgenommen, ein Versehen zu berichtigen, das sich dort eingeschlichen hatte.

Das Wellennormalenpaar muß also die Funktion des Wellenvektors mit übernehmen. Eine Folge unseres Resultats ist, daß die Wellengleichung einer Verdünnungswelle nicht zerfällt. Man kann also das Phasengefälle einer Verdünnungswelle nicht umkehren, ohne den Bau der Welle zu ändern. Wegen der Nichtumkehrbarkeit gibt es auch nicht stehende Wellen im strengen Wortsinne.

Wenn wir $V=\mathrm{grad}\,\Omega$ setzen, ist der Nebenbedingung unter (12) des vorigen Abschnittes, der Lamellarität, auch auf diese Weise Genüge geschehen. In einer Welle haben wir dann

$$\mathfrak{v}\cdot e^{i\Phi}=\mathrm{grad}(\omega\cdot e^{i\Phi})=e^{i\Phi}\{\mathrm{grad}\,\omega-i\,\omega\,\mathfrak{w}\}.$$

Verglichen mit (6) muß demnach ω konstant sein, wenn wir unter Φ diejenige Ortsfunktion verstehen, deren Gradient das Wellennormalenpaar liefert.

Für einen homogenen Körper geht die Wellengleichung unter (12) des vorigen Abschnittes über in $\mathrm{grad}\,\{a\Omega+\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Omega\}=0$, d. h. es muß Ω die skalare Wellengleichung $a\Omega+\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Omega=0$ befriedigen. Daraus folgt aber, daß in unserer Welle gelten muß

$$a-\mathfrak{w}^2-i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}=0,\qquad(7)$$

falls sie in einem homogenen Körper verläuft. Für eine Kugelwelle finden wir beispielsweise $\mathfrak{w}=\{\sqrt{a}-i/r\}\,\mathfrak{r}/r$, worin $\mathfrak{r}$ den Topographen vom Betrage r bezeichnet, und demnach

$$\Phi=-\sqrt{a}\cdot r+i\log r+\mathrm{const},$$

also

$$\mathfrak{V}=\{\sqrt{a}-i/r\}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\,e^{-i\sqrt{a}\cdot r-\log r+\mathrm{const}},$$

mit dem die bekannte Lösung

$$\mathrm{grad}\,(e^{-i\sqrt{a}\,r}/r)$$

formal übereinstimmt. Es sei a reell und positiv, die Schwingungen also ungedämpft, die Flüssigkeit

1) K. Uller, Zurückwerfung und Brechung elastischer Wellen (Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 835, 1914).

reibungslos und $\overline{\Gamma}$ positiv. Dann hat man $|\mathfrak{w}'| = \sqrt{a}$ und $|\mathfrak{w}''| = -1/r$, so daß die Phasengeschwindigkeit $\nu'/\sqrt{a}$ und die Wellenlänge $2\pi/\sqrt{a}$ wird.

Die für die Dichteschwankungen maßgebende Größe Δ nimmt nach Gleichung (11) im ersten Abschnitt die Form an

$$\Delta = -i e^{i\Phi} \cdot \overline{D} \cdot \sigma \{\mathfrak{w}^2 + i \operatorname{div} \mathfrak{w} + i \mathfrak{w} \operatorname{grad} \log \overline{D})\}, \quad (8)$$

was in homogenen Körpern wegen (7) übergeht in

$$\Delta = -i e^{i\Phi} \cdot \overline{D} \cdot \sigma \cdot a. \quad (9)$$

Das besagt nicht, daß die Amplitude der Schwankungen überall in der Welle konstant sei. Denn in Φ steckt noch die Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$, die selbst in konservativen Körpern im allgemeinen nicht verschwindet, wie das Beispiel der Kugelwelle zeigt.

Für die Massenabwanderungsdichte in homogenen Körpern erhalten wir somit nach (13) im ersten Abschnitt

$$\overline{D \cdot \mathfrak{B}} = e^{-2(\nu'' t + \Phi'')} / 2\nu\nu^* \cdot \overline{D} \cdot \sigma\sigma^* \cdot {}^1/_2 \cdot \{a^* \nu \mathfrak{w} + a \nu^* \mathfrak{w}^*\} \quad (10)$$

Bei Reibungslosigkeit ($a = a^*$) und Ungedämpftheit ($\nu = \nu^*$) findet die Abwanderung in Richtung der Isophasen statt.

Die Elliptizität der Schwingung mißt nach § 1 der genannten Grundlegung

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\mathfrak{w}^2 \cdot \mathfrak{w}^{*2}}}{(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{w}^*)}. \quad (11)$$

In vielen Fällen ist es erlaubt, die streng genommen vorhandene Nichtumkehrbarkeit der Verdünnungswelle zu übersehen. Dann liefert uns (1) mit Hilfe des Ergebnisses (6) die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} &\{\{\overline{\Gamma}\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\} \operatorname{div} \mathfrak{w} + i\nu 2(\mathfrak{w} \operatorname{grad} \overline{\mathfrak{f}}_g) \\ &\qquad + \overline{\Gamma}(\mathfrak{w} \operatorname{grad} \overline{D})\}\mathfrak{w} \\ &+ \{\overline{\Gamma}\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\} \operatorname{grad} \mathfrak{w}^2 \\ &+ \mathfrak{w}^2 \{\overline{\Gamma} \operatorname{grad} \overline{D} + i\nu \operatorname{grad} \overline{\mathfrak{f}}_v\} = 0. \end{aligned} \quad (12')$$

$$\begin{aligned} &\{\{\nu^2 \overline{D} - \{\overline{\Gamma}\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\} \mathfrak{w}^2\} \mathfrak{w} \\ &\qquad + \{\overline{\Gamma}\overline{D} + i\nu(2\overline{\mathfrak{f}}_g + \overline{\mathfrak{f}}_v)\} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{w} \\ &+ \overline{\Gamma} \operatorname{grad}(\mathfrak{w} \operatorname{grad} \overline{D}) + \operatorname{div} \mathfrak{w} \{\overline{\Gamma} \operatorname{grad} D \\ &+ i\nu \operatorname{grad} \overline{\mathfrak{f}}_v\} + i\nu 2(\operatorname{grad} \overline{\mathfrak{f}}_g \Gamma)\mathfrak{w} = 0. \end{aligned} \quad (12'')$$

Sie entsprechen im Grenzfalle $\overline{\Gamma} = 0$ genau den Gleichungen (10') und (10'') im § 4 der genannten Grundlegung, welche Beziehungen für elastische Verdünnungswellen gelten, wenn man von ihrer Nichtumkehrbarkeit absehen darf. Für homogene Körper gehen diese Ausdrücke dort und hier in die für Planwellen über. Wir haben also mit ihnen die Abweichungen für inhomogene Körper zur Darstellung gebracht. Sie geben die Grundlage für das Studium der Verdünnungswellen in der Erde und in der Atmosphäre. Davon wird später noch im einzelnen zu handeln sein.

Gießen, im Juni 1916.

(Eingegangen 24. Juni 1916.)

Flüssige Kristalle und anisotrope Flüssigkeiten. (Nachtrag.)

Von W. Voigt.

Herr Fr. Krüger hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß in meinem Bericht (diese Zeitschr. **17**, 76—87, 128—135, 152—161, 1916) über den in der Überschrift bezeichneten Gegenstand eine zusammenhängende Gruppe (wohl ein „Jahrgang") von Abhandlungen unberücksichtigt geblieben ist. Wenngleich nun mein Vortrag sich nicht die absolute Vollständigkeit zum Ziel gesetzt hatte, sondern nur einen Überblick über das Gesamtgebiet der Erscheinungen (bei Bevorzugung der theoretisch faßbaren) und über die Entwickelung der zu ihrer Deutung herangezogenen Vorstellungen geben wollte[1]), so spreche ich doch gerne mein Bedauern über das Versehen aus, und will versuchen, durch diesen Nachtrag die gelassene Lücke auszufüllen.

Die Arbeiten von Neufeld[2]) und Krüger[3]), um die es sich in erster Linie handelt, stellen Fortsetzungen und Ergänzungen der am Ende von § 10 beschriebenen Beobachtungen von Bose über den Ausfluß anisotroper Flüssigkeiten aus Kapillarröhren bei normaler und bei turbulenter Strömung dar. Jene Beobachtungen waren durch die in § 9 auseinandergesetzte Schwarmhypothese veranlaßt und sollten speziell feststellen, ob nicht bei dem turbulenten Strömungsvorgang die Schwarmbildung beeinträchtigt und damit das Verhalten der aniso-

1) Zusatz bei der Korrektur. Herr O. Lehmann wendet sich neuerdings (diese Zeitschr. **17**, 241, 1916) gegen verschiedene Bemerkungen in meinem Vortrag. Es handelt sich dabei wesentlich um Prioritäts- und Auffassungsfragen, daneben auch um einige Mißverständnisse meiner Äußerungen, aber ich habe nicht den Eindruck, daß eine Diskussion darüber förderlich und allgemein interessant sein würde. Speziell sind Prioritätsfragen jederzeit und ganz besonders in dem vorliegenden Gebiet dornig. Ich habe mich nicht unterfangen, sie für irgend einen der strittigen Punkte zu lösen, und meine bei der Schilderung der historischen Entwicklung unserer Kenntnisse und Vorstellungen hier und da gemachten Äußerungen über Autorschaften wollen nur die unmaßgebliche Ansicht ausdrücken, die ich mir auf Grund der Publikationen gebildet habe.

2) M. W. Neufeld, diese Zeitschr. **14**, 646, 1913; Diss. Danzig 1913.

3) Fr. Krüger, diese Zeitschr. **14**, 651, 1913.

tropen Phase demjenigen der isotropen näher gebracht würde. Die von Bose gefundene Tatsache, daß der „Sprung", den die Ausflußzeit normaler Strömung beim Übergang von der a- zu der i-Phase zeigt, bei turbulenter Strömung geringer wird, wurde von Bose als eine Stütze der Schwarmhypothese angesehen; aber ich habe a. a. O. schon ein gewisses Bedenken gegen die Sicherheit dieses Schlusses geltend gemacht.

Neufeld hat nun auf Krügers Veranlassung die Boseschen Beobachtungen wieder aufgenommen und sie besonders auch auf das isotrope Gebiet ausgedehnt. Die Anregung hierzu gaben Untersuchungen von Willers[1]) über die Abhängigkeit der Ausflußzeit bei Emulsionen von Temperatur und Druck. Diese Beobachtungen lieferten für die Isobaren (Ausflußzeit bei konstantem Druck als Funktion der Temperatur dargestellt unter Reduktion auf gleiche Ordinaten beim Klärungspunkt) für den Klärungspunkt selbst eine deutliche nach oben gerichtete Spitze, mit einem ungefähr gleichen Abfall nach beiden Seiten hin. Dieser Abfall erwies sich um so stärker, je geringer der Druck und somit die Geschwindigkeit war, mit denen der Ausfluß geschah. Es bestand nun zwischen diesen und den Boseschen Resultaten eine gewisse Verwandtschaft; insbesondere wenn man die Unstetigkeit der Ausflußzeit beim Übergang von der a- zur i-Phase nur als scheinbar ansah und den größeren Sprung als einen Anstieg von größerer Steilheit auffaßte, konnte man in dem Verhalten der a-Phase ein Analogon zu demjenigen der Emulsion unterhalb des Klärungspunktes sehen. Oberhalb des Klärungspunktes versagte anscheinend diese Analogie; Bose hat dort (für die i-Phase) eine Abhängigkeit des Abfalles der Ausflußgeschwindigkeit vom Druck nicht erwartet und aus seinen wenigen Beobachtungen in diesem Gebiet auch nicht geschlossen. Neufeld hat nun aber durch Beobachtungen mit Anisaldazin und p-Azoxyanisol gezeigt, daß bei diesen Körpern doch eine solche Abhängigkeit vorhanden ist. Da in der i-Phase nach Bose Schwärme nicht anzunehmen sind, so erscheint die Anwendung der Schwarmhypothese zur Erklärung des in gewisser Hinsicht analogen Phänomens innerhalb der a-Phase auch nicht als zwingend nötig.

Krüger vertritt den Standpunkt, daß in beiden Fällen eine ganz allgemeine hydrodynamische Eigentümlichkeit zur Geltung komme. Nach Beobachtungen von Sorkau[1]) über Ausflußgeschwindigkeiten bei turbulenter Strömung, um deren Deutung sich Schaefer und Frankenberg[2]) wie auch Mie[3]) bemüht haben, scheint für einfache Flüssigkeiten allgemein der Abfall der Ausflußzeit mit steigender Temperatur abzunehmen, wenn der Druck und damit die Turbulenz zunimmt. Dieser Regel würde sich das Verhalten sowohl der i-Phase, als der Emulsionen oberhalb des Klärungspunktes, ohne weiteres fügen. Das Verhalten der a-Phase und der Emulsionen unterhalb des Klärungspunktes, stimmt aber damit nur dann, wenn man dort den Abfall mit fallender Temperatur anstatt desjenigen mit steigender setzt, und das erscheint nicht so ganz befriedigend. Allerdings ist für einige a-Phasen, die ein genügend ausgedehntes Existenzbereich besitzen, bei niedrigeren Temperaturen ein Abfall der Isobaren mit steigender Temperatur beobachtet (s. dazu Ende von § 5), aber es ist m. E. keineswegs selbstverständlich, daß mit einem langsameren Abfall dort ein langsamerer Anstieg zum Klärungspunkt notwendig verbunden ist. So bleibt m. E. immer noch ein unerklärter Rest übrig.

Neufeld hat die Ausflußbeobachtungen noch nach zwei anderen Richtungen über das von seinem Vorgänger bearbeitete Gebiet hinaus erweitert. Einerseits hat er die Weite der benutzten Kapillaren stark variiert, um festzustellen, wie dieselbe auf die Isobaren der Ausflußzeiten einwirke. Bose hatte erwartet, daß bei Röhren von wachsenden Weiten, bis zu solchen, die viel größer wären, als die Molekülschwärme, der Übergang von normaler Strömung zu Turbulenz und die Steigerung der letzteren sich immer weniger im Verlauf der Isobaren der Ausflußzeit ausdrücken und bei größten Weiten schließlich verschwinden möchte. Neufelds Beobachtungen gaben nichts dergleichen. Ferner hat er die Ausflußkapillare einem transversalen Magnetfeld ausgesetzt, um zu erproben, ob dessen nach § 11 die Moleküle orientierende Wirkung den Verlauf der inneren Reibung beeinflusse. Auch das Ergebnis dieser Versuche war negativ. Krüger schließt aus beiden Reihen, daß die Boseschen Schwärme sehr klein auch gegen die kleinsten benutzbaren Rohrweiten seien und daher bei dem Vorgang der inneren Reibung überhaupt nicht merklich mitwirkten.

Es ist sehr wohl zuzugeben, daß nach diesen

1) Fr. A. Willers, diese Zeitschr. **10**, 244, 1909.

1) W. Sorkau, diese Zeitschr. **12**, 582, 1911; **13**, 805, 1912.

2) Cl. Schäfer u. G. Frankenberg, diese Zeitschr. **14**, 89, 1913.

3) G. Mie, diese Zeitschr. **14**, 93, 1913.

Ergebnissen in den Beobachtungen über innere Reibung Stützen für die Schwarmhypothese nicht zu finden sind. Freilich liefern sie, samt den daran geknüpften Überlegungen, auch keinen Fortschritt in der Deutung der speziellen Erscheinungen im Bereiche des Überganges von anisotroper zu isotroper Phase.

Göttingen, Anfang Juni 1916.

(Eingegangen 19. Juni 1916.)

Fragen der Pyro- und Piezoelektrizität der Kristalle. II. Einfluß der Absolutwerte der dielektrischen Momente auf die beobachtbaren Erscheinungen[1]).

Von W. Voigt.

7. Es ist bekannt, daß Lord Kelvin den Kristallen derjenigen Gruppen, die eine einzelne ausgezeichnete Richtung von polarem Charakter besitzen, ein permanentes elektrisches Moment beigelegt hat, das, solange der Kristall nicht mechanisch oder thermisch beeinflußt wird, durch eine auf seiner Oberfläche influenzierte Ladung bzw. seiner Wirkung kompensiert bleibt. Die Wirkung einer thermischen oder mechanischen Veränderung kommt dann auf eine doppelte Weise zustande. Einerseits hört u. U. bei einer Deformation des Kristalls aus rein geometrischen Gründen die an der Oberfläche (für einige Zeit wenigstens) festhaftende Ladung auf, das innere Moment zu kompensieren. Andererseits verändert jener Eingriff in physikalischer Weise, d. h. durch bestimmte Vorgänge in der Kristallsubstanz, deren spezifisches Moment derart, daß, wenn man auch jene geometrischen Veränderungen aufheben könnte, doch die Oberflächenladung keine Kompensierung mehr liefern würde.

Diese zwei wesentlich verschiedenen Wirkungen, die auch weiter als „geometrische" und „physikalische" bezeichnet werden mögen, haben jede für sich ein spezifisches Interesse, und es wäre von Bedeutung, wenn es gelänge, sie durch die Beobachtung getrennt zu messen. Insbesondere würde die erstere Wirkung einen Rückschluß auf die Größe des ursprünglichen Momentes gestatten, dessen Kenntnis an sich und ganz besonders in Verbindung mit der molekularen Theorie der Pyro- und Piezoelektrizität Wichtigkeit besitzt.

Wir sind über diesen „Absolutwert" des spezifischen elektrischen Moments von pyroelektrisch erregbaren Kristallen bisher keineswegs zuverlässig informiert. Eine orientierende Beobachtung, die ich vor langer Zeit angestellt habe[1]), und die an die scheinbare Ladung auf einer frischen Bruchfläche eines Turmalinkristalls anknüpfte, liefert vermutlich das Vorzeichen richtig, gibt aber selbst über die Größenordnung keine Sicherheit, weil man nicht wissen kann, welche Vorgänge sich im Moment des Zerbrechens des Kristalls abspielen. Die bekannte Erscheinung des Leuchtens von Zuckerkristallen beim Zertrümmern legt die Vorstellung von Entladungen hoher Spannungen nahe, und solche würden natürlich einer nachträglichen Messung der scheinbaren Ladungen auf den Bruchflächen den größten Teil ihrer Bedeutung nehmen. Um so wichtiger wäre es, wenn es gelänge, aus Beobachtungen über pyro- und piezoelektrische Erregungen quantitative Schlüsse auf das primäre Moment zu ziehen.

Ich habe diese Frage bei Aufstellung der phänomenologischen Theorie der polaren Erregungen ausführlich behandelt und schließlich gezeigt[2]), daß allerdings das anfängliche Moment an den beobachtbaren Erscheinungen Anteil hat, daß aber dieser (geometrische) Anteil sich der Wirkung der physikalischen Änderung des innern Moments so verbindet, daß man ihn durch die Beobachtung nicht absondern kann. Die analoge bedeutungsvolle Frage bietet sich nun auch bei den zentrischen Erregungen, und ihre Bearbeitung bildet den Hauptteil der nachstehenden Untersuchung. Es sei im voraus bemerkt, daß das Resultat der Theorie hier wesentlich von dem für azentrische Erregungen gefundenen abweicht. Wegen bestimmter Zusammenhänge sollen einleitend die dielektrischen Momente erster und zweiter Ordnung aus den Vorstellungen der Gittertheorie abgeleitet werden.

8. Eine Formulierung der Momente erster Ordnung auf Grund der Gitterannahme hat Herr Born[3]) folgendermaßen gegeben.

Die Koordinaten x_k, y_k, z_k der Pole e_k eines Elementarparallelepipeds (kurz eines „Elementes") des Kristalls, für welche gilt

$$\Sigma e_k = 0, \tag{34}$$

läßt er durch die Deformation verändert werden nach dem Schema

$$x_k' = x_k + u_k + x_k u_x + y_k u_y + z_k u_z, \dots \tag{35}$$

Hierin sind die u_k, .. der Polart (k) individuell und für alle Elemente gleich; sie stellen also eine gegenseitige Verschiebung der Gitter (k) ohne

1) Numerierung der Paragraphen und Formeln schließen sich der Bequemlichkeit halber an die frühere Arbeit (diese Zeitschr. 17, 287—293, 1916) an.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 60, 368, 1897.

2) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig u. Berlin, 1910, S. 842.

3) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig und Berlin, 1913, S. 23 u. 36.

Deformation dar. Die drei letzten Glieder jeder Formel, in denen

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \tag{36}$$

Differentialquotienten der Komponenten eines im Raume stetigen „Verschiebungsvektors“ $\mathfrak{v}$ bezeichnen, geben hingegen eine Deformation des Polsystems eines Elements von derselben Natur, als wäre der Kristall ein Kontinuum, und wären die Pole in diesem markierte Punkte.

Nach den Bornschen Entwicklungen sind die $u_k, \dots$ lineäre Funktionen der sogenannten „Deformationsgrößen“

$$u_x = x_x,\ v_y = y_y,\ w_z = z_z,\ w_y + v_z = y_z,\ u_z + w_x = z_x,\ v_x + u_y = x_y; \tag{37}$$

das konstante Glied darf als eine Funktion der Temperatur betrachtet werden und stellt somit eine gegenseitige Verschiebung der verschiedenen Atomgitter dar, die bei verhinderten Deformationen als eine reine Wirkung der Temperaturänderung eintritt und die sog. wahre Pyroelektrizität bedingt. Die Temperaturabhängigkeit der übrigen Parameter wird nicht ausgeschlossen; dieselbe drückt aber nur die Temperaturabhängigkeit der Piezoelektrizität und damit eine Erscheinung aus, die hier nicht in Betracht gezogen werden soll.

Die vorstehenden Festsetzungen unterscheiden sich formal von den Bornschen darin, daß bei jenen die wirklichen Längen (Koordinaten, Verschiebungen) aus den vorstehend eingeführten erst durch Anbringung eines gewissen Faktors (δ) entstehen. Dieser Faktor bedeutet aber für unsere Untersuchungen nur eine unnötige Komplikation der Formeln und ist daher im folgenden mit Eins vertauscht.

Für ein Element erhält man nunmehr die Komponenten des ursprünglichen Moments erster Ordnung $\mathfrak{p}^0$ gegeben durch

$$\mathfrak{p}^0_x = \Sigma e_k x_k, \dots, \tag{38}$$

die des veränderten durch

$$\mathfrak{p}_x' = \mathfrak{p}_x^0 (1 + u_x) + \mathfrak{p}_y^0 u_y + \mathfrak{p}_z^0 u_z + \mathfrak{p}_x, \dots$$

bei

$$\mathfrak{p}_x = \Sigma e_k u_k. \tag{39}$$

Sind in der Volumeneinheit ζ Elemente vorhanden, so setzt Herr Born deren Moment für den ursprünglichen Zustand

$$\mathfrak{P}^0 = \zeta \mathfrak{p}^0 \tag{40}$$

und ebenso für den neuen $(\mathfrak{P}) = \zeta \mathfrak{p}'$. Letzteres ist aber offenbar unrichtig, und die Verwendung dieses Wertes würde uns weiterhin auf wesentlich falsche Bahn leiten. Die Anzahl der Elemente in der Volumeneinheit wird nämlich durch die Deformation, wenn δ die räumliche Dilatation bezeichnet, im Verhältnis $(1 - \delta) : 1$ verkleinert, und somit ist

$$(\mathfrak{P}) = \zeta \mathfrak{p}' (1 - \delta), \tag{41}$$

d. h. bis auf Glieder erster Ordnung

$$(\mathfrak{P})_x = \mathfrak{P}_x^0 (1 + u_x - \delta) + \mathfrak{P}_y^0 u_y + \mathfrak{P}_z^0 u_z + \mathfrak{P}_x, \dots \tag{42}$$

bei $\mathfrak{P}_x = \zeta \mathfrak{p}_x$. Hierin bezeichnen wie die $\mathfrak{p}_x, \dots$ auch die $\mathfrak{P}_x, \dots$ lineäre Funktionen der Deformationsgrößen, deren konstantes Glied die Temperatur enthält. —

Die Komponenten des ursprünglichen Moments zweiter Ordnung für ein Element bestimmen sich analog zu (38) durch

$$\pi_{xx}^0 = \Sigma e_k x_k^2, \dots \quad \pi_{yz}^0 = \Sigma e_k y_k z_k, \dots \tag{43}$$

die des veränderten durch

$$\pi_{xx}' = \Sigma e_k x_k'^2, \dots \quad \pi_{yz}' = \Sigma e_k y_k' z_k', \dots, \tag{44}$$

wobei die $x_k', \dots$ durch (35) definiert sind. Sieht man die $u_k, \dots$ und auch die $u_x, \dots$ als kleine Größen erster Ordnung an, so schreibt sich bis auf diese Ordnung

$$\begin{aligned} \pi_{xx}' &= \pi_{xx}^0 + 2(\pi_{xx}^0 u_x + \pi_{xy}^0 u_y + \pi_{xz}^0 u_z) + \pi_{xx}, \dots, \\ \pi_{yz}' &= \pi_{yz}^0 + \pi_{xz}^0 v_x + \pi_{yz}^0 v_y + \pi_{zz}^0 v_z \\ &\quad + \pi_{xy}^0 w_x + \pi_{yy}^0 w_y + \pi_{zy}^0 w_z + \pi_{yz}, \dots, \end{aligned} \tag{45}$$

wobei

$$\pi_{xx} = 2 \Sigma e_k u_k x_k, \quad \pi_{yz} = \Sigma e_k (v_k z_k + w_k y_k), \dots \tag{46}$$

nach dem zu (35) Gesagten lineäre Funktionen der Deformationsgrößen darstellen, deren konstantes Glied die Temperatur enthält.

Für die Volumeneinheit folgt für den ursprünglichen Zustand das Moment

$$\Pi^0 = \zeta \pi^0, \text{ also } \Pi_{xx}^0 = \zeta \pi_{xx}^0, \dots \tag{47}$$

für den veränderten Zustand analog zu (41)

$$(\Pi) = \zeta \pi' (1 - \delta), \text{ also } (\Pi)_{xx} = \zeta \pi_{xx}' (1 - \delta), \dots \tag{48}$$

was sich bis auf Glieder erster Ordnung schreibt

$$\begin{aligned} (\Pi)_{xx} &= \Pi_{xx}^0 (1 - \delta) + 2(\Pi_{xx}^0 u_x + \Pi_{xy}^0 u_y \\ &\quad + \Pi_{xz}^0 u_z) + \Pi_{xx}, \dots \\ (\Pi)_{yz} &= \Pi_{yz}^0 (1 - \delta) + \Pi_{xz}^0 v_x + \Pi_{yz}^0 v_y + \Pi_{zz}^0 v_z \\ &\quad + \Pi_{xy}^0 w_x + \Pi_{yy}^0 w_y + \Pi_{yz}^0 w_z + \Pi_{yz}, \dots \end{aligned} \tag{49}$$

Die $\Pi_{xx} = \zeta \pi_{xx}, \dots \Pi_{yz} = \zeta \pi_{yz} \dots$ haben dabei dieselbe Natur, wie sie bez. der $\pi_{xx}, \dots$ oben ausgesprochen ist.

9. Wir wenden uns nun zur Untersuchung der im Eingang formulierten allgemeinen Frage, auf welche Weise jene ursprünglich die innern Momente des Kristalls kompensierende Oberflächenladung sich nach thermischer oder mechanischer Einwirkung auf den Kristall noch Einfluß ausübt, insbesondere, inwieweit ihr Vorhandensein auch im neuen Zustand die ursprünglichen oder absoluten Momente unerkenn-

bar macht, derart, daß dieselben einer quantitativen Bestimmung entzogen werden. Diese Untersuchung soll hier zunächst für den Fall polarer Erregung durchgeführt werden, und zwar erst ungefähr in der von mir früher mitgeteilten Weise, sodann (aus einem bestimmten Grunde) auch im Anschluß an den vorstehend reproduzierten Bornschen Ansatz. Die grundlegenden allgemeinen Formeln sind für beide Entwicklungen dieselben.

Im ursprünglichen Zustand ist die Erregung homogen; es gilt somit für die Potentialfunktion statt der allgemeinen Formel (19)

$$\psi_1 = \int \mathfrak{P}_n \frac{do}{r} - \int \operatorname{div} \mathfrak{P} \frac{dk}{r} \qquad (19)$$

nunmehr

$$\psi_1{}^0 = \int \mathfrak{P}^0{}_{n^0} \frac{do}{r}, \qquad (50)$$

wobei $\mathfrak{P}^0$ das anfängliche Moment der Volumeneinheit und n^0 die anfängliche (äußere) Normalenrichtung mit den Kosinus α^0, β^0, γ^0 bezeichnet. Die kompensierende Oberflächenladung hat somit die Dichte

$$\sigma^0 = - \mathfrak{P}^0{}_{n^0}. \qquad (51)$$

Im deformierten Zustand gelte für die Wirkung der innern Erregung

$$\psi_1 = \int (\mathfrak{P})_n \frac{do}{r} - \int \operatorname{div}(\mathfrak{P}) \frac{dk}{r}, \qquad (52)$$

worin $(\mathfrak{P})$ das ganze im zweiten Zustand vorhandene Moment der Volumeneinheit bezeichnet. Ihm entsprechen die Dichten

$$(\sigma) = (\mathfrak{P})_n, \quad (\rho) = - \operatorname{div}(\mathfrak{P}). \qquad (53)$$

(ρ) kommt vollständig zur Geltung; (σ) aber ist in seiner Wirkung zum Teil durch den Einfluß der an der Oberfläche haftenden und die ursprüngliche Erregung kompensierenden Dichte σ^0 neutralisiert. Doch kommt letztere nicht voll zur Geltung. Erfährt nämlich das Oberflächenelement do eine Dilatation ϑ, so kommt statt σ^0 nur $\sigma^0(1 - \vartheta)$ zur Wirkung.

Hiernach sind die faktisch wirksamen Dichten σ' und ρ' gegeben durch

$$\sigma' = (\mathfrak{P})_n - \mathfrak{P}^0{}_n (1 - \vartheta), \rho' = - \operatorname{div}(\mathfrak{P}). \quad (54)$$

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob in diesen Ausdrücken ein Anteil von $\mathfrak{P}^0$ übrig bleibt, und ob er sich von den physikalischen Wirkungen der Deformation und Temperaturänderung durch die Beobachtung sondern läßt. Ich bespreche nun, wie gesagt, zunächst die von mir benutzte Betrachtungsweise.

Mein Ansatz geht dahin,

$$(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}^0) + \mathfrak{P} \qquad (55)$$

zu setzen, wobei $(\mathfrak{P}^0)$ dasjenige Moment bezeichnet, das aus $\mathfrak{P}^0$ rein durch die geometrischen Veränderungen der Gestaltung des Kristalls entsteht, und $\mathfrak{P}$ das physikalisch Neue umfaßt. Die geometrischen Veränderungen bestehen in einer räumlichen Dilatation δ, die $\mathfrak{P}^0$ im Verhältnis $(1 - \delta) : 1$ verkleinert, und in einer Drehung $\mathfrak{d}$, die den Zuwachs $[\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{P}^0]$ liefert. Es gilt demgemäß

$$(\mathfrak{P}^0) = \mathfrak{P}^0 (1 - \delta) + [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{P}^0]. \qquad (56)$$

$\mathfrak{P}$ ist nach Früherem eine lineäre Funktion der Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$, deren „konstantes" Glied die Temperatur enthält und die „wahre" Pyroelektrizität veranlaßt. Da

$$\vartheta = \delta - \Delta \qquad (57)$$

ist[1]), wobei Δ die lineäre Dilatation in der Richtung normal zu do bezeichnet, so hat man zunächst aus (54), (55) und (56) bis auf Größen erster Ordnung

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n{}^0 \Delta + [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{P}^0]_n + \mathfrak{P}_n{}^0 - \mathfrak{P}^0{}_{n^0}. \quad (58)$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{P}_n{}^0 - \mathfrak{P}^0{}_{n^0} = \mathfrak{P}_x{}^0 (\alpha - \alpha^0) + \mathfrak{P}_y{}^0 (\beta - \beta^0) + \mathfrak{P}_z{}^0 (\gamma - \gamma^0) \qquad (59)$$

und nach bekannten Formeln[1])

$$\alpha - \alpha^0 = \alpha \Delta - (\alpha u_x + \beta v_x + \gamma w_x), \ldots \quad (60)$$

wobei $u_x, v_x, \ldots$ die in (36) festgestellte Bedeutung haben.

Man kann also, falls man das Symbol grad nur auf $\mathfrak{v}$ bezieht, setzen

$$\mathfrak{P}_n{}^0 - \mathfrak{P}^0{}_{n^0} = \mathfrak{P}_n{}^0 \Delta - (\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad} (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})), \quad (61)$$

und erhält damit

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n + [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{P}^0]_n - (\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad} (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})). \quad (62)$$

Hieraus folgt nach einfacher Zusammenziehung bei Einführung des Tensortripels T der Deformation mit den Komponenten

$$T_{xx} = u_x = x_x, \ldots \; T_{yz} = \frac{1}{2}(v_z + w_y) = \frac{1}{2} y_z, \ldots (63)$$

schließlich

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n - [T \cdot \mathfrak{P}^0]_n. \qquad (64)$$

Für die wirksame Raumdichte liefert (54), (55) und (56)

$$\rho' = \operatorname{div} \mathfrak{P} + \operatorname{div} \{\mathfrak{P}^0 (1 - \delta)\} + \operatorname{div} [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{P}^0]. \quad (65)$$

Nun ist aber $\operatorname{div} \mathfrak{P}^0 = 0$, somit

$$\operatorname{div} \{\mathfrak{P}^0 (1 - \delta)\} = - (\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad} \delta), \qquad (66)$$

und wegen $\mathfrak{d} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ und $\operatorname{div} \mathfrak{v} = \delta$

$$\operatorname{div} [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{P}^0] = \frac{1}{2} \{(\mathfrak{P}^0 \cdot \operatorname{grad} \delta) - (\mathfrak{P}^0 \cdot \mathfrak{v} \Delta)\}.$$

Dies liefert zusammen

$$\rho' = \operatorname{div} \mathfrak{P} - \frac{1}{2} (\mathfrak{P}^0 \cdot \{\operatorname{grad} \delta + \mathfrak{v} \Delta\})$$

1) S. z. B. W. Voigt, Kristallphysik S. 171 u. f.

und bei einfachem Umordnen des zweiten Termes

$$\varrho' = \text{div}\,\{\mathfrak{P} - [T \cdot \mathfrak{P}^0]\}\,. \qquad (67)$$

Die Formeln (64) und (67) ergeben, daß in σ' und ϱ' das ursprüngliche Moment $\mathfrak{P}^0$ sich dem neuen $\mathfrak{P}$ in derselben Weise, nämlich zu einem „wirksamen" Moment $\mathfrak{P}'$ verbindet, gegeben durch

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - [T \cdot \mathfrak{P}^0]\,, \qquad (68)$$

dessen Komponenten also lauten

$$\mathfrak{P}_x' = \mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x{}^0 x_x + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_y{}^0 x_y + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_z{}^0 x_z)\,, \ldots (69)$$

Da die Zusatzglieder lineär homogen in den Deformationsgrößen sind, so verschmelzen sie sich völlig mit den physikalischen Erregungen $\mathfrak{P}_x, \ldots$ und lassen sich durch die Beobachtung von ihnen nicht trennen. —

Herr Born verfolgt den von ihm aus der Gittertheorie abgeleiteten Ansatz für $\mathfrak{P}$ nicht näher; er bezieht sich einfach auf das von mir (wie vorstehend gezeigt) gewonnene Resultat, daß die in (56) explizit, in (42) in den $u_x, \ldots$ implizit auftretende Drehung $\mathfrak{d}$ aus den „wirksamen" Momenten verschwindet. Indes würde eine Rechnung mit seinem Ansatz zu dem genannten Ziele nicht geführt haben, es hätte sich dabei vielmehr die zu (41) monierte Vernachlässigung des Einflusses der räumlichen Dilatation geltend gemacht. Deshalb halte ich es für angemessen, die allgemeinen Formeln (54) direkt auf den berichtigten Bornschen Ansatz (42) anzuwenden und zu zeigen, wie aus diesem wirklich das genannte Resultat folgt.

Schreibt man für (41) bzw. (42)

$$(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}^0 + \overline{\mathfrak{P}}\,, \qquad (70)$$

so ist

$$\overline{\mathfrak{P}^0} = \mathfrak{P}^0(1 - \delta) + (\mathfrak{P}^0 \cdot \text{grad})\,\mathfrak{v}\,, \qquad (71)$$

nämlich

$$\overline{\mathfrak{P}_x{}^0} = \mathfrak{P}_x{}^0(1 - \delta) + \mathfrak{P}_x{}^0 u_x + \mathfrak{P}^0{}_y u_y + \mathfrak{P}_z{}^0 u_z\,, \ldots$$

Das von $\mathfrak{P}^0$ abhängige Glied $\overline{\mathfrak{P}^0}$ enthält also nicht nur, wie $(\mathfrak{P}^0)$ in (55) bez. (56), die Wirkung der räumlichen Dilatation und der Drehung des Raumelementes, sondern auch noch die Wirkung der Kontinuumsdeformation von S. 308. Und $\overline{\mathfrak{P}}$ enthält nicht die Wirkung der Gesamtdeformation, wie $\mathfrak{P}$ in (55), sondern nur diejenige der relativen Verschiebung der verschiedenen Polgitter (k). Die Zerlegung von $(\mathfrak{P})$ in (70) ist also wesentlich verschieden von der in (55).

Im übrigen sind die wirksamen Dichten σ' und ϱ' nach den Formeln (54) zu berechnen. An Stelle von (62) gilt jetzt demnach

$$\sigma' = \mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_n{}^0 \Delta + (\mathfrak{P}^0 \cdot \text{grad})\,\mathfrak{v}_n + \overline{\mathfrak{P}}_n{}^0 - \mathfrak{P}^0{}_n\,, \qquad (72)$$

und wegen (61)

$$\sigma' = \overline{\mathfrak{P}}_n\,. \qquad (73)$$

Analog findet man aus (71)

$$\varrho' = \text{div}\,\{\mathfrak{P}^0(1 - \delta)\} + \text{div}\,\{(\mathfrak{P}^0 \cdot \text{grad})\,\mathfrak{v}\} + \text{div}\,\overline{\mathfrak{P}}\,;$$

also wegen (66) und wegen

$$\text{div}\,\{(\mathfrak{P}^0 \cdot \text{grad})\,\mathfrak{v}\} = (\mathfrak{P}^0 \cdot \text{grad}\,\delta)\,,$$

schließlich

$$\varrho' = \text{div}\,\overline{\mathfrak{P}}\,. \qquad (74)$$

Somit ergibt sich in der Tat aus dem berichtigten Bornschen Ansatz das sehr merkwürdige Resultat, daß von der gesamten Erregung des Kristalls nur derjenige Anteil elektrisch wirksam ist, der auf der gegenseitigen Verschiebung der Polgitter (k) beruht, während der auf der Kontinuums-Deformation beruhende, für sich keineswegs verschwindende Anteil gerade durch die „geometrische" Veränderung der Oberflächenladung kompensiert wird. Dieses Ergebnis ist eine überraschende und eigenartige Frucht der Gittertheorie, das hervorgehoben zu werden verdient.

Das einzig wirksame Moment $\overline{\mathfrak{P}}$ ist durch

$$\overline{\mathfrak{P}}_x = \zeta \mathfrak{p}_x = \zeta \Sigma e_k u_k\,, \ldots$$

definiert, und die $u_k, \ldots$ sind nach S. 308 lineäre Funktionen der Deformationsgrößen, deren konstantes Glied die Temperatur enthält; dies letztere ist der Ausdruck der „wahren" Pyroelektrizität, deren Auftreten also davon abhängt, ob eine Dislokation der Polgitter relativ zueinander durch eine bloße Temperaturwirkung bei aufgehobener Deformation möglich ist. Es scheint, wenn die Symmetrieverhältnisse des Kristalls die geeigneten sind, prinzipiell eine solche Dislokation durchaus möglich und demgemäß dürfte von seiten der Gittertheorie ein Argument gegen die Existenz der viel umstrittenen wahren Pyroelektrizität nicht geboten werden.

10. Gehen wir nun zu der Frage über, inwieweit bei den zentrischen Erregungen, die den hauptsächlichen Gegenstand dieser Mitteilung bilden, die anfänglichen Momente auf die beobachtbaren Erscheinungen influieren, so ist hierbei an die Formel (21) der I. Arbeit

$$\psi_2 = \int\Big([\Pi \cdot \mathfrak{n}]\,\text{grad}\,\frac{1}{r}\Big)\,do - \int \text{div}_n\,\Pi\,\frac{do}{r} + \int \text{div}^2\,\Pi\,\frac{dk}{r} \qquad (21)$$

anzuknüpfen, die das Potential des Kristalls zerlegt in die Wirkungen einer doppelten und einer einfachen Flächenbelegung, sowie einer räumlichen Verteilung. Da die letzteren beiden Funktionen nur von räumlichen Differentialquotienten der Momente $\Pi_{xx}, \ldots$ abhängen, so fehlen sie im ursprünglichen Zustand; hier kommt also nur der Ausdruck



$$\psi_2^0 = \int\left([\Pi^0 \cdot \mathfrak{n}^0] \cdot \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)do = \int\left(\mathfrak{N}^0 \cdot \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)do$$

zur Geltung bei (75)

$$[\Pi^0 \cdot \mathfrak{n}^0]_x = \mathfrak{N}_x^0 = \Pi_{xx}^0\alpha^0 + \Pi_{xy}^0\beta^0 + \Pi_{xz}^0\gamma^0 .$$

Die Abkürzung $\mathfrak{N}$ ist die in § 4 benutzte für das „Moment" der Doppelbelegung.

Die Influenzladung des Kristalls, welche in Wahrheit die durch ψ_2^0 ausgedrückte Wirkung kompensiert, wird vermutlich eine einfache Oberflächenbelegung sein; da aber das Gesetz einer solchen allgemein nicht angebbar ist, wollen wir dafür eine äquivalente Doppelbelegung von der durch $\mathfrak{N}^0$ ausgedrückten Art, aber von entgegengesetztem Vorzeichen einführen, was unzweifelhaft zulässig ist.

Im deformierten Zustande bedingen die veränderten inneren Momente (Π) eine Doppelbelegung von dem geänderten Moment

$$(\mathfrak{N}) = [(\Pi) \cdot \mathfrak{n}] \qquad (76)$$

bei

$$[(\Pi) \cdot \mathfrak{n}]_x = (\mathfrak{N})_x = (\Pi)_{xx}\alpha + (\Pi)_{xy}\beta + (\Pi)_{xz}\gamma , \ldots$$

Das wirksame Moment $\mathfrak{N}'$ setzt sich aus den Wirkungen von $(\mathfrak{N})$ und dem, was aus $-\mathfrak{N}^0$ infolge der geometrischen Veränderungen wird, zusammen. Bezüglich des letzteren dürfen wir annehmen, daß $-\mathfrak{N}^0$ am Oberflächenelement do haftet. Es wird daher einmal bei einer Dilatation von do im Betrage ϑ — analog wie dies S. 309 für die Dichte σ^0 benutzt ist — seinen Zahlwert im Verhältnis $(1-\vartheta) : 1$ verkleinern; sodann aber wird es als Vektorgröße an der Drehung $\mathfrak{d}$ von do teilnehmen und dadurch — analog wie das Moment $\mathfrak{P}^0$ auf S. 309 — den Zuwachs $-[\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{N}^0]$ erhalten. Es kommt sonach von $-\mathfrak{N}^0$ ein Anteil

$$-(\mathfrak{N}^0) = -\mathfrak{N}^0(1-\vartheta) - [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{N}^0]$$

zur Geltung, und das wirksame Moment $\mathfrak{N}'$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}^0(1-\vartheta) - [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{N}^0], \qquad (77)$$

bzw. durch

$$\mathfrak{N}_x' = (\mathfrak{N})_x - \mathfrak{N}_x^0(1-\vartheta) - [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{N}]_x, \ldots,$$

wobei für die eingehenden Differenzen $\alpha - \alpha^0, \ldots$ wieder die Formeln (60) gelten. Die Formel (77) geht zu (54^1) parallel.

Dies bezüglich des Einflusses des ersten Integrals in (21). Die beiden anderen Integrale drücken die Wirkung einer einfachen Oberflächenbelegung und einer räumlichen Verteilung aus von den bzw. Dichten

$$\sigma' = -\operatorname{div}_n(\Pi), \quad \varrho' = \operatorname{div}^2(\Pi), \qquad (78)$$

welche Ausdrücke zu (54^2) parallel gehen.

Die Durchführung der Untersuchung soll nun wieder an die beiden im vorigen Abschnitt verfolgten Auffassungen anknüpfen.

Bei der ersten werde (Π) zerlegt nach dem Schema

$$(\Pi) = (\Pi^0) + \Pi, \qquad (79)$$

wobei (Π^0) den Einfluß des ursprünglichen Moments in der geometrisch, d. h. durch Dilatation und Drehung des Volumenelements veränderten Stärke, Π aber die physikalische Wirkung von Deformation und Temperaturänderung enthält. Die Komponenten $\Pi_{xx}, \ldots$ sind dabei als lineäre Funktionen der Deformationsgrößen zu betrachten, deren konstantes Glied die Temperatur enthält.

Für (Π^0) liefert eine einfache geometrische Überlegung den Ausdruck

$$(\Pi^0) = \Pi^0(1-\delta) + 2\,]\mathfrak{d} \cdot \Pi[\,, \qquad (80)$$

wobei wieder

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$$

ist, und nach der Definition (3′) des tensoriellen Produktes die Komponenten von (Π^0) lauten

$$(\Pi^0)_{xx} = \Pi_{xx}^0(1-\delta) + 2\{\Pi_{zx}^0\mathfrak{d}_y - \Pi_{xy}^0\mathfrak{d}_z\}, \ldots,$$
$$(\Pi^0)_{yz} = \Pi_{yz}^0(1-\delta) + (\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0)\mathfrak{d}_x \qquad (81)$$
$$+ \Pi_{xz}^0\mathfrak{d}_z - \Pi_{xy}^0\mathfrak{d}_y, \ldots$$

Der Ausdruck (77) für das wirksame Moment $\mathfrak{N}'$ nimmt hiernach die Form an

$$\mathfrak{N}' = [\Pi^0(1-\delta) \cdot \mathfrak{n}] + 2[\,]\mathfrak{d} \cdot \Pi^0[\, \cdot \mathfrak{n}]$$
$$- [\mathfrak{d}[\Pi^0 \cdot \mathfrak{n}]] + [\Pi \cdot \mathfrak{n}] - [\Pi^0 \cdot \mathfrak{n}^0](1-\vartheta), \qquad (82)$$

und dies liefert wegen $\vartheta = \delta - \varDelta$, wegen

$$\mathfrak{n} - \mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n}\varDelta - \operatorname{grad}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})$$

im Sinne von (61) verstanden, und bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung

$$\mathfrak{N}' = [\Pi \cdot \mathfrak{n}] + 2[\,]\mathfrak{d} \cdot \Pi^0[\, \cdot \mathfrak{n}] - [\mathfrak{d}[\Pi^0 \cdot \mathfrak{n}]]$$
$$- [\Pi^0 \cdot \operatorname{grad}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})], \qquad (83)$$

eine Formel, die (62) ganz analog gebaut ist.

Die Zusammenziehung der letzten drei Glieder führt man am bequemsten für ein Koordinatensystem aus, dessen Achsen mit den Konstituenten $\Pi_1^0, \Pi_2^0, \Pi_3^0$ des ursprünglichen Moments zusammenfallen, was nur eine formale Beschränkung enthält. Hier sind die sechs Komponenten von Π^0 gleich Π_1^0, Π_2^0, Π_3^0, 0, 0, 0 und diejenigen von $2\,]\mathfrak{d} \cdot \Pi^0[$ nach (3′) bzw. gleich 0, 0, 0, $(\Pi_2^0 - \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x$, $(\Pi_3^0 - \Pi_1^0)\mathfrak{d}_y$, $(\Pi_1^0 - \Pi_2^0)\mathfrak{d}_z$; also wird

$$2[\,]\mathfrak{d} \cdot \Pi^0[\, \cdot \mathfrak{n}]_x = (\Pi_1^0 - \Pi_2^0)\mathfrak{d}_z\beta + (\Pi_3^0 - \Pi_1^0)\mathfrak{d}_y\gamma,$$
$$[\mathfrak{d} \cdot [\Pi^0 \cdot \mathfrak{n}]]_x = \Pi_3^0\mathfrak{d}_y\gamma - \Pi_2^0\mathfrak{d}_z^0\beta, \ldots \qquad (84)$$
$$[\Pi^0 \cdot \operatorname{grad}(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v})]_x = \Pi_1^0(\alpha u_x + \beta v_x + \gamma w_x), \ldots$$

und hieraus folgt wegen

$$\mathfrak{d}_z - v_x = -\frac{1}{2}x_y, \quad \mathfrak{d}_y + w_x = \frac{1}{2}x_z$$

sofort

$$\mathfrak{N}_x' = \alpha\{\Pi_{xx} - \Pi_1^0 x_x\} + \beta\left\{\Pi_{xy} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_y\right\} \qquad (85)$$
$$+ \gamma\left\{\Pi_{xz} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_z\right\}, \ldots$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{N}_y'$ und $\mathfrak{N}_z'$ folgen hieraus durch zyklische Vertauschung, und aus ihnen bildet sich dann $\mathfrak{N}'$ selbst.

Um σ' und ϱ' zu berechnen gehen wir aus von dem Vektor $\operatorname{div}(\Pi)$, der nach (79) und (80) lautet

$$\operatorname{div}(\Pi) = \operatorname{div}\{\Pi^0(1-\delta)\} + 2\operatorname{div}]\mathfrak{d}\cdot\Pi^0[+ \operatorname{div}\Pi. \tag{86}$$

Da nach (8″) allgemein für das Produkt aus einem Tensor und einem Skalar gilt

$$\operatorname{div}\{S\,T\} = S\operatorname{div} T + [T\cdot\operatorname{grad} S],$$

und da Π^0 konstant ist, so ergibt (86)

$$\operatorname{div}(\Pi) = -[\Pi^0\cdot\operatorname{grad}\delta] + 2\operatorname{div}]\mathfrak{d}\cdot\Pi^0[+ \operatorname{div}\Pi. \tag{87}$$

Weiter setzen wir die obige spezielle Lage des Koordinatensystems voraus und erhalten so

$$\operatorname{div}_x(\Pi) = \operatorname{div}_x\Pi - \Pi_1^0\frac{\partial\delta}{\partial x} + (\Pi_1^0 - \Pi_2^0)\frac{\partial\mathfrak{d}_z}{\partial y} + (\Pi_3^0 - \Pi_1^0)\frac{\partial\mathfrak{d}_y}{\partial z}. \tag{88}$$

Dies läßt sich auch in der zur Vergleichung mit [85] geeigneteren Form schreiben

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_x(\Pi) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\Pi_{xx} - \Pi_1^0 x_x\right\} &+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\Pi_{xy} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_y - \Pi_2^0\mathfrak{d}_z\right\}\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{\Pi_{xz} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_z + \Pi_3^0\mathfrak{d}_y\right\};\end{aligned} \tag{89}$$

die Ausdrücke für $\operatorname{div}_y(\Pi)$ und $\operatorname{div}_z(\Pi)$ folgen hieraus durch zyklische Vertauschung, und mit ihnen auch $\sigma' = -\operatorname{div}_n(\Pi)$.

Endlich berechnet sich daraus $\varrho' = \operatorname{div}^2(\Pi)$ und das Resultat läßt sich zusammenziehen zu

$$\varrho' = \operatorname{div}^2\Pi - (\Pi_1^0\triangle x_x + \Pi_2^0\triangle y_y + \Pi_3^0\triangle z_z). \tag{90}$$

Um die Resultate der Gittertheorie zu verwerten, zerlegen wir das Gesamtmoment (Π) nach der Deformation gemäß den Ausdrücken (49) in zwei Teile

$$(\Pi) = (\overline{\Pi^0}) + \overline{\Pi}, \tag{91}$$

dabei ist

$$\begin{aligned}(\overline{\Pi^0})_{xx} &= \Pi_{xx}^0(1-\delta) + 2\{u_x\Pi_{xx}^0 + u_y\Pi_{xy}^0 + u_z\Pi_{xz}^0\},\\ (\overline{\Pi^0})_{yz} &= \Pi_{yz}^0(1-\delta) + v_x\Pi_{xz}^0 + v_y\Pi_{yz}^0 + v_z\Pi_{zz}^0\\ &\quad + w_x\Pi_{xz}^0 + w_y\Pi_{yy}^0 + w_z\Pi_{zy}^0, \ldots\end{aligned} \tag{92}$$

und die $\overline{\Pi}_{xx}, \ldots$ sind lineäre Funktionen der Deformationsgröße, deren konstantes Glied die Temperatur enthält. Nun kann man schreiben

$$\begin{aligned}(\overline{\Pi^0})_{xx} &= \Pi_{xx}^0(1-\delta) + 2\{\Pi_{zx}^0\mathfrak{d}_y - \Pi_{xy}^0\mathfrak{d}_z\}\\ &\quad + 2\Pi_{xx}^0 x_x + \Pi_{xy}^0 x_y + \Pi_{xz}^0 x_z; \ldots\\ (\overline{\Pi^0})_{yz} &= \Pi_{yz}^0(1-\delta) + (\Pi_{yy}^0 - \Pi_{zz}^0)\mathfrak{d}_x\\ &\quad + \Pi_{xy}^0\mathfrak{d}_y + \Pi_{xz}^0\mathfrak{d}_z\\ &\quad + \Pi_{xz}^0\frac{1}{2}x_y + \Pi_{yz}^0 y_y + \Pi_{zz}^0\frac{1}{2}z_y\\ &\quad + \Pi_{xy}^0\frac{1}{2}x_z + \Pi_{yy}^0\frac{1}{2}y_z + \Pi_{zy}^0 z_z, \ldots\end{aligned} \tag{93}$$

Dabei sind die Glieder der ersten bez. der ersten und zweiten Reihe identisch mit den Komponenten $(\Pi^0)_{xx}, \ldots$ in (81), die übrigen sind lineäre Funktionen der Deformationsgrößen, die sich mit $\overline{\Pi}_{xx}, \ldots$ zusammenfassen lassen, so daß hiermit die Zerlegung (91) unmittelbar in die frühere (79) übergeführt werden kann. Ein Grund, irgend einen weiteren Teil der Rechnung mit den nur formal verschiedenen Ausdrücken zu wiederholen, liegt hier (ungleich dem analogen Fall bei polarer Erregung) nicht vor. Es genügt, die Diskussion an die relativ einfacheren Ausdrücke (85), (89) und (90) anzuknüpfen.

11. Die für die Momente zweiter Ordnung erhaltenen Resultate weichen nach ihrem Charakter von denen für die Momente erster Ordnung gefundenen vollständig ab. Zunächst lassen sich die Ausdrücke für die wirksamen Dichten $\mathfrak{N}'$, σ', ϱ' gar nicht auf dieselben Funktionen der Deformationen zurückführen. Sieht man auch von der nur formalen Zusammenziehung der Funktion $\operatorname{div}^2\Pi$ in (90) ab, so sind doch die Ausdrücke (85) und (89) durch das Auftreten der Drehung $\mathfrak{d}$ in den letzteren fundamental verschieden. Sodann aber sind die { }-Ausdrücke in beiden Gleichungen nicht sechs an der Zahl, sondern neun. Die Dichten $\mathfrak{N}'$ und σ' der gesamten wirksamen Oberflächenladungen erscheinen dort also nicht durch je ein symmetrisches Tensortripel bestimmt, sondern durch ein unsymmetrisches, dergl. sich nach dem S. 288, Anm. 1 Bemerkten in ein symmetrisches Tripel und einen Vektor zerlegen läßt.

Für die Diskussion können wir von den Ausdrücken für $\operatorname{div}_x(\Pi), \ldots$ ausgehen. Die mit ihnen gewonnenen Resultate übertragen sich unmittelbar auf $\mathfrak{N}_x', \ldots$, wenn man nur die von der Drehung $\mathfrak{d}$ abhängenden Glieder beseitigt.

Die neun in (89) auftretenden Komponenten lauten:

$$\begin{aligned}\Pi_{xx}' &= \Pi_{xx} - \Pi_1^0 x_x,\\ \Pi_{xy}' &= \Pi_{xy} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_y - \Pi_2^0\mathfrak{d}_z,\\ \Pi_{xz}' &= \Pi_{xz} - \Pi_1^0\frac{1}{2}x_z + \Pi_3^0\mathfrak{d}_y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{yx}' &= \Pi_{yx} - \Pi_2^0 \frac{1}{2} y_x + \Pi_1^0 \mathfrak{d}_z, \\
\Pi_{yy}' &= \Pi_{yy} - \Pi_2^0 y_y, \\
\Pi_{yz}' &= \Pi_{yz} - \Pi_2^0 \frac{1}{2} y_z - \Pi_3^0 \mathfrak{d}_x; \\
\Pi_{zx}' &= \Pi_{zx} - \Pi_3^0 \frac{1}{2} z_x - \Pi_1^0 \mathfrak{d}_y; \\
\Pi_{zy}' &= \Pi_{zy} - \Pi_3^0 \frac{1}{2} z_y + \Pi_2^0 \mathfrak{d}_x, \\
\Pi_{zz}' &= \Pi_{zz} - \Pi_3^0 z_z;
\end{aligned} \tag{94}$$

dabei ist nun $\Pi_{xz} = \Pi_{yz}$, aber $\Pi_{xy}' \neq \Pi_{yx}'$ usf.

Die erwähnte Zerlegung geht dahin, daß

$$\Pi_{xx}' = T_{xx}, \ldots \frac{1}{2}(\Pi_{yz}' + \Pi_{zy}') = T_{yz}, \ldots$$

gewöhnliche Tensor-,

$$\frac{1}{2}(\Pi_{yz}' - \Pi_{zy}') = \mathfrak{U}_x, \ldots$$

Vektorkomponenten sind.

Es ist vielleicht bei der ziemlich komplizierten Abteilung der Endformeln nicht unnötig, ausdrücklich zu verifizieren, daß die so bestimmten von den Π_k^0 abhängigen Glieder in der Tat Tensor- bzw. Vektorcharakter haben.

Wir schreiben dazu die tensoriellen Glieder

$$P_{xx} = -\Pi_1^0 x_x, \ldots$$

$$P_{yz} = -\frac{1}{2}(\Pi_2^0 + \Pi_3^0)\frac{1}{2} y_z + \frac{1}{2}(\Pi_2^0 - \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x, \ldots$$

Beachtet man, daß Π_1^0, Π_2^0, Π_3^0, o, o, o spezielle Tensorkomponenten sind, so erkennt man sogleich, daß die von der Drehung $\mathfrak{d}$ abhängigen Glieder

$$0, 0, 0, \frac{1}{2}(\Pi_2^0 - \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x,$$

$$\frac{1}{2}(\Pi_3^0 - \Pi_1^0)\mathfrak{d}_y, \ \frac{1}{2}(\Pi_1^0 - \Pi_2^0)\mathfrak{d}_z$$

die Komponenten des in (3) definierten Tensorproduktes $]\mathfrak{d} \cdot \Pi^0[$ nach dem speziellen Achsenkreuz der Π_k^0 sind. Aus dem gleichen Grunde fallen die andern Glieder, nämlich

$$-\Pi_1^0 x_x, \ldots, \quad -\frac{1}{2}(\Pi_2^0 + \Pi_3^0)\frac{1}{2} y_z, \ldots$$

unter das in (7′) gegebene Schema, wobei zu bedenken ist, daß $x_x, \ldots \frac{1}{2} y_z, \ldots$ die Komponenten des Deformationstensors T sind.

Die vektoriellen Glieder schreiben wir

$$\mathfrak{U}_x = \frac{1}{2}(\Pi_3^0 - \Pi_2^0)\frac{1}{2} z_y - \frac{1}{2}(\Pi_2^0 + \Pi_3^0)\mathfrak{d}_x, \ldots$$

Da $-(\Pi_2^0 + \Pi_3^0), \ldots$ nach S. 288 die Komponenten des Π^0 zugeordneten Tensors sind, so fällt das zweite Glied unmittelbar unter das Schema (2′); das erste entspricht dem Schema (5′). Hiermit ist der angekündigte Nachweis erbracht.

Beide im Vorstehenden hervorgehobenen Umstände, die Neunzahl der Komponenten Π_{xx}', .. und das Auftreten der Drehungskomponenten $\mathfrak{d}_x$, .. in ihnen, wirken nun in dem Sinne, daß sich die vom Anfangszustand abhängigen Glieder nicht denen assimilieren, welche die eigentliche Erregung durch Deformation und Temperaturänderung ausdrücken. Es erscheint somit jedenfalls prinzipiell möglich, aus Beobachtungen über zentrisch-symmetrische Pyro- und Piezoelektrizität Schlüsse auf die ursprünglichen Momente zweiter Ordnung in einem Kristall zu ziehen.

Indessen ist ein solcher Schluß keineswegs in den einfachsten Anordnungen des Experiments möglich. Bei einer homogenen Deformation verschwinden die Drehungen von selbst aus den Formeln, wie ja auch nötig ist. Zugleich reduziert sich auch die Neunzahl der Komponenten Π_{xx}', .. praktisch auf sechs; der Vektor $\mathfrak{U}$, über den oben gesprochen ist, gibt nämlich in diesem Falle keine Wirkung. In der Tat wird der von ihm abhängige Teil des ersten Oberflächenintegrals in (21) zu

$$\int\left([\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}] \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) do,$$

und dies fällt bei konstantem $\mathfrak{U}$ unter das Schema des Stokesschen Integrals $\int \operatorname{rot}_n \mathfrak{W} do$ und verschwindet, da es über eine geschlossene Fläche erstreckt wird. Bei homogener Deformation kommt also eine Wirkung der ursprünglichen Momente praktisch überhaupt nicht zur Geltung; sie verbirgt sich in den Parametern der Ausdrücke für die thermisch oder mechanisch erregten Momente.

Auf Anordnungen, bei denen die primären Momente zur Geltung zu kommen vermögen, wird in einer dritten Mitteilung einzugehen sein.

Göttingen, Ende Mai 1916.

(Eingegangen 19. Juni 1916.)

Über den lichtelektrischen Effekt und die β-Strahlung radioaktiver Substanzen.

Von Paul S. Epstein.

1. Erhebliche Erfolge, welche die Quantentheorie in ihrer Anwendung auf das Rutherford-Bohrsche Atommodell in letzter Zeit zu verzeichnen hatte, lassen es wünschenswert erscheinen die Konsequenzen derselben für eine möglichst große Zahl physikalischer Gebiete durchzuarbeiten. Als eine der Anwendungs-



möglichkeiten bieten sich die β-Strahlen radioaktiver Substanzen dar, welche sich, wie dies zuerst von O. v. Baeyer, O. Hahn und Lise Meitner[1]) gezeigt wurde, aus einer Reihe homogener Strahlenbündel mit diskreten Geschwindigkeiten zusammensetzen. Der Weg, auf welchem im folgenden eine Deutung dieser Erscheinungen versucht wird, ist dieser: A. Sommerfeld[2]) hat die Keplerellipsen, welche ein Elektron um einen Atomkern beschreiben kann, betrachtet und gezeigt, daß nur gewisse ausgezeichnete („statische") Ellipsen mit den von ihm aufgestellten Quantenbedingungen

$$\int\int dp_\varphi d\varphi = nh, \quad \int\int dp_r dr = n'h \qquad (1)$$

verträglich sind. Dabei bedeuten (r, φ) Polarkoordinaten der Bahnebene, p_r und p_φ die bzw. Impulse der Bewegung. Überraschende Übereinstimmungen mit der Erfahrung, welche diese Theorie für den Bau von Spektrallinien ergibt, haben die getroffene Auswahl von statischen Bahnen aufs überzeugendste bestätigt.

Wir stellen nun die Frage: **Gibt es außer den statischen Ellipsen auch statische Hyperbeln?** Auf hyperbolischen Bahnen könnten Elektronen mit quantenmäßig ausgezeichneten Energien ins Unendliche gelangen und als β-Strahlen oder auch als lichtelektrische Kathodenstrahlen in Erscheinung treten. Die ausführliche Theorie wollen wir bei einer späteren Gelegenheit veröffentlichen; an dieser Stelle seien nur die Hauptgesichtspunkte und einige der Resultate mitgeteilt.

Die Integration der Bedingungen (1) nach dp_φ, dp_r gibt

$$\int(p_\varphi - \overline{p_\varphi})\,d\varphi = nh, \quad \int(p_r - \overline{p_r})\,dr = n'h. \qquad (2)$$

Die Grenzen, zwischen denen nach φ und r zu integrieren ist, ergeben sich aus allgemeinen Prinzipien, welche wir an anderer Stelle[3]) dargelegt haben. Dagegen ist es nicht ganz eindeutig, wie der Phasenraum $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$ in den Koordinaten p_r, p_φ zu begrenzen ist, d. h. wie die Anfangswerte $\overline{p_r}$ und $\overline{p_\varphi}$ zu wählen sind. Im Falle elliptischer Bahnen hat es sich bewährt, sie gleich Null zu setzen, und wir übernehmen dies für das erste Integral $(\overline{p_\varphi} = 0)$; es wäre aber mit unseren Absichten unverträglich, $\overline{p_r} = 0$ zu setzen, denn dann wird das zweite Integral (wie im allgemeinen überhaupt) unendlich. Wir haben deshalb die folgende Hypothese gemacht: **für $\overline{p_r}$ ist derjenige konstante Wert zu wählen, für welchen das Integral endlich bleibt.** Die Berechtigung dieser willkürlichen Annahme kann nur durch die Erfahrung geprüft werden.

Bei Berücksichtigung der relativistischen Veränderlichkeit der Masse gibt diese Theorie für ein System, das aus einem Kern von der Ladung $+ke$ (von unendlicher Masse) und einem Elektron von der Ladung $-e$ und der Ruhmasse m besteht, die folgenden ausgezeichneten Energiewerte

$$A = mc^2\left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 k^2}{R^2}} - 1\right], \qquad (3)$$

wo zur Abkürzung bezeichnet ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi e^2}{hc}, \\ R^2 &= \frac{\pi^2}{4}\left(n\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 k^2}{n^2}} + n'\right)^2 - n^2, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit. Für die ganzen Zahlen n, n' gelten die Beschränkungen $n \geq 1$; n' kann positiv und negativ sein, ist aber so zu wählen, daß $R^2 > 0$ wird. Große Werte der Zahl n' sind unwahrscheinlich.

2. Lichtelektrische Emission kann nach dieser Auffassung nur eintreten, nachdem das erregende Licht ein Elektron aus einer der Bohr-Sommerfeldschen geschlossenen Bahnen in eine unserer statischen Hyperbeln befördert hat. Für diesen Übergang ist nämlich eine Energiezufuhr notwendig, da die (positive) Energiekonstante A_h einer hyperbolischen Bahn unter allen Umständen größer ist als die (negative) A_e einer elliptischen. Durch gewisse Beobachtungsresultate wird, wie wir an anderer Stelle ausführlicher begründen werden, die Hypothese nahegelegt, daß die einfallende Schwingungszahl ν, welche einen solchen Übergang herbeizuführen vermag, der folgenden Ungleichung genügen muß

$$h\nu \geq A_h - A_e = h\nu_g. \qquad (5)$$

Das Aufladepotential der bestrahlten Elektrode, welches der Energie A_h der lichtelektrischen Elektronen entspricht, ist

$$V = \frac{A_h}{e}\,\text{C. G. S. Einh.} = 300 \cdot \frac{A_h}{e}\,\text{Volt}.$$

Bei kleinen Kernladungen kann man in unserer Formel (3) die relativistischen Korrektionsglieder vernachlässigen (d. h. zum limes $c = \infty$ übergehen), das gibt

$$\left.\begin{aligned} V &= 300\,k^2 \frac{h}{e} N_0 \cdot \frac{1}{Z}\,\text{Volt}, \\ Z &= \frac{\pi^2}{4}(n + n')^2 - n^2, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

1) O. v. Baeyer und O. Hahn, diese Zeitschr. **11**, 488, 1910; O. v. Baeyer, O. Hahn und L. Meitner, diese Zeitschr. **12**, 273, 1911.

2) A. Sommerfeld, Münchener Berichte, 425, 459, 1915.

3) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **49**, 1916 (im Erscheinen).

1) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. **40**, 609, 1913; **48**, 410, 1915.

wo $N_0 = \frac{2\pi m e^4}{h^3}$ die Rydbergsche Konstante bedeutet. Bekanntlich ist der Zahlenwert dieser Konstante $N_0 = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ und der beste Wert von $\frac{h}{e}$ wird gegenwärtig[1]) zu $1{,}3693 \cdot 10^{-17}$ angenommen, woher

$$V = \frac{13{,}52}{Z} k^2 \text{ Volt.} \qquad (7)$$

Eigentlich sind die Voraussetzungen unserer Theorie nur für Wasserstoffatome erfüllt und es ist ein glücklicher Umstand, daß Gehrcke und Janicki[1]) Aufladepotentiale gemessen haben, welche sie mit überzeugenden Argumenten als lichtelektrischen Effekt des Wasserstoffs deuten.

Für Wasserstoff ist die Kernladung $k = 1$, und die Hauptgeschwindigkeitsstufen werden nach (7)

$n =$	3	1	2	1	usw.
$n' =$	−1	0	0	1	
$V =$	13,55 Volt	9,20	2,30	1,52	
$\lambda_g =$	792,7 Å	1365,6	5350,4	8085,2	

Es ist zu bemerken, daß unsere Theorie sich auf freie Atome bezieht. Da Gehrcke und Janicki bei Bestrahlung mit der Quarz-Quecksilberlampe ($\lambda > 2300$ Å) $V = 2{,}30$ Volt gemessen haben, welcher Wert sich unter diesen Bedingungen auch aus unserer Tabelle ergibt, scheint diese Voraussetzung beim okkludierten Wasserstoff zuzutreffen. Bei festen Körpern müßte man eine Verminderung der Elektronengeschwindigkeit beim Durchtritt durch deren Oberfläche erwarten (wie sie auch in der Einsteinschen Formel für den lichtelektrischen Effekt vorausgesetzt wird).

Die Verhältnisse bei Wasserstoff liegen für eine weitergehende experimentelle Prüfung unserer Theorie besonders günstig: Die Geschwindigkeitsstufen liegen hier gerade in dem der Messung bequem zugänglichen Gebiet ziemlich weit auseinander[2]). Bei verhältnismäßig großen Kernladungen würden sie dagegen nach unserer Formel so dicht liegen, daß der Versuch nur ein lineares Anwachsen des Aufladepotentials mit der Schwingungszahl konstatieren könnte, wie es auch die Einsteinsche Formel fordert. Deshalb steht auch der Befund der schönen Messungen von Millikan[3]) mit unseren Folgerungen für Wasserstoff in keinerlei Widerspruch.

3. Die Analyse der Röntgenspektren durch Sommerfeld hat gezeigt, daß man für die Deutung gewisser Eigenschaften derselben die Atome von hoher Kernladung als „wasserstoffähnlich" behandeln kann. Dementsprechend wollen wir im folgenden die Geschwindigkeit des β-Strahl-Elektrons so berechnen, als ob der Kern isoliert wäre, und uns um die übrigen Elektronen nicht kümmern. Auch die Frage, woher das abgeschleuderte Elektron und dessen Energie kommt, steht außerhalb unserer Theorie. Nach der wohl allgemein akzeptierten Ansicht von Bohr kommt es aus dem Kern selbst; deshalb haben wir für k die Kernladung des entstehenden Produktes zu setzen.

In den Teilen ihrer Bahn, in denen die Geschwindigkeit ($v = c\beta$) zur Messung gelangt, haben die als β-Strahlen emittierten Elektronen nur noch kinetische Energie, welche nach einer bekannten Formel der Relativitätstheorie von der Geschwindigkeit so abhängt:

$$A = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right] \cdot \qquad (8)$$

Der Vergleich mit (3) gibt sofort

$$\beta = \left[\left(\frac{R}{\alpha k} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} . \qquad (9)$$

Die Konstante α kann man nach (4) so ausdrücken

$$\alpha^2 = \frac{2 N_0}{c^2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{e}{m} = 5{,}316 \cdot 10^{-5},$$

diesen Zahlenwert erhält man, wenn man für N_0 und $\frac{h}{e}$ die bereits benutzten Werte, für $\frac{e}{m}$ $5{,}316 \cdot 10^{17}$ el.-st. Einh. einsetzt.

Wir stellen die Gruppe von Geschwindigkeiten zusammen, welche sich aus (9) und (4) für $n = 1$, $n' = 0$ ergibt.

Berechnet		Gemessen von Danysz (RaB, RaC)		Rutherford und Robinson Ra B		Ra C		v. Baeyer, Hahn und Meitner (Ra B, Ra C)
k	β	β	Int.	β	Int.	β	Int.	β
92	0,747	0,753	st.	0,751	1	0,750	4	0,74
91	0,732	0,733	s.s.	0,731	4	—		
90	0,718	0,722	s.	0,719	3	—		
89	0,704	0,706	st.	0,700	1	—		0,69
88	0,690	—		—		—		
87	0,677	0,682	s.s.	—		0,675	4	
86	0,664	0,660	s.	—		—		
85	0,652	—		0,656	3	—		
84	0,640	0,642	st.	0,635	1	0,648	6	0,63
83	0,628	—				0,632	6	
82	0,616	—		—		—		

Intensitätsbezeichnungen:

Danysz, st. = stark, s. = schwach, s. s. = sehr schwach.
Ruth. u. Rob., 1 — sehr stark, 7 — sehr schwach.

1) E. Gehrcke u. L. Janicki, Ann. d. Phys. 47, 679, 1915.
2) Wenigstens, sofern man große n' als unwahrscheinlich ausschließt.
3) R. A. Millikan, diese Zeitschr. 17, 217, 1916.

Bekanntlich[1]) liegen die Kernladungen der radioaktiven Elemente (k entspricht dem entstehenden Produkt) zwischen 83 und 92[2]). Es ist nun sehr merkwürdig, daß durch Einsetzen dieser Zahlen für k in unsere von empirischen Konstanten freie Formel (9) dieselben Geschwindigkeitsstufen erhalten werden, welche im Bereich $0{,}600 < \beta < 0{,}755$ von verschiedenen Autoren übereinstimmend gemessen wurden. In unserer Tabelle haben wir nämlich sämtliche in diesem Intervall an Radiumpräparaten gemessenen Werte von β verzeichnet[3]).

Ein anderer interessanter Umstand scheint uns zu zeigen, daß dieses Zusammentreffen nicht auf reinem Zufall beruht. Nach der Struktur unserer Formel müssen nämlich die β getrennte Gruppen bilden, von denen jede $83 \leq k \leq 92$ bei einer festen Kombination der Quantenzahlen n, n' entspricht. In der Tabelle haben wir eine dieser Gruppen angegeben. Es ist sehr bemerkenswert, daß auch die gemessenen β mit 0,632 abbrechen und kleinere Geschwindigkeiten erst nach einer größeren Lücke auftreten. Nach oben scheinen sich die gemessenen Geschwindigkeitsstufen stetig fortzusetzen, jedoch ist diese Stetigkeit eine ganz zufällige, welche dadurch vorgetäuscht wird, daß sich hier gerade die Gruppe der nächsthärteren β-Strahlen ($n = 3$, $n' = -1$; $83 \leq k < 92$) unmittelbar anschließt. Wir werden dies an anderer Stelle ausführlicher darlegen, woselbst wir auch einige Ergebnisse über weichere β-Strahlen und über p-Strahlen mitteilen werden.

4. Zusammenfassung.

1. Die quantenmäßige Verteilung der Bohr-Sommerfeldschen Ellipsenbahnen legt die Vermutung nahe, daß auch die Hyperbelbewegungen eines Elektrons um einen Atomkern quantenmäßig verteilt sind. Es erscheint daher wünschenswert die ausgezeichneten Energien dieser Klasse von Bahnen formelmäßig zu berechnen.

2. Unsere Theorie, welche diese Berechnung leistet, enthält eine willkürliche Annahme. Wenn diese Annahme uns auch die einfachste und plausibelste zu sein scheint, kann die Theorie in ihrer gegenwärtigen Fassung noch nicht als vollkommen gesichert gelten.

3. Schon in der vorliegenden Form führt die Theorie auf einige bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung, sowohl im Gebiete der lichtelektrischen Erscheinungen als in dem der β-Strahlen.

München, Juni 1916.

(Eingegangen 24. Juni 1916.)

1) Vgl. z. B. K. Fajans, diese Zeitschr. 16, 456, 1915.

2) Polonium, dem $k = 82$ entsprechen würde, hat bekanntlich keine β-Strahlung.

3) Die Tabellen sind dem Zusammenfassenden Bericht von O. v. Baeyer (Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 11, 66, 1914) entnommen.

Erklärung der Erscheinungen beim Passieren von Röntgenstrahlen an einem Bleirand.

Von E. G. Taylor.

In dieser Zeitschrift (15, 732, 844, 1914) erschien ein Bericht über eine Reihe von Untersuchungen von J. Laub, „Über die Zerlegung des Röntgenlichtes an einem Bleirand". Später gab er in den Verh. der Deutsch. phys. Gesellschaft 1915 S. 354 eine Zusammenfassung seiner Arbeiten und zugleich eine Hypothese zur Erklärung der Beobachtungen.

Das Ergebnis seiner Experimente war folgendes: Gehen Röntgenstrahlen an dem Rand eines undurchsichtigen Gegenstandes vorbei und fallen dann auf eine photographische Platte, die einige Zentimeter dahinter aufgestellt ist, so sieht man auf der Platte innerhalb des Schattenbereichs der Strahlung eine Reihe von parallelen Linien, die durch Stellen von geringer Intensität getrennt sind. In der letzten Arbeit ließ er Röntgenstrahlen durch eine schmale rechteckige Öffnung (0,3 mm Weite in einem dicken Bleischirm) fallen. Er fand ein zentrales Bild, auf jeder Seite symmetrisch begleitet von einer Reihe paralleler Linien. Ebenso berichtet er von einem Versuch, bei dem Röntgenstrahlen schief durch eine Kreisöffnung in einem Bleischirm passieren. Hierbei bildeten sich konzentrische Ringe um die Öffnung. Herr Laub schreibt die Erklärung der gefundenen Linien einer „Beugung der Röntgenstrahlung" an der wahrscheinlich mikrokristallinischen Struktur des Randes der Öffnung zu. Uns, wie vielen anderen auch, erschien eine andere einfachere Erklärung viel wahrscheinlicher, und wir hielten es der Mühe wert dafür eine Entscheidung zu suchen. Auf die Aufforderung von Prof. E. Mendenhall an der hiesigen Universität wurden einige von Laubs Experimenten ähnlich wiederholt. Bei unserer Anordnung hatte die Öffnung eine Entfernung von 28 cm von der Antikathode und die photographische Platte stand 34,7 cm hinter der Öffnung. Die Röhrenspannung betrug ungefähr 55000 Volt, die Betriebsstromstärke 2,5 Milliampere und die Expositionsdauer war 5 Stunden. Fig. 1 zeigt eine Aufnahme unter diesen Bedingungen. Unter genau denselben Verhältnissen wurde dann eine Bleiblende mit 0,6 mm Öffnungen im Abstand 8 cm von der Röhre eingeschaltet. Fig. 2 zeigt die entsprechende



Fig. 1.

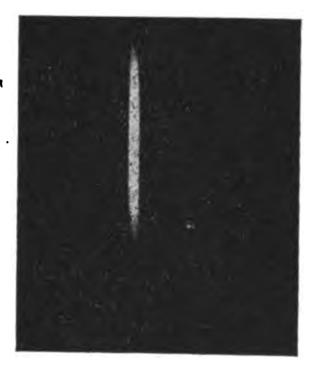


Fig. 2.



Fig. 3.

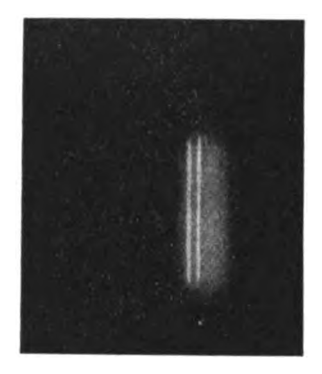


Fig. 4.

Aufnahme. Die Wirkung der Blende war, die Ausdehnung der strahlenden Fläche (Brennfleck) einzuschränken, der Erfolg war gänzliches Ausbleiben der Linien. Diese Tatsache ließ vermuten, daß die Linien herrührten von einer astigmatischen Abbildung oder Projektion der Antikathodenpunkte, die am meisten strahlen, durch den Schlitz hindurch. Es schien diese Vermutung richtig zu sein; denn wenn man den Brennfleck durch eine kreisförmige Öffnung (0,3 mm) sich abbilden ließ, fand man (Fig. 3) mehrere Zentren der Röntgenstrahlenemission. Im allgemeinen sieht man auf den Bildern konfokale Ellipsen, wobei die Brennpunkte den Hauptanteil der Röntgenstrahlung emittierten. Diese Brennpunkte entsprechen genau den Linien auf Fig. 1. Um den Beweis noch schlagender zu machen, wurde an Stelle des Bleispalts ein solcher aus Eisen gesetzt und die ersten Experimente dieser Untersuchungen wiederholt. Fig. 4 zeigt die Übereinstimmung mit den früheren Versuchen.

Danach scheint es sicher zu sein, daß die Linien wirklich herrühren von einer astigmatischen Abbildung der verschiedenen Strahlungsquellen auf der Antikathodenfläche. Auch erklärt diese Annahme die konzentrischen Ringe, die sich bei Verwendung der Kreisöffnung zeigen.

Wir schließen daraus, daß die Beobachtungen von Laub nichts zu tun haben mit einer mutmaßlichen mikrokristallinischen Struktur bearbeiteter Metalloberflächen. Es ist auch höchst unwahrscheinlich, daß zwei so verschiedene Elemente wie Eisen und Blei genau die gleiche Oberflächenstruktur haben sollten, wie man ja nach unseren Resultaten glauben müßte.

Ebenso haben wir andere Experimente von Laub wiederholt, bei denen die Röntgenstrahlen durch eine ziemlich große Öffnung im Bleischirm passierten (diese Zeitschr. 15, 730, 1914). Unsere Photographien zeigen nicht die feinen Linien wie Laubs Zeichnungen, man sieht aber ähnliche Anzeichen, nämlich Verdoppelung der Kanten und gewisse Intensitätsminima. Alle Einzelheiten auf unseren Photographien lassen sich mit der oben erwähnten Abbildungshypothese erklären, es ist nach allem, was wir gezeigt haben, im höchsten Grade wahrscheinlich, daß man ebenso die entsprechenden Ergebnisse von Laubs Aufnahmen deuten könnte, wenn man die Brennfleckverteilung in seiner Röhre kennen würde. Wir konnten nicht alle Versuche Laubs wiederholen; aber wir glauben, daß wir genügend Anhaltspunkte für die Behauptung haben, daß Laubs Ergebnisse nicht einer mikrokristallinischen Struktur zuzuschreiben sind, sondern einfache Folgen der geometrischen

Beziehungen zwischen Öffnung, Platte und Brennfleck in seiner Röhre sind.

Physikalisches Institut, Universität Wisconsin (Madison, Wisconsin USA.), 5. Mai 1916.

(Aus dem Englischen übertragen von Josef Engl.)

(Eingegangen 26. Juni 1916.)

Die Röntgenspektren der Elemente *Na* bis *Cr*.

Von Manne Siegbahn und Wilhelm Stenström.

In einer früheren Mitteilung[1]) wurde über eine Untersuchung der Röntgenspektren (*K*-Reihe) der Elemente *Ge* bis *Cr* berichtet. Bei diesem letzten Elemente beginnt die Absorption im Röntgenrohrfenster und in Luft sich kenntlich zu machen. Für die Fortsetzung zu noch leichteren Elementen war daher nötig im Vakuum und mit weniger absorbierenden Fenstern zu arbeiten. Nachdem ein Vakuumspektrograph[2]) jetzt gebaut und probiert worden ist, wurde die genannte Untersuchung weitergeführt.

Mehrere von den unten verzeichneten Elementen sind schon früher von Moseley[3]) untersucht worden. Unsere Bestimmungen zeigen durchweg dieselben Abweichungen von dem Moseleyschen Werte wie unsere früheren Messungen und sind wahrscheinlich auf verschiedene Gitterkonstanten zurückzuführen. Benutzt wurde teils Steinsalz, teils Gips und ihre Gitterkonstanten zu

$$d = 2{,}814 \text{ und } d = 7{,}621 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

bzw. angenommen. Diese Werte sind auch unseren früheren Messungen zugrunde gelegt.

Für die experimentelle Methodik sei auf die früheren Mitteilungen hingewiesen. Die untersuchten Stoffe wurden in folgenden Formen benutzt: *Va* und *Ti* als Vanadin- bzw. Titansäure; *Sc* als Sulfat; dieses Präparat stammte aus den nachgelassenen Sammlungen von L. F. Nilsson und wurde uns von dem Nobelkomitee für Chemie, Stockholm, gütigst zur Verfügung gestellt; *Ca* und *P* als Oxyden; *K* als Sulfat, *Cl* und *Na* als Kochsalz, *S* als Na_2S und schließlich *Si*, *Al* und *Mg* in reinem Zustande.

Da die Gipskristalle eine Gitterkonstante von $d = 7{,}621 \cdot 10^{-8}$ haben, so ist nach der Gleichung

$$\lambda = 2d \sin\varphi$$

die größtmögliche Wellenlänge, die noch reflektiert werden kann, $15{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm und zwar würde dies bei senkrechter Inzidenz eintreffen. Bei zunehmendem Glanzwinkel φ wird aber die Intensität des reflektierten Strahls immer kleiner. Es würde daher ein Winkelwert von $\varphi = 50^0$ bis 60^0 die Grenze darstellen. In Wirklichkeit ist es Friman in seiner Doktorarbeit gelungen, eine Wellenlänge von $12{,}3 \cdot 10^{-8}$ entsprechend einem Winkel von $\varphi = 54^0$ nachzuweisen. Ein Fortschreiten zu längeren Wellen setzt einen Kristall voraus, der eine noch größere Gitterkonstante hat. Glimmer mit d gleich etwa $10 \cdot 10^{-8}$ cm wäre noch brauchbar. Wie durch Extrapolation ersichtlich, ist es mit unseren jetzigen Mitteln nicht möglich, die Reihen länger als bis *Na* zu verfolgen.

Um die Absorption an der Scheidewand zwischen Spektrograph und Röntgenrohr so weit als möglich herabzusetzen, wurde bei den leichtesten Elementen nur ein dünnes rotes Seidenpapier an die Spalte gelegt. Dies genügt, um den Luftstrom vom Spektrographen (mit Vorvakuum) zum Röntgenrohr hinreichend klein zu machen, damit im letzteren das Röntgenvakuum aufrecht erhalten werden kann. Andererseits geben die kleinen Poren im Papier den Röntgenstrahlen freien Durchtritt. Eine Schwärzung der Platte durch hindurchgehendes Licht war nicht zu beobachten.

Das Röntgenrohr war von derselben Gestalt wie früher, nur war die Kugel durch ein zylindrisches Rohr von 7 cm Weite ersetzt, um die Antikathode näher an den Spalt setzen zu können. Ferner war die Hohlkathode für weiche Strahlen zentriert. Beim Betriebe wurde das Vakuum so eingestellt, daß die kleinstmögliche Spannung mit beibehaltenem Kathodenstrahlkegel zur Verwendung kam.

Wie schon in unserer früheren Mitteilung bemerkt wurde, nimmt die Intensität der β_2-Linie mit abnehmendem Atomgewicht relativ stark ab. Dieselbe Beobachtung ist auch von E. Wagner[1]) gemacht worden. Ebenso nimmt die Intensität der β_1-Linie merklich ab. Dagegen kommen zwei Linien bei den leichteren Elementen neu hinzu ($\alpha_3\,\alpha_4$), die bei den etwas schwereren von ihnen nicht getrennt werden können. (Siehe Tabelle.)

Diese zwei Linien liegen sehr nahe an der $\alpha_1\,\alpha_2$-Linie und sind bei unseren früheren Messungen *Ge*—*Cr* gelegentlich bei einigen Elementen beobachtet worden. Auch bei *Se* und *Br* ist dicht an der α-Dublette eine schwächere Linie zu sehen, die vielleicht als eine Fortsetzung dieser Reihe zu betrachten ist. Bei

---

1) M. Siegbahn und W. Stenström, diese Zeitschr. 17, 48, 1916.
2) M. Siegbahn und E. Friman, diese Zeitschr. 17, 176, 1916; vgl. ferner E. Frimann, Diss. Lund 1916.
3) Moseley, Phil. Mag. (6) 27, 703, 1914.

1) E. Wagner, Sitz.-Ber. d. Bayr. Akad. Math.-phys. Kl. 1916, S. 31.



λ · 10⁸ cm						
Grundstoff	α_2	α_1	α_3	α_4	β_1	β_2
26 *Fe*	1,932	1,928			1,748	1,736
25 *Mn*	2,097	2,093			1,902	1,892
24 *Cr*	2,288	2,284			2,079	2,069
23 *Va*	2.502	2,498			2,281	
22 *Ti*	2,746	2,742	2,729		2,509	2,492
21 *Sc*	3,032	3,028	3 011		2,778	
20 *Ca*	3,359	3,355	3,328		3,086	3,074
19 *K*	3,738	3,735	3,724		3,449	
18 *Ar*						
17 *Cl*	4,712		4,692		4,394	
16 *S*	5,360		5,317	5,314	5,018	(5,029)
15 *P*	6,168		6,129	6,122	5,808	(5,853)
14 *Si*	7,131		7,088	7,080	6,759	
13 *Al*	8,360		8,310	8,300	7,986	
12 *Mg*	9,915		9,856	9,845	9,477	
11 *Na*	11,951 ·					

den leichten Elementen hat $\alpha_3 \alpha_4$ kleinere Wellenlänge als $\alpha_1 \alpha_2$, bei *Se* und *Br* dagegen größere, so daß, wenn die Vermutung richtig ist, die zwei Linienreihen bei den zwischenliegenden Elementen einander überkreuzen sollten. Allerdings ist zu bemerken, daß die *Se* und *Br* naheliegenden Elemente diese Linien $\alpha_3 \alpha_4$ nicht zeigen oder wenigstens nur mit einer weit geringeren Intensität relativ zu $\alpha_1 \alpha_2$ als bei *Se* und *Br*.

Lund, Physikalisches Institut, 22. Juni 1916.

(Eingegangen 24. Juni 1916.)

Über Wollastondraht.

Von Carl Benedicks.

1. In Anbetracht der außerordentlich großen Dehnbarkeit der Metalle, welche erlaubt Blattmetall so dünn darzustellen, wie die zu 0,00009 mm (0,09 μ) dick angegebenen Goldblättchen[1]) muß es m. E. befremdend wirken, daß auch mit dem Wollastonverfahren[2]) (Versilbern des auszuziehenden Drahtes; Ausziehen; Weglösen des *Ag*), doch nicht dünnere Haardrähte darzustellen möglich ist, als etwa vom Durchmesser 1 μ[3]).

Es muß als bis jetzt unentschieden gelten, ob dieses für die Verfeinerung der physikalischen Technik lästige Verhalten darauf beruht, daß sich längere, zusammenhängende Drähte von geringerem Durchmesser tatsächlich z. Z. nicht ziehen lassen, oder ob der Draht nur beim Auslösen des umgebenden Metalles zerrissen wird.

Durch die Aufgabe, in einem Lutzschen Saitenelektrometer von Edelmann einen Platindraht von etwa 1 μ einzusetzen, wurde ich veranlaßt mich mit diesem Problem etwas näher zu beschäftigen. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die soeben erwähnte Begrenzung in erster Linie darauf zurückzuführen ist, daß man, soweit mir bekannt, für das Abätzen der Wollastondrähte noch kein rationelles Verfahren besitzt. Es soll deshalb in den folgenden Zeilen auseinandergesetzt werden, welche Faktoren ausschlaggebend sind, und Anweisungen gegeben werden, wie die Behandlung der feinsten Wollastondrähte rationell stattzufinden hat.

2. Der zuerst anzuführende Umstand, welcher zum Zerreißen der dünnsten Wollastondrähte führt, ist derjenige, daß der Angriff des in der Salpetersäure eingesenkten Drahtes nicht gleichmäßig erfolgt. Man beobachtet leicht, daß an einzelnen Stellen die Seele frühzeitig bloßgelegt wird; diese Stellen werden im allgemeinen von dem Gewicht des angrenzenden noch dicken Drahtes stark beansprucht, so daß die Seele an diesen Stellen sehr oft zerreißt.

Einigermaßen verbessert wird die Sache, wenn man nur sehr verdünnte Säure, wie dies ja bisweilen empfohlen wird, anwendet. Man hat jedoch gar keine Garantie, daß die Verdünnung der Säure — die eine sehr erhebliche Zeitverschwendung bedeutet — eine gleichmäßige Entlastung herbeiführt.

Es bieten sich hier zwei Auswege dar. Entweder muß der Draht, in horizontaler Lage, seiner ganzen Länge nach unterstützt werden, etwa dadurch, daß er am Boden einer flachen Schale liegt. Aus später anzugebendem Grund ist dies nicht zu empfehlen. Weitaus rationeller ist es, den Angriff der — konzentrierten und gewärmten — Säure so zu leiten, daß bei vertikal hängendem Draht die Entlastung von unten her regelmäßig nach oben vorschreitet, was am einfachsten dadurch erzielt wird, daß der in geeigneter Weise beschwerte Draht nur allmählich in die Säure hinuntergesenkt wird. Die Einzelheiten, wie geeignete Beschwerung, werden im folgenden näher besprochen.

In dieser Weise läßt sich bisweilen ein gutes Resultat ohne weiteres erzielen. Im allgemeinen beobachtet man jedoch folgende Erscheinung (vgl. die schematische Fig. 1). Der ursprünglich annähernd vertikale Draht (*AB*) krümmt sich beim fortschreitenden Dünnerwerden zu einer Kurve *AC*; bei *C*, dem höchstgelegenen Punkt der bloßgelegten Seele, ist

---

1) M. Faraday, Bakerian Lecture, Phil. Trans. 1857, 145; Experimental Researches in Chemistry and Physics, London 1859, 391.

2) W. H. Wollaston, A method of drawing extremely fine wires. Phil. Trans. 1913, 114.

3) Vgl. z. B. C. W. Lutz, diese Zeitschr. **9**, 100, 1908; etwa derselbe Grenzdurchmesser (0,9 μ) wurde schon von Wollaston l. c. angegeben.

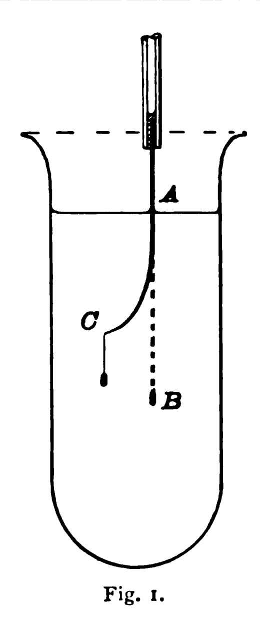


Fig. 1.

ein scharfer Knickpunkt vorhanden. Hier ist die Beanspruchung besonders groß, so daß der Zusammenhang stark gefährdet wird.

Bei freihängendem Draht kann der scharfen Biegung ungeachtet der Zusammenhang bisweilen bewahrt werden; liegt der Draht aber am Boden, ist er viel stärker gefährdet, und ist er schließlich an seinen Enden festgespannt, — wie bisweilen empfohlen wird — erfolgt das Zerreißen unfehlbar, wenn diese Krümmung stattfindet.

Das Hilfsmittel läßt sich jedoch unschwer angeben. Die Krümmung beruht auffälligerweise auf inneren Spannungen des Belegmetalles, sei es schon bei dem Ziehprozeß entstanden, oder durch das nachfolgende Aufwickeln auf die — meistens sehr dünne — Drahtrolle. Solche innere Spannungen lassen sich nun leicht beseitigen, und zwar im allgemeinen durch ein kurzdauerndes Erhitzen auf etwa 300—400 Grad. Es ist sehr auffallend, daß um diese Temperatur bei der meisten Materie eine Entspannung schnell stattfindet, sei es im gehärteten Stahl (Troostitbildung) oder im ungleichmäßig gekühlten Glase.

3. Nach dem Angeführten läßt sich grundsätzlich folgende Vorgangsweise für ein rationelles Bloßlegen der Wollastondrähte angeben:

Der Draht wird 1. am unteren Ende mit ein wenig unlöslichem Material beschwert; 2. etwa geradlinig gezogen und dann durch schwaches Erhitzen entspannt; 3. schließlich erfolgt das allmähliche Heruntertauchen in erwärmte starke Salpetersäure.

4. Nach der von mir gewonnenen Erfahrung geschieht die Ausführung zweckmäßig in folgender Weise.

Die zuverlässige Beschwerung des freien Endes — ohne welche mit einem bloßgelegten Wollastondraht im allgemeinen nichts anzufangen ist, ganz besonders wenn die Seele nahezu unsichtbar ist — führe ich folgendermaßen aus. An einem Ende des abgeschnittenen Drahtstücks wird ein Knoten gemacht wie in Fig. 2a; durch die noch weite Öse *A* wird ein dünner Platinhaardraht *C* (etwa 0,0025—0,050 mm) geführt und durch Drehen des Wollastondrahtes zusammengewunden (*C'*). Der Knoten wird dann noch etwas zugezogen (all-

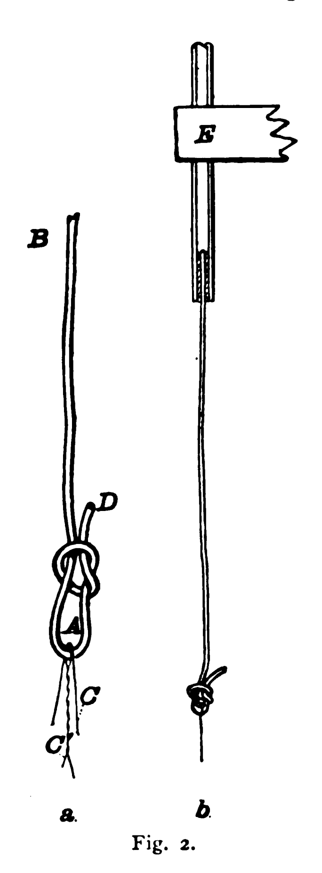


Fig. 2.

zu scharfe Biegungen zu vermeiden!). Das freie Ende (*D*) darf nicht zu kurz abgeschnitten werden, da sich sonst der Knoten lösen kann. Der Haardraht (*C'*) wird ev. noch umgewunden, so daß die Öse möglichst klein wird (sonst Schwierigkeit beim Passieren der Flüssigkeitsoberfläche); es wird dann *C'* bis auf einige Millimeter abgeschnitten. Es entsteht das Aussehen Fig. 2b. Dann erfolgt die Entspannung, etwa dadurch, daß der Draht an einem *Al*-Blech liegend, über einem Gasbrenner vorsichtig erwärmt wird. Nach der Entspannung darf der Draht nicht weiter gebogen werden.

Zur Ätzung verwende ich gewöhnliche konzentrierte, chlorfreie Salpetersäure (spez. Gew.

etwa 1,10—1,38) in einem weiten Probierrohr, das in einem wassergefüllten Erlenmayer-Kolben stehend, auf 60—80 Grad erwärmt wird.

Der Draht wird in der Verlängerung der Rohrachse an einem Stativ befestigt, das eine ziemlich sanfte vertikale Bewegung (seitlicher Anschlag!) des Drahtes erlaubt.

Es wird dann der Draht bis gerade über das freie Ende (*D*) eingesenkt; eine mäßige Gasentwicklung darf vorkommen. Nach ein paar Minuten sieht man das kleine Gewicht einige Millimeter heruntersinken: der Knoten hat sich von selbst zugezogen. Nachdem das umhüllende Metall weggelöst worden ist, wird der Draht wieder aufgezogen; dabei werden die gewöhnlich ansitzenden Gasbläschen entfernt, die sonst ein gefährliches Umherschweifen des freien Endes verursachen können.

Nunmehr wird der Draht bis zu einer größeren Strecke hinuntergesenkt: der Angriff schreitet nach oben fort, eine allmähliche Entlastung herbeiführend. Sollten Gasbläschen in zu großer Menge sitzen bleiben, werden sie durch Aufziehen des Drahtes entfernt.

Das Ziehen des Drahtes durch die Oberfläche hat noch die nicht unwichtige Aufgabe, die *Pt*-Seele zu reinigen. Das Silber wird nämlich nur selten glatt aufgelöst; wie Beobachtungen im Metallmikroskop hervorgehen ließen, entsteht gewöhnlich eine aufgelockerte Rinde von Silberkriställchen (ev. mit Kristallen von Silbernitrat, das in sehr konzentrierter Salpetersäure schwer löslich ist). In dieser stabileren Form löst sich das Silber mitunter nur sehr schwierig auf. Beim Durchziehen durch die Oberfläche wird diese Rinde mechanisch zerstört und oft zu Klümpchen angesammelt, die dann in der Säure verhältnismäßig schnell verschwinden.

Für die Platinseele ist das Hin- und Herziehen durch die Oberfläche gefahrlos, wenn das Gewicht wie beschrieben geformt worden ist; in keinem einzigen Fall, auch bei unsanfter Führung, ist mir dabei der Draht gerissen. Der Hauptvorteil der beschriebenen *Pt*-Beschwerung ist eben, daß sie sich wegen des geringen Durchmessers leicht durch Flüssigkeitsoberflächen führen läßt, was noch für das nachherige Abwaschen (erwärmtes Wasser, Alkohol) wichtig ist.

Wenn es erwünscht ist, beide Enden ungeätzt zu lassen (etwa wegen des ev. nötigen beiderseitigen Verlötens bei *Al*-Seele) kann man allerdings mit Wollaston den Draht ∿∫‑förmig gebogen hineinsenken, wobei (beim feinsten Draht) eine Beschwerung in der Mitte stattzufinden hat. Allerdings ist die obige Behandlungsweise eine viel bequemere.

Bei den obigen Auseinandersetzungen wurde hauptsächlich dünnste *Pt*- oder *Au*-Seele berücksichtigt; sie sind jedoch ebensogut für *Al*-Seele gültig. Allerdings ist bei *Al* größere Vorsicht nötig, da Drähte aus diesem Metall leichter zerrissen werden; wegen des niedrigeren Schmelzpunkts dürfte eine niedrigere Temperatur als für *Pt* und *Au* zu empfehlen sein[1]).

Die oben beschriebene Behandlungsweise der feinsten Wollastondrähte bedeutet nach meiner Erfahrung eine erheblich vergrößerte Sicherheit und Leichtigkeit der Handhabung, sowie eine bedeutende Zeitersparnis, indem das Abätzen z. B. leicht in einer Viertelstunde stattfindet.

5. Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob sich nicht feinere Wollastondrähte als 1 μ darstellen lassen.

Eingehendere Versuche sind von mir nicht angestellt worden. Es wurde jedoch ein Wollastondraht von Heraeus, angeblich mit Seele aus *Pt* von 1 μ, vom äußeren Durchmesser 0,25 mm zum Durchmesser 0,13 mm ausgezogen. Die resultierende Abnahme des Seelendurchmessers hat nicht gehindert, lange Stücke zu erhalten.

Ein anderes Stück desselben Drahtes wurde schwach ausgewalzt; das nachher bloßgelegte „Wollastonband" war im Mikroskop zwar nicht gerade gleichmäßig, ließ sich aber jedenfalls in gewisser Länge erhalten.

Aus dem, was angeführt worden ist, schließe ich, daß die für die Entwickelung der physikalischen Mikrotechnik wichtige Verfeinerung des Wollastondrahtes wenigstens bis 0,5 μ ohne größere Schwierigkeit möglich ist.

Es ist einleuchtend, daß dabei besonders größtmögliche Gleichmäßigkeit des Außenmetalls erstrebt werden muß. Weiter muß in Frage gestellt werden, ob vielleicht anderes Material als *Ag* als Außenmetall vorzuziehen wäre. Es scheint mir gewisse beim Ziehen des Stahldrahtes gewonnene Erfahrung dafür zu sprechen, daß für das Erreichen der äußersten Verfeinerungen — wo vor allem der Zusammenhang der Seele bewahrt werden muß — das Außenmetall härter, weniger nachgiebig sein muß als das innere Metall. Demgemäß würde etwa eine *Ag-Cu*-Legierung vielleicht dem *Ag* vorzuziehen sein.

1) Aus einer Behandlungsvorschrift für *Al*-Wollastondraht, die mir neuerdings die Firma W. C. Heraeus zugehen ließ, entnehme ich, daß es sich empfehlen soll, vor dem Abbeizen den Draht ca. 2—5 Min. auf ca. 220° — jedoch nicht höher — zu erhitzen.



Zusammenfassung.

Nach den obigen Auseinandersetzungen kann folgendes Verfahren empfohlen werden, um den feinsten Wollastondraht bloßzulegen.

Das abzubeizende Drahtstück wird unten mit einem *Pt*-Drähtchen beschwert (nach Fig. 2); vorhandene Spannungen werden durch kurzdauerndes Erhitzen auf etwa 200—400 Grad entfernt. Der Draht wird dann, in einem Stativ befestigt, stückweise in konzentrierte, erhitzte Salpetersäure hineingesenkt, wodurch in kürzester Zeit allmähliches, ungefährliches Entfernen der Silberhülle stattfindet.

Dieses Verfahren dürfte eine Erleichterung der Handhabung bedeuten, welche zur Verfeinerung des Wollastondrahtes unter 1 μ führen kann.

Stockholm, Physik. Institut der Universität, Juni 1916.

(Eingegangen 21. Juni 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Forschungen zur Farbenlehre.

Von Wilhelm Ostwald.

Bisheriger Stand der Farbenlehre.

Die Arbeiten in der Farbenlehre sind von jeher durch den Umstand beeinträchtigt worden, daß keine genügende Klarheit über die Frage bestand, welcher allgemeineren Wissenschaft sie zuzurechnen ist. So kam es, daß sie in ihren ersten Zeiten als physikalisches oder gar chemisches Problem betrachtet worden ist und daß ihr erfolgreichster Bearbeiter in neuerer Zeit, Helmholtz, zu den Problemen der Farbenlehre zunächst vom Standpunkte des Physikers und dann von dem des Physiologen Stellung genommen hatte. Indessen tritt doch bei den heutigen Forschern unter der Führung E. Herings mit großer Entschiedenheit die Erkenntnis in den Vordergrund, daß die Farbenlehre in letzter Analyse sich als eine psychologische Disziplin erweist, daß also die Psychologie jene allgemeine Wissenschaft ist, in welcher die Farbenlehre als Teildisziplin untergebracht werden muß. Gemäß dem gesetzmäßigen Aufbau der gesamten Wissenschaften spielen demnach die vorher genannten Disziplinen von der Logik und Mathematik (die wir zusammen Mathetik nennen wollen) ab durch die Physik, Chemie und Physiologie in der Farbenlehre die Rolle von Hilfswissenschaften. Es ist deshalb vollkommen natürlich, daß jene Disziplinen, deren Entwicklung wegen ihrer verhältnismäßig größeren Einfachheit schneller stattfand als die der Psychologie, zunächst diejenigen Gebiete der Farbenlehre, in welchen sie besonders Anwendung fanden, als Teile des eigenen Gebietes behandelten. In solcher Weise hat sich insbesondere eine ausgedehnte physikalische Farbenlehre entwickelt, die auf dem engen und bestimmten Zusammenhang beruht, welche die Farbenempfindung zu der Reizung des Sehapparats mit Hilfe von Licht gegebener Wellenlängen aufweist. Aber alle diese allgemeineren Wissenschaften können, wie das in der Natur der Sache liegt, nur Material zu der endlichen Lösung der Probleme der Farbenlehre beibringen, reichen aber nicht aus diese Lösung zu bewerkstelligen. Sie sind mit anderen Worten zwar notwendige, aber nicht zureichende Bestandteile einer wissenschaftlichen Farbenlehre.

Auch kann man in der Geschichte der Farbenlehre die Schwierigkeiten deutlich erkennen, welche aus der ungenügenden Klarheit über diese Verhältnisse entstanden. Der leidenschaftliche Kampf beispielsweise, welchen Goethe gegen Newton führte, kommt in letzter Instanz auf den Umstand zurück, daß für Goethe die Farbenlehre sachgemäß ein psychologisches Problem war, während Newton nur die physikalischen Bedingungen bestimmter Farbenempfindungen festgestellt hatte und von seinen Nachfolgern diese Bedingungen als eigentlicher und letzter Inhalt der Farbenlehre behandelt wurden. In neuerer Zeit hat sich insbesondere E. Hering das Verdienst erworben, auf die tatsächlichen Verhältnisse energisch hinzuweisen und gleichzeitig den Grund einer rein psychologischen Farbenlehre zu legen, für welche sachgemäß die genannten anderen Wissenschaften nur als Hilfsdisziplinen in Betracht kommen.

Immerhin hat aber auch die neuere Entwicklung noch nicht dazu geführt, die Hauptprobleme der rationellen Farbenlehre zu lösen. Eine Zusammenstellung desjenigen, was bisher bekannt war, läßt große Lücken in bezug auf eine ganze Anzahl von wesentlichen Punkten erkennen. So ist beispielsweise von jeher der Idealbegriff einer reinen oder gesättigten Farbe benutzt worden, um die unreinen oder trüben Farben auf ihn zu beziehen. Fragt man nach einer Definition einer gesättigten Farbe, so wird man meist auf die Farben von Schwingungen gleicher Periode, also die im Spektrum isolierten

Farben hingewiesen. Eine etwas eindringendere Überlegung läßt aber erkennen, daß die Identifizierung spektralreiner Farben mit gesättigten Farben unmöglich richtig sein kann. Zu den reinsten Farben, die gegenwärtig die Technik herstellt, gehören die gelben, und man kann am Gelb eine Verunreinigung insbesondere mit Schwarz oder Grau besonders leicht erkennen. Alle Forscher über diesen Gegenstand sind nun vollkommen einig darüber, daß unter allen reinen oder gesättigten Farben die gelbe die hellste ist. Betrachtet man aber sorgfältig ein Spektrum und sucht festzustellen, welcher Anteil darin von reingelben Strahlen eingenommen wird, so überzeugt man sich, daß dieses Gebiet überaus eng ist und sicherlich auch im psychophysischen Sinne höchstens einige Prozente der Gesamtheit des Spektrums ausmacht. Ein gesättigtes Gelb müßte also, wenn es mit einem spektralreinen identisch wäre, eine Helligkeit von einigen Prozenten der Helligkeit eines reinweißen Körpers haben, wovon gar nicht die Rede sein kann, denn die Helligkeit des Gelb ist viel größer. Tatsächlich wird hernach gezeigt werden, daß sie 0,9 von der des absoluten Weiß beträgt, woraus mit Notwendigkeit folgt, daß das reine Gelb ganz sicherlich nicht aus spektralreinen Strahlen, auch nicht aus nahe benachbarten, etwa 580 bis 590 bestehen kann, sondern eine große Anzahl sonstiger Strahlen enthalten muß. Andererseits ergibt die spektrale Analyse beliebiger reingelber Lösungen oder Aufstriche ein ganz übereinstimmendes Resultat, nämlich das ungeschwächte Vorhandensein aller Strahlen vom roten langwelligen Ende des Spektrums bis zum Blaugrün, etwa der Wellenlänge 490. Je reiner das Gelb ist, um so genauer entspricht die Spektralanalyse der eben gegebenen Beschreibung; sowie man an irgendwelcher Stelle dieses Gebietes Teilabsorptionen nachweisen kann, erweist sich auch das zugehörige Gelb psychophysisch als unrein im Vergleich mit anderen reinen gelben Farben.

Ein anderes ungelöstes Problem ist bei dieser Gelegenheit gleichfalls berührt worden. Es ist dieses die Frage nach dem Reinheitsgrade einer vorgelegten Farbe und den Mitteln diesen zu messen. Das einzige was bisher vorlag, sind vereinzelte und schüchterne Vorstöße einzelner Forscher auf Grund des Satzes, daß die verschiedenen Abkömmlinge eines gegebenen Farbtones um so reiner sind, je mehr von ihrer Gegenfarbe sie brauchen, um (etwa mit Hilfe der Drehscheibe) ihre Farbe auf reines Grau zu neutralisieren. Ersichtlicherweise gibt dieses Verfahren, auch wenn man es grundsätzlich soweit ausdehnt, als der Grundgedanke es gestattet, nur die Möglichkeit relativer Reinheitsbestimmungen in bezug auf eine bestimmte zum Kompensieren benutzte Gegenfarbe. Es gestattet also keinen Schluß auf absolute Reinheitswerte und ermöglicht ebensowenig einen Übergang von einem Farbton zum anderen. Denn das Prinzip vermag nur über Reinheitsverhältnisse eines Paares von Komplementärfarbtönen Auskunft zu geben, gestattet aber nicht eine Ausdehnung auf irgendeinen dritten Farbton.

Ein drittes Beispiel für den gegenwärtigen Zustand der Farbenlehre ist die Frage nach der Helligkeit der bunten Farben. Die Schwierigkeiten der praktischen Photometrie bei dem Vergleich verschiedenfarbiger Lichtquellen haben sich als so groß erwiesen, daß von zahlreichen kompetenten Forschern die Vergleichbarkeit der Helligkeit verschiedenfarbiger Lichter überhaupt geleugnet und somit die Aufstellung des spezifischen Helligkeitswertes einer gegebenen Farbe für unmöglich erklärt wird. Durch den einfachen Ausweg, nicht verschiedene bunte Farben miteinander auf ihre Helligkeit zu vergleichen, sondern für jede einzeln ein Grau aufzusuchen, welches psychologisch denselben Helligkeitseindruck macht, kann man die eben genannten Schwierigkeiten grundsätzlich beseitigen und tatsächlich für jede vorgelegte Farbe einen Helligkeitswert bestimmen, der gewissen überaus einfachen und allgemeinen Gesetzen unterliegt. Gleichzeitig ergibt sich allerdings, daß die bisherige Einbeziehung der Helligkeit unter die maßgebenden Koordinaten jeder Farbe, als welche Farbton, Reinheit und Helligkeit seit Helmholtz allgemein angesehen wurden, nicht als rationell bezeichnet werden kann, da die Helligkeit sich als eine besondere Eigenschaft der Farben ergibt, die mit ihrer Analyse und Synthese unmittelbar nichts zu tun hat. Als Elemente, die bei der Farbanalyse erhalten werden, müssen vielmehr neben dem Farbton die Anteile an Schwarz und an Weiß in der vorgelegten Farbe bezeichnet werden, deren Angabe sowohl die Ergebnisse der Analyse eindeutig auszudrücken gestattet, wie auch andererseits eine entsprechende Synthese mit Wiederherstellung der analysierten Farbe ermöglicht.

So ließen sich noch eine Anzahl anderer Punkte namhaft machen, in denen die bisherige Farbenlehre die Auskunft versagt oder eine falsche Auskunft gibt. Es sei die Frage erwähnt, warum im Spektrum auch bei beliebiger Variation der Helligkeit und bei beliebiger Mischung niemals braune, olivgrüne und ähnliche Farbtöne erhalten werden können, auch wenn man das Verhältnis zwischen monochromatischem und weißem Licht in allen beliebigen Abstufungen variiert. Ferner ist auf das Fehlen

eines Prinzips hinzuweisen, nach welchem man die stetige in sich zurücklaufende Reihe der Farbtöne einteilen und beziffern kann, um jedem von ihnen im Farbenkreise seinen ganz bestimmten, von subjektiver Willkür oder der Aufbewahrung irgendeines willkürlich gewählten Musters unabhängigen Ort anzuweisen.

Alle diese Tatsachen lassen erkennen, daß ein grundsätzlicher Aufbau der Farbenlehre von ihren Elementen aus notwendig ist, um dieses Gebiet der exakten Wissenschaft anzugliedern. Ein Bedürfnis nach einem solchen Fortschritt ist heute besonders dringend, wo beispielsweise eine ausgedehnte und weltbeherrschende Industrie der künstlichen Farbstoffe besteht, welche sich bis jetzt außerstande gesehen hat, die Haupteigenschaften ihrer Produkte, nämlich ihre Farbe, nach Zahl und Maß zu kennzeichnen. Gegenwärtig kann eine bestimmte Farbe nicht anders als durch die Vorlage eines physischen Objekts, welches diese Farbe besitzt, definiert werden und der Möglichkeit, daß diese Vorlage im Laufe der Zeit in irgendeinem Sinne Änderungen erleiden kann, steht man praktisch hilflos gegenüber.

Es besteht also die Aufgabe, nicht nur die eben aufgezeichneten Lücken und Unzulänglichkeiten auszufüllen und zu beseitigen, sondern auch die fehlenden Grundlagen so weit zu beschaffen, daß man die Farbe ebenso mit Zahl und Maß eindeutig bezeichnen und umgekehrt eine bestimmte vorgeschriebene Farbe ebenso zweifellos und ohne Zuhilfenahme einer aufbewahrten Norm herstellen kann, wie dies beispielsweise mit Temperaturen, elektrischen Spannungen oder Volumen möglich ist. Es muß mit anderen Worten als Ziel einer wissenschaftlichen Farbenlehre der Anschluß des Systems der Farben an das sogenannte absolute Maßsystem gefordert werden. Nachstehend will ich zu zeigen versuchen, daß diese Forderungen gegenwärtig sich tatsächlich erfüllen lassen.

Bezugsfreie und bezogene Farben.

Wenn man von einem Spektroskop gewöhnlicher Konstruktion die Okularlinse entfernt und an die Stelle des Fadenkreuzes einen Spalt bringt, so erblickt man beim Hindurchschauen durch diesen die vordere Fläche des Prismas von einer homogenen Farbe erfüllt, welche von der Orientierung der beiden Spalten abhängt und durch Bewegung des Fernrohrs oder des Prismas durch das ganze Spektrum geführt werden kann. Stellt man nun das Spektroskop auf eine bestimmte Farbe, z. B. das reine Zitronengelb ein und ändert deren Helligkeit durch Öffnen und Schließen des Objektivspaltes in beliebigen Grenzen, so erscheint das Gesichtsfeld immer rein gelb. Nur bei sehr heller Beleuchtung geht dieses Gelb infolge von Blendung des Auges in Weiß über. Beim starken Verdunkeln andererseits wird das Gelb mit dem Undeutlicherwerden des Gesichtsfeldes schließlich gleichfalls farblos, da man es infolge seiner Lichtschwäche nicht mehr mit der Sehgrube, sondern mit peripheren Gebieten der Netzhaut beobachtet, welche viel lichtempfindlicher sind, dagegen aber keinen Farbenunterschied vermitteln. Von der charakteristischen Verfärbung des Gelb durch Zusatz von Schwarz, wie man sie sich beispielsweise veranschaulichen kann, wenn man die Farben einer gelben und einer schwarzen Scheibe auf der Drehscheibe zur Vermischung bringt, läßt sich im Spektralapparat keine Spur erkennen; es fehlen durchaus jene gelbgrauen oder olivgrünen Farben, welche durch die optische Mischung von Schwarz und Gelb erzeugbar sind und dem Ungeübten ein so überraschendes Schauspiel der unbunten Abwandlung einer reinen Farbe bieten. Ähnliche Erscheinungen kann man sich auf noch einfachere Weise verschaffen, wenn man ein innen geschwärztes Rohr am äußeren Ende mit einer Mattglasscheibe oder einem Verschluß von paraffiniertem Papier versieht und das so entstehende helle Gebiet in einem im übrigen dunklen Gesichtsfelde durch die Anbringung tiefgefärbter Gelatinefolien mit irgendeiner deutlichen Farbe ausstattet. Wendet man dieses Rohr nacheinander zum Fenster und zu den dunkelsten Ecken des Zimmers, so kann man die objektive Stärke des einfallenden Lichtes innerhalb weitester Grenzen ändern. Das Licht selbst ändert hierbei durchaus nicht seine Farbe, Ist diese rot, so bleibt sie rot bis zu den letzten Grenzen der Erkennbarkeit und wird nicht etwa braun, wie die rote Farbe beim optischen Vermischen mit Schwarz auf der Drehscheibe. Ebensowenig ist es möglich in einem solchen Apparat (ohne farbiges Lichtfilter) Grau zu sehen, wenn man die Lichtstärke ändert. Man sieht entweder ein helles Gesichtsfeld oder man sieht nichts, man empfindet aber niemals etwa bei einer mittleren Beleuchtung dieses Gesichtsfeld als grau und als weiß bei stärkerer Beleuchtung.

Haben wir hier einen Fall, wo eine Farbe trotz weitgehender Änderungen der objektiven Lichtstärke sich nicht ändert, so können wir andererseits sehr leicht einen Fall verwirklichen, in welchem das Aussehen einer Farbe trotz unveränderter objektiver Lichtstärke innerhalb weitester Grenzen variiert. Der Versuch rührt von E. Hering her und muß als ein Grundversuch der psychologischen Farbenlehre bezeichnet werden. Ich rate deshalb jeden Leser

auf das dringendste, ihn alsbald selbst anzustellen. Es gehört dazu nichts als ein Stück recht lebhaft gefärbtes Papier (am besten zitronengelbes) und ein größeres Stück weißes undurchsichtiges Papier, in welches man eine mittlere Öffnung von etwa 2 cm gemacht hat. Man legt das gelbe Papier horizontal auf den Tisch nach dem Licht zu und hält das weiße Papier in 10 bis 20 cm Entfernung so über dem gelben, daß es dieses für das Auge vollständig zudeckt und die gelbe Farbe nur in der Öffnung des weißen Papiers sichtbar wird. Dieses Gelb erscheint normal, d. h. ebenso wie bei der unmittelbaren Betrachtung des gelben Papiers, wenn das weiße Papier horizontal gehalten wird. Dreht man es nun so zum Licht, daß es immer heller beleuchtet wird, wobei man immer darauf achtet, daß kein Schatten auf das unterliegende gelbe Papier fällt, so zeigt sich das Gelb in der Öffnung veränderlich. Es wird zunehmend grauer und seine Farbe kann, wenn die Verhältnisse gut gewählt sind, d. h. die Beleuchtung des weißen Papiers in der günstigsten Lage erheblich stärker als die gelbe ist, bis zu einem schwärzlichen Olivgrün gehen. Dreht man das weiße Papier umgekehrt so zurück, daß seine Oberfläche weniger beleuchtet wird, so nimmt das Gelb zunächst sein normales Aussehen an, verwandelt sich aber dann beim weiteren Beschatten des weißen Papiers in ein leuchtendes Hellgelb, wie man es durch Pigmente überhaupt nicht herstellen kann.

Hier ist also Beschaffenheit und Intensität der Lichtstrahlen, die von dem gelben Papier ins Auge gelangen, während des ganzen Versuchs unverändert geblieben und nur der Rahmen, innerhalb dessen das Gelb erscheint, hat eine Änderung seiner Helligkeit erfahren. Trotzdem hat sich die Farbe dieses objektiv unverändert gebliebenen Gelb innerhalb weitester Grenzen geändert und hat insbesondere alle diejenigen Veränderungen erkennen lassen, die man durch die Vermischung eben desselben Gelb mit Schwarz auf der Drehscheibe zur Erscheinung bringen kann.

Während also die erste Versuchsreihe zeigte, daß trotz weitgehender Änderung in der objektiven Helligkeit einer Farbe ihr Farbencharakter unverändert bleiben kann, zeigt der zweite Versuch, daß trotz unveränderlicher objektiver Helligkeit und Zusammensetzung einer Lichtmasse deren Farbe doch innerhalb weitester Grenzen variieren kann.

Es liegt hier also ein tiefgreifendes Problem vor, das unbedingt eine Lösung verlangt. Diese Lösung liegt darin, daß es sich hier um zwei wesentlich verschiedene Klassen von Farben handelt, von denen die eine bezugsfreie, die andere bezogene Farben genannt werden sollen.

Die bezugsfreien Farben sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen ein großes Gebiet von Farben fehlt, die wir sonst genau kennen; nämlich alle braunen, olivgrünen usw., kurz alle trüben Farben. Dies rührt daher, daß die bezugsfreien Farben nur zwei Variable haben, nämlich einerseits den Farbton und andererseits den Anteil Weiß, der natürlich auch Null sein kann. Bringt man beispielsweise an dem Fernrohr des Spektroskops, in welchem sich gewöhnlich die Wellenlängenskala befindet, eine Mattscheibe und eine Vorrichtung zu beliebig veränderlicher Beleuchtung derselben an, so kann man dem homogenen Licht, das der Spektralapparat bei der oben beschriebenen Anordnung zu beobachten gestattet, beliebige Anteile weißen Lichtes zumischen. Hiermit ist die Variationsmöglichkeit der bezugsfreien Farben, wie sie im Spektralapparat erscheinen, vollständig erschöpft. Man kann einen gegebenen Farbton nur durch Zumischung von Weiß immer blasser machen, bis er seinen bunten Charakter ganz verloren hat; man kann ihn aber nicht durch Verminderung seiner absoluten Helligkeit unter zunehmendem Verlust seiner Farbe stetig in Schwarz überführen, wie dies etwa auf der Drehscheibe durch Zumischung von Schwarz möglich ist.

Der entscheidende Umstand, welcher die bezugsfreien Farben charakterisiert, beruht darauf, daß jeweils nur eine einzelne Farbe in einem übrigens lichtlosen Gesichtsfelde erscheint. Die beobachtete Farbe steht somit für sich allein da und es besteht keine Möglichkeit, sie mit anderen gleichzeitig empfundenen Farben zu vergleichen. Jedesmal, wo man solche Bedingungen herstellt, die aus bestimmten Gründen beispielsweise in fast allen optischen Apparaten realisiert sind oder leicht realisiert werden können, hat man es mit einer Farbe aus dem System der bezugsfreien Farben zu tun, deren Variable nur der Farbton und das Weißverhältnis sind.

Daß die absolute Intensität keinen Einfluß auf das Aussehen der Farbe unter diesen Umständen ausübt, rührt daher, daß das Auge aus biologischen Gründen mit Vorrichtungen ausgestattet ist, die den Einfluß der objektiven Intensität nach Möglichkeit kompensieren. Es sind dies namentlich die Beweglichkeit der Iris und die Änderung der Lichtempfindlichkeit in der Netzhaut. Daher verschwindet (abgesehen von extremen Fällen) die Variable der objektiven Lichtstärke für die Empfindung, d. h. für dasjenige, was wir Farbe nennen und es bleibt, wie Helmholtz seinerzeit bewiesen hat, nur noch die Variationsmöglichkeit nach dem Farbton

und nach dem Weißverhältnis übrig. Denn er hat gezeigt, daß die Farbe jeder beliebigen Mischung von Wellenlängen identisch nachgeahmt werden kann durch eine Mischung aus einer homogenen Lichtart mit weißem Licht mit Ausnahme des purpurnen Gebietes, wo zwei Arten homogenen Lichtes nötig sind.

Da nun die meisten Forscher, welche über die wissenschaftliche Farbenlehre gearbeitet hatten, sich spektraler und ähnlicher Farben aus dem bezugsfreien Gebiet bedient haben, so ist die Folge gewesen, daß man die Farbenlehre vorwiegend von dieser sehr besonderen Seite her und deshalb in hohem Maße unvollständig ausgebildet hat. Weder Helmholtz noch einer seiner Nachfolger hat, soweit meine Kenntnisse der Literatur reichen, jemals auf den grundsätzlichen Unterschied der bezugsfreien Farben von den gewöhnlichen bezogenen und auf das Verschwinden einer der drei Veränderlichen, die bei letzteren auftreten, hingewiesen. Die Klarheit über diesen Punkt ist aber von wesentlicher Bedeutung für die weitere Entwicklung der Farbenlehre.

Das Wesen der bezogenen Farben geht umgekehrt aus dem Versuch von Hering mit eindringlichster Deutlichkeit hervor. Hier bewirkt derselbe objektive Reiz dadurch, daß in dem veränderlichen Rahmen des weißen Papiers die gelbe unveränderliche Fläche erscheint, daß die zugehörige Farbenerscheinung, d. h. das zugehörige psychologische Produkt, eine ganze Reihe von Abänderungen erfährt, wie man sie unter anderen Bedingungen nur durch objektive Änderung der Lichtart hervorrufen kann.

Die Verhältnisse, welche unseren Empfindungen der bezogenen Farben zugrunde liegen, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Wir erkennen die Gegenstände der Außenwelt ganz vorwiegend durch das Licht, welches sie von ihrer Oberfläche zurückwerfen. Sehen wir von regelmäßiger Reflexion oder Spiegelung ab, welche auf dem Farbengebiet zu den Sondererscheinungen des Glanzes führen und setzen die fragliche Oberfläche, als vollständig matt, also von jeder orientierten Reflexion frei, voraus, so liegen zunächst zwei ideale Grenzfälle vor. Nämlich der, in welchem alles auffallende Licht reflektiert und der, wo gar kein Licht reflektiert wird. Eine Oberfläche der ersten Art ist eine ideal weiße, eine der zweiten eine ideal schwarze Fläche. Beide Ideale sind wie immer technisch unerreichbar; man kann sich ihnen aber zunehmend nähern. Was die ideal weiße Fläche anlangt, so fehlt es charakteristischerweise völlig an Untersuchungen, die mit modernen Hilfsmitteln an einer gut definierten weißen Fläche den Absolutwert der Weiße oder die Albedo angeben. Auf Grund meiner Untersuchungen an weißen matten Flächen aller Art halte ich mich zu der Annahme für berechtigt, daß ein Aufstrich von gefälltem Bariumsulfat, der auch von anderen Seiten als Normalweiß empfohlen ist, eine Albedo besitzt, die von der Einheit nicht mehr als einige Prozent abweichen kann. Eine solche Schicht ist nämlich etwas weißer als irgendeine andere, die ich habe herstellen können, während doch die anderen weißen Schichten sich dieser vielfach so weit nähern, daß die Konvergenz auf einen Endpunkt unverkennbar ist. Es muß als eine dringende Aufgabe eines mit den nötigen Hilfsmitteln ausgestatteten Laboratoriums, in erster Linie unserer Physikalisch-technischen Reichsanstalt, bezeichnet werden, die absolute Bestimmung der Albedo irgendeiner reproduzierbaren Oberfläche vorzunehmen, damit es hernach möglich wird, durch einfache photometrische Messungen jedes beliebige Weiß auf die Norm der absoluten Einheit zu beziehen.

Viel besser orientiert sind wir über das andere Ende der Reihe Weiß—Grau—Schwarz, da die entsprechenden Untersuchungen übereinstimmend ergeben haben, daß auch unsere schwärzesten Pigmente noch einige Prozente Weiß reflektieren. Ein ideales Schwarz kann indessen technisch durch eine kleine Öffnung in einem innen geschwärzten Kasten realisiert werden und bester schwarzer Seidensammet zeigt eine Remission (mit diesem Ausdruck soll nach Hering allgemein die Zurückwerfung des Lichtes von einer matten Oberfläche bezeichnet werden), die nur einen Bruchteil eines Prozentes (bei einem mir vorliegenden Material 0,2 Proz.) ausmacht.

Zwischen den Grenzen Weiß und Schwarz liegt nun die Remission aller anderen Körperoberflächen. Zum Teil remittieren sie das darauffallende Licht, ohne eine besondere Strahlenart zu bevorzugen oder zu benachteiligen und sehen dann gemäß dem Bruchteil des remittierten Lichtes hell- oder dunkelgrau aus. Zum anderen, viel häufigeren Teil findet eine selektive Remission statt, die in letzter Instanz auf einer Absorption in den Oberflächenschichten beruht und die Farben der Gegenstände erscheinen demgemäß bunt.

Diese Remissionsverhältnisse sind nun höchst charakteristische Konstanten der uns umgebenden Körpers. Da für die Lichtenergie innerhalb der von uns herstellbaren Umfänge keine „Sättigung" irgendwelcher Art stattfindet, da also insbesondere die Intensität des remittierten Lichtes innerhalb weitester Grenzen streng proportional der Intensität des auffallenden Lichtes ist, so erklärt es sich, daß die biologische Anpassung unseres Sehorgans nicht für die Auf-

fassung absoluter Helligkeiten erfolgt ist, die ja beständig wechseln und daher nichts Charakteristisches für die Unterscheidung der Außenwelt beibringen, sondern für die Auffassung von Verschiedenheiten der Remission, welche ganz unabhängig von der Lichtintensität sind und allein ein Wiedererkennen bestimmter Objekte sichern.

Die bezogenen Farben sind nun durch die Remissionsgrößen bedingt und werden in solchem Sinne beurteilt. Das Gelb in der Öffnung des weißen Schirmes in dem oben beschriebenen Fundamentalversuch wird unwillkürlich aufgefaßt als ein Teil der weißen Fläche und die in dieser Öffnung herrschenden Lichtverhältnisse werden beurteilt, als würden sie bewirkt durch eine in der Öffnung befindliche remittierende Fläche, d. h. sie werden auf die Remission bezogen, welche der Umgebung des Fleckes, dem weißen Papier, eigen ist. Remittiert diese Fläche verhältnismäßig viel mehr Licht, als von dem gelben Papier kommt, so macht die Öffnung den Eindruck, als wäre sie mit einem gelben Pigment bedeckt, welches daneben noch einen entsprechenden Betrag allgemeiner Absorption ausübt, also einen Anteil Schwarz enthält, der um so größer wird, je größer die Helligkeit des Rahmens im Verhältnis zu der des eingeschlossenen Gebietes gemacht wird. Gelangt umgekehrt von seiten der gelben Fläche relativ mehr Licht durch die Öffnung als bei den Beleuchtungsverhältnissen der weißen Umgebung auch von dem hellsten gelben Pigment remittiert werden würde, so empfinden wir den Fleck als leuchtend, weil wir nur in selbstleuchtenden Körpern solche Oberflächen kennen, die eine größere Lichtmenge remittieren als eine Fläche von der Albedo Eins. Hier erweist sich also unsere Empfindung der Farbe (denn es handelt sich, wie besonders betont werden soll, hier keineswegs um ein bewußtes Urteil, sondern um eine automatisch funktionierende Zuordnung) als bedingt durch bestimmte Remissionsverhältnisse. Die Kennzeichnung dieser Remissionsverhältnisse erscheint somit im Gebiet der bezogenen Farben als die fundamentale Aufgabe der Farbenlehre. Denn von diesen Remissionsverhältnissen sind nicht nur die charakteristischen Eigenschaften der Farbstoffe abhängig, sondern unsere ganze Beurteilung der optischen Erscheinungswelt wird maßgebend durch sie bestimmt.

In dem Gebiet der bezogenen Farben treten nun die charakteristischen drei Veränderlichen der Farbengesamtheit auf. Hier können wir olivgrüne, braune und andere bei den bezugsfreien Farben fehlende Farben in all ihrer Mannigfaltigkeit studieren. Wir erkennen, daß dieses daran liegt, daß nunmehr das Schwarz, welches bei den bezugsfreien Farben fehlt, als selbständige Empfindung oder psychische Tatsache seine Rolle zu spielen beginnt. Demgemäß gewinnen wir zunächst durch seine Mischung mit Weiß die verschiedenen Arten des Grau, und weiterhin durch seine Mischung mit den reinen und den nach Weiß abgewandelten Farben die ganze Mannigfaltigkeit der dunklen und der trüben Farben, die sich im allgemeinen als Mischungen einer reinen Farbe mit irgendeinem Grau definieren lassen. Hierdurch wird ferner ersichtlich, daß die bezugsfreien Farben sich als ein Sonderfall der bezogenen erweisen, der durch den Verlust einer der Veränderlichen, nämlich des Schwarz, entsteht. Die Untersuchung der letzteren wird uns somit alles sagen, was über jene zu wissen erforderlich ist.

Eine graphische Darstellung, die wir später allgemein benutzen werden, wird den grundlegenden Unterschied, um den es sich hier handelt, noch klarer machen. Ist der Farbton gegeben, so stellt

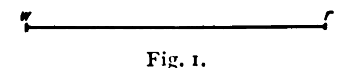


Fig. 1.

die Linie w—r (Fig. 1) wo in w Weiß und in r die reine Farbe liegt, die Gesamtheit aller möglich Abkömmlinge eines gegebenen Farbtons dar, solange wir uns im Gebiete der bezugsfreien Farben bewegen. Jede Farbe entspricht quantitativ einer linearen Gleichung $w + r = 1$, wenn w der Bruchteil Weiß und r der Bruchteil reiner Farbe bedeutet. Geben wir der Strecke die Einheit der Länge, so können sämtliche denkbaren Verhältnisse zwischen diesen beiden Veränderlichen durch einen bestimmten Punkt der Geraden dargestellt werden.

Im Falle der bezogenen Farben tritt als dritte unabhängige Komponente das Schwarz hinzu und statt der geraden Linie von der Längeneinheit müssen wir zur Veranschaulichung ein gleichseitiges Dreieck $w\ r\ s$ mit der Seite

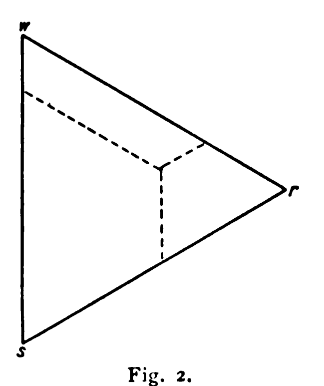


Fig. 2.

Eins verwenden (Fig. 2). In einem solchen hat bekanntlich jeder Punkt die Eigenschaft, daß die drei Parallelen zu den Seiten, die man von ihm aus ziehen kann, die Seitenlänge, also hier die Einheit zur Summe haben. Da für jede bezogene Farbe, wie später noch ausführlich gezeigt werden soll, die entsprechende allgemeine Gleichung $w + s + r = 1$ gilt, so kann jede beliebige Zusammenstellung dieser drei Komponenten durch einen Punkt des Dreiecks veranschaulicht werden und die Dreiecksfläche stellt die Gesamtheit aller möglichen Kombinationen der drei Bestandteile der bezogenen Farben dar. Vergleichen wir das Dreieck $w\,r\,s$ mit der Geraden $w\,r$, so wird das Verhältnis der bezugsfreien Farben zu den bezogenen unmittelbar klar: die ersten reduzieren sich auf die eine Grenzlinie wr des Farbendreiecks $w\,r\,s$ oder der isochromen Fläche, welche die Mannigfaltigkeit der zweiten veranschaulicht.

Gesättigte Farben.

In den einleitenden Bemerkungen wurde bereits darauf hingewiesen, daß zwischen homogenem Licht und gesättigten Farben ein sehr großer Unterschied besteht. Die später darzustellenden Untersuchungen über die Reinheit gegebener Aufstriche haben zu dem Resultat geführt, daß eine Reinheit bis zu 80—90 Proz. in dem Gebiet der warmen Farben erreichbar ist. Untersucht man nun derartige Aufstriche spektroskopisch, so überzeugt man sich, daß das Verhalten, wie es oben beim Gelb geschildert worden war, bei allen anderen Farben gleichfalls zutrifft. Jedesmal enthält die reine oder gesättigte Farbe neben der charakteristischen Wellenlänge eine große Anzahl beiderseits benachbarter Lichtarten.

Die Grenzen dieser begleitenden Lichtarten zeigen eine bestimmte und sehr bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit. Diese macht sich am gesättigten Gelb am allerleichtesten bemerkbar. Die Wellenarten, welche zu dieser Farbe zusammentreten, erstrecken sich vom äußersten Rot bis zu einem bestimmten Blaugrün, das etwa durch die Wellenlänge 490 gekennzeichnet ist. Nun ist dieses Blaugrün gerade die Ergänzungsfarbe des äußersten Rot und dieses Zusammentreffen führt auf einen allgemeinen Satz, der sich bei der Untersuchung anderer gesättigter Farben durchgängig bestätigt. Er lautet dahin, daß zu einer gesättigten Farbe sämtliche Farben zusammenwirken müssen, welche innerhalb einer Hälfte des Farbenkreises liegen. Die Gesamtheit dieser Farben wird also jeweils durch ein Paar Ergänzungsfarben begrenzt und die resultierende gesättigte Farbe ist diejenige, welche in dem rationell eingeteilten Farbenkreise symmetrisch zu den beiden diagonal sich gegenüberliegenden Grenzpunkten, also in einem rechten Winkel zu dem entsprechenden Durchmesser liegt. Nennen wir die Gesamtheit aller Farben eines rationellen Farbenkreises, die durch ein Paar von Gegen- oder Ergänzungsfarben begrenzt werden, ein Farbenhalb, so kann man sagen, daß zur Bildung einer gesättigten Farbe jedesmal sämtliche Farben eines Farbenhalbes zusammenwirken müssen.

Daß dies zutrifft, davon kann man sich überzeugen, wenn man reingefärbte Farbfilter auf ihre Absorption untersucht, nachdem man sie derart eingestellt hat, daß ihre Färbung mit der eines reinsten Aufstriches von gleichem Farbton so nahe wie möglich übereinkommt. Ich habe eine ganze Anzahl derartiger Fälle untersucht und regelmäßig eine Bestätigung des allgemeinen Gesetzes gefunden. Allerdings ist diese Bestätigung ziemlich unvollkommen, da die Absorptionsgrenzen der Farbstoffe, auch der reinstgefärbten, keine scharfen sind, sondern ziemlich weite Übergänge zeigen. Es ist daher nicht leicht, die Grenze der Absorption im Spektroskop an der Wellenlängeskala zu bestimmen und ein gewisses Maß willkürlicher Einschätzung bleibt jedesmal übrig. Daher ist es gegenwärtig noch nicht möglich, für den ausgesprochenen Satz unbedingte Geltung in Anspruch zu nehmen oder die Grenzen seiner Gültigkeit genau zu bestimmen. Daß er im allgemeinen die Tatsachen richtig darstellt, scheint mir aber außer Zweifel zu stehen.

Man erkennt alsbald, wie durch diese neue Definition der gesättigten Farben die früher erwähnten Schwierigkeiten beseitigt sind. Gesättigtes Gelb besteht aus Rot, Orange, Gelb, Gelbgrün und Blaugrün. Es remittiert also sämtliche hellsten Teile des Spektrums und absorbiert nur die dunklen Gebiete des Blau und Violett. Daher erklärt es sich, daß seine spezifische Helligkeit nur um ein Zehntel geringer ist, als die des reinen Weiß. Auch ergibt die spektrale Analyse der schönsten und reinsten Körperfarben, die wir in der Natur auf Blumenblättern und Schmetterlingsflügeln finden, stets das Vorhandensein breiter zusammenhängender remittierter Gebiete, denen ähnliche breite Gebiete der Absorption gegenüberstehen und niemals auch nur die geringste Andeutung eines eng zusammengezogenen linienhaften Spektrums, wie es auftreten müßte, wenn die übliche Identifizierung der gesättigten Farben mit den homogenen auch nur annähernd richtig wäre. Die naheliegende Einwendung, daß ein Farbenhalb deshalb keine gesättigte Farbe ergeben könne,

weil es zum Teil komplementäre Farben enthält, also durch deren Zusammenwirkung notwendig mit Weiß behaftet sein müsse, erledigt sich dadurch, daß diese komplementären Farben am Ende des Farbenhalbes definitionsgemäß nur einen unendlich kleinen Teil der Gesamtwirkung ausmachen.

Im übrigen kennzeichnet auch hier wieder die Definition einen idealen Grenzfall, dem sich die Wirklichkeit zwar annähern kann, den sie aber niemals erreicht. Bei den Körperfarben ist hierfür maßgebend, daß die Grenzen zwischen remittiertem und absorbiertem Gebiete niemals scharf sind, sondern durch abgestufte Übergänge ineinander verschwimmen. Deshalb enthält notwendig die resultierende Farbe entweder Schwarz, wenn nämlich die Grenzen innerhalb des remittierten Teils verlaufen, also das absorbierte Gebiet über das entgegengesetzte Farbenhalb hinausgeht, oder Weiß, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Liegen die Grenzen so, daß die Abstufungen zum Teile in das eine und das andere Farbenhalb fallen, so finden beide Arten der Verunreinigung gleichzeitig statt; die Farbe enthält sowohl Schwarz wie Weiß, d. h. Grau. Dies ist bei weitem der häufigste Fall.

Die Frage, auf welche Weise im Spektrum die Grenzen der Farbenhalbe verlaufen, hängt auf das unmittelbarste zusammen mit der Frage, wie dem rationell eingeteilten Farbenkreis die Wellenlängen des Spektrums zugeordnet sind und wird dort im Zusammenhange erörtert werden.

Auf einen anderen Punkt muß indessen bereits hier eingegangen werden, da er eine Anzahl psychophysischer Besonderheiten der Farben bedingt. Es ist dies die Lücke, welche das Spektrum im Vergleich zum Farbenkreise aufweist. Ordnet man letzteren, wie ich das vorgeschlagen habe und weiter unten begründen werde, in 100 Stufen dergestalt, daß man die hellste Farbe, Zitronengelb mit Null bezeichnet und von dort über Orange, Rot, Purpur, Violett, Blau und Grün zum Gelb zurückkehrt, so liegt in dem Farbenkreise das Zinnoberrot, welches mit dem Spektralrot übereinkommt, bei dem Punkt 25. Der Punkt 50 wird von einem etwas rötlichen Ultramarinblau gebildet und beim Punkt 75 liegt das Blaugrün mit der Wellenlänge 490, welches die Ergänzungsfarbe des spektralen Rotes ist. Bei dieser Anordnung legt sich das Spektrum, wenn man mit den kürzesten Wellen im Violett beginnt, etwa im Punkte 46 an den Farbenkreis, verläuft von dort ab mit Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange und Rot über 99 zu 0 und weiterhin bis 25 (Fig. 3). Zwischen 25 und 46, also über ein Gebiet von über $^1/_5$ des Kreises, gibt es keine homogene Spektral-

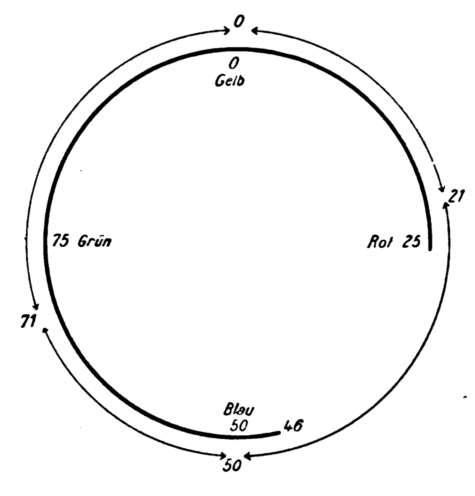


Fig. 3.

farbe, die den entsprechenden Farben des Farbenkreises gleich aussieht, sondern man kann die zugehörigen Farben nur durch Vermischung von Rot mit Violett und Blau erreichen. In Fig. 3 stellt die starke Linie den spektralen Teil des Farbenkreises dar.

Demgemäß sind nur verhältnismäßig wenig gesättigte Farben (im grünen Gebiet) von der Beschaffenheit, daß ihr Farbenhalb vollständig durch Spektralfarben ausgefüllt ist. Solche Farben liegen zwischen 71 und 100 oder 0, da die zugehörigen Farbenhalbe durch die Paare 46—96 und 25—75 begrenzt sind. Alle anderen Farbenhalbe enthalten die spektrale Lücke des Farbenkreises entweder teilweise oder vollständig und geben dementsprechend bei der spektralen Analyse kürzere Bänder.

Diese Unvollkommenheiten der Farbenhalbe sind von zweierlei Art. Entweder fehlt an einem Ende des Farbenhalbes ein längeres oder kürzeres Stück, dessen Umfang im äußersten Falle 21 Einheiten, also mehr als $^2/_5$ des ganzen Farbenhalbes betragen kann oder aber die Lücke tritt innerhalb des Farbenhalbes ein, so daß sie dieses in zwei getrennte Stücke teilt. Diese stammen von den beiden Enden des Spektrums und weisen daher in bezug auf ihre Wellenlänge und sämtliche von dieser abhängigen Eigenschaften den größten Unterschied auf, der zwischen homogenen Lichtern überhaupt bestehen kann.

Im übrigen ist die Ordnung dieser drei Arten der Farbenhalbe folgende. Lückenfreie Farbenhalbe besitzen die grünen und gelbgrünen Farben zwischen den Nummern 71 und 100 oder 0. Eine Endlücke besitzen die gesättigten Farben zwischen 0 und 21, welches die gelben, gelbroten bis etwa zu den mennigroten sind und ferner die zwischen 50 und 71, die blauen

Farben bis zum Beginn der grünen. Bei den ersten besteht die Endlücke am roten Ende, bei den zweiten am violetten. Eine Mittellücke endlich besitzen die gesättigten Farben von 21 bis 50, d. h. die hochroten, purpurroten und violetten bis zum Beginn des Blau. Auf dieser Besonderheit beruht höchstwahrscheinlich der besondere psychologische Eindruck, den die roten und violetten Farben von jeher, namentlich auf primitivere Menschen gemacht haben und von dem beispielsweise die russische Sprache ein Zeugnis in dem Umstande aufbewahrt, daß die Wörter für Rot und schön identisch sind. Die Fig. 3 gestattet die eben beschriebenen Verhältnisse nebeneinander zu übersehen.

Bemerkenswerterweise liegen in dem Gebiete mit vollständigem Farbenhalb die meisten Farben, bei denen es noch nicht möglich gewesen ist, Aufstriche von hoher Sättigung herzustellen. Im Blau, Blaugrün und Grün bis in ein helles Gelbgrün hinein ist bisher keine größere Reinheit als ungefähr 0,6 erreichbar gewesen. Es handelt sich hier vermutlich um eine prinzipielle Erscheinung, die mit der von Helmholtz und seinen Schülern konstatierten Tatsache zusammenhängt, daß im grünen Gebiete bereits bei der Vermischung ziemlich nahe beieinanderstehender Wellenarten die resultierende Mischfarbe gegenüber der homogenen Farbe weißlich aussieht, also nicht mehr rein ist. Dementsprechend wird in diesem Gebiete vermutlich künftig die theoretische Definition der reinen und der gesättigten Farbe zu trennen sein. Doch will ich mich hier mit dieser Andeutung begnügen, da systematische Forschungen über diese Frage noch nicht aufgenommen werden konnten.

Die Reinheit.

Wie man sieht, hängen alle weiteren Fortschritte in der Farbenlehre von der Lösung des Problems ab, wie man die Reinheit einer gegebenen Körperfarbe bestimmt. Der Stand der Frage bis in die jüngste Zeit ist bereits geschildert worden und es kann somit alsbald zu der Lösung übergegangen werden, wie sie gegenwärtig vorliegt. Denkt man sich ein objektives Spektrum von einiger Ausdehnung entworfen und einen Aufstrich, den wir uns gesättigt vorstellen, durch dieses Spektrum geführt, so kann er nach wohlbekannten Gesetzen überall nur die Farbe des Lichtes zeigen, welches gerade auf ihn fällt. Hat er nun die Eigenschaft, die eine Hälfte des Farbenkreises zu absorbieren, die andere Hälfte zu remittieren (wobei gebührende Rücksicht auf die „Lücke" zu nehmen ist), so wird er folgendes Verhalten zeigen. In den Teilen des Spektrums, die er remittiert, wird seine Remission vollständig sein, d. h. er wird so hell erscheinen, wie ein ideal weißer Aufstrich. In den Teilen, die er absorbiert, wird umgekehrt die Absorption vollständig sein, d. h. er wird dort vollkommen schwarz erscheinen.

Ein wirklicher Aufstrich wird von diesem theoretischen Ideal in folgenden Punkten abweichen. Zunächst wird seine Remission in dem remittierenden Gebiete nicht vollständig sein und er wird demgemäß nicht ganz so weiß wie ein ideal weißer Körper erscheinen, sondern etwas dunkler. Durch den Vergleich gemessener grauer Aufstriche mit dem fraglichen farbigen kann man quantitativ bestimmen, wie groß der nicht remittierte Betrag des Lichtes ist, wieviel Schwarz also die Farbe enthält.

Ebenso wird die Absorption in dem anderen Gebiet nicht vollständig sein und der Aufstrich wird noch einen Teil des auffallenden Lichtes remittieren. Wiederum kann man durch den Vergleich mit einem geeigneten Grau, das durch das gleiche Licht beleuchtet wird, feststellen, wie groß der remittierte Anteil ist. Dieser läßt erkennen, wieviel Weiß der Aufstrich enthält.

Summiert man nun diese beiden Anteile, den schwarzen und den weißen, und zieht die Summe von der Einheit ab, so bleibt die Menge bunten Lichtes übrig, die der Aufstrich remittiert. Damit ist ein absolutes Maß der Reinheit des Aufstriches gefunden.

Es ist zu beachten, daß der bereits erwähnte Umstand, daß die Grenzen des remittierenden und absorbierenden Gebietes nicht scharf sind, hier die Folge hat, daß auch die Grenzen der Spektralgebiete, wo der Aufstrich hell und wo er schwarz erscheint, durch stetige, wenn auch mehr oder oder weniger schnelle Übergänge verbunden sind. Die Spektralgebiete also, in denen eine Messung des remittierenden und des absorbierenden Anteiles vorgenommen werden kann, werden dadurch verengt.

Ferner wird bei der Analyse vorausgesetzt, daß der Bruchteil des absorbierten oder remittierten Lichtes über das übriggebliebene Gebiet praktisch konstant ist. Diese anscheinend weitgehende Forderung ist tatsächlich in den meisten Fällen genügend erfüllt. Denn die Absorptions- oder Remissionsverhältnisse der festen Körper zeigen sich bekanntlich gegenüber denen in Gasen, aber auch gegenüber denen in Flüssigkeiten stark verwischt und ihre hohen bzw. niedrigen Werte verlaufen demgemäß sehr gleichförmig über weite Gebiete. Auch kann man sich durch unmittelbare Helligkeitsbestimmungen an verschiedenen Stellen des Spektrums,

die in das eine oder in das andere Gebiet fallen, davon überzeugen, ob und in welchem Maße jene grundlegende Voraussetzung erfüllt ist. Man findet in den häufigsten Fällen eine vollständig genügende Annäherung.

Wie man sieht, kommt dieses Verfahren der Reinheitsbestimmung darauf hinaus, daß man zwei gewöhnliche photometrische Messungen, eine im Absorptions- und die andere im Remissionsgebiet ausführt. Hierbei dient das Auge nur, um gleiche Helligkeit innerhalb derselben Farbe zu konstatieren und es kann offenbar ohne weiteres durch jedes beliebige Radiometer ersetzt werden, das für die in Frage kommende Strahlung empfindlich ist. Spektren von verschiedenen Lichtquellen mit verschiedenen Intensitätsverhältnissen in ihren Teilen müssen dasselbe Resultat ergeben, weil jeweils immer nur homogenes Licht in Frage kommt, dessen absolute Intensität keinen Einfluß auf die vergleichende Messung hat. Diese Tatsachen führen zu dem sehr bemerkenswerten Resultat, daß die Reinheitsbestimmung nach diesem Verfahren einen absoluten Charakter hat, d. h. weder von der Natur des benutzten Lichtes, noch von der spezifischen Empfindlichkeit des Auges abhängig ist. Man muß also dieselben Reinheitswerte bei beliebiger Beleuchtung erhalten und es muß ebenso ohne Belang sein, ob die Beobachtungen von einem Normalsichtigen oder einem teilweise Farbenblinden ausgeführt werden. Der einzige Einfluß, den diese Verschiedenheiten haben, ist der einer größeren oder geringeren Empfindlichkeit in dem betreffenden Gebiete, also einer geringeren oder größeren Fehlergrenze. Von der Richtigkeit eines Teils dieser Schlußfolgerungen, nämlich der Unabhängigkeit von der Natur des Lichtes, habe ich mich überzeugen können; für die Prüfung des anderen Teils fehlten mir die Voraussetzungen. Doch ist nach der Sachlage der positive Ausfall auch eines derartigen Experiments außerhalb jedes Zweifels.

Was die praktische Ausführung derartiger Messungen betrifft, so ist es natürlich viel bequemer, an Stelle des objektiven Spektrums Farbfilter anzuwenden, welche eine subjektive Beobachtung gestatten. Ich habe mich überzeugt, daß man ohne Schwierigkeiten für den größten Teil des Farbenkreises Farbfilter von genügender Enge und Reinheit des durchgelassenen Gebietes herstellen kann, um die Analyse vorzunehmen. Nur die im Spektrum nicht vorhandenen purpurroten und rotvioletten Farben erfordern besondere Maßnahmen; die daher rührenden Schwierigkeiten sind bereits im wesentlichen überwunden. Die Messungen reduzieren sich dann auf folgende einfache Maßnahmen. Man stellt sich zunächst eine Grauleiter von photometrisch ausgemessenen neutralgrauen Aufstrichen her, in der das remittierte Licht um bestimmte Stufen sich ändert. Meine Leiter hat von 100 bis 10 Proz. Weiß Stufen von je 5 Proz., und von 10 bis 2 Proz. (dem tiefsten Schwarz, das sich mit gewöhnlichen Hilfsmitteln erreichen läßt) Stufen von 2 zu 2 Proz. Gemäß dem Fechnerschen Gesetze ist die Unterscheidung der Stufen am hellen Ende der Leiter bereits recht schwierig, während die Schritte in zunehmendem Maße größer empfunden werden, je mehr man sich dem dunklen Ende nähert. Deshalb ist auch die Differenz im letzten Teile von 5 auf 2 Einheiten verkürzt worden. Während nun das Auge durch ein passendes Lichtfilter blickt, schiebt man die Grauleiter dem zu untersuchenden Aufstrich entlang und findet auf solche Weise ohne jede Schwierigkeit dasjenige Grau, welches ebenso hell wie der Aufstrich erscheint. Nach einiger Übung wird man sogar zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stufen 5 Zwischenpunkte interpolieren, so daß eine Schätzung bis auf 1 Proz. der absoluten Helligkeit möglich ist.

Die Reinheit erscheint als eine Differenz zweier Werte, die jede einen Fehler von mindestens 1 Proz. haben kann und ist demgemäß mit einem entsprechend größeren wahrscheinlichen Fehler behaftet. Da die Unterscheidung umso schwieriger wird, je mehr man sich dem hellen Ende der Grauleiter nähert, so nimmt auch die Fehlergrenze in gleichem Sinne zu. Reinheitsbestimmungen in hellen Aufstrichen sind demgemäß von geringerer absoluter Genauigkeit als die dunklen. Dieses entspricht auch im übrigen der subjektiven Erfahrung, wonach die Unterscheidbarkeit verschieden reiner Farben im hellen Gebiet viel geringer ist als im dunklen.

Ich glaube nicht mich einer Übertreibung schuldig zu machen, wenn ich die Entdeckung der absoluten Reinheitsmessung als den wichtigsten Fortschritt ansehe, den die Farbenlehre zum Zwecke ihrer weiteren stetigen Entwicklung machen konnte und mußte. Denn es hat sich nicht nur bereits in den vorangegangenen Erörterungen gezeigt, daß die Reinheitsmessung fundamental in alle quantitativen Fragen der Farbenlehre eingreift, sondern das gleiche wird sich in noch deutlicherer Weise alsbald bei der Erörterung der rationellen Einteilung des Farbenkreises erweisen. Deshalb ist auch der weitere Schluß, der sich aus der Methodik der Reinheitsbestimmung zwingend ergibt, daß diese nämlich von allen subjektiven und zufälligen Beeinflussungen frei ist, von besonderem Werte, da



er den erzielten Zahlen eine entsprechend allgemeinere und größere Bedeutung sichert.

Ich füge hinzu, daß durch die Ausbildung der einleitend erwähnten Methode relativer Reinheitsbestimmung mit Hilfe des Prinzips der Neutralisation durch die Gegenfarbe eine unabhängige Kontrolle der absoluten Reinheitsbestimmung möglich ist. Ich habe in einer Anzahl von Fällen diese kontrollierenden Messungen vorgenommen und mich überzeugt, daß nirgendwo Widersprüche auftreten, daß also ein grundsätzlicher Denkfehler bei der Methode zur Bestimmung der absoluten Reinheit als ausgeschlossen gelten darf. Experimentelle Schwierigkeiten und entsprechende Fehler sind natürlich vorhanden; diese lassen sich aber im Entwicklungsgange der Wissenschaft zunehmend genauer ermitteln und vollständiger beseitigen.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Hans R. G. Opitz, Über das erste Problem der Dioptrik. II. Materialien zu einer kritischen Geschichte des Problems. (Programm Nr. 115 des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin.) Lex. 8. 23 Seiten mit Figuren und 1 Tafel. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1912. M. 1.—.

Der Verfasser bespricht zunächst einige Referate seiner ersten Arbeit (H. Opitz, Über das erste Problem der Dioptrik. Pr. Nr. 109. Königstädtisches Realgymn. Berlin, Weidmann 1903) und weist nach, daß auch die Gullstrandschen Arbeiten seine Ansicht stützen, daß als Bildort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes der erste Brennpunkt (sagittaler Bildpunkt) zu betrachten sei. Der zweite Teil der Arbeit gibt eine gute Übersicht über die Literatur, soweit diese nicht schon in der ersten Arbeit berücksichtigt ist. Der dritte Abschnitt gibt Betrachtungen über die Farbenzerstreuung und ihre Wahrnehmbarkeit. Ein Einfluß der Dispersion auf den scheinbaren Bildort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes ist nicht festzustellen. H. Sch.

F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels. Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. Zweiter durchgesehener Abdruck. gr. 8°. VIII u. 196 S. mit 23 Figuren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1914. Geh. M. 5.60, geb. M. 6.60.

Das Werturteil über F. Kleins und A. Sommerfelds Buch steht längst fest und bedarf keiner Korrektur mehr. Der Neudruck des ersten Heftes dieses Werkes bietet indessen Gelegenheit, den Physiker darauf aufmerksam zu machen, daß er (abgesehen von den technischen Anwendungen, die im vierten Hefte zusammengestellt sind) das für seine Zwecke Wichtigste und Brauchbarste aus der Kreiseltheorie im ersten Hefte findet. Dieses gibt neben den kinematischen Grundlagen und der Kinetik der Poinsotbewegung eine mustergültig klare Entwicklung des Impulsbegriffes, dessen überragende Bedeutung für die gesamte Mechanik mehr und mehr anerkannt wird. — Es ist kein Zweifel, daß die mannigfachsten Probleme der Physik mehr als bisher eine gründliche Kenntnis der Lehre vom Kreisel erfordern. Diese vermag von deutschen Büchern keines so bequem und einwandsfrei zu übermitteln wie das vorliegende.

Die Änderungen im Text gegenüber der ersten Auflage beschränken sich, soweit ein kurzer Vergleich zeigt, auf die Verbesserung der Figur 3 und einige literarische Hinweise. Sonst stimmen die beiden Auflagen Seite für Seite überein. R. Grammel.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Marburg Dr. Adolf Fraenkel für Mathematik, an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Gerhard Grüttner für Stereochemie anorganischer Verbindungen und Dr. Max Herrmann für Radiologie, Elektronik und Ionisation.

Ernannt: Dr. E. J. Miles zum a.o. Professor für Mathematik an der Yale-Universität in New Haven, der a.o. Professor an der Universität Zürich Dr. Paul Pfeiffer zum ord. Professor für anorganische und allgemeine Chemie an der Universität Rostock, der a.o. Professor für Chemie an der Universität Rostock Dr. Richard Stoermer zum Leiter einer selbständigen Abteilung am chemischen Institut derselben Universität (mit einen Lehrauftrag für organische Chemie), Dr. Erich Przybyllok zum Observator des Geodätischen Observatoriums bei Potsdam.

Der a.o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule München Dr. Karl T. Fischer ist seit dem 1. April 1915 in etatsmäßiger Eigenschaft als a.o. Professor an der gleichen Hochschule tätig mit dem Lehrauftrag „über Grundzüge der Physik, Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts an höheren Lehranstalten zu lesen, Spezialvorlesungen für Elektroingenieure zu halten und die physikalische Lehrmittelsammlung der technischen Hochschule zu verwalten".

Verliehen: Dem o.ö. Professor an der Universität Göttingen Dr. Hermann Th. Simon (Physik und angewandte Elektrizität) sowie den o.ö. Professoren an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Artur Schönflies (Mathematik) und Dr. Rudolf Wachsmuth (Experimentalphysik) und dem o.ö. Professor an der Universität Bonn Dr. Franz London (Mathematik) der Charakter als Geheimer Regierungsrat.

In den Ruhestand: Der o.ö. Professor der Elektrotechnik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Hofrat Dr. Johann Puluj, der College Lecturer für Logik und Mathematik am Trinity College in Cambridge (England) Hon. Bertrand Russell (wegen Zuwiderhandlung gegen die Reichsverteidigungsakte seines Amtes enthoben).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. | 1. August 1916. Redaktionsschluß für No. 16 am 5. August 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Fortpflanzung des Schalles in der freien Atmosphäre.

Von Wilhelm Schmidt.

Wie natürlich, trat in den letzten Zeiten die Frage nach der Fortpflanzung des Schalles in der freien Atmosphäre mehrfach in den Vordergrund. Die beiden darauf bezüglichen Notizen, welche vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienen[1]), möchte ich in wesentlichen Punkten ergänzen.

Wahrscheinlich liegt es an einem nicht ganz bezeichnenden Ausdruck, daß ein Fernerstehender sich nicht das richtige Bild von den zu erklärenden Beobachtungstatsachen macht: man spricht bei starken Schallerscheinungen von einer „Zone des Schweigens", die sich um ein inneres, die Schallquelle enthaltendes Gebiet normaler Hörbarkeit herumlegt und auf die weiter außen eine rätselhafte „Zone abnormer Hörbarkeit" folgen soll. Durch das Wort Zone, Gürtel, wird unmittelbar die Vorstellung einer nach den verschiedenen Richtungen beiläufig gleich entwickelten Erscheinung erweckt und gerade darin widerspricht sie der Beobachtung.

Von den Fällen, die bis nun genauer untersucht wurden, führe ich an: die Dynamitexplosion an der Jungfraubahn 1908, bei welcher die Erscheinung zuerst auffällig auftrat (bearbeitet von A. de Quervain), die Dynamitexplosion zu Förde in Westfalen (G. v. d. Borne), die Roburitaufflammung zu Witten-Annen (G. v. d. Borne), die Pulverexplosion am Laibacher Felde (A. Belar), das Auffliegen des Pulvermagazins in Kobe (S. Fujiwhara), eine Reihe von Ausbrüchen des japanischen Vulkans Asama vom Dezember 1909 bis Dezember 1911 (S. Fujiwhara), die Explosion des Sprengstoffmagazins am Steinfeld bei Wiener-Neustadt 1912 (J. N. Dörr), Beobachtungen aus dem gegenwärtigen Krieg, insbesonders vom nordwestlichen Kriegsschauplatz, am deutlichsten anläßlich der Beschießung von Antwerpen (nach den Meldungen aus den Niederlanden zusammengestellt durch E. van Everdingen, für die anschließenden Gebiete Deutschlands durch W. Meinardus, W. Brand), schließlich im Sundgau (A. de Quervain). Davon sind im ganzen über 30 durch Karten dargestellt.

In allen diesen Fällen wurde nun kein einziges Mal ein auch nur annähernd ringförmig geschlossenes Gebiet „abnormer Hörbarkeit" beobachtet. Es gibt da vielmehr die verschiedensten Formen: von beinahe kreisförmigen bloß um die Schallquelle herum bis zu langgestreckten, zuweilen auch gekrümmten, dann zu solchen mit Einschnürungen und schließlich Abschnürungen, so daß ein oder mehrere Außengebiete vollkommen getrennt liegen. Soweit man dies von einem zufälligen, zuweilen wohl auch schon mit vorgefaßter Meinung gesammelten Material nur irgend erwarten kann, lassen sich die Fälle in einer Reihe einordnen, bei der jeder Schnitt, jede Abteilung in zwei Gruppen willkürlich oder rein äußerlich erscheint. Selbst in dem Beispiel vom Steinfelde, dem weitaus regelmäßigsten und überdies durch die größte Meldungszahl belegten, umfaßt das sichelförmige Außengebiet das stark exzentrisch gelegene Innengebiet nicht einmal in einem halben Bogen.

Überall dort, wo von einer Symmetrie überhaupt gesprochen werden kann, ist es keine allseitige, zentrale, sondern ausgesprochen eine einfache zu beiden Seiten einer Geraden. Als

1) Fr. Nölke, Zur Erklärung der beim Geschützdonner, bei großen Explosionen usw. beobachteten Fortpflanzungseigentümlichkeiten des Schalles, diese Zeitschr. 17, 31, 1916; V. Kommerell, Die Bahn der Schallstrahlen in der Luft unter dem Einfluß der Temperatur, diese Zeitschr. 17, 172, 1916.

vornehmlichste Ursache dafür darf nur eine einseitig wirkende angenommen werden; sie muß überdies stark wechseln, denn die Abmessungen der Gebiete sind oft recht verschieden. So wurde z. B. der Innenrand der Außenzone selbst in den Fällen, die als schöne Beispiele für das Auftreten des Gebietes abnormer Hörbarkeit gelten, einmal zu 110, anderemale zu 130, 160 und 180 km Abstand vom Ursprung angegeben[1]). Im allgemeinen ist der Spielraum viel größer.

Nach all diesem kommt von den meteorologischen Vorgängen in erster Linie der Wind als Ursache in Betracht. Seine Stärke wechselt sowohl zeitlich, wie auch örtlich — in den einzelnen Höhenschichten — so stark, daß sich daraus auch die verwickelteren Gebiete im allgemeinen erklären lassen müßten. Bedingen doch gerade vertikale Windgradienten ein starkes Abbiegen der Schallstrahlen[2]). Daneben mögen aber immerhin noch andere Einflüsse, vertikale Temperaturverteilung z. B., eine besondere Rolle spielen. Hierher gehörige Beobachtungen wurden ja auch sonst, besonders zur Winterszeit, gemacht.

Nun stehen uns leider verläßliche Angaben über meteorologische Verhältnisse nur von den untersten Luftschichten zur Verfügung. Unbemannte Aufstiege, die etwa 20 km Höhe erreichen, sind selten, ebenso weiter hinaufreichende Pilotballonverfolgungen.

Vielleicht läßt sich aber doch in einer größeren Anzahl von Fällen schon aus solchen Beobachtungen viel erklären; mehr wohl, als V. Kommerell annimmt, obschon er nicht mit Unrecht darauf hinweist, daß die großen wagerechten Erstreckungen der Gebiete der Hörbarkeit auch entsprechend hohe senkrechte wahrscheinlich machen: es wäre nicht von der Hand zu weisen, daß Schallstrahlen zuerst in Höhen von 70—100 km emporstiegen, dort zur Umkehr gebracht würden und so die Gebiete abnormer Hörbarkeit erzeugten, wie es von den Vertretern einer Reflexion oder Abbiegung an der Wasserstoffsphäre (v. d. Borne, A. Wegener, E. van Everdingen) behauptet wird.

Gerade diese letzte Theorie halte ich aber für physikalisch vollkommen unbrauchbar, weil sie in bezug auf die Intensitätsverhältnisse gänzlich versagt. In jenen Höhen ist nämlich die Luft schon außerordentlich dünn. Wenn nun eine Schallwelle bis dort hinauf gelangte, so wird ihre Amplitude bestimmt nicht zugenommen haben, die bewegte Masse ist aber sehr gering; die Schallenergie kann also dort auch nur einen sehr niedrigen Wert haben. Die so geschwächte Welle erleidet natürlich auch beim Absteigen weitere Verluste und kann auf keinen Fall mehr stark genug sein, um neben dem mehr horizontal ausgebreiteten Schall gehört zu werden.

Hier bloß einige Zahlen, die ich an anderen Stellen — die allerdings in physikalischen Kreisen weniger gelesen werden —[1]) errechnete: im allergünstigsten Fall kann ein aus 50 km Höhe herabkommender Schallstrahl nur $^1/_{1100}$ derjenigen Energie besitzen, welche ein horizontal in gleichförmiger Dichte ausgebreiteter nach Durchlaufen desselben Weges (direkter Schallstrahl) noch hätte. Wäre die Umkehr in 100 km Höhe erfolgt[2]), dann hätte sich sogar nur weniger als $^1/_{300\,000}$ ergeben. Alle übrige Energie, im ersten Fall $^{1099}/_{1100}$, im zweiten etwa $^{299\,999}/_{300\,000}$ der gesamten, wäre den unteren Schichten in irgendeiner Form erhalten geblieben. Das Mißverhältnis wird noch stärker, wenn man — wie es wahrscheinlich den Tatsachen entspricht — annimmt, daß die Schallwelle beim Herabsteigen dieselbe verhältnismäßige Schwächung erfährt, wie beim Aufsteigen. Dann sollte das Gebiet abnormer Hörbarkeit von weniger als dem millionsten Teil, bzw. 12 Billionstel der Ausgangsenergie aus erzeugt sein![3]) In anderer Darstellung würden die vier gebrachten Fälle lauten: am Innenrand des Außengebietes hätte ein an der Wasserstoffsphäre abgebogener Schallstrahl dieselbe Energie, wie sie ein direkter (d. h. allseitig in gleichdichter Luft ausgebreiteter) Schallstrahl erst in 6000 oder 100000 km, bzw. wenn auch beim Absteigen Schwächung angenommen wird, in mehr als 100000 oder 160000000 km Entfernung von der Schallquelle hätte! Diese praktisch natürlich unsinnigen Zahlen dürften doch wohl genug bezeichnend erscheinen!

1) Diese Entfernungen hängen nicht von der Schallstärke der Explosion ab, was natürlich für den Außenrand des Innengebietes um die Quelle herum nicht der Fall wäre.

2) Die letzte ausführlichere, nur zu theoretische Ableitung dafür dürfte die von Fujiwhara sein (Bull. Centr. Met. Obs. Japan **2**, No. 1, 1912). Sie berücksichtigt auch das Temperaturgefälle, ist darin allgemeiner als V. Kommerells Darstellung. Im übrigen wäre es für praktische Anwendungen viel besser, statt die Bahnen der Schallstrahlen für einfache Bedingungen exakt durchzurechnen, lieber die beste und einfachste Annäherung, etwa durch Kreisbogen, abzuleiten. Für das Temperaturgefälle besteht schon solche, für Windwirkung aber noch nicht; die von G. Jäger gegebene bezieht sich auch nur auf besondere Bedingungen, ist nicht allgemein anwendbar.

1) Meteorolog. Zeitschrift **32**, 266, 1915; ebenda **33**, 1916; vgl. auch Naturwissensch. **2**, 925, 1914.

2) A. Wegener nimmt als Umkehrhöhe der Hauptstrahlen beiläufig 70 km an, van Everdingen mit geänderten Ausgangswerten etwa 110 km.

3) Das steht auch in schärfstem Widerspruch mit dem Flächeninhalt der Gebiete: in dem Wiener-Neustädter Fall hatte z. B. das Außengebiet etwa den doppelten Flächeninhalt des Innengebietes!

Schon diese rohe, mit durchaus günstigen Annahmen durchgeführte Überschlagsrechnung beweist, daß die scheinbar bestechende Theorie eines Herabbiegens der Schallstrahlen an der Wasserstoffsphäre für den Physiker vollkommen ausscheidet, wenn die beobachtete Hörbarkeit erklärt werden soll. Man wird dafür vielmehr, wie schon de Quervain getan, vornehmlich auf Wind und Temperatur zurückgehen müssen, beides Bedingungen, die nicht nur in der Vertikalen, sondern auch in der Horizontalen[1]) genug Verschiedenheiten zeigen. Daß es vorläufig noch schwer fällt, einen besonderen Fall daraufhin durchzurechnen, beruht nicht nur auf den von Fr. Nölke aufgewiesenen Schwierigkeiten, sondern mehr noch auf unserer Unkenntnis der Verhältnisse in den höheren Luftschichten. Vielleicht lassen sich aber einmal umgekehrt gerade diese aus Beobachtungen der Hörbarkeit erschließen.

1) So wichtig gerade dies ist, so wurde doch noch nie darauf hingewiesen.

Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

(Eingegangen 28. Juni 1916.)

Über thermodynamische Maschinen, die unter Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten[1]).

I. Teil.

Von V. Bjerknes.

1. Die Carnotsche Maschine, mit deren Hilfe man den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableitet, arbeitet ganz unabhängig von der Schwerkraft. Auch die gewöhnlichen technischen Wärmemaschinen sind ihrem Prinzipe nach von der Schwerkraft unabhängig, obgleich sie im Schwerkraftfelde arbeiten. Man kann aber auch Wärmemaschinen angeben, deren Arbeitsleistung ganz auf der Schwerkraft beruht. Um ein Beispiel zu geben: Eine Metallscheibe ist auf einer horizontalen Achse montiert und man sorgt für solche Wärmezu- und -abfuhr, daß die linke Hälfte der Scheibe immer eine höhere, die rechte immer eine niedrigere Temperatur hat. Wegen der thermischen Ausdehnung wird dann die Schwerkraft die erwärmte Hälfte mit größerem, die abgekühlte mit kleinerem Drehungsmoment angreifen. Die Scheibe wird sich drehen und kann eine gewisse Arbeit leisten, solange der angegebene Temperaturzustand durch passende Zu- und Abfuhr von Wärme unterhalten wird.

1) Im Auszug aus Bd. XXXV. No. 1 der Abh. der math.-phys. Klasse der kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch.

Eine Bedeutung für technische Arbeitsleistung haben Maschinen dieser Art nicht gehabt. In der Natur existieren aber solche Maschinen größten Stils. Die atmosphärischen und ozeanischen Bewegungen entstehen in letzter Hand durch die verschiedene Wirkung der Schwerkraft auf verschieden temperierte Massen.

Um einen Einblick in die Arbeitsweise dieser gewaltigen und äußerst komplizierten Maschinen zu gewinnen, empfiehlt es sich, einen ähnlichen Weg einzuschlagen wie den Carnotschen. In Gedanken konstruiert man die denkbar einfachste Idealmaschine, deren Arbeit auf Wärme und Schwerkraft beruht, und sucht an Hand derselben die allgemeinen Gesetze aufzudecken, nach denen nicht bloß die Idealmaschine selbst, sondern jede Maschine dieser Art arbeitet.

2. Bau der Maschine. — In der Carnotschen Maschine bringt man den arbeitenden flüssigen oder gasförmigen Körper in einen Zylinder unter einen Kolben. Statt dessen füllen wir ihn in eine in sich zurücklaufende Röhrenleitung. Weiter führen wir die beiden Carnotschen Wärmereservoire I und II ein, die an passenden Stellen der Röhre angebracht sind und dabei, je nach Belieben, in thermische Verbindung mit dem arbeitenden Körper gebracht oder von demselben thermisch isoliert werden können.

Die Form der in sich zurücklaufenden Röhrenleitung ist belanglos. In der Fig. 1 besteht sie

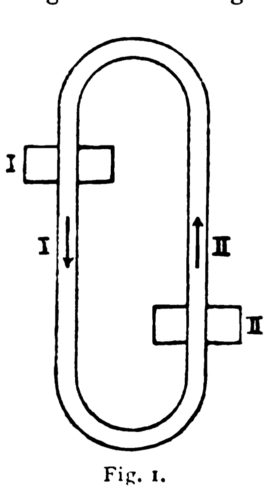


Fig. 1.

aus zwei geradlinigen vertikalen Röhrenschenkeln I und II, die oben und unten durch bogenförmige Röhren verbunden sind. Die Wärmebehälter I und II sind auf den Röhren I und II verschiebbar angebracht, und können auch längs der bogenförmigen Verbindungsröhren verschoben werden.

Die Bewegung, die durch die Röhre I nach oben und durch II nach unten geht, werden wir

die Vorwärtsbewegung der arbeitenden Substanz nennen, die entgegengesetzte die Rückwärtsbewegung.

Was die Eigenschaften des arbeitenden Körpers betrifft, so ist nur das eine wesentlich, daß er bei Temperaturveränderung sein Volumen ändern soll. Der Einfachheit halber nehme ich an, daß er sich thermisch normal verhält, sich also bei Temperaturerhöhung ausdehnt. Ein jeder sieht leicht ein, wie die unten abgeleiteten Resultate zu modifizieren sind, wenn es sich um einen thermisch abnormen Körper wie Wasser zwischen 0^0 C und 4^0 C handelt.

Bei allen Wärmemaschinen kommen Verluste vor, teils mechanischen, teils thermischen Ursprungs. Zu theoretischen Zwecken kann man sich aber den Grenzfall erreicht denken, wo alle Verluste auf Null herabgedrückt sind. Über die konstruktiven Bedingungen, die von einer konkreten Maschine zu einer verlustlosen Idealmaschine führen, gestatte ich mir auf die ausführlichere Abhandlung hinzuweisen. Hier denke ich mir einfach die verlustlose Maschine gegeben in der für die theoretischen Überlegungen zweckmäßigsten Form. Sie wird dann schematisch durch die folgenden Fig. 2 und 3 dargestellt und hat die folgenden wesentlichen Merkmale:

Wenn die arbeitende Substanz an dem Niveau I vorbeiströmt, nimmt sie die Temperatur des Wärmebehälters I an, wenn sie an dem Niveau II vorbeiströmt, nimmt sie die Temperatur des Wärmebehälters II an. Unterwegs von dem einen Wärmebehälter zum anderen durchläuft die Substanz nur adiabatische Prozesse.

3. Die Wirkung einer einzigen Wärmequelle. — Zu Anfang soll adiabatische Temperaturverteilung herrschen. Die absolute Temperatur ϑ wird dann als Funktion der Höhe durch eine Gleichung

$$\vartheta = f(z) \qquad \text{(a)}$$

gegeben sein.

Ist die Temperatur des Wärmebehälters I auch durch diese Gleichung gegeben, so wird derselbe keinen Einfluß auf den Gleichgewichts- oder Bewegungszustand der Flüssigkeit ausüben können, gleichgültig, ob man auf Isolation oder auf thermische Verbindung einstellt. Jetzt soll er aber eine etwas höhere Temperatur

$$\vartheta + \Delta\vartheta \qquad \text{(b)}$$

haben. Steht er dann ganz oben, so wird nur folgen, daß das oberste Flüssigkeitselement erwärmt wird, so daß das indifferente Gleichgewicht in ein stabiles verwandelt wird. Steht er tiefer, wird folgendes eintreten. Das in dem Behälter enthaltene Element wird erwärmt und steigt in die Höhe; das nachfolgende wird erwärmt usw., und es erhebt sich eine immer länger werdende erwärmte Flüssigkeitssäule von dem Behälter. Je mehr sich diese Säule verlängert, um so größer wird das Übergewicht der entsprechenden kalten Säule im gegenüberliegenden Teil II der Röhre, und um so stärker die Kraft, die die Zirkulation beschleunigt. Das Übergewicht erreicht sein Maximum, wenn die Spitze der erwärmten Säule den obersten Scheitelpunkt der Röhrenleitung erreicht hat, nimmt wieder ab bei der jetzt folgenden Verlängerung der erwärmten Säule abwärts durch den Teil II der Röhrenleitung, und wird Null, wenn die Spitze der Säule das Niveau des Wärmebehälters wieder erreicht. Während dieser ganzen ersten Phase ist die Zirkulationsbewegung beschleunigt worden. Wegen der Trägheit setzt sich die Bewegung fort und die erwärmte Säule verlängert sich unterhalb des Niveaus des Wärmebehälters I. Dabei entwickelt sich eine verzögernde Kraft in genau ähnlicher Weise wie früher die beschleunigende. Sofern dadurch nicht schon früher Umkehr eintritt, wird während dieser zweiten Phase das verzögernde Übergewicht zunehmen, bis die erwärmte Säule den unteren Scheitelpunkt der Röhrenleitung erreicht hat, dann wieder abnehmen und Null werden im Moment, wo die erwärmte Säule von unten den Wärmebehälter erreicht und somit die ganze Flüssigkeitsmasse die erhöhte Temperatur erhalten hat.

Drei Möglichkeiten bieten sich jetzt dar.

Liegt der Wärmebehälter oberhalb eines gewissen mittleren Niveaus, so wird die in der zweiten Phase sich entwickelnde Gegenkraft genügen, um die Bewegung zur Umkehr zu bringen. Schwingungen stellen sich dann ein, und von dem Moment der ersten Umkehr an ist jede weitere Wirkung des Wärmebehälters ausgeschaltet. Die Partikelchen, die von diesem Moment an durch ihn passieren, gehören schon der erwärmten Säule an.

Befindet sich der Wärmebehälter in einem gewissen mittleren Niveau, so wird die Gegenkraft während der zweiten Phase der Bewegung eben hinreichen, um die Bewegung zum Stillstand zu bringen in dem Moment, wo die erwärmte Säule von unten den Wärmebehälter erreicht. Nach einem vollen Umlaufe ist dann jedes Partikelchen zu seiner Anfangslage zurückgekommen und das indifferente Gleichgewicht wieder hergestellt. Der einzige Unterschied ist, daß die Temperatur um den Betrag $\Delta\vartheta$ erhöht worden ist.

Liegt endlich die Wärmequelle unterhalb des definierten kritischen Niveaus, so wird das sich entwickelnde Gegengewicht während der zweiten Phase der Bewegung nicht genügen, um die Bewegung zum Stillstand zu bringen. Eine gewisse Geschwindigkeit wird noch vorhanden sein im Momente, wo die erwärmte Säule den Wärme-

behälter erreicht. Von diesem Moment an sind weder verzögernde noch beschleunigende Kräfte mehr vorhanden. Mit der in diesem Momente vorliegenden Geschwindigkeit wird die Flüssigkeit unveränderlich weiter zirkulieren. Mit der weiteren Verlegung des Wärmebehälters nach unten wird offenbar immer größere Intensität der gebildeten dauernden Zirkulation folgen.

Wie die Resultate zu modifizieren sind, wenn von Anfang an eine Zirkulation vorliegt, sieht man leicht ein. Ich hebe nur das folgende hervor. Geht die Anfangszirkulation rückwärts, d. h. durch den Wärmebehälter I nach unten, so werden sich beim Einschalten dieses Behälters anfänglich verzögernde Kräfte entwickeln. Drei Möglichkeiten bieten sich dann dar. Die verzögernden Kräfte können Umkehr der Bewegung erzwingen. Oder die arbeitende Substanz kann zur Ruhe kommen im toten Punkt, wenn die erwärmte Säule den ganzen unteren Röhrenbogen unterhalb des Niveaus des Behälters I füllt. Oder die Bewegung kann sich am toten Punkt vorbei fortsetzen, und es ergibt sich eine dauernde rückläufige Zirkulation.

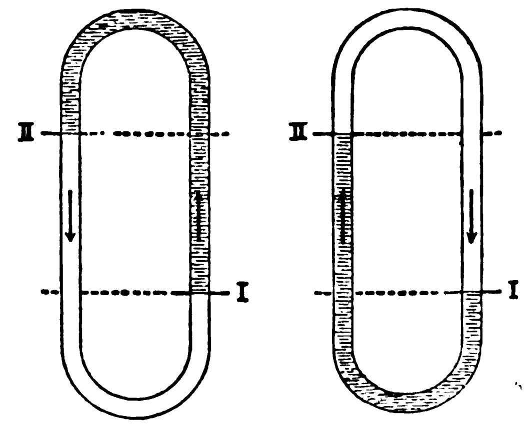
Eine stetig arbeitleistende Maschine ergibt sich aber nicht, solange nur eine Quelle tätig ist. Wenn die Bewegung oder die Bewegungsänderung, für welche die Bedingungen vorliegen, erzeugt sind, fällt jedes weitere Eingreifen der Wärmequelle oder der Kältequelle von selbst fort.

Der einzige Ausweg, weitere Arbeitsleistung zu erzielen, wäre, die Temperatur der Wärmequelle zu erhöhen. Sofern man über eine Wärmequelle mit stetig steigender Temperatur verfügt, kann man unsere Maschine mittels einer Wärmequelle treiben.

4. Stetiger Betrieb mit zwei Wärmequellen. — Jetzt soll auch die Wärmequelle II eingeschaltet werden, und eben die Normaltemperatur 3 (a) ihres Niveaus haben. Wir werden dann drei Fälle zu betrachten haben.

I. Die Kältequelle II liegt höher als die Wärmequelle I. — Herrscht Gleichgewicht zur Zeit, wo man die thermische Verbindung herstellt, so nimmt die bewegende Kraft erst zu, bis die warme Flüssigkeitssäule den obersten Punkt der Röhrenleitung erreicht hat, und dann wieder ab, bis die warme Säule die Kältequelle erreicht. Die Kältequelle setzt jedem weiteren Anwachsen der warmen Säule ein Ende, und in bezug auf Temperatur tritt ein Dauerzustand ein. Der obere Röhrenbogen oberhalb beider Wärmebehälter bleibt mit der höher temperierten, der untere Bogen unterhalb der beiden Behälter mit normal temperierter Flüssigkeit gefüllt (Fig. 2a).

Die dynamischen Folgen dieser Temperaturverteilung leuchten gleich ein. Durch zwei Niveauebenen, eine durch die Wärmequelle und eine durch die Kältequelle, kann man die Röhrenleitung in drei Teile teilen. Im obersten Röhrenbogen, oberhalb des Niveaus der Kältequelle, halten sich alle bewegenden Kräfte das Gleichgewicht. Im untersten Röhrenbogen, unterhalb des Niveaus der Wärmequelle, ist dasselbe der Fall. Zwischen den beiden Niveauflächen hat man aber zwei verschieden temperierte Flüssigkeitssäulen. Der konstante Dichteunterschied dieser beiden Flüssigkeitssäulen liefert eine konstante bewegende Kraft. Für jedes bewegte Partikelchen wird diese Kraft für jeden vollen Umlauf in der Röhrenleitung dieselbe konstante Arbeit ausführen. Summieren wir für



a) Vorwärtslauf (arbeitleistend). b) Rückwärtslauf (arbeitleistend).

Fig. 2. Die Kältequelle II liegt höher als die Wärmequelle I.

alle Partikelchen der arbeitenden Substanz, so ergibt sich: Für jeden Umlauf der arbeitenden Substanz in der Röhrenleitung wird eine konstante Arbeit geleistet, und für jeden Umlauf nimmt also die kinetische Energie der arbeitenden Substanz um den entsprechenden Betrag zu. Es ergibt sich also eine stetige Verwandlung der zugeführten Wärme in kinetische Energie.

Liegt eine vorwärtsgerichtete Anfangszirkulation vor, so ändert sich an dem oben Entwickelten nichts. Bei rückläufiger Anfangszirkulation wird man dagegen wieder drei Möglichkeiten begegnen.

Umkehr kann eintreten, ehe der tote Punkt erreicht ist; die Vorwärtsbewegung stellt sich dann wie vorher ein. Oder die Bewegung kommt zum Stillstand im toten Punkt, wenn die erwärmte Flüssigkeitssäule den Röhrenbogen unterhalb des Niveaus der Wärmequelle füllt. Oder die Bewegung geht am toten Punkt vorbei, die erwärmte Säule verlängert sich unter Beschleunigung weiter nach oben und erreicht den Wärmebehälter II, der jetzt ihrem weiteren Anwachsen ein Ende setzt. Jetzt ist wieder ein

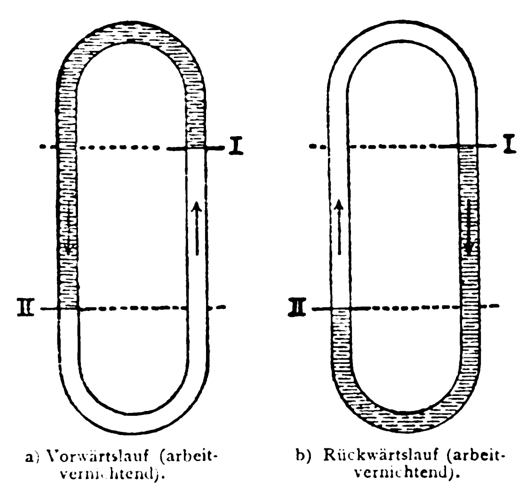
Dauerzustand in bezug auf die Temperaturverteilung erreicht, aber ein anderer als früher: der Bogen unterhalb des Wärmebehälters enthält jetzt die höher temperierte, der Bogen oberhalb der Behälter die normal temperierte Flüssigkeit (Fig. 2b). Das bewegende Übergewicht beruht genau wie vorher auf dem Dichteunterschied zwischen den zwei Flüssigkeitssäulen, die oben und unten durch die Niveauebenen durch die Wärmebehälter begrenzt sind. Nur haben erwärmte und die normal temperierte Säule den Platz gewechselt: die erwärmte steht unterhalb der Kältequelle und die normal temperierte oberhalb der Wärmequelle. Sie bedingen eine konstante, nach rückwärts bewegende Kraft, und bei der Rückwärtsbewegung erhält man für jeden Umlauf gleichviel kinetische Energie erzeugt wie bei der Vorwärtsbewegung.

Diese Maschine arbeitet also beim Vorwärts- und beim Rückwärtslauf genau gleich. Der Unterschied ist nur, daß sich die Vorwärtsbewegung von selbst einstellt, während man, um die Rückwärtsbewegung zu erzielen, eine rückläufige Anfangszirkulation von genügender Stärke braucht.

II. Wärme- und Kältequelle liegen in gleichem Niveau. — Wenn anfänglich Gleichgewicht herrscht, so wird die Bewegung genau wie vorher anfangen. Im Momente, wo die erwärmte Säule die Kältequelle erreicht, ist aber das bewegende Übergewicht eben Null geworden und wird von jetzt an Null bleiben. Da die vorausgehende Periode ausschließlich eine Periode der Beschleunigung war, wird eine von Null verschiedene konstante Geschwindigkeit vorliegen, die sich nicht mehr ändert. Man hat eine konstante Zirkulation, bei der der Bogen oberhalb des gemeinschaftlichen Niveaus beider Wärmebehälter die erhöhte, der Bogen unterhalb desselben Niveaus die normale Temperatur hat. Dabei wird stetig Wärme von dem Wärmebehälter I zu II übergeführt, aber nach dem Eintreten des Dauerzustandes keine Wärme in Arbeit verwandelt.

Liegt in diesem Falle eine vorwärtsgerichtete Anfangszirkulation vor, so wird der ganze Unterschied, daß die im nachher folgenden Dauerzustand auftretende Zirkulation entsprechend stärker wird. Hat dagegen die Anfangszirkulation die entgegengesetzte Richtung, so hat man wieder drei Möglichkeiten zu unterscheiden. Die Bewegung kehrt um, ehe der tote Punkt erreicht ist, und das Resultat wird dasselbe, als hätte von Anfang an eine Zirkulation von der zuerst betrachteten Richtung vorgelegen. Oder der tote Punkt wird eben erreicht, und alles kommt zum Stillstand in der instabilen Lage, wo der Bogen unterhalb des Niveaus beider Behälter mit höher temperierter und der Bogen oberhalb mit normal temperierter Flüssigkeit gefüllt ist. Oder endlich, die Bewegung kommt an dem toten Punkt vorbei, um sich von da an mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit fortzusetzen, die schwächer ist als die Anfangsgeschwindigkeit.

III. Die Kältequelle liegt tiefer als die Wärmequelle. — Geht man wieder von einem Zustande des Gleichgewichtes aus, so setzt die Bewegung wie früher ein. Ehe aber die erwärmte Säule die Kältequelle erreicht, fangen die verzögernden Kräfte an sich zu entwickeln. Diese können die Umkehr der Bewegung erzwingen, ehe die erwärmte Säule die Kältequelle erreicht, und dann stellen sich Schwingungen ein. Oder die erwärmte Säule erreicht die Kältequelle, die ihrem weiteren Anwachsen eine



a) Vorwärtslauf (arbeitvernichtend). b) Rückwärtslauf (arbeitvernichtend).

Fig. 3. Die Kältequelle II liegt tiefer als die Wärmequelle I.

Grenze setzt (Fig. 3a). Von diesem Moment angeht dann die Bewegung gegen eine konstante Gegenkraft, die früher oder später Umkehr mit darauffolgenden Schwingungen erzwingen wird. Die Ausschläge dieser Schwingungen sind gegeben durch den Vertikalabstand der zwei Wärmebehälter.

Liegt eine vorwärtsgerichtete Anfangszirkulation vor, so wird sich das oben Beschriebene genau wiederholen: Die kinetische Energie der zirkulierenden Flüssigkeit erschöpft sich gegen die konstante Gegenkraft, und dann stellen sich die Schwingungen ein. Ist die Anfangszirkulation rückläufig, so kann nie der früher auftretende tote Punkt erreicht werden. Denn ehe sich die Säule so weit entwickeln kann, erreicht sie die Kältequelle, die ihre weitere Verlängerung verhindert. Man hat deshalb nur zwei Möglichkeiten zu betrachten. Die Bewegung kann um-

kehren, ehe die warme Säule die Kältequelle erreicht, und nach dieser Umkehr folgen die früher beschriebenen Erscheinungen. Oder die Kältequelle wird erreicht (Fig. 3 b). Dann tritt eine Periode ein, wo die Bewegung gegen eine konstante Gegenkraft verläuft. Wie stark auch die Anfangszirkulation war, wird in dieser Weise die Bewegung früher oder später zur Umkehr gebracht, wonach wieder alles wie oben beschrieben verläuft. Das Hauptergebnis bleibt immer dasselbe: Wenn die Wärmequelle höher als die Kältequelle liegt, vernichtet die Maschine die kinetische Energie der arbeitenden Substanz, um sie in Wärme zu verwandeln. Dies tritt sowohl bei vorwärts- als bei rückwärtsgehender Zirkulation ein, und das Endergebnis bleibt eine schwingende Bewegung, bei der Wärme- und Kältequelle außer Spiel gesetzt sind, weil sie nur mit arbeitender Substanz ihrer eigenen Temperatur in Berührung kommen.

5. Die mechanische Arbeitsleistung der Maschine. — In der Maschine tritt eine konstante bewegende Kraft auf. Für jeden vollen Umlauf der arbeitenden Substanz in der Röhrenleitung leistet diese Kraft eine gewisse Arbeit. Diese Arbeit ist positiv und vergrößert die kinetische Energie der arbeitenden Substanz, wenn die Kältequelle höher als die Wärmequelle liegt, sie ist negativ und vermindert die kinetische Energie der arbeitenden Substanz, wenn die Kältequelle niedriger als die Wärmequelle liegt.

Die arbeitende Kraft ist proportional der Höhe der Kältequelle über der Wärmequelle. Sie kann als negativ oder arbeitvernichtend definiert werden, wenn diese Höhe negativ ist und also die Kältequelle niedriger als die Wärmequelle liegt. Weiter ist die Kraft proportional dem Dichteüberschuß der normal temperierten Flüssigkeitssäule über der erwärmten.

Offenbar bieten sich zwei Wege dar, um erhöhte Arbeitsleistung pro Umlauf zu erzielen: die Höhe der Kältequelle über der Wärmequelle zu vergrößern oder den Temperaturunterschied zwischen der erwärmten und der normal temperierten Flüssigkeitssäule zu vergrößern, d. h. die Temperatur der Wärmequelle zu erhöhen. Für die Wirkung, die man durch den Temperaturunterschied der zwei Flüssigkeitssäulen erzielt, ist die thermische Ausdehnung des Stoffes maßgebend. Günstig ist insofern die Anwendung von Gasen. Am kräftigsten wird jedoch eine Maschine selbst mäßiger Dimensionen wirken können und vielleicht sogar technisch verwendbar sein, wenn man die Temperaturen so wählt, daß die arbeitende Substanz in dem einen Röhrenschenkel als Dampf aufsteigt und in dem anderen als Flüssigkeit heruntersinkt. Jedenfalls ist es klar, daß man durch die Wahl genügender Höhenunterschiede und genügender Temperaturunterschiede der Wärmequellen, durch passende Wahl der sonstigen Dimensionen sowie durch die Wahl einer zweckmäßig arbeitenden Substanz eine Maschine bauen kann, die pro Umlauf oder pro Zeiteinheit beliebig viel Arbeit leistet.

6. Die thermodynamische Nutzwirkung der Maschine. — Wichtiger als die Arbeitsleistung pro Umlauf oder pro Zeiteinheit ist jedoch die Frage der Ökonomie der Maschine, d. h. die thermodynamische Frage nach der Arbeitsleistung pro Einheit zugeführter Wärme.

Da jedes Partikelchen der arbeitenden Substanz für jeden Umlauf einen Kreisprozeß durchläuft, kann man diese thermodynamische Nutzwirkung ganz allgemein angeben, gleichgültig, welche die arbeitende Substanz ist. Um gleich die Bedingungen der Höchstleistung vor uns zu haben, führen wir eine besondere Bedingung ein. Über die Größe des Temperaturüberschusses $\Delta\vartheta$ der Wärmequelle über der normalen Temperatur der arbeitenden Substanz in dem gleichen Niveau haben wir bisher keine Voraussetzungen gemacht. Wir haben nur darauf hingewiesen, daß man durch Vergrößerung dieses Temperaturüberschusses größere Arbeitsleistung der Maschine pro Umlauf erhält. Für die thermodynamische Nutzwirkung der Maschine wird aber die Vergrößerung dieses Temperaturüberschusses nur schädlich sein. Will man ohne Verlust von thermodynamischer Nutzwirkung mit großer Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ zwischen der kalten und der warmen Flüssigkeitssäule arbeiten, so ist der einzige Ausweg, daß man eine ganze Reihe von Wärmequellen einführt mit Temperaturen zwischen ϑ und $\vartheta + \Delta\vartheta$, die nacheinander in Tätigkeit treten, so daß eine Überführung von Wärme nie mit einer endlichen Temperaturerniedrigung verbunden ist. Dabei gehen wir aber zu Maschinen komplizierteren Baues über. Die einfachste und deshalb grundlegende Maschine höchster Leistung ergibt sich, wenn man den Temperaturüberschuß $\Delta\vartheta$ verschwindend klein annimmt.

Indem ich diese Voraussetzung mache, nenne ich beziehungsweise ϑ_{I} und ϑ_{II} die Temperaturen der Wärmequelle und der Kältequelle und verfolge die Geschichte eines Partikelchens der arbeitenden Substanz. Bei der Temperatur ϑ_{I} erhält das Partikelchen eine gewisse Wärmemenge dq_{I} von der Wärmequelle. Darauf erleidet es ausschließlich adiabatische Veränderungen, bis es mit der Temperatur ϑ_{II} bei der Kältequelle ankommt. Hier gibt es eine gewisse Wärmemenge dq_{II} ab, und dann folgen wieder adiabatische Veränderungen, bis das Partikel-

chen mit der Temperatur ϑ_I wieder die Wärmequelle I erreicht. Der Kreisprozeß ist also einfach der Carnotsche. Die Nutzwirkung ist das Verhältnis der als Wärme verschwundenen und in mechanische Arbeit übergeführten Wärmemenge $dq_I - dq_{II}$ zu der vom Wärmebehälter abgegebenen Wärmemenge dq_I. Dieser Nutzeffekt ist, nach den Prinzipien der Thermodynamik, von der physikalischen Natur der arbeitenden Substanzen unabhängig und gleich der Verhältniszahl des Temperaturunterschiedes der beiden Wärmebehälter zu der absoluten Temperatur der Wärmequelle

$$\frac{\vartheta_I - \vartheta_{II}}{\vartheta_I}. \qquad \text{(a)}$$

Dies gilt für jedes Element der arbeitenden Substanz. (a) ist also der Effekt der ganzen Maschine. Von jeder endlichen oder unendlich kleinen Wärmemenge, die bei dem stetigen Betriebe der Maschine zugeführt wird, wird der Bruchteil (a) in mechanische Arbeit umgesetzt. Oder, wenn es sich um den stetigen Betrieb handelt, können wir sagen: von der der Maschine pro Zeiteinheit zugeführten Wärmemenge wird der Bruchteil (a) in kinetische Energie umgesetzt.

Dieses Resultat zeigt, von den Prinzipien der Thermodynamik aus, warum der Höhenunterschied der Wärmequellen so entscheidend für die Leistung der Maschine ist. Der Niveauunterschied ist notwendig, um den Temperaturunterschied zu schaffen, welcher Voraussetzung für die Arbeitsleistung einer Wärmemaschine ist. Die Formel gilt für alle Substanzen, welches auch ihre thermischen Eigenschaften sind. Sie zeigt, daß man bei thermisch normalen Substanzen, die sich bei Erwärmung ausdehnen und bei adiabatischem Gleichgewicht abnehmende Temperatur mit der Höhe haben, eine arbeitleistende Maschine erhält, wenn die Kältequelle höher als die Wärmequelle liegt, und eine arbeitvernichtende, wenn die Kältequelle niedriger als die Wärmequelle liegt. Ebenfalls zeigt sie, daß sich alles umkehrt bei den thermisch abnormen Substanzen, die sich bei Erwärmung zusammenziehen und bei adiabatischem Gleichgewicht aufwärts zunehmende Temperatur haben. Bei diesen gibt hochgelegene Kältequelle und niedriggelegene Wärmequelle eine arbeitvernichtende, hochgelegene Wärme- und niedriggelegene Kältequelle eine arbeitleistende Maschine.

Um ein quantitatives Beispiel der Wirkung des Niveauunterschiedes von Wärme- und Kältequelle zu geben, können wir trockene atmosphärische Luft betrachten und der Wärmequelle die Temperatur 0^0 C geben. Liegt dann die Kältequelle 1 m höher als die Wärmequelle, so hat sie nach dem adiabatischen Gesetz die Temperatur $-0{,}01^0$ C. Dann wird $\frac{1}{27300}$ der zugeführten Wärme in kinetische Energie verwandelt. Gibt man der Kältequelle die Höhen 10, 100, 1000, 10000 m über der Wärmequelle, so erhöht sich die Nutzwirkung beziehungsweise auf $\frac{1}{2730}$, $\frac{1}{273}$, $\frac{1}{27{,}3}$, $\frac{1}{2{,}73}$. Schließlich wird sich die Nutzwirkung dem idealen Grenzwert 1 nähern, wenn sich die Höhe der Kältequelle über der Wärmequelle 27300 m nähert, so daß sich die Maschine der vollen Höhe der adiabatischen Atmosphäre nähert. An die Grenze darf man natürlich nur gehen, vorausgesetzt, daß die atmosphärische Luft ihre idealen Gaseigenschaften bis zu dem absoluten Nullpunkt beibehält. Geht man an die Grenze, so wäre schließlich die Kältequelle nicht mehr notwendig. Denn an sie sollte nur eine Wärmemenge Null abgeführt werden. Die ganze unten zugeführte Wärmemenge würde bei dieser Höhe der Röhrenleitung sowieso vollständig in kinetische Energie verwandelt werden.

Geht man zu Stoffen mit anderen adiabatischen Gradienten, so ändern sich die Höhenunterschiede, die erforderlich sind, um einen bestimmten Wirkungsgrad zu erzielen. Bemerkenswert in dieser Verbindung ist, daß der adiabatische Temperaturgradient der gesättigt feuchten atmosphärischen Luft erheblich kleiner als der der trockenen ist. Bei der Anwendung solcher Luft als arbeitender Substanz in unserer Maschine muß man größere Höhenunterschiede zwischen Wärme- und Kältequellen haben, um gleiche Arbeitsproduktion wie mit trockener Luft zu erhalten. Vorausgesetzt ist dabei, daß das ausgeschiedene Wasser im Kreislauf mitgeführt wird und nicht als Regen herunterfällt.

Wendet man reines Wasser als arbeitende Substanz an, so hat man es mit außerordentlich kleinen vertikalen Temperaturgradienten zu tun, die bei 4^0 C Null werden und das Vorzeichen ändern. Um mit Wasser als arbeitender Substanz größere Nutzwirkung zu erreichen, müßte man also zu außerordentlich großen Höhenunterschieden zwischen Wärme- und Kältequelle greifen, und wenn man die Temperatur des Dichtemaximums passierte, würde der notwendige Höhenunterschied von $+\infty$ zu $-\infty$ überspringen. Das Meerwasser verhält sich für alle Temperaturen oberhalb seines Gefrierpunktes wie das reine Wasser oberhalb 4^0 C. Der Temperaturgradient ist aber so klein, daß man nach Ekman[1]) eine Temperaturerniedri-

1) V. Walfrid Ekman, On the use of insulated

gung von nur 1,3 oder 1,4° C erhielte, wenn man eine Wasserprobe mit einer Anfangstemperatur zwischen 0° und 4° von den größten Meerestiefen von beinahe 10000 m zu der Meeresoberfläche in einem vollständig wärmeisolierenden Wasserschöpfer heraufholen wollte. Mit Meerwasser als arbeitender Substanz in einer Röhrenleitung von dieser Höhe würde man also eine Nutzwirkung von nur $\frac{1}{200}$ haben.

(Teil II folgt.)

---

water-bottles and reversing thermometers p. 7. Conseil permanent international pour l'Exploration de la Mer. Publication de Circonstance Nr. 23, Kopenhagen 1905.

(Eingegangen 13. Juli 1916.)

Über die Extinktion des Lichtes. II.

Von C. W. Oseen.

Ich habe kürzlich in dieser Zeitschrift (17, 233, 1916) nachgewiesen, daß wenn man die elektromagnetische Theorie der Dispersion des Lichtes in der Planckschen Form annimmt, man für den Extinktionskoeffizienten nicht den Rayleighschen Wert:

$$\frac{32\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4},$$

sondern den doppelten Wert erhält. Da dieses Ergebnis mit den Tatsachen in Widerspruch zu stehen scheint und da ich damals glaubte, daß die Plancksche Dispersionstheorie im Einklang mit den Maxwellschen Gleichungen stehe, so wurde ich zu der Auffassung gedrängt, daß die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik die tatsächlich beobachtete Extinktion nicht zu erklären vermag. Ich habe seitdem erkannt, daß jener Glaube irrtümlich war, und daß der Widerspruch auf einen Fehler in der Planckschen Theorie der Dispersion des Lichtes zurückzuführen ist. Ich zeige in den folgenden Zeilen, daß Herr Planck das Dämpfungsglied eines Resonators richtig berechnet hat, daß aber die auf den Resonator wirkende Kraft nicht den von Herrn Planck angegebenen Betrag hat, sondern noch ein Glied enthält, das jenes Dämpfungsglied gerade aufhebt.

Der Einfachheit wegen nehme ich an, daß das dispergierende Mittel nur Molekeln von einer einzigen Art enthält. Mit jeder Molekel soll ein elektrischer Dipol verbunden sein. f sei das Moment eines Dipols. Die Schwingungsgleichung desselben ist dann:

$$m\left(\frac{d^2f}{dt^2}+k^2f\right)-\frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3f}{dt^3}=$$

$$=e^2\left(E_0+\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\sum{}'\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right).$$

Hier ist E_0 die von außen einfallende äußere Kraft. Die Summe erstreckt sich über alle Dipole im Körper mit Ausnahme desjenigen, P, auf welchen sich das linke Glied bezieht.

Um P schlagen wir eine Kugel, deren Radius R im Verhältnis zur Wellenlänge klein, aber im Verhältnis zum durchschnittlichen Abstande zwischen zwei angrenzenden Molekeln groß ist. Wir setzen die Zahl der Molekel im Volumelemente $d\Omega = N\,d\Omega$. Wir setzen ferner:

$$Nf=\psi e^{i\omega t}$$

und nehmen an, daß ψ eine von t unabhängige, regelmäßig variierende und in physikalisch kleinen Gebieten konstante Vektorfunktion eines Punktes P' ist. Wir können dann leicht denjenigen Anteil der Funktion:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\sum{}'\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

berechnen, der von dem außerhalb der Kugel $r=R$ gelegenen Teil des Körpers herrührt. Wir erhalten:

$$\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int\limits_{r>R}\psi(P')\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,d\Omega_{P'}.$$

Wir haben:

$$\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}=-\frac{c^2}{\omega^2}\Delta_{P'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}$$

und erhalten folglich:

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int\limits_{r>R}\psi(P')\,\Delta_{P'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\,d\Omega_{P'}=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int\limits_{r>R}\Delta_{P'}\psi(P')\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\,d\Omega_{P'}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int\limits_{S}\left\{\psi(P')\frac{d}{dn}\cdot\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}-\right.$$

$$\left.-\frac{d\psi}{dn}\cdot\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\right\}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}_P\int\limits_{r=R}\left\{\psi(P')\right.$$

$$\left.\frac{d}{dn'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}-\frac{d\psi}{dn'}\frac{e^{\frac{-i\omega r}{c}}}{r}\right\}d\sigma,$$

wenn S die Oberfläche des Körpers ist und wenn die Normale stets nach außen gezogen wird.

Wir nehmen an, daß ψ der Bedingung:

$$\Delta\psi+\frac{\omega^2}{9^2}\psi=0$$

genügt. Wir nehmen ferner an, daß:

$$E_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{c^2 \vartheta^2}{\omega^2 (c^2 - \vartheta^2)}$$

$$\text{rot rot}_P \int_S \left(\psi(P') \frac{d}{dn'} - \frac{d\psi}{dn'} \right) \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\sigma = 0.$$

Diese Annahme ist damit gleichbedeutend, daß die gewöhnlichen Randbedingungen erfüllt sind. Wir erhalten dann:

$$E_0 + \frac{1}{4\pi} \text{rot rot}_P \int_{r>R} \psi(P') \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\Omega_{P'} =$$

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\vartheta^2 c^2}{\omega^2 (c^2 - \vartheta^2)} \text{rot rot}_P \int_{r=R} \left(\psi \frac{d}{dn'} - \frac{d\psi}{dn'} \right) \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\sigma.$$

In meiner Abhandlung[1]): „Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationsebene in Kristallen und Flüssigkeiten" habe ich den Grenzwert des rechten Gliedes für $R = 0$ berechnet. Ich will hier auch gewisse für $R = 0$ verschwindende Glieder in Betracht ziehen. Ich nehme an, daß ϑ und ω reelle Größen sind. Der Grenzwert des rechten Gliedes ist dann, vom Faktor $e^{i\omega t}$ abgesehen, ebenfalls reell. Ich berechne hier überdies die größten imaginären Glieder. Es ist:

$$\text{rot rot}_P \left(\psi \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} \right) =$$

$$\left\{ \psi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathfrak{r}}{r} \left(\psi \times \frac{\mathfrak{r}}{r} \right) r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} +$$

$$+ \frac{\omega^2}{c^2} \psi \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}.$$

Ich erhalte demnach:

$$\text{rot rot}_P \int_{r=R} \psi \frac{d}{dn'} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\sigma = \left\{ \frac{4\pi}{5} \Delta\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{12\pi}{5} \text{grad div}\, \psi - \frac{8\pi\omega^2}{3c^2} \psi + \frac{8\pi\omega i^5}{9c^5} R^3 \psi \right\} e^{i\omega t}.$$

Ich erhalte ebenso:

$$\text{rot rot}_P \int_{r=R} \frac{d\psi}{dn} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\sigma = \left\{ \frac{8\pi}{5} \text{grad div}\, \psi - \right.$$

$$\left. - \frac{8\pi}{15} \Delta\psi - \frac{8\pi i \omega^3}{9c^3} R^3 \Delta\psi \right\} e^{i\omega t}.$$

Nach unserer Annahme ist:

$$\Delta\psi = -\frac{w^2}{\vartheta^2} \psi.$$

1) Ann. d. Phys. 48, 1915.

Wir wollen annehmen, daß überdies:

$$\text{div}\, \psi = 0.$$

Wir erhalten dann:

$$E_0 + \frac{1}{4\pi} \text{rot rot}_P \int_{r>R} \psi(P') \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\Omega_{P'} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{2\vartheta^2 + c^2}{c^2 - \vartheta^2} \psi(P) e^{i\omega t} + \frac{2i\omega^3}{9c^3} R^3 \psi(P) e^{i\omega t}.$$

Bei der Berechnung von:

$$\frac{1}{4\pi} \text{rot rot}_P \sum_{r=R}' \psi(P') \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\Omega_{P'},$$

wollen wir annehmen, daß: $\psi_x = \psi_y = 0$. Wir beschränken uns überdies auf die Berechnung der z-Komponente. Wir erhalten:

$$\frac{\psi_z(P)}{4\pi N} \sum_{r<R}' \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{i\omega}{c} + 1 \right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3z^2}{r^4} \right) \right\} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}.$$

In einem isotropen Körper ist $\overline{z^2} = \frac{1}{3} r^2$. Wir bekommen folglich:

$$\frac{\psi_z(P)}{4\pi N} \frac{2\omega^2}{3c^3} e^{i\omega t} \sum_{r<R}' \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r}$$

oder, wenn wir nur die größten, vom Faktor $e^{i\omega t}$ abgesehen, imaginären Glieder berücksichtigen und da die Zahl der Glieder in unserer Summe:

$$\frac{4\pi R^3}{3} N - 1$$

ist:

$$-\frac{i\omega^3}{6\pi c^3 N} \left(\frac{1}{3} \cdot 4\pi R^3 N - 1 \right) \psi_z(P) e^{i\omega t}.$$

Man findet in derselben Weise, daß in einem isotropen Körper ganz allgemein:

$$\frac{1}{4\pi} \text{rot rot}_P \sum_{r<R}' \psi(P') \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} d\Omega_{P'} =$$

$$-\frac{i\omega^3}{6\pi c^3 N} \left(\frac{1}{3} \cdot 4\pi R^3 N - 1 \right) \psi(P) e^{i\omega t}.$$

Wir haben also schließlich:

$$e^2 \left(E_0 + \frac{1}{4\pi} \text{rot rot}_P \sum' \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right) =$$

$$\frac{1}{3} \frac{2\vartheta^2 + c^2}{c^2 - \vartheta^2} e^2 \psi(P) e^{i\omega t} + \frac{i\omega^3 e^2}{6\pi c^3 N} \psi(P) e^{i\omega t} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{2\vartheta^2 + c^2}{c^2 - \vartheta^2} N e^2 f(P) - \frac{e^2}{6\pi c^3} \left(\frac{d^3 f}{dt^3} \right)_P.$$

Die Schwingungen des Resonators in P verlaufen also nach dem Gesetz:

$$m\left(\frac{d^2f}{dt^2}+k^2f\right)-\frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3f}{dt^3}=$$
$$\frac{1}{3}\frac{2\vartheta^2+c^2}{c^2-\vartheta^2}Ne^2f-\frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{d^3f}{dt^3}$$

oder:

$$m\left(\frac{d^2f}{dt^2}+k^2f\right)=\frac{1}{3}\frac{2\vartheta^2+c^2}{c^2-\vartheta^2}Ne^2f.$$

Das Plancksche Dämpfungsglied fällt weg.

Wenn wir:

$$Nf=\boldsymbol{P},\left(\frac{c^2}{\vartheta^2}-1\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$$

setzen, so können wir unser Ergebnis in dem folgenden Satze zusammenfassen: Die äußere Kraft, welche in einem isotropen Körper auf ein Elektron wirkt, ist im Mittel:

$$e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{3}P\right)-\frac{e}{6\pi c^3N}\frac{d^3\boldsymbol{P}}{dt^3}.$$

Das letzte Glied hebt das Plancksche Dämpfungsglied auf.

Mit dem Planckschen Dämpfungsglied fällt auch die von mir so genannte Rayleigh-Plancksche Extinktion weg. Nur die Keesom-Einsteinsche Extinktion bleibt bestehen. In Übereinstimmung mit den Tatsachen und mit Herrn Lorentz bekommt man wieder den Rayleighschen Extinktionskoeffizienten:

$$\frac{32\pi^3(\mu-1)^2}{3N\lambda^4}.$$

Es ist wohl kaum notwendig, ausdrücklich auf den tiefgreifenden Unterschied hinzuweisen, der zwischen unserem Resultate und den Anschauungen besteht, die Herr Planck seinen neueren Theorien zugrunde gelegt hat. Herr Planck betrachtet stets isolierte Resonatoren. Er nimmt an, daß die Maxwell-Lorentzsche Theorie für die absorbierte Energie den richtigen Betrag gibt. Dagegen soll die Emission nicht nach dieser Theorie geschehen. Wir haben dagegen die Wechselwirkung zwischen Resonatoren betrachtet. Wir haben gefunden, daß die Aussage der klassischen Theorie, daß die auf ein Elektron wirkende Kraft im Mittel:

$$e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{3}\boldsymbol{P}\right)$$

ist, nicht ganz richtig ist und daß folglich die elektromagnetische Theorie des Lichtes in ihrer üblichen Form einen unrichtigen Wert für die absorbierte Energie ergibt. Dagegen haben wir ihre Ergebnisse betreffs der Emission als gültig angenommen.

Zur Frage von der Bedeutung unseres Ergebnisses für die Theorie des photoelektrischen Effektes hoffe ich zurückkommen zu können.

Upsala, Juni 1916.

(Eingegangen 4. Juli 1916.)

Eine neue Hochspannungsbatterie.

Von H. Greinacher.

Einrichtung.

Das Prinzip des im folgenden beschriebenen Apparates habe ich bereits vor einiger Zeit[1]) angegeben. Damals wurde eine Einrichtung beschrieben, welche erlaubt, aus einem Wechselstromnetz konstante Gleichspannung zu entnehmen. Im Speziellen wurde dabei eine Schaltung verwendet, welche direkt Gleichspannung vom doppelten Betrage der Wechselspannung lieferte. In Fig. 1 sei dieselbe nochmals kurz

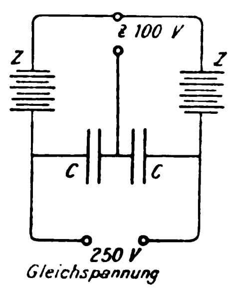


Fig. 1.

skizziert. ZZ sind je 4 Graetzsche Ventilzellen, CC zwei Telephonkapazitäten von je 2 Mikrofarad. Die Wirkungsweise dieses „Gleichspannungsformers", der bei kleiner Stromentnahme (unter 1 Milliampere) praktisch vollkommen konstanten Gleichstrom liefert, ist ohne weiteres ersichtlich.

Der Apparat war in dieser Ausführungsform zunächst für Gleichspannungen bis 250 Volt geeignet. Es lag nun aber nahe, die Einrichtung auch zur Gewinnung konstanter Hochspannung zu benützen. In der Tat gelang es ohne Mühe, eine „Hochspannungsbatterie" nach diesem Prinzip herzustellen, welche in vielen Fällen geeignet sein dürfte, die bisher gebräuchlichen Akkumulatorenbatterien zu ersetzen. Fig. 2 zeigt die Ansicht eines solchen bis 6000 Volt Gleichspannung liefernden Apparates von oben.

Da eine Graetzsche Zelle nur eine beschränkte Spannung (ca. 25 Volt) abdrosselt, so sind hier deren viele hintereinandergeschaltet. Man sieht zwei Batterien von je 70 Zellen.

1) H. Greinacher, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 320, 1914.

Letztere bestehen (wie früher) aus kleinen Reagenszylinderchen (5 cm), in welche als Elektroden je ein Eisen- und ein Aluminiumdraht eintauchen. Die Röhrchen sind mit konzentrierter $NaHCO_3$-Lösung zu $^2/_3$ gefüllt. Der Rest ist zur Vermeidung von Verdunstung und Hinaufkriechen der Flüssigkeit mit Paraffinöl vollgegossen. Die Zellen selbst sind zur Isolation auf Paraffin montiert.

Statt der früher verwendeten kleinen Telephonkapazitäten, die nur auf eine Durchschlagssicherheit von 350 Volt geprüft waren, wurden hier große, auf 2000 Volt geprüfte Wickelkondensatoren verwendet. Zudem wurden je 4 Kondensatoren von 2 μF hintereinandergeschaltet, so daß jede der Kondensatorbatterien theoretisch 8000 Volt aushielt. Die durch das Hintereinanderschalten bewirkte Verminderung der Kapazität auf je $^1/_2\,\mu F$ war, wie die Versuche zeigten, durchaus zulässig.

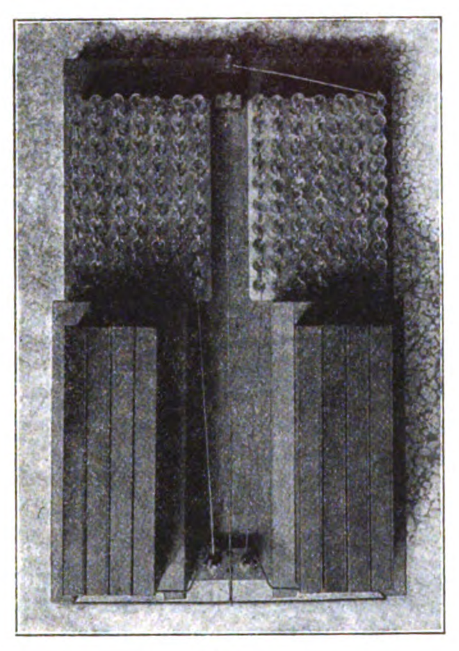


Fig. 2.

An den Klemmen oben wird der Wechselstrom angeschlossen, an den Klemmen unten erfolgt die Gleichstromentnahme. Die Drahtverbindungen sind an Hand des Schemas Fig. 1 ohne weiteres verständlich. Die nötige Wechselspannung wird durch einen Transformator (z. B. ein Induktorium) erzeugt. In die Primärspule schickt man den Netzstrom; die Sekundärklemme verbindet man mit der „Hochspannungsbatterie". Durch Regulierung des Primärstroms kann man dann jede gewünschte Wechselspannung und damit jede Gleichspannung einstellen. Dabei braucht man einen relativ kleinen Induktor zur Transformation, da die nötige Wechselspannung stets weniger als die Hälfte der erzielten Gleichspannung beträgt.

Prüfung der Hochspannungsbatterie.

Um die Verwendungsmöglichkeiten der neuen Hochspannungsbatterie kennen zu lernen, war es nötig, sie auf folgende Eigenschaften zu prüfen: 1. die maximale Spannung, bis zu welcher sie funktioniert; 2. die Konstanz der erzielten Gleichspannung. Letztere konnte, auch bei vollkommen konstanter Netzspannung in zweierlei Hinsicht beeinträchtigt sein. Einmal konnte die

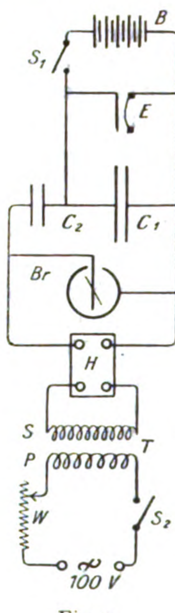


Fig. 3.

Abdrosselung der Ventilzellen Unregelmäßigkeiten zeigen, dann konnte aber auch der Gleichspannung infolge der nicht idealen Ventilwirkung etwas Wechselspannung beigemischt sein.

Um zunächst eine Beimischung von Wechselspannung zu erkennen bez. zu messen, erwies sich nach früherem[1]) das Vibrationselektrometer als besonders geeignet. Die Meßanordnung selbst ist in Fig. 3 angegeben. Hierin bedeuten

B eine Ladebatterie von 40 Volt,
E das Vibrationselektrometer,
C_2 eine bis 10000 Volt durchschlagsichere Kapazität von 0,0054 μF,
C_1 einen auf $^1/_{1000}\,\mu F$ abstufbaren Meßkondensator,
B_r ein die Spannung der Hochspannungsbatterie H anzeigendes Braunsches Elektrometer.

1) H. Greinacher, Elektrotechnik u. Maschinenbau 32, 415, 1914.

Die Verwendung der Kapazitäten $C_1 C_2$ hatte folgenden Zwecken zu dienen. Einmal sollten an E nur Spannungs**änderungen** beobachtet werden, wobei die Einwirkung der ganzen Spannung von H ausgeschaltet sein mußte. Sodann sollten die Spannungsänderungen von H durch Abgleichen von C_2 auf einen passenden kleineren Betrag am Elektrometer E reduziert werden. Die Batterie B diente nur dazu, um E für Spannungsschwankungen empfindlicher zu machen.

Die Beobachtungen geschahen nun so, daß man erst S_1 und dann S_2 schloß. Nachdem das Braunsche Elektrometer durch Regulieren von W auf eine bestimmte Spannung eingestellt war, wurde S_1 unterbrochen. Falls nun die Hochspannung vollständig konstant war, so mußte E ruhig bleiben. In Wirklichkeit zeigte sich aber die charakteristische, durch Wechselspannung (50 Perioden) hervorgerufene Fadenverbreiterung.

Es handelte sich nun darum, die Größe der beigemischten Wechselspannung zu bestimmen. Obschon für das Vibrationselektrometer keine Skala vorgesehen ist, so läßt sich das Instrument durch einen Kunstgriff doch als Meßapparat verwenden. Man kann nämlich die Fadenbreite als Maß benützen. Um eine Verdoppelung des Fadens zu bekommen, muß eine ganz bestimmte Wechselspannung angelegt werden. Dabei ist die Verdoppelung genügend genau zu beobachten, da bei etwas zu geringer Spannung in der Mitte ein schwarzer Strich (Überdeckung der Fadenränder), bei etwas zu viel ein heller Strich (Abstand der Fadenränder) entsteht. Es ergab sich, daß bei einem 6μ-Faden und 150-facher Vergrößerung die Einzelbeobachtungen um höchstens 2—3 Proz. voneinander abwichen. Im Mittel wurde (bei 50 Perioden) 0,60 Volt gefunden.

Die Bestimmung der Wechselspannung geschah nun so, daß man C_1 jeweils so abglich, daß Fadenverdoppelung eintrat. Die an den Klemmen von H vorhandene Wechselspannung V' berechnete sich dann in bekannter Weise nach der Formel

$$V' = 0{,}60 \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_2} \text{Volt}.$$

Statt dieser Berechnung wurde jedoch eine direkte Eichung vorgezogen. Zu dem Zweck wurde die Hochspannungsbatterie weggenommen, worauf man an ihrer Stelle bekannte Wechselpotentiale anlegte. Diese wurden durch Abzweigen an einem mit 105 Volt Wechselspannung gespeisten Meßrheostaten von 10000 Ohm hergestellt. Auf diese Weise erhielt man dann eine Eichkurve, welche die angelegten Potentiale als Funktion von C_1 ergab.

In Fig. 4 seien nun die Resultate graphisch

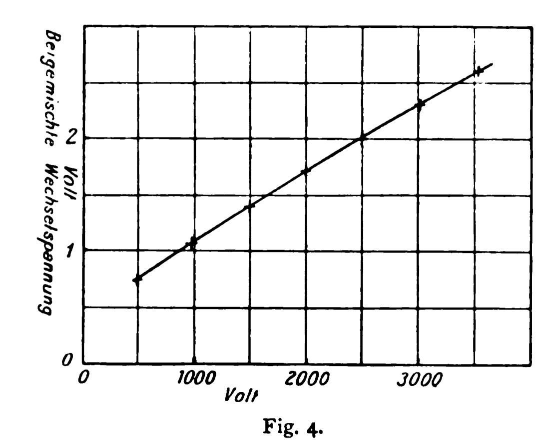


Fig. 4.

wiedergegeben. Die Beobachtungen wurden einmal bei aufsteigenden Potentialen (500—3500 Volt) und einmal bei absteigenden gemacht. Es wurde dann bei den durchwegs kleinen Differenzen das Mittel genommen. Die Zeit zwischen zwei Beobachtungen beträgt, da stets erst eine konstante Einstellung abgewartet wurde, 10 Minuten. Aus Fig. 4 folgt, daß die Wechselpotentiale stets nur klein waren und im übrigen linear mit der Gleichspannung anstiegen. Die Wechselspannung beträgt rund 1 Promille der Gleichspannung. Selbst bei 6000 Volt wurde noch dasselbe Verhältnis gefunden. Wurde der eine Pol der Hochspannungsbatterie, wie dies ja für viele Zwecke geschieht, geerdet, so verringerte sich die an und für sich schon kleine Wechselspannung noch weiter.

Es sei bemerkt, daß die Beobachtungen bei höheren Spannungen weniger gut auszuführen waren. Eine gewisse Leitfähigkeit des Kondensators C_2 machte sich immer stärker bemerkbar, so daß der Faden des Elektrometers beim Öffnen von S_1 durch das Gesichtsfeld wanderte. Aus diesem Grunde ließ man auch S_1 nur wenige Sekunden geöffnet und beobachtete möglichst rasch nach dem Öffnen des Kontaktes.

Außer den regelmäßigen Fadenvibrationen infolge der Beimischung von Wechselspannung zeigten sich, namentlich bei höheren Potentialen, momentane Zuckungen des Fadens. Diese plötzlichen Spannungsschwankungen dürften auf kleine Unregelmäßigkeiten in der Ventilwirkung der Zellen zurückzuführen sein. Sie blieben aus, solange die Zellen nicht auf zu hohe Ventilwirkung beansprucht wurden, nämlich bis etwa 3000 Volt. Sodann traten vereinzelt kleine Zuckungen ein, welche schließlich immer häufiger und stärker wurden. Das Braunsche Elektrometer zeigte jedoch selbst bei 5000 Volt noch keine Schwankungen. Bei 6000 Volt stellten sich schließlich auch am Braunschen Elektrometer kleine Zeigerschwingungen ein, die bei 8000 Volt bereits

mehrere Skalenteile betrugen. Zugleich setzten dann auch schwache Funkenentladungen an den Papierkondensatoren ein, so daß eine weitere Steigerung der Spannung nicht ratsam schien. Man hatte hier also die obere Grenze erreicht, obschon die Kondensatorbatterien eigentlich auf 16000 Volt hätten sicher sein sollen. Allein die bei größerer Spannung verringerte Isolierfähigkeit der Kondensatoren bewirkte eine ungleichmäßige Verteilung des Spannungsabfalles auf die einzelnen hintereinandergeschalteten Kondensatoren, sodaß schon bei 8000 Volt vereinzelte Funkenströme beobachtet wurden. Als dauernde zulässige Belastung ergab sich daher 6000 Volt.

Durch ein den Ventilzellen vorgeschaltetes Wechselstrom-Milliamperemeter wurde der Stromverbrauch der Anordnung ermittelt. Er betrug bei 6000 Volt 5 Milliampere. Davon entfiel ein Teil auf den Ladungsstrom der Kondensatoren infolge der Beimischung von etwa 6 Volt Wechselstrom. Dieser berechnet sich zu $6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot {}^1/_4 \cdot 10^{-6} = 0{,}0005$ Ampere. Der größere Teil der Energie wurde also durch Verluste in den Ventilzellen verbraucht. Der immerhin geringe Energieverbrauch ging bei kleinen Spannungen noch bedeutend (stärker als linear) zurück.

Es war nun noch von Interesse, die Hochspannungsbatterie auch bei Stromentnahme zu prüfen. Zu diesem Zweck wurde sie über einen Widerstand von 1 Million Ohm geschlossen. Um dieselben Spannungen wie früher zu bekommen, mußte der Wechselstrom verstärkt werden (Regulierung von W in Fig. 3). Es zeigte sich, daß das Fadenbild im Vibrationselektrometer von dem gewöhnlich beobachteten etwas abwich. Quantitative Schlüsse auf die beigemischte Wechselspannung waren daher nicht zu gewinnen. Doch ließ sich feststellen, daß diese Beimischung verhältnismäßig nur wenig zugenommen hatte; bei 3000 Volt, also einer Stromentnahme von 3 Milliampere, schätzungsweise auf 3 bis 4 Volt. Jedoch zeigte sich die Gleichspannung dadurch etwas beeinflußt, daß kleine, durch sprunghafte Bewegung des Fadens charakterisierte, Potentialschwankungen auftraten. Der Grund dürfte auch hier die durch Stromentnahme vermehrte Belastung der Ventilzellen sein.

Schluß.

Vergleicht man die neue Hochspannungsbatterie mit den gewöhnlichen Akkumulatorensystemen, so ergeben sich folgende Vorteile:

1. Ein außerordentlich niedriger Anschaffungspreis und so gut wie keine Unterhaltungskosten.
2. Keine Ladung und Wartung und damit stete Gebrauchsfertigkeit.
3. Bequeme Einstellbarkeit auf alle gewünschten Spannungen.
4. Unempfindlichkeit gegen Kurzschluß.
5. Gefahrlosigkeit im unbenützten Zustande.
6. Kleine Raumbeanspruchung.

Diesen Vorteilen gegenüber stehen folgende Nachteile:

1. Die Konstanz der Spannung ist etwas beeinträchtigt sowohl durch die Spannungsschwankungen des Netzes als durch die Beimischung von etwa 1 Promille Wechselspannung und ev. von kleinen Spannungsschwankungen bei vermehrter Beanspruchung der Ventilzellen.
2. Bis zur konstanten Einstellung der Spannung muß einige Minuten, bei langem unbenütztem Stehen des Apparates etwas länger gewartet werden.
3. Die Hochspannungsbatterie kann nicht unterteilt werden.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, Juni 1916.

(Eingegangen 30. Juni 1916.)

Über den elektrischen Widerstand des Wismuts.

Von A. Werner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-technischen Reichsanstalt.)

Seit einer Reihe von Jahren[1]) sind in der Reichsanstalt umfangreiche Versuche im Gange mit dem doppelten Ziel, einerseits bestimmte Metalle möglichst rein darzustellen und andererseits die analytischen Untersuchungsmethoden so zu verfeinern, daß sie höchsten Ansprüchen der Kontrolle genügen. In Verfolg dieser Untersuchungen wurde beim Wismut als Gradmesser für die Reinheit nach dem Vorgang von Righi[2]), van Aubel[3]) und Lenard[4]) auch sein elektrisches Leitvermögen herangezogen. Die Verwendung dieser elektrischen Methode zur Prüfung auf Reinheit des Wismuts ist aber an gewisse Voraussetzungen gebunden und kann unter Umständen zu falschen Ergebnissen führen. Schon in den alten Untersuchungen von Matthiessen und v. Bose[5]) wird auf den Einfluß hingewiesen, den die thermische Behandlung auf das Leitvermögen des Wismuts besitzt. Längeres Erhitzen auf 100° vermehrt die Leitfähig-

1) Berichte über die Tätigkeit der Phys.-techn. Reichsanstalt 1914 u. 1915.
2) Righi, Nuov. Cim. 31, 1885.
3) Van Aubel, Phil. Mag. (5) 28, 1889.
4) Lenard, Wied. Ann. 39, 1890.
5) Matthiessen u. v. Bose, Pogg. Ann. 115, 1862.



keit von gepreßten Wismutdrähten um Beträge, die 20 Proz. und mehr erreichen können.

Neuerdings ist nun von Cohen und Moesveld[1]) festgestellt worden, daß das Wismut zwei allotrope Modifikationen zu bilden imstande ist, die enantiotrop sind. Der Umwandlungspunkt liegt unter Atmosphärendruck bei 75°. Die unterhalb dieser Temperatur stabile Form (α Wismut) wandelt sich oberhalb derselben unter starker Volumenzunahme in die oberhalb 75° stabile (β-Wismut) um. Das β-Wismut, welches leicht in metastabilem Zustand unterhalb der Umwandlungstemperatur bestehen bleibt, hat eine merklich größere Leitfähigkeit als die α-Modifikation. Nach Kenntnis dieser Untersuchungsergebnisse erklären sich die von Matthiessen und v. Bose beobachteten Erscheinungen zwanglos dadurch, daß das auf 100° erhitzte Wismut ganz oder teilweise in die β-Modifikation übergegangen ist und so nach Abkühlung in metastabilem Zustand vergrößerte Leitfähigkeit ergeben mußte. Auch die irrtümlichen Angaben von Righi und van Aubel, daß vollkommen reines Wismut auch beim langsamen Abkühlen oder Abschrecken bei 0° immer denselben spezifischen Widerstand aufweist, finden ihre Erklärung in dem von Cohen und Moesveld erbrachten Nachweis, daß bei den hier in Frage stehenden Versuchen stets die β-Modifikation vorgelegen hat. Van Aubel benutzte zwar elektrolytisch bei Zimmertemperatur hergestelltes Wismut, aber das Material wurde unter Zyankalium geschmolzen und abgekühlt, wodurch die Bildung von β-Wismut herbeigeführt wurde.

Ohne Kenntnis der Vorgeschichte des Metalls kann darnach den an undefinierten Gemischen von α- und β-Wismut ausgeführten Widerstandsmessungen zur Bestimmung des Reinheitsgrades nur bedingter Wert beigemessen werden. — Da nun das Pressen der Wismutdrähte weit oberhalb der Umwandlungstemperatur vor sich geht und zur Zeit keine Daten darüber vorliegen, in welcher Weise und in welchem Mengenverhältnis bei der Abkühlung die Bildung der beiden Modifikationen des Wismuts erfolgt, so wurde bei den in folgendem zu beschreibenden Versuchen, um relativ vergleichbare Werte zu erhalten, vor allem für möglichste Gleichartigkeit in der Herstellung der Drähte aus allen Wismutproben Sorge getragen unter besonderer Berücksichtigung der Dauer der Erwärmungen. Bei Einhaltung dieser Vorsichtsmaßregeln war zu erwarten, daß der Einfluß von Verunreinigungen auf das Leitvermögen reiner zum Ausdruck gelangte.

In nachstehender Tabelle I sind die untersuchten Proben des angeblich reinen Wismutmetalls aus verschiedenen Bezugsquellen und die Ergebnisse der chemischen Analyse[2]) zusammengestellt.

Alle Handelsproben enthalten leicht bestimmbare Mengen metallischer Verunreinigungen, unter welchen gewöhnlich Silber, Blei und Kupfer,

Tabelle I.
Verunreinigungen in Prozenten.

Herkunft	von Schuchardt			von Hartmann & Braun			von Kahlbaum		P.-T. Reichsanstalt		
Bezeichnung	1 Bismutum purissimum	2 Bism. puriss. e. Bism. subnitr.	3 Bism. puriss. galvan. reduct.	4 Wismut elektrolytisch gereinigt nach Lenard in Stücken I	5 als Draht	6 in Stücken II	7 Wismut 1913	8 Wismut „Kahlbaum" 1914	9 Wismut aus reinem kristall. Nitrat 1914	10 Wismut aus Probe 7 aus dem Schmelzfluß krist. 1915	11 Wismut aus Probe 8 aus dem Schmelzfluß krist.
Reinigungsstufe[3])	II	II	III	II	II	IV	III	IV	über IV		
Platin				0,015	0,021	0,0032			—	—	—
Silber	0,012	0,0025		0,20	0,254	0,0065	0,026	Spur			
Kupfer	0,02	0.0306	0,0005	0,002	0,0013		0.0024	0,001			
Blei	0,006	Spur	0,01	0,01	Spur		0,035	Spur			
Eisen	Spur	Spur	Spur		Spur	Spur	Spur	Spur			
Zink	0,012		0,01								
Nickel	0,003	0,0094									
Zinn	0,13	0,0567		0,016	0,02						
Antimon	Spur	Spur									
Arsen											
Kohlenstoff	Spur		Spur								
Kieselsäure			0,005								
Summe abg.	0,2	0,1	0,03	0,25	0,3	0,01	0,1	0,001	—	—	—

1) E. Cohen u. A. L. Th. Moesveld, Zeitschr. für physikal. Chemie 85. 1913.
2) Chem. Laboratorium der P.T.R.
3) Siehe hierüber Tätigkeitsbericht der P.T.R. 1915, S. 33.

bisweilen auch Zinn, Nickel, Zink und Platin vertreten sind. Das elektrolytisch hergestellte Wismut enthält im wesentlichen Platin und Silber (4, 5 und 6), Probe 3 neben den üblichen Spuren von Blei und Kupfer auch noch Zink.

Mit Ausnahme von Probe 3, welche in Form eines violett angelaufenen Metallpulvers vorlag, bestanden sie aus kompakten Massen. Das pulverförmige Material mußte für die Herstellung von Draht erst geschmolzen werden, so daß eine reinigende Wirkung durch Oxydabscheidung nicht ganz auszuschließen ist. In dem in der Reichsanstalt aus reinem kristallisierten Nitrat hergestellten Wismut (Schmelzpunkt 271,0° C) ließen sich chemisch keine Verunreinigungen mehr nachweisen. Dabei erwies es sich als empfehlenswert, zur Vollendung der Reinigung des Metalls die Kristallisation aus dem Schmelzfluß unter einer geschmolzenen Paraffinschicht vorzunehmen. Die Frage, ob das Wismut wirksamer auf chemischem oder elektrolytischem Wege zu reinigen ist, muß statistisch zugunsten des chemischen Weges entschieden werden. Leicht erkennbare Gehalte an Platin, Silber, Zinn und Zink (s. Probe 3, 4 und 5) können bei der Reinigung auf chemischem Wege leicht vermieden werden (s. Probe 8). Bemerkenswert ist der bei einigen Proben von nominell reinem Material festgestellte hohe Zinngehalt.

Die durch chemische Analyse charakterisierten Handelsproben wurden nun nebst Proben des in der Reichsanstalt gereinigten Wismuts auf ihre elektrische Leitfähigkeit untersucht. Man ging dabei von an der Luft gegossenen Wismutstücken aus; Spuren von Sauerstoff sind daher als Verunreinigungen der Wismutdrähte nicht ausgeschlossen. Zur Herstellung der erforderlichen Drähte, teilweise bei Luftabschluß unter Paraffin, wurde eine kleine, elektrisch geheizte stählerne Strangpresse benutzt unter Zuhilfenahme einer hydraulischen Presse in ähnlicher Weise, wie von Lenard[1]) angegeben. Die Temperatur, bei welcher gepreßt wurde, konnte durch Thermoelemente, die in geeignete Bohrungen des Stahlblocks in der Nähe der zylindrischen Preßöffnung eingeführt wurden, zuverlässig ermittelt werden; gewählt wurden als Preßtemperaturen die Temperaturen 155°, 195° und 230° C. Der mittlere Durchmesser der Drähte, der durch Wägung und durch direkte Ausmessung mittels einer Mikrometerschraube von Brown und Sharpe bestimmt wurde, betrug durchweg ungefähr 1 mm, die nutzbare Länge etwa 17 cm. Die Messung des elektrischen Widerstands der Wismutdrähte selbst erfolgte nach der Kompensationsmethode in einem Petroleumbade bei zwei Temperaturen in der Nähe der Zimmertemperatur[1]). Das Potential wurde an zwei Schneiden (Abstand etwa 17 cm) abgenommen, die den Draht mit geringem Druck berührten; die Stromstärke, mit welcher der Draht belastet wurde, betrug ungefähr 0,1 Amp.

Tabelle II.

Probe Nr.	Herkunft	Prozent d. Verunreinigung	Spez. Widerst. d. Drähte bei 22° C; Preßtemperatur: 155°	195°	230°
1	Schuchardt	0,2	1,45	1,30	—
2		0,1	3,30	3,09	3,32
3		0,03	1.36	1,33	1,40
4	Hartmann & Braun	0,25	—	—	—
5		0.3	—	1,29	—
6		0,01	1,23	1,23.	—
7	Kahlbaum	0,1	1,23	1,22	1,24
8		0,001	1,23	1,21	1,23
9	Phys.-Techn. Reichsanst.	—	1,21	1,19	1,20
10		—	—	1,20	—
11		—	1,22	1,20	1,20

Tabelle II enthält die für den spezifischen elektrischen Widerstand der Wismutdrähte bei 22° C gefundenen Werte mit einer Unsicherheit von etwa $^1/_2$ Proz. Sie lassen deutlich den schon von Lenard beobachteten Einfluß der Preßtemperatur erkennen. Weiter fällt auf, daß bei der mittleren Preßtemperatur von 195° durchweg die kleinsten Werte für jede Probe erhalten wurden. Vergleicht man die Werte für verschiedene Proben bei einer der drei Preßtemperaturen, so nimmt, wenn man von den Proben 1 bis 3 gleicher Herkunft, die ein ganz abweichendes Verhalten aufweisen, absieht, in der Tat der spezifische Widerstand, von einer Ausnahme abgesehen, mit zunehmender Reinheit des Wismuts ab. Die genannten drei Proben dagegen zeigen wesentlich höhere Werte, als nach dem Ergebnis der Analyse zu erwarten ist. Bemerkenswert ist der besonders große Widerstand von Probe 2, welche aus gefälltem basischen Wismutnitrat erhalten war. Dieses Präparat hat im Gegensatz zu allen übrigen untersuchten Wismutproben einen negativen Temperaturkoeffizienten (Tab. III) und zeichnet sich, wie auch Probe 1, durch Verunreinigungen aus der Zinngruppe aus. Nach den alten Versuchen von Matthiessen ist anzunehmen, daß die chemische Natur einer Verunreinigung von großem Einfluß auf die von ihr hervorgebrachte Widerstandsvermehrung ist, und Righi[2]) hat bereits darauf hingewiesen, daß besonders ein Zinngehalt den elektrischen Widerstand des Wismuts stark erhöht.

1) Wied. Ann. 39, 1890.

1) Zum größten Teil vom Schwachstrom-Laboratorium der P.T.R. ausgeführt.

2) Righi, Fortschr. d. Physik 40 (II) 733, 1884.

Tabelle III.

Probe Nr.	Herkunft	Temperaturkoeffizient Preßtemperatur: 155°	195°	230°
1	Schuchardt	+ 0,0029	+ 0,0036	—
2	Schuchardt	— 0,0013	— 0,0010	— 0,0015
3	Schuchardt	+ 0,0031	+ 0,0029	+ 0,0027
4	Hartmann und Braun	—	—	—
5	Hartmann und Braun	—	—	—
6	Hartmann und Braun	+ 0,0039	+ 0,0040	—
7	Kahlbaum	+ 0,0038	+ 0,0038	+ 0,0038
8	Kahlbaum	+ 0,0038	+ 0,0039	+ 0,0039
9	Phys. Techn. Reichsanst.	+ 0,0039	+ 0,0039	—
10	Phys. Techn. Reichsanst.	—	+ 0,0040	—
11	Phys. Techn. Reichsanst.	+ 0,0040	+ 0,0040	+ 0,0040

Im übrigen zeigen die für das Temperaturintervall 18—25° C berechneten und in Tab. III zusammengestellten Temperaturkoeffizienten des Widerstands mit wachsender Reinheit des Wismuts ansteigende Tendenz und keine wesentliche Abhängigkeit von der Preßtemperatur. Den hohen Widerstandswerten der Proben 1—3 kommen die kleineren Temperaturkoeffizienten zu; bei dem überraschend großen Werte der Probe 3 wird der Koeffizient sogar negativ.

Die in der Reichsanstalt gewonnenen Wismutproben 9—11, welche auf dem Wege der Kristallisation gereinigt waren, haben den geringsten spezifischen Widerstand (Tab. II), und zwar war Probe 9 (Kristallisation als Nitrat aus wässeriger Lösung) in naher Übereinstimmung mit den Proben 10 und 11 (Kristallisation des Metalls aus dem Schmelzfluß). Diese Werte sind um mehrere Prozent niedriger als der Wert 1,235 der Probe 6, welche bei Hartmann und Braun sorgfältig elektrolytisch gereinigt war. Die Vermutung, daß hier noch Verunreinigungen nachweisbar seien, wurde durch die Analyse bestätigt (Tab. I).

Damit ist aufs neue gezeigt, daß die elektrolytische Reinigung des Wismuts schwieriger durchführbar ist als der chemische Weg, welcher zu höheren Reinigungsstufen führt. Andrerseits muß aber bemerkt werden, daß der in der Reichsanstalt für das Wismut in Drahtform festgestellte Wert 1,20 nicht unerheblich größer ist als die Werte 1,09 bis 1,16 (je nach der Preßtemperatur), welche Lenard 1890 angibt.

(Eingegangen 11. Juli 1916.)

Eine neue Anordnung zur Darstellung stehender Wechselstromkurven mit der Braunschen Röhre.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von C. H. Graf v. Bressler.

Im Folgenden soll eine Anordnung beschrieben werden, die ich ausgearbeitet habe, um mit Hilfe der Braunschen Röhre Wechselstromvorgänge durch feststehende Wellenkurven auf dem Schirm der Röhre beobachten und messen zu können.

Zur Ablenkung des Fleckes nach der neuen Methode sind zwei Schaltungen möglich. Ursprünglich wurde folgende benutzt (Fig. 1).

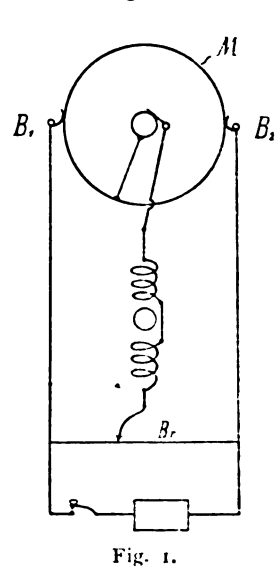


Fig. 1.

Auf der Achse eines sechspoligen Synchronmotors (alter Schleifringdrehstrommotor $^1/_{16}$ PS.) der als Einphasenmotor umgeschaltet wurde[1]), war eine Holzscheibe von ca. 25 cm Durchmesser aufgesetzt und auf deren Umfang ein Manganindraht M von 1 mm Durchmesser ausgespannt. Der Draht wurde mit dem dritten, frei gewordenen Schleifring des Motors verbunden. Auf dem Draht schleiften an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen Bürsten, B_1, B_2, aus übereinandergelegten dünnen Kupferblechen. Diese lagen parallel zu den Enden eines zweiten Brückendrahtes Br. In die Brücke wurden die Ablenkungsspulen der Braunschen Röhre gelegt. Die Ableitungsstelle des Drahtes M wurde in die Mitte zwischen B_1 und B_2 gebracht und die Brücke durch Abgleichung von Br stromlos gemacht. Eine geringe Drehung der Scheibe störte nun das Gleichgewicht der Brückenschaltung und der Fleck wurde je nach dem Dreh-

1) Solche Motoren sind neu oder gebraucht leicht erhältlich (Siemens & Halske). Außerdem sind sie viel billiger und vielseitiger verwendbar als besondere Spezialapparate. (Verwendung als Generator, als Synchronmotor, für Untersuchungen nach der stroboskopischen Methode, zur Schwingungsanalyse mit rotierender Heliumröhre usf.). Man trennt in Stator und Rotor die einzelnen Polwicklungen, die gewöhnlich in Sternschaltung liegen und schaltet sie je nach Bedarf hintereinander oder parallel, wobei darauf zu achten ist, daß stets Nord- und Südpol einander abwechseln, was sich leicht mit einem Kompaß feststellen läßt.

sinn nach der einen oder anderen Richtung proportional dem Drehungswinkel abgelenkt.

Passiert der Anschlußpunkt B_1 oder B_2, tritt eine Umkehr der Ablenkung ein. Während einer Umdrehung muß der Strom der Kurve Fig. 2a entsprechen. In derselben Zeit beschreibt der Wechselstrom, da der Motor sechspolig ist, die Kurve 2b. Nach einer halben

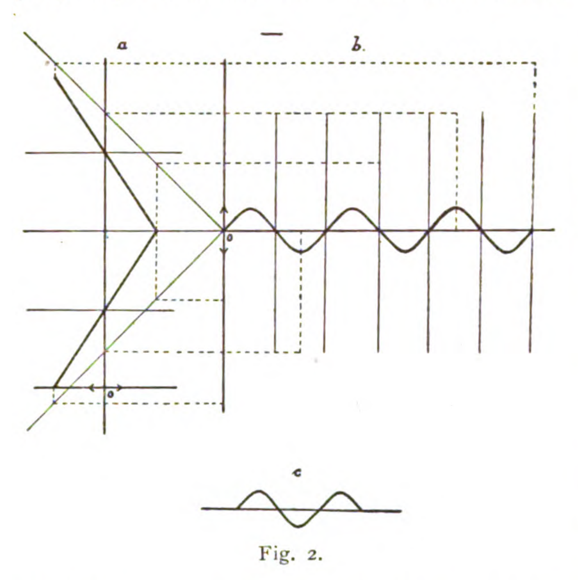


Fig. 2.

Umdrehung kehrt der ablenkende Strom seine Richtung um, während der Wechselstrom im selben Sinne weiterläuft. Die resultierende Kurve läuft also in sich selbst zurück und zeigt ein und einhalb Perioden des Wechselstroms. (Figur 2c.) Der praktische Versuch zeigte die erwartete Kurve, doch war sie unkonstant und höchstens für Demonstration, aber nicht für Messungen brauchbar. Die Hauptschwierigkeiten waren folgende.

1. Die unsicheren Brückenkontakte B_1 und B_2 gaben zu Stromschwankungen Anlaß.

2. Das zur Ablenkung nutzbare Spannungsgefälle längs des Brückendrahtes M, dem auch stets noch $^1/_2$ seiner Gesamtlänge parallel geschaltet war, war wegen seiner Kürze sehr gering. (Der Versuch, den geraden Draht durch eine spiralige Wicklung, ähnlich dem Ringanker, zu ersetzen, führte infolge der größeren konstruktiven Schwierigkeiten und noch schlechteren Kontaktbildung nicht zum Ziele.) Um eine genügende Ablenkung zu erhalten, mußten sehr starke Ströme (gegen 20 Amp.) angewandt werden, was den Fehler 1 vergrößerte und die Drähte übermäßig erwärmte. Um dem abzuhelfen wurde zu folgender Schaltung übergegangen.

Der unterbrochene Schleifdraht M (Fig. 3) wurde als ein Brückenzweig benutzt, als zuge-

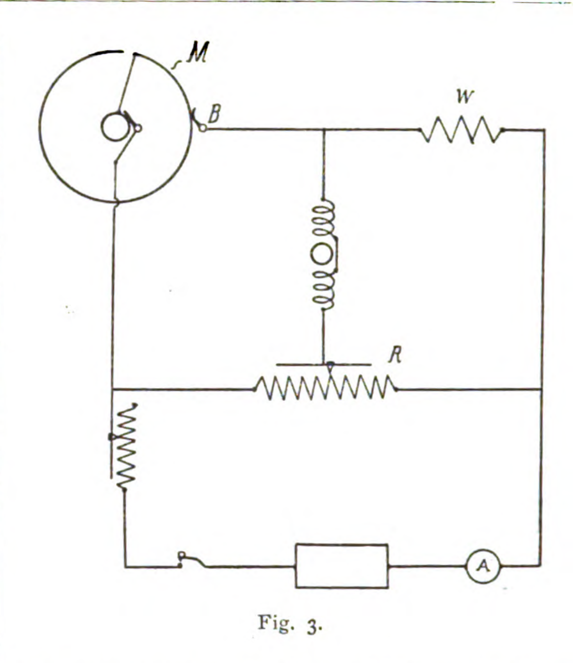


Fig. 3.

höriger Zweig erst ein fester Widerstand W von 0,1 Ohm, als Ausgleichwiderstand ein Schieberheostat R. Während des Betriebes war es sehr störend, daß infolge Erwärmung von M sich das Brückengleichgewicht ändert und ein Wandern des ganzen Kurvenbildes nach einer Richtung eintritt. Dies konnte völlig beseitigt werden durch Ersetzen von W durch einen Manganindraht von denselben Abmessungen wie M.

In die Ablenkungsspulen von nur wenigen Windungen wurden dünne Eisendrahtbündel gesteckt[1]). Der Gesamtwiderstand von R betrug 6 Ohm. Bei dieser Schaltung wurden alle drei Perioden während einer Umdrehung nach derselben Richtung abgelenkt und konnten bei einer Stromstärke in A von etwa 17 Amp. über den ganzen Schirm der Röhre auseinandergezogen werden. Außerdem gestattet der Widerstand R jede seitliche Verschiebung des Kurvenbildes (z. B. Einstellung auf ein Achsenkreuz). Zur Vermeidung von Stromstößen muß die Schleifbürste so gebaut sein, daß sie beide



Fig. 4.

1) (Vorsicht bei sehr schnellen Stromänderungen wegen Kurvenverzerrung durch Hysteresis.)



Enden des Schleifdrahtes, die möglichst nahe, aber isoliert voneinander befestigt sein müssen, im Vorbeigleiten gleichzeitig berührt. (Fig. 4). Selbstverständlich kann man die Scheibe auch, anstatt auf einen Synchronmotor auf der Achse des Generators selbst anbringen, was man vorteilhaft bei kleineren Maschinen, die schwache Ströme geben, wie z. B. Wechselstromsirenen, tun wird.

Eine Auflösung des Ablenkungsstroms allein mit Spiegel zeigte das Bild Fig. 5. Zum

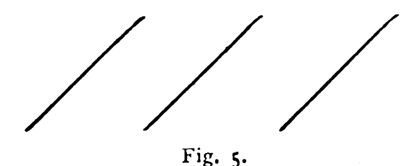


Fig. 5.

Photographieren der Kurven reichte die vorhandene Influenzmaschine nicht aus. Sie wurden auf folgende Weise fixiert (Fig. 6). Hinter

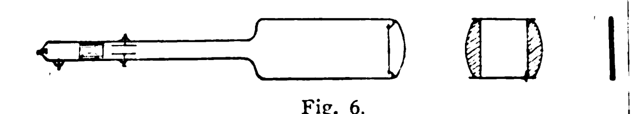


Fig. 6.

der Röhre wurde ein kurzbrennweitiges optisches System von großer Lichtstärke aufgestellt, das die Kurve auf eine Milchglasplatte in natürlicher Größe projizierte. Hier wurde sie mit Bleistift nachgezeichnet und auf Koordinatenpapier durchgepaust, von dem dann photographische Abzüge gemacht wurden. Um die Kurven auf dem Schirm selbst zu messen, wurde nach Fig. 7 verfahren. Vor die Milchglasscheibe wurde ein schwarzes Kartonblatt gesetzt, in welches mit einem scharfen Messer ein Achsenkreuz mit Einheitsstrichen auf den Achsen eingeschnitten wurde. Hinter die Mattscheibe wurde ein kleines Glühlämpchen gestellt und das Achsenkreuz auf den Schirm in der Röhre projiziert. Messungen von Phasenverschiebungen und Oberschwingungen lassen sich auf beide Arten mit großer Genauigkeit ausführen. So kann man z. B. zur Messung von Phasenverschiebungen erst die eine, dann die andere Kurve auf der Mattscheibe einzeichnen und die Abstände der Nullpunkte messen. Noch einfacher geschieht dies am hineinprojizierten Achsenkreuz, wo man nacheinander die Abstände der Nullpunkte vom Koordinatenanfang direkt ablesen kann. Für Demonstrationen ist es noch übersichtlicher, wenn man eine ähnliche Kurve in das Kartonblatt einschneidet, die durch den Koordinatenursprung geht und die Nullpunkte der einen Stromkurve mit denen der feststehenden zur Deckung bringt. Man sieht dann bei Einschalten des phasenverschobenen Stromes beide Kurven in ihrer zeitlichen Folge auf dem Schirm. Ebenfalls für Demonstration besonders geeignet ist es, wenn man die Wechselstromspulen der Röhre in den Stromkreis des Synchronmotors einschaltet. Da ja dieser je nach der Erregung als Kapazität oder Selbstinduktion wirkt, so sieht man auf dem Schirm wie die veränderliche Kurve je nach der Erregung mit der feststehenden zur Deckung kommt, ihr vor- oder nacheilt. Vergleiche mit den Werten, für cos φ erhalten aus den Kurvenverschiebungen mit den aus dem Voltmeter, Amperemeter und Wattmeter ermittelten Werten, zeigten gute Übereinstimmung. Bei genauer präzisionsmechanischer Ausführung der Apparatur muß sich noch eine weit größere Genauigkeit und Beständigkeit der Kurven erreichen lassen, als es bei dem vom Verf. in verhältnismäßig kurzer Zeit, während eines Urlaubs, für eine besondere Untersuchung zusammengebauten Apparat möglich war. Da ja die Braunsche Röhre keine mechanische Trägheit besitzt und infolgedessen selbst zur Analyse von Hochfrequenz brauchbar ist, so ist für die auflösbare Frequenz nach der neuen Methode eine Grenze nur gegeben durch die Frequenz, bei welcher infolge der hohen Drehzahl des Motors oder Generators grade noch ein sicherer Kontakt zwischen Draht und Schleifbürste möglich ist. Bei sorgfältiger Konstruktion wird sich diese Grenze jedenfalls weiter hinausschieben lassen als es beim Oszillographen infolge der mechanischen Trägheit seines Systems möglich ist. Weitergehende Versuche mit der neuen Anordnung sowie Veröffentlichung von Kurvenbildern waren infolge der Kürze der Zeit nicht möglich.

Zusammenfassung.

Es wird eine neue Schaltung angegeben, durch welche man die genaue Kurve des Wechselstroms dauernd stehend auf dem Schirm der Braunschen Röhre erhalten kann.

In einer abgeglichenen Brückenschaltung besteht ein Zweig aus einem, auf dem Umfang einer synchron rotierenden Scheibe befestigten

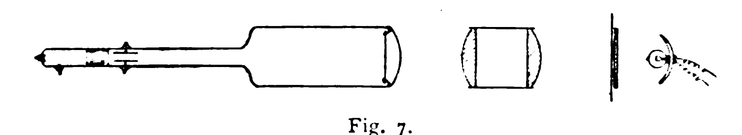


Fig. 7.

Draht, an dem eine Bürste schleift. In der Brücke, in der die Ablenkungsspulen liegen, werden dadurch periodische Stromänderungen hervorgerufen, die der Zeit proportional sind.

Es wird gezeigt, wie sich die Kurven durch ein auf den Schirm projiziertes Achsenkreuz bequem messen lassen und wie sich die Anordnung zur Demonstration von Wechselströmen verwenden läßt.

(Eingegangen 1. Mai 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Forschungen zur Farbenlehre.

Von W. Ostwald.

(Fortsetzung und Schluß.)

Die Einteilung des Farbenkreises.

Für die Ordnung der Farbtöne im Farbenkreise besaß die bisherige Farbenlehre die beiden Prinzipien der Stetigkeit und der Gegenfarben. Das Prinzip der Stetigkeit besagt, daß sämtliche Farben ihrem Farbton nach in eine ununterbrochene Reihe gebracht werden können, wobei sich herausstellt, daß diese Reihe keine einseitig verlaufende, sondern eine in sich zurücklaufende oder geschlossene ist. Dieses trifft bekanntlich für die Farben des Spektrums und die zugehörigen Wellenlängen keineswegs zu und daraus ergibt sich eine eigentümliche Anomalie, von der wir einen Teil bereits in der spektralen Lücke des Farbenkreises kennen gelernt haben. Vermöge des Stetigkeitsgesetzes ist unter allen Umständen eine eindeutige Ordnung aller vorkommenden Farbtöne der Reihe nach möglich. Da die Geschlossenheit der Reihe den Kreis als Veranschaulichung der Farbtongruppe nahelegt, so kann man sagen, daß das Stetigkeitsprinzip die Folge der Farben auf diesem Kreise sicherstellt, dagegen noch nicht den Ort jeder einzelnen auf dem Kreise. Die Farben gleichen vermöge dieses Prinzips Perlen auf einer geschlossenen Schnur, die man in beliebiger Weise hin- und herschieben, enger oder weiter anordnen kann.

Das zweite bekannte Prinzip ist das der Gegenfarben. Für jeden Farbton im Farbenkreise findet sich ein anderer und nur ein einziger, welcher die Eigenschaft hat, mit diesem additiv oder optisch vermischt ein neutrales Grau zu erzeugen. Hierzu ist ein bestimmtes quantitatives Verhältnis der beiden Farben erforderlich, welches von ihrem Reinheitsgrade derart abhängt, daß die relative Menge der einzelnen Farbe, die zur Neutralisation der Gegenfarbe erforderlich ist, im umgekehrten Verhältnis zu ihrer Reinheit steht. Durch das Prinzip der Gegenfarben werden im ganzen Farbenkreise die Farben paarweise einander zugeordnet. Dieses hat zur Folge, daß, wenn die eine Hälfte des Farbenkreises auf irgendeine Weise eine Ordnung erfährt, hierdurch die andere Hälfte alsbald gleichfalls geordnet ist, weil für jede Farbe der ersten Hälfte des Kreises die zugehörige Gegenfarbe an dem Ende des entsprechenden Durchmessers anzubringen ist.

Die Aufgabe der eindeutigen Ordnung ist offenbar hierdurch noch nicht gelöst, da auf dem halben Farbenkreise immer noch dieselbe Freiheit besteht, wie sie ohne das Prinzip der Gegenfarben auf dem ganzen Farbenkreise bestanden hat. Bei der Suche nach einem allgemeinen Prinzip, welches die noch vorhandene Freiheit in eine Gesetzmäßigkeit umzuwandeln gestattet, ist es offenbar erforderlich, von irgendeinem neuen und unabhängigen Phänomen Gebrauch zu machen, ebenso wie der erste Schritt zur Ordnung durch die Sondererscheinung der Gegenfarben ermöglicht wurde. Das Erscheinungsgebiet, welches hierfür in Frage kommt, ist das der Farbenmischung, für welche bereits Newton in seiner Schwerpunktsregel ein quantitatives Konstruktionsverfahren gegeben hat, für das er freilich nur annähernde Gültigkeit in Anspruch nahm. Schält man das Grundsätzliche aus dieser Konstruktion heraus und erweitert den dabei anzutreffenden Gedanken in angemessener Weise auf den ganzen Kreis, so erlangt man ein Mittel zur eindeutigen Ordnung aller Farben, welches ich das Prinzip der innern Symmetrie nenne. Es besagt, daß, wenn zwei gesättigte Farben des Farbenkreises zu gleichen Teilen miteinander gemischt werden, die entstehende Mischfarbe genau in die Mitte zwischen die beiden Komponenten zu setzen ist. Hierbei kommt es nicht in Betracht, daß die Mischfarben jedesmal weniger rein ausfallen als die Bestandteile es sind, da es sich ja nur um die Ordnung der Farbtöne handelt, die von der Reinheit unabhängig sind. Denn zu jedem Farbton gehört ja eine unendliche Anzahl von Abkömmlingen von jedem beliebigen Reinheitsgrade und jedem beliebigen Verhältnis zwischen dem vorhandenen Schwarz und Weiß. Wohl aber ist von entscheidender Wichtigkeit, daß die beiden zu mischenden Farben von gleicher

Reinheit sind, da im anderen Falle die entstehende Mischfarbe nach der Seite von dem Mittelwert abweichen wird, wo die Komponente die größere Reinheit besitzt. Anderenfalls sind beide Anteile im umgekehrten Verhältnis ihrer Reinheit zu mischen. Die Durchführung dieses Prinzips der inneren Symmetrie verlangt also als notwendige Voraussetzung eine absolute Bestimmung der Reinheit der zusammenzusetzenden Farben und die Wichtigkeit der Reinheitsmessung macht sich auch an diesem entscheidenden Punkte von neuem geltend.

Um das Prinzip zur Herstellung eines reproduzierbaren Farbenkreises zu benutzen, kann man sehr verschiedene Wege einschlagen. Einer der übersichtlichsten, der auch praktisch am besten benutzt wird, ist folgender. Man stellt zunächst aus einigen möglichst reinfarbigen Pigmenten, deren Anzahl 5 bis 6 nicht zu überschreiten braucht, durch die Vermischung gemessener Mengen und Anfertigung von Aufstrichen einen Farbenkreis in willkürlicher Abstufung her, wobei man so viele Stufen macht, daß die einzelnen Stufen nirgend um viel mehr als die Unterschiedsschwelle voneinander entfernt sind. Dies ist immer möglich und leicht ausführbar, indem man zwischen die Gemische, deren Entfernung zu groß erscheint, ein Gemisch einschaltet, dessen Mischungsverhältnis zwischen denen der beiden zu überbrückenden Stufen gelegen ist. Man wird 100—200 Stufen ausreichend finden, um diese Voraussetzung zu erfüllen.

Dann bestimmt man zunächst in dieser Reihe die Gegenfarben. Für diesen Zweck ist erforderlich, die Farben in beliebigem Verhältnis additiv zu mischen. Gewöhnlich dient der Farbenkreisel zur Lösung derartiger Aufgaben. Er hat aber den großen Nachteil, daß er stillgesetzt werden muß, wenn irgendeine Änderung in dem Verhältnis oder in der Natur der Farben vorzunehmen ist, wodurch die Arbeit langwierig wird und ein wichtiges Mittel der Einstellungsgenauigkeit, nämlich die stetige Veränderlichkeit der maßgebenden Variabeln verloren geht. Ich habe deshalb nach dem bereits mehrfach benutzten Prinzip der Kombination eines Wollastonprismas mit einem Nikolschen Prisma einen Polarisationsfarbenmischer konstruiert, welcher die Stetigkeit der Mischung sichert. Das Wollastonprisma entwirft bekanntlich von dem anvisierten Objekt zwei senkrecht polarisierte Bilder, die um einen bestimmten Winkel von einigen Graden voneinander entfernt sind. Betrachtet man daher unter einem solchen Prisma zwei nebeneinander liegende Kärtchen farbiger Aufstriche, die so breit sind, daß die Bildverschiebung gerade ihre eigene Breite beträgt, so fallen von den beiden Bildern jeder einzelnen Karte die beiden nach innen gewendeten übereinander und es erscheint dort die additive Mischfarbe, zunächst in dem konstanten Verhältnis von 1 : 1. Um nun dieses Verhältnis beliebig ändern zu können, ist über dem Wollastonprisma ein drehbares Nikolsches Prisma angebracht, welches die Hälfte des durchgehenden Lichtes zerstört und zwar in einem Verhältnis, welches von der Stellung des Nikolschen zum Wollastonprisma abhängt. Rechnet man die Winkel von jener Stellung, wo das eine Bild vollständig ausgelöscht ist, so werden die Lichtmengen der beiden Blätter in einem Verhältnis gemischt, das durch das Quadrat der Tangente des fraglichen Winkels ausgedrückt wird. Man hat es also in der Gewalt, durch Drehung des Nikols jedes beliebige Mischungsverhältnis herzustellen und somit dasjenige aufzusuchen, bei welchem zwei Gegenfarben neutrales Grau ergeben.

Um dieses erreichte Grau mit Sicherheit festzustellen, was wegen der Nachbilder beim Betrachten der farbigen Blätter häufig mit großen Schwierigkeiten verbunden wäre, dient eine Karte mit neutralem Grau, welche man quer zu den beiden erwähnten Blättern legt. Diese Karte hat die doppelte Länge der Verschiebung durch das Wollastonprisma; es bildet sich daher in ihrer Mitte eine Farbe aus, welche gleich der unveränderten Farbe des Blattes selbst ist, weil die beiden Komponenten, die sich dort vereinigen, sich unter allen Umständen zu eins ergänzen. Um ein solches neutrales Grau herzustellen, genügt es beiläufig nicht etwa, ein reinschwarzes Pigment mit einem reinweißen zu mischen, weil sich dann infolge der Blaufärbung trüber Mittel (jener Erscheinung, die Goethe als Urphänomen seiner Farbenlehre betrachtet hat) eine blaue Verfärbung des Gemisches ausbildet, welche die neutrale Beschaffenheit stört. Es ist deshalb nötig, dem Schwarz die rotgelbe Ergänzungsfarbe dieses Blau zuzusetzen, und zwar hat sich das als Goldocker im Handel vorkommende Pigment vom richtigen Ton erwiesen. Je nach dem weißen Farbstoff, den man verwendet, muß der Zusatz des gelben größer oder kleiner sein. Um das richtige Grau zu finden, erzeugt man entweder auf der Drehscheibe aus einer mit schwarzem Seidensammet überzogenen und aus einer mit Bariumsulfat weißgefärbten Scheibe ein neutrales Grau oder man mischt die gleichen Komponenten mit Hilfe des eben beschriebenen Polarisationsfarbenmischers oder „Pomi". Es gelingt dann leicht, durch systematische Versuche das richtige Verhältnis ausfindig zu machen. Das so erzeugte Gemisch dient dann auch insbesondere für die

Herstellung der Grauleiter, deren Verwendung zu Reinheitsmessungen in dem vorigen Abschnitt geschildert worden ist. Ersichtlicherweise ist hierfür ein vollkommen neutrales Grau erforderlich, da sonst seine Helligkeit in den verschiedenen Teilen des Spektrums verschiedene Werte erhalten würde.

Die weitere Arbeit besteht darin, daß man den Reinheitsgrad jedes Aufstriches im ganzen Farbenkreise bestimmt. Die Arbeit ist nicht gering, aber notwendig, da wie bereits erwähnt, von der Reinheit das Resultat der Mischungen abhängt. Hat man die farbschönsten Pigmente benutzt, die zurzeit zur Verfügung stehen, so wird man sich überzeugen, daß man von Gelbgrün durch Gelb, Orange, Rot und Purpur Reinheiten von rund 80 Proz. verhältnismäßig leicht erreichen kann. Von Violett zum Grün wird die Reinheit aber geringer und es stellt sich dort im Gebiete der kalten Farben eine zusammenhängende Gruppe heraus, in der eine Reinheit von 50 Proz. verhältnismäßig schwer zu erreichen ist und eine von 60 Proz. das Äußerste darstellt, was ich unter irgendwelchen Umständen bisher habe erreichen können.

Ist diese Arbeit beendet, so kann man endlich zum Abstecken gleicher Bogen im Farbenkreise schreiten. Zu diesem Zwecke geht man von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte aus, als den ich den hellsten Punkt des Farbenkreises, das reine Zitronengelb an der Grenze zwischen grünlich und rötlich Gelb vorschlage, weil er sich am leichtesten unabhängig bestimmen läßt. Hierzu wählt man in nicht zu großem Abstande einen zweiten Farbton, also etwa ein Dunkelgelb entsprechend dem Dunkelchromgelb. Dann wird unter den noch weiter nach Rot liegenden Aufstrichen der festgestellt, welcher mit dem anfänglichen Zitronengelb vermischt dieses gewählte Dunkelgelb ergibt. Hierbei muß die Mischung in dem umgekehrten Verhältnis der Reinheiten der beiden zu mischenden Farben ausgeführt werden, wozu eben die vorher erwähnten Reinheitsbestimmungen dienen. Das Tangentenquadratgesetz am Pomi gibt seinerseits die Stellung des Nikols an, bei welcher diese Voraussetzung erfüllt ist. Nennt man den Ausgangspunkt a und den zweiten willkürlich gewählten Punkt b, so findet man auf solche Weise einen dritten Punkt c, von dem man gemäß dem Prinzip der innern Symmetrie sagen kann, daß er ebensoweit von b entfernt ist, wie b von a. Jetzt wird nach dem gleichen Verfahren ein vierter Punkt d gleichen Abstandes gesucht, und fährt in solcher Weise fort, bis man zur Gegenfarbe des Ausgangspunktes gelangt. Man kann natürlich nicht erwarten, daß bei der willkürlichen Wahl des Intervalles $a\,b$ genau der Gegenpunkt, den wir mit a' bezeichnen wollen, erreicht wird; vielmehr hat man diese Abtragung des willkürlichen Abstandes so weit fortzusetzen, bis der Punkt a' überschritten ist. Dann kann man aber das letzte Intervall innerhalb dessen a' liegt, mit Hilfe des Pomi so mischen, bis genau die Farbe a' herauskommt und ersieht aus dem Winkel, in welchem Verhältnis die beiden Bestandteile dazu verwendet worden sind. Damit ist der Bruchteil gekennzeichnet, nach welchem dieses letzte Intervall zu teilen ist, um den Punkt a' unterzubringen, woraus sich der Winkelwert des ursprünglichen Intervalls ab ergibt. Hiernach sind die einzelnen untersuchten Punkte zu beziffern. Dabei wird der Anfangspunkt a mit 0 und der Punkt a' mit 50 bezeichnet, entsprechend der Forderung, daß der ganze Farbenkreis dekadisch in hundert Teile zu teilen ist.

Die so gemessenen Punkte dienen nun dazu, um die übrigen vorhandenen Aufstriche in bezug auf ihren Farbton mit den zugehörigen Nummern zu versehen und auf solche Weise alle einzelnen Nummern von 0 bis 50 festzustellen. Es finden hier, kurz gesagt, alle die Methoden Anwendung, welche man bei der Herstellung von Kreisteilungen zur Festlegung der Mutterteilung ausgedacht hat, so daß man außer dem beschriebenen Wege noch eine Anzahl andere finden und gehen kann, die dasselbe ergeben.

Zur endgültigen Festlegung der Bezeichnung aller einzelnen Farbtöne ist außer der willkürlichen Bestimmung des Anfangspunktes noch die des Fortschreitungssinnes erforderlich. Bezüglich des ersten ist bereits erwähnt worden, daß sich als Anfangspunkt das reine Gelb empfiehlt. Es wird durch eine Anzahl von wohlbekannten und leicht ihrem Farbton nach reproduzierbaren Pigmenten gekennzeichnet und ist außerdem psychologisch mit großer Sicherheit dadurch zu finden, daß es an der Trennungsstelle der rötlich und der grünlich gelben Farben steht.

Der Sinn des Fortschreitens, durch welchen zwischen den beiden symmetrischen möglichen Anordnungen des Farbenkreises eine Wahl getroffen wird, führt gemäß meinem Vorschlage von Gelb über Gelbrot nach Rot usw. Es wird dadurch bewirkt, daß in dem zunächst zur Geltung kommenden Teil des Farbenkreises die größte Mannigfaltigkeit der Farbtöne, nämlich Gelb, Orange, Rot, Purpur bis Blau liegt, während auf der anderen Seite nur der Rest der blauen und die grünen Farben liegen. Außerdem geht dieser Fortschritt gleichsinnig mit der Größe der Wellenlängen. Er läuft freilich der gewöhnlichen Darstellung des Spektrums ent-

gegen, nach welchem die größten Wellenlängen am Anfang links und die kleinsten am Ende rechts stehen. Es sei ausdrücklich betont, daß diese Voraussetzungen willkürlich sind. Sie liegen aber in der Natur der Sache, da diese in sich zurücklaufende Mannigfaltigkeit keinen natürlichen, sondern nur einen willkürlichen Anfangspunkt und ebenso keinen natürlichen, sondern einen willkürlichen Fortschreitungssinn hat.

Der so geordnete Farbenkreis hat also im Nullpunkt das hellste Gelb. Im ersten Quadranten bei Nr. 25 liegt alsdann das spektrale Rot, welches mit der Farbe des mittleren Zinnobers übereinkommt. Die beiden anderen Quadranten sind durch die Gegenfarben dieser beiden Punkte, nämlich Ultramarinblau und Blaugrün bestimmt. Dieser Farbenkreis stimmt, was besonders bemerkenswert ist, in diesen Hauptpunkten mit dem auf rein psychologischen Erwägungen beruhenden Farbenkreis von E. Hering überein. Ferner fällt er auch mit einem von O. N. Rood aufgestellten Farbenkreis praktisch zusammen, welcher auf der Beobachtung der Kontrasterscheinungen gemäß dem Prinzip beruht, daß die Farbe, welche mit einer gegebenen die stärksten Verschiebungen infolge des simultanen Kontrastes erzeugt, rechtwinklig zu dieser und der zugehörigen Gegenfarbe angeordnet werden muß. Darin liegt eine Bestätigung, daß einerseits das Prinzip der inneren Symmetrie den naturgemäßen Vorzug, den man ihm infolge seiner grundsätzlichen Einfachheit und Allgemeinheit ohnedies zuzuschreiben bereit sein wird, tatsächlich verdient und zweitens, daß die Reinheitsbestimmungen, auf denen ja die Einteilung beruht, grundsätzlich richtig sein müssen, da sie sonst nicht jene Übereinstimmung hätten ergeben können.

Fragt man sich endlich, ob und wie weit das fragliche Prinzip eine Einteilung durchzuführen gestattet, die von der Farbe der Beleuchtung und der subjektiven Beschaffenheit des Auges unabhängig ist, so muß die Antwort lauten, daß eine solche Unabhängigkeit hier nicht zu erreichen ist. Bereits die Bestimmung der Ergänzungsfarben ist nicht unabhängig von beiden Faktoren. Wie man sich einerseits durch theoretische Überlegungen, andererseits durch den Versuch überzeugen kann, geben z. B. bei Lampenlicht andere Farben neutrales Grau, als bei Tageslicht. Ebenso muß eine subjektive Abhängigkeit der Farbenkreisstellung von der Natur des Auges anerkannt werden. Zwar ist diese Abhängigkeit viel geringer als die Mannigfaltigkeiten der Farbempfindung, welche durch Störungen des Farbensinnes hervorgerufen werden, da bekanntlich die meisten Farbenblinden die Farben nur unvollständig, nicht aber im Sinne des Farbenkreises falsch sehen. Es geht dieses aus dem Umstande hervor, daß sie die Farbengleichungen der Farbentüchtigen anerkennen. Daneben gibt es aber eine kleine Anzahl von Sehstörungen, bei welchen diese Übereinstimmung nicht vorhanden ist und für diese allerdings recht seltenen Personen würde also die Einteilung des Farbenkreises andere Resultate ergeben, als für die Normalsichtigen.

Im übrigen scheint der fragliche Einfluß nicht besonders groß zu sein. Der einzige Fall, den ich habe untersuchen können, der des Lichtwechsels, führt zu Abweichungen von zwei bis drei Einheiten des hundertteiligen Farbenkreises, d. h. um nicht eben viel über die Unterschiedsschwelle hinaus, die etwas unterhalb dieser Einheit liegt. Dies gilt allerdings nur für die gewöhnlichen Farben. Für die besondere Klasse der lückenhaften Farben, deren Charakter später einmal geschildert werden wird, treten erheblichere Abweichungen auf. Dadurch, daß man die Teilung des Farbenkreises den Farben und Wellenlängen des Spektrums anschließt, kann man jedenfalls ein gefundenes Teilungsresultat eindeutig fixieren. Eine entsprechende Kurve wird unten mitgeteilt werden.

Beziehung zum Spektrum.

Wenn man in einem Spektroskop durch Beobachtung mittels eines Okularspaltes ohne Linse in der bereits erwähnten Weise Felder von homogenem Licht erzeugt, so kann man ihre Farbe ziemlich leicht und sicher mit der eines möglichst reinfarbigen Aufstriches vergleichen, den man in deutlicher Sehweite neben dem Fernrohr so anbringt, daß mit einer geringen Augenbewegung der Blick von der einen Farbe zur anderen gerichtet werden kann. Sorgt man noch durch die Beleuchtung dafür, daß die Helligkeit beider Felder tunlichst gleich wird, so ist die Ermittelung übereinstimmender Farben recht weitgehend gesichert. Ich habe dergestalt die Farben meines Farbenkreises den Spektralfarben zugeordnet, soweit letztere dort vertreten sind und gebe in der nachstehenden Fig. 4

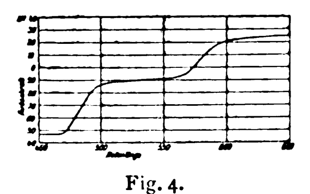


Fig. 4.

das Ergebnis dieser Beobachtung. Als Ordinaten dienen die Nummern des Farbenkreises, als Abszissen die Wellenlängen. Jede Einstellung wurde mehrfach wiederholt, woraus sich

die Größe des Fehlers derartiger Messungen ergab. Er war von der Ordnung einer Einheit der Farbtonstufen. Die zugehörige Kurve ergibt ein einigermaßen unerwartetes Bild. Es war bekannt, daß an den beiden Enden des Spektrums sich relativ ausgedehnte Gebiete befinden, innerhalb deren eine bedeutende Änderung der Wellenlänge nur eine sehr geringfügige Änderung des Farbtons hervorruft. Die Zeichnung läßt erkennen, daß außer diesen beiden „unempfindlichen" Gebieten noch ein drittes im Gelbgrün vorhanden ist. Diese Tatsache bewirkt, daß beim flüchtigen Hinschauen auf ein kurzes Spektrum dieses sich nicht aus unendlich vielen oder sehr vielen, sondern nur aus drei Farben zusammenzusetzen scheint, nämlich Rot, Gelbgrün und Blauviolett. Die übrigen Farben nehmen im Spektrum so enge Gebiete ein, daß sie im Verhältnis zu den angegebenen verschwinden. Es ist wohl keinem Zweifel unterworfen, daß diese eigentümliche Beziehung in engem Zusammenhange steht mit den physiologischen Bedingungen des Sehens, deren gesetzmäßige Festlegung einerseits durch die Young-Helmholtzsche Dreifarbentheorie, andererseits durch die Theorie der zwei Gegenfarbenpaare von Hering wissenschaftlich zu fassen, versucht worden ist. Ich verzichte zurzeit ausdrücklich auf die Verwertung des vorstehenden Ergebnisses für die eine oder die andere der Theorien, vornehmlich aus dem Grunde, weil die weiteren Forschungen noch Material aus anderen Teilen dieses mannigfaltigen Erscheinungsgebietes beigebracht haben, welches für die kritische Erwägung der Angelegenheit gleichfalls in Betracht gezogen werden muß und weil voraussichtlich die wissenschaftliche Arbeit auf den angedeuteten Bahnen noch eine Anzahl weiterer Tatsachen ergeben wird, durch welche das Feld der Möglichkeiten sich in nutzbarem Maße wird einengen lassen.

Die praktische Bedeutung dieser Messungen liegt darin, daß sie zur eindeutigen Fixierung der Punkte des Farbenkreises benutzt werden können. Indem ähnliche Messungen von anderen ausgeführt werden, die den Farbenkreis nach ihrem Urteil und nach den Entscheidungen ihres Auges eingeteilt haben, wird sich herausstellen, wie groß die Schwankungen sind, die von den unvermeidlichen subjektiven Anteilen in der Durchführung einer solchen Teilung verursacht werden. Unter allen Umständen wird der Vergleich und die Zusammenstellung einer genügenden Anzahl solcher Messungen es ermöglichen, durch die Angabe der zugehörigen Wellenlängen einen durchschnittlichen, typischen oder normalen Farbenkreis zu definieren, auf den dann die individuellen reduziert werden können, soweit sie tatsächlich Abweichungen zeigen.

Analyse der Farben.

Wir haben nun die Grundlagen gewonnen, um jede vorgelegte farbige Fläche auf die Bestandteile ihrer Farbe zu untersuchen. Zunächst wird mit Hilfe eines durchgemessenen und bezifferten Farbenkreises die Gegenfarbe der vorgelegten aufgesucht, d. h. diejenige, welche mit ihr neutrales Grau ergibt. Zu dem Zweck wird schätzungsweise die Gegenfarbe aus dem Farbenkreise ausgewählt, das entsprechende Kärtchen neben die zu untersuchende Fläche gelegt und beide Farben mit Hilfe des Pomi zur Vermischung gebracht. Durch Querlegen eines neutralen Grau von der zu erwartenden Helligkeit sichert man sich gegen Wirkungen des Kontrastes und der Nachbilder und durch systematisches Probieren findet man dann sehr bald die genaue Gegenfarbe. Sei beispielsweise das Graugelb gegeben, wie es für den Umschlag der „Physikalischen Zeitschrift" verwendet wird. Dann wird man die Gegenfarbe in der Nähe von 50 zu suchen haben und beginnt deshalb mit der Karte 50, welche ergibt, daß das entstehende Grau nicht neutral gemacht werden kann, sondern zu rötlich ausfällt. Hieraus wird geschlossen, daß das grundlegende Gelb jener Mischfarbe rötlicher ist und man probiert nacheinander die folgenden Nummern, bis eine genaue Neutralisation gewonnen ist. Dem Ungeübten ist dringend zu empfehlen, alsdann mit den Karten noch weiter zu gehen und sich zu überzeugen, daß die folgenden blauen Farben das Grau zu grünlich ergeben, also im entgegengesetzten Sinne von der Gegenfarbe abweichen. Gleichzeitig gewinnt man dadurch eine Anschauung über die Genauigkeit, mit welcher man die Einstellung bewirken kann. Liegt kein besonderer Mangel an Farbensinn und einige Übung vor, so wird man sich bald auf eine oder höchstens zwei Einheiten des Farbenkreises gesichert fühlen. So ergibt sich als Gegenfarbe jenes Gelbgrau Nr. 57. Hierdurch ist zunächst, indem man von der Nummer der kompensierten Farbe 50 abzieht (bzw. 50 dazuzählt, wenn sie aus der ersten Hälfte des Farbenkreises genommen war), der Farbton der vorgelegten Farbe mit Nr. 7 bestimmt.

Es bleibt übrig die Reinheit und das Grau zu messen. Dieses geschieht, wie angegeben mit Hilfe von Lichtfiltern. Die Literatur über die Herstellung von solchen, die nur begrenzte Spektralgebiete durchlassen, ist bereits ziemlich reichhaltig und es gibt auch schon im Handel derartige Filter. Es soll deshalb auf die Herstellung nicht eingegangen werden, wohl aber

werden einige Anweisungen die Prüfung solcher Filter erleichtern. Man stellt aus den Aufstrichen des Farbenkreises einen reellen Farbenkreis von etwa 40 cm Durchmesser her, der nicht nur als Schaubild für die Entwicklung des Farbensinnes die allerbesten Dienste tut, sondern auch experimentell mannigfaltig gebraucht werden kann. Prüft man einen solchen Farbenkreis mit dem Lichtfilter, so kann man zweierlei Fälle beobachten. Entweder kommt noch ein Teil der Buntfarbigkeit des Farbenkreises zur Geltung, indem zwischen dem dunklen Teil, wo die Absorption praktisch vollständig ist und dem hellen, wo die Remission es ist, Gebiete liegen, in denen Reste der Eigenfarben sichtbar sind. Das bedeutet, daß die Durchlässigkeit des Lichtfilters zu groß ist. Oder diese ist klein genug; dann zerfällt der ganze Farbenkreis in eine dunkle und eine helle Hälfte, deren Lage von der Farbe des Lichtfilters abhängt und deren beide Teile durch kurze Übergänge miteinander verbunden sind. Zeigt das Lichtfilter diese Eigenschaft, so ist es für unsere Zwecke brauchbar. Mit Hilfe eines geeigneten Durchlaßfilters, welches die Farbe des Aufstriches durchtreten läßt und eines geeigneten Sperrfilters, welches sie absorbiert, stellt man nun unter Benutzung einer photometrisch durchgemessenen Grauleiter die beiden ausgezeichneten Helligkeiten, die größte und die kleinste, fest; sie sollen fortlaufend mit h_1 und h_2 bezeichnet werden. Nun stellt sich h_1, wie vorher dargelegt, als die Summe der Helligkeiten der reinen Farbe plus dem vorhandenen Weiß dar und daher ist $1-h_1$ gleich dem Schwarzanteil der Farbe. Dagegen stellt h_2 unmittelbar den weißen Anteil dar, da das Sperrfilter den bunten Anteil vollständig zurückhält. Beide Bestimmungen beruhen auf der Anwendung der Gleichung $r+w+s=1$, welche für die gesamte Farbenanalyse und -synthese dieselbe Bedeutung hat, wie etwa das Ohmsche Gesetz für die Lehre von den elektrischen Strömen. Alle Eigenschaften der gebrochenen Farben werden vollständig und genau dargestellt durch die additive Beziehung der genannten drei Komponenten: reine Farbe, Schwarz und Weiß. Die mannigfaltige Anwendung, welche diese Gleichung findet und die unter sich übereinstimmende Beschaffenheit der Resultate, die mit ihrer Hilfe erzielt werden, bilden ebensoviel Beweise für die Richtigkeit dieser allgemeinen additiven Beziehung.

Aus dem oben Gesagten gehen nun folgende beiden Gleichungen hervor. $h_1 = 1 - s$ und $h_2 = w$; daraus ergibt sich $h_1 - h_2 = 1 - s - w = r$, d. h. es ergibt sich die Reinheit, wenn man die zweite Helligkeit von der ersten abzieht.

Die Gleichung $r+s+w=1$ lehrt, daß von den drei Veränderlichen r, w und s nur zwei willkürlich bestimmbar sind, da die dritte alsdann durch die Bedingung festgelegt ist, daß die Summe aller $=1$ sein muß. Es ist daher nötig und zureichend, daß man für die eindeutige Bestimmung der Farbe neben dem Farbton und der Reinheit noch ein Datum, etwa den Anteil Schwarz oder Weiß angibt, welcher in der Farbe enthalten ist. Ebenso kann man natürlich auf die Angabe der Reinheit verzichten und sowohl Schwarz wie Weiß in Bruchteilen der Einheit angeben, da hierdurch die Reinheit ihrerseits bestimmt ist. Es ist willkürlich, welche von den möglichen Kombinationen man wählt. Am meisten symmetrisch würde wohl die Form sein, daß man auf die Reinheit verzichtet und Schwarz und Weiß in Prozenten gibt. Andererseits ist aber für die Beurteilung der Farbe die Kenntnis ihres Reinheitsgrades grundlegend und es besteht somit ein praktisches Bedürfnis, diese maßgebende Größe alsbald zur Anschauung zu bringen. Es wird deshalb vielleicht am ratsamsten sein, die Reinheit und das Weiß ein für allemal als die anzugebenden Größen festzustellen und nur in besonderen Fällen, wo es sich darum handelt, eigenartige Verhältnisse hervorzuheben, eine der anderen möglichen Kombinationen zu benutzen.

Unter allen Umständen erkennt man, daß mit der Messung der beiden Größen h_1 und h_2 die Analyse der Farbe vollendet ist. Bestimmt man diese Größen in Prozenten, so gewinnt man zwei zweistellige Zahlen für die Reinheit und das Grau, wie wir allgemein die Kombination von Schwarz und Weiß nennen wollen, die in der Farbe neben dem reinen Farbton vorhanden ist. Mit der zweistelligen Nummer des Farbtones hat man insgesamt drei zweistellige Zahlen, durch welche die Zusammensetzung der Farbe eindeutig dargestellt wird. Die hierdurch erreichte Genauigkeit kommt fast überall nahe an die Unterschiedsschwelle heran. Dort, wo man experimentell eine größere Feinheit erreichen kann, lassen sich natürlich ohne weiteres die Dezimalen entsprechend vermehren.

Setzt man weiterhin ein für allemal die Reihenfolge fest, in welcher die betreffenden Angaben gemacht werden, so genügen die 6 Ziffern ohne weitere Bezeichnung, um die gegebene Farbe zu kennzeichnen. Als solche normale Reihenfolge schlage ich vor die Ordnung Farbeton, Reinheit, Weiß zu wählen. Die Folge der Anfangsbuchstaben f, r, w erinnert an das Wort Farbe und auf Grund dieser Bemerkung kann man die Ordnung leicht reproduzieren, wenn man sie vergessen haben sollte. Beispielsweise finde ich für das Graugelb des

Zeitschriftumschlages die Werte $h_1 = 47$ und $h_2 = 16$, woraus $r = 31$ folgt. Unter Zuziehung der Nr. 7 (oder zweiziffrig 07) des Farbtones folgt für diese Farbe das Zeichen 07.31.16 oder kurz 07 31 16, wonach in aller Zukunft diese Farbe immer wieder hergestellt werden könnte, wenn ein Interesse dafür aufträte.

Die Resultate einer solchen Farbenanalyse haben allgemeinen Charakter. Daß die Bestimmungen der beiden Größen r und w überhaupt absolute Natur haben, ist bereits dargelegt worden und ebenso, daß der bei der Einteilung des Farbenkreises vorhandene konventionelle, weil von einer Übereinkunft über das normale Farbensehen abhängige Anteil vermutlich sehr klein ist, d. h. ein oder zwei Einheiten des Farbenkreises nicht überschreitet, so darf auch für diese Größe eine praktische Allgemeinheit in Anspruch genommen werden. Hiermit ist in der Farbenlehre endlich ein Punkt erreicht, der vergleichbar mit jener Wendung in der Wärmelehre ist, die in dem Augenblick entstand, wo ein reproduzierbares Thermometer mit wohldefinierten Fixpunkten und sachlich gerechtfertigtem Einteilungsprinzip erfunden war. Die Farbe tritt aus dem Gebiet der subjektiven Schätzung in das der objektiven Messung hinüber und die ganze unabsehbare Entwicklung, welche bisher noch ein jedes wissenschaftlich faßbare Gebiet durch die Einführung von Messungsprinzipien und Messungsmöglichkeiten erfahren hat, läßt sich für die jetzt beginnende Zukunft der Farbenlehre voraussehen.

Natürlich legt die Möglichkeit einer Analyse der Farben die Frage nach der Möglichkeit einer Synthese alsbald nahe. Eine solche Synthese ist in der Tat ohne weiteres ausführbar. Haben wir beispielsweise für das oben erwähnte Gelbgrau des Zeitschriftumschlages festgestellt, daß es ein Abkömmling des Gelb Nr. 7 ist, so wissen wir, daß wir dieses Gelb mit dem Grau zu kombinieren haben, dessen Beschaffenheit wir alsbald aus dem Verhältnis von Weiß (16) zu Schwarz (53) oder was eine bessere Definition des Grau gibt, aus dem Verhältnis Weiß zur Summe Weiß + Schwarz (16 : 69 gleich 23) entnehmen können. Hätten wir einen idealreinen gelben Aufstrich von der Farbe Nr. 7, so brauchten wir dieses Gelb nur mit dem eben definierten Grau in dem aus der Messung folgenden Verhältnis 31 : 69 im Pomi zu mischen, um die Farbe zu haben. Tatsächlich enthält aber unser Farbenkärtchen bereits einen gewissen Anteil Schwarz und Weiß, den wir übrigens aus den vorher beschriebenen Messungen kennen. Durch eine einfache Rechnung, die im einzelnen hier nicht dargelegt zu werden braucht, kann man feststellen, welches Grau und in welchem Verhältnis es zuzufügen ist, um die Farbe zu erzeugen.

Gleichzeitig ergibt sich aus dieser Betrachtung die Begrenzung der Farbensynthese. Man kann ganz allgemein nur weniger reine Mischfarben aus den Farben gegebener Aufstriche erzeugen und niemals reinere und weiterhin kann man niemals Mischungen erzeugen, in denen das Verhältnis der reinen Farbe zu Weiß oder zu Schwarz größer ist, als in der Farbe, die zu der Synthese dient. Es hat deshalb eine erhebliche praktische Bedeutung, daß man die Farbkarten des Farbenkreises in bezug auf Reinheit so weit entwickelt als das zurzeit technisch möglich ist. Leider muß man bei dieser Arbeit einen Umstand in den Kauf nehmen, der zurzeit noch in ziemlich hohem Maße wirksam ist, dessen Beseitigung aber man von dem Fortschritt der Technik erwarten kann. Diejenigen Pigmente, welche die reinsten Farben ergeben, pflegen auch durchschnittlich die wenigst lichtechten zu sein, so daß die Aufstriche, welche die äußersten Grenzen der gegenwärtig erreichbaren Reinheit darstellen, gleichzeitig zu den empfindlichsten gegen die bleichende Einwirkung des Lichtes gehören. Für die Praxis wird man deshalb wohl voraussichtlich den künftigen Farbatlas aus zwei Arten von Farben herstellen, nämlich aus dauerhaften mit beschränktem Reinheitsbereich und über diese hinaus aus solchen von höchst möglicher Reinheit, bei deren Behandlung man aber auf die vorhandene Empfindlichkeit gegen Licht wird Rücksicht nehmen müssen.

Das Farbendreieck und der Farbenkörper.

Die allgemeine Gleichung $r + w + s = 1$ gibt nun auch eine nachträgliche Motivierung für die Zweckmäßigkeit der bereits früher verwendeten Darstellung aller Abkömmlinge eines gegebenen Farbtones in einem Dreieck, dessen Ecken durch die Punkte w, r und s gebildet werden. Man könnte auch, wie ich das früher getan habe, neben r als rechtwinklige Koordinaten das oben definierte Grauverhältnis verwenden, wobei man den Vorzug gewinnt, daß beide Variabeln unbeschränkt innerhalb ihrer natürlich gegebenen Grenzen variiert werden können. Ein entsprechendes Diagramm hat aber dann in seinen vier Ecken s und w auf der einen Seite und auf der anderen Seite beide Male r, wodurch ein Mangel an Symmetrie in der Darstellung entsteht, abgesehen davon, daß die benutzten Koordinaten nicht unmittelbare Messungsergebnisse, sondern Produkte einer allerdings sehr einfachen Rechnung sind. Es ist daher zweckmäßiger, die erwähnten Dreiecks-

koordinaten zu benutzen, zumal ihre Anwendung eine sehr übersichtliche Orientierung über sämtliche möglichen Abkömmlinge einer gegebenen reinen Farbe gewährt. Ein derartiges Feld wird wie bekannt von drei ausgezeichneten Punkten und drei ausgezeichneten Grenzlinien umschlossen und hat drei ausgezeichnete Richtungen, welche sachlich zusammengehörige Werte vereinen. Die drei ausgezeichneten Punkte sind bereits vielfach erwähnt, sie sind der Weißpunkt w, der Schwarzpunkt s und der Punkt der reinen Farbe oder Farbenpunkt r. Zwischen ihnen verlaufen die drei ausgezeichneten Linien. Zunächst die Schwarz-Weiß-Linie durch alle Abstufungen des Grau, welche allen Farbenfeldern gemeinsam ist. Ferner die Weiß-Farbe-Linie und die Schwarz-Farbe-Linie, welche für jede reine Farbe eine besondere Reihe von Abkömmlingen darstellen. Diese an den Grenzen des Farbfeldes liegenden Farben, die aus der reinen Farbe durch Zumischung entweder von Weiß allein oder von Schwarz allein entstehen, unterscheiden sich durch ihr Aussehen charakteristisch von den anderen, die innerhalb des Feldes liegen. Wir wollen sie wegen ihres Aussehens die klaren Farben nennen, während innerhalb die trüben Farben auftreten, und zwar sollen die der Linie wr die hellklaren, die der Linie sr die dunkelklaren Farben heißen. Die ersten sind dem Maler bekannt als die Produkte der Vermischung irgendeines möglichst farbenreinen Pigments mit Weiß (wobei indessen Verschiebungen des Farbtones bis zu 10 Einheiten auftreten), die anderen als die entsprechenden Produkte der Vermischung mit Schwarz. Der ersten Gruppe gehören ferner, wie früher dargelegt wurde, sämtliche unbezogenen Farben, die nicht gesättigt sind, an. Die ganze Pracht der durch Polarisation, Interferenz, Beugung, Brechung usw. entstehenden sogenannten physikalischen Farben beruht auf ihrer Zugehörigkeit zu dieser Gruppe. Die andere ausgezeichnete Reihe der dunkelklaren Farben läßt sich in Gestalt von Aufstrichen nur sehr unvollkommen verwirklichen, da ja die schwarzen Pigmente sämtlich sehr deutlich erkennbare Mengen Weiß zurückwerfen und daher reine dunkelklare Farben nicht ergeben. Am meisten nähern sich noch die Farben des Sammets diesem Ideal und ebenso kann man durch optische Vermischung möglichst wenig weißenthaltender Farbaufstriche mit dem idealen Schwarz des Dunkelkastens eine ziemlich weitgehende Annäherung erzielen. Alle Beobachter, welche diese Farben kennen gelernt haben, sprechen sich übereinstimmend über deren Schönheit aus, die sich der Schönheit der hellklaren Farben durchaus an die Seite stellt. Es macht sich hierbei noch die Besonderheit geltend, daß bereits sehr geringe Anteile (unterhalb 1 Proz.) reiner Farbe, die dem Schwarz zugesetzt werden, den Farbencharakter der dunkelklaren Farben auf das deutlichste zum Ausdruck bringen, während umgekehrt Farbenmengen unterhalb 10 Proz. in Weißgemischen kaum als solche erkennbar sind. Dies sind psychologische Besonderheiten, welche mit dem Fechnerschen Gesetz zusammenhängen.

Soviel über die ausgezeichneten Linien des Farbendreiecks. Innerhalb derselben verlaufen nun gegenüber jedem der charakteristischen Eckpunkte und parallel zu der gegenüberliegenden Seite drei ausgezeichnete Richtungen, in denen jeweils der Wert jenes Eckpunktes konstant ist. Legen wir stets den Weißpunkt nach oben, den Schwarzpunkt nach unten und den Farbenpunkt nach rechts, so daß das Dreieck links eine senkrechte Kante hat, so verlaufen zunächst parallel dieser, also gegenüber dem Farbenpunkt r die Linien gleicher Reinheit oder gleichen Anteils an Farbe. Sie liegen so, daß der Anteil an Farbe umso größer wird, je mehr sich die Linie dem Farbenpunkte nähert, und werden dementsprechend kürzer. Stellt man sich eine Anzahl von Aufstrichen her, welche einen gleichen Anteil, beispielsweise 50 Proz. reiner Farbe enthalten, so erlebt man eine große Überraschung. Diejenigen, bei denen der unbunte Anteil aus reinem Weiß besteht, sehen unverhältnismäßig viel farbloser aus als diejenigen, welche neben 50 Proz. reiner Farbe 50 Proz. Schwarz enthalten und denen man ihren Gehalt an Schwarz kaum ansieht. Wir haben im gewöhnlichen Leben keinerlei Gelegenheit, solche Abwandlungen kennen zu lernen, bei denen die Reinheit unverändert bleibt und nur die Beschaffenheit des beigemischten Grau sich zwischen den äußersten möglichen Grenzen ändert und deshalb haben wir auch kein Gefühl für die Zusammengehörigkeit entsprechender Farben ausbilden können.

Die zweite ausgezeichnete Richtung verläuft gegenüber dem Weißpunkt von links unten nach rechts oben und faßt die Farben gleicher Weiße zusammen. Der nichtweiße Bestandteil setzt sich längs dieser Linien in wechselnden Verhältnissen aus Schwarz und reiner Farbe zusammen. Eine Reihe derartiger Farben erscheint gleich hell, wenn man sie durch ein Sperrfilter betrachtet. Die psychologische Zusammengehörigkeit solcher Farbenreihen empfindet man viel stärker. Ebenso überzeugt man sich, daß die psychologische Reinheitsabstufung mit der analytischen im wesentlichen übereinstimmt. Verfertigt man sich eine Anzahl von Stufen, in denen bei konstantem Weiß die Rein-

heit sich um gleiche Beträge ändert, so empfindet man sie auch als gleichabständig. Es liegt dieses daran, daß psychologisch die reinen Farben dem Weiß gegenüber sich ähnlich wie Schwarz verhalten.

Die dritte Schar ausgezeichneter Linien verläuft endlich von rechts unten nach links oben und stellt die Farben gleicher Schwärze dar, wobei innerhalb jeder derartigen Linie das Verhältnis zwischen Weiß und reiner Farbe alle möglichen Werte annimmt. Diese Linien erscheinen gleich hell, wenn man sie durch ein Durchlaßfilter betrachtet, das ja durch dieses das vorhandene Schwarz allein zur Geltung kommen läßt. Hiermit sind die vorhandenen Möglichkeiten erschöpft.

Die Gesamtheit aller Abkömmlinge eines Farbtons, mit anderen Worten die systematische Ausfüllung des Farbendreiecks, läßt sich nun herstellen, indem man eine der drei ausgezeichneten Linienscharen experimentell ausarbeitet. Welche von ihnen dazu gewählt wird, ist wesentlich eine technische Frage. Aus mannigfaltigen Gründen, die hier im einzelnen nicht dargelegt werden sollen, hat sich erwiesen, daß die Richtung des konstanten Weiß die zweckmäßigste ist. Man stellt zunächst, soweit es die vorhandenen Pigmente ermöglichen, die Linie der hellklaren Farben mit bestimmten Abständen des Weißgehalts her. Dann wird jede dieser Mischungen mit dem zugehörigen Grau, das den gleichen Weißgehalt hat, in den erforderlichen Verhältnissen vermischt, um bestimmte Punkte der Linie in den gewählten Abständen zu besetzen. Beide Mischungsverhältnisse werden ermittelt, indem man zunächst einige willkürliche Mischungen von bekanntem Verhältnis herstellt, sie chromatisch analysiert und darauf durch Interpolation die Mischungsverhältnisse aufsucht, welche die gewünschten Zwischenfarben ergeben. Indem man dergestalt mit allen Parallelen, die zu verwirklichen sind, verfährt, bedeckt man das dreieckige Gebiet oder isochrome Feld mit regelmäßig geordneten Repräsentanten sämtlicher herstellbaren Abkömmlinge des fraglichen reinen Farbtons.

Alle derartigen Farbendreiecke ergeben, wenn sie in der Folge des Farbenkreises nebeneinander gestellt werden, den Farbenkörper, der die Gesamtheit aller möglichen Farben umfaßt. Ordnet man die Dreiecke parallel, indem man den Farbenkreis in eine Gerade entwickelt, so hat der Farbenkörper die Form eines dreiseitigen Prismas; ordnet man sie um die gemeinsame Grau-Linie als Achse, so nimmt der Farbenkörper die Gestalt eines flachen Doppelkegels an, an dessen Peripherie der Kreis der reinen Farben liegt und dessen beide Flächen von den hellklaren und den dunkelklaren Farben gebildet werden. In den beiden Scheiteln liegt Weiß und Schwarz, und in der Achse liegen alle Grau.

Dies ist die rationelle Lösung des alten Problems von der angemessenen Gestalt des Farbenkörpers, dem bisher die mannigfaltigsten Formen (dreiseitige Pyramide, Kegel, Kugel, Halbkugel usw.) gegeben wurden.

Die Farben der Pigmente.

Sowohl die ausgezeichneten Punkte, wie Linien des Farbendreiecks sind im bunten Gebiete Ideale, die sich in Aufstrichen nicht verwirklichen lassen. Was man erreicht, ist nur eine Annäherung, über deren Betrag das Erforderliche bereits in großen Zügen angegeben ist. Da es eine maßgebende Bedeutung für die Beurteilung der Farbeigenschaften eines gegebenen Pigments hat, welches Gebiet von Abkömmlingen mit seiner Hilfe erreichbar ist, so muß man für jedes Pigment seine charakteristische Linie oder seinen „Kennzug" feststellen, durch welchen derjenige Teil des Farbendreiecks abgegrenzt wird, in den man durch Mischungen mit Hilfe von Schwarz und Weiß verwirklichen kann. Dieses Gebiet wird einerseits durch die Farben derjenigen Mischungen begrenzt, die man aus dem Pigment durch stufenweisen Zusatz von reinem Weiß erzeugen kann, andererseits durch die Farben der entsprechenden Mischungen mit möglichst reinem Schwarz. Beide Linien gehen von dem Punkte des reinen Pigments aus, der mehr oder weniger nahe an r liegt und nähern sich asymptotisch den Grenzlinien rw und rs. Sie schneiden also aus dem dreieckigen Feld ein ungefähr hyperbolisch begrenztes engeres Gebiet heraus, welches umso größer ausfällt, je reiner die Farbe des Pigments ist. Es ist in hohem Maße lehrreich, eine Anzahl solcher Linien herzustellen und sie miteinander zu vergleichen. Denn wir haben in der Bestimmung des Kennzugs das lange gesuchte wissenschaftliche Hilfsmittel zur Charakteristik der chromatischen Eigenschaft jedes vorgelegten Pigments.

Über den allgemeinen Verlauf dieser Kennzüge läßt sich folgendes bemerken. Die reinen Pigmente zeigen häufig Absorptionen, welche über ein Farbenhalb hinausgehen. Ihre Farbe ist alsdann ein Gemisch von gesättigter Farbe mit vorwiegendem Schwarz. Der weiße Anteil übersteigt bei schönfarbigen Pigmenten nicht 2 oder 3 Proz., während der Schwarzanteil entsprechend der breiten Absorption recht erheblich zu sein pflegt. Beim Zusatz von Weiß wird deshalb zunächst die reine Farbe des Pig-

ments zunehmend entwickelt, indem der Schwarzanteil schneller abnimmt als der weiße zunimmt und man erreicht bei gewissen Mischungsverhältnissen ein Maximum der Reinheit, das einem Vorrücken des Kennzuges bis zu seinem äußersten Wert nach rechts entspricht. Darüber hinaus ist die Zunahme an Weiß stärker als die Abnahme an Schwarz; der Kennzug wendet sich nach links und verläuft dann asymptotisch nach der weißen Ecke, bzw. bis zu jenem Punkt der Weiß-Schwarz-Linie, welcher von dem zur Vermischung benutzten Weiß besetzt ist. Denn auch das weißeste unserer gebräuchlichen Pigmente, das Zinkweiß erreicht das Idealweiß nicht, sondern enthält mindestens 5 Proz. Schwarz; Lithopon enthält 10 Proz. Schwarz. Andererseits läuft von dem Punkt der reinen Farbe ein ziemlich geradliniger Ast des Kennzuges nach der Richtung des Schwarzpunktes, aber wiederum nicht genau in die Ecke des Diagramms, sondern in den etwas höher gelegenen Punkt, der die Remission des benutzten schwarzen Pigments darstellt, also beispielsweise dem Punkt 2 Proz. bei der Anwendung von Frankfurter oder Pariser Schwarz. Die vorstehende Fig. 5 gibt die Kennzüge für einige bekannte Pigmente. Man erkennt deutlich die Sonderlage der gelben bis roten gegenüber den blauen und grünen in bezug auf die äußerste erreichbare Reinheit, auf welche bereits früher hingewiesen worden ist. Die Weiß-Verdünnungen wurden mit Lithopon gemacht, so daß der obere Konvergenzpunkt nicht bei *w* liegt, sondern 0,1 tiefer bei 0,90. Der Ort des reinen Farbstoffs ist durch einen Punkt hervorgehoben.

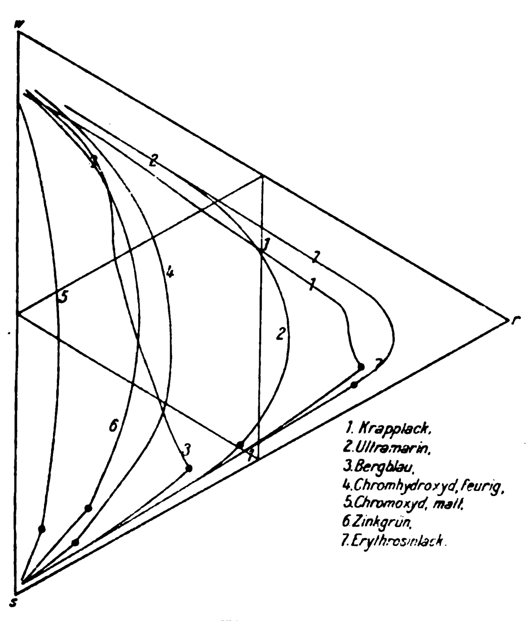


Fig. 5.

Neutralisationsverhältnis und Reinheitsverhältnis.

Mit den vorstehenden Betrachtungen ist zunächst das Material abgeschlossen, welches sich auf die Messung und die Systematik der Farben bezieht. Es ist damit ein Arbeitsmittel bereitgestellt, durch welches das gesamte Gebiet der Farbenlehre methodisch erforscht und quantitativ aussprechbaren Gesetzen unterworfen werden kann. Von der ungeheueren Anzahl der Probleme, die sich einer solchen Forschung alsbald darbieten, haben bisher natürlich nur einige wenige in Angriff genommen werden können, doch sind bereits die Ergebnisse dieser ersten Vorstöße von solcher Beschaffenheit, daß sie die zu gewinnenden Reichtümer anschaulich machen.

Eine Frage, mit der ich mich im Interesse des Reinheitsproblems bereits früher beschäftigt hatte, ist die nach dem Verhältnis zwischen der zur Neutralisation erforderlichen Mengen der Gegenfarben und ihrer Reinheit. Fragt man sich nämlich, welche Menge beispielsweise von Ultramarinblau erforderlich ist, um ein gegebenes Zitronengelb optisch zu neutralisieren, so kann man zunächst eine rein experimentelle Antwort darauf mit Hilfe des Pomi finden, indem man den Winkel feststellt, unter welchem die beiden genannten Komponenten neutrales Grau ergeben. Theoretisch wird man im ersten Augenblick geneigt sein, die Frage dahin zu beantworten, daß, wenn beide Farben vollkommen rein wären, natürlich gleiche Mengen beider zur Neutralisation erforderlich sind, und daß demgemäß die tatsächlich erforderlichen Mengen im umgekehrten Verhältnisse der Reinheit stehen müssen. Bei genauerem Nachdenken stößt man indessen auf Zweifel, ob diese Antwort richtig sein kann. Denn die Reinheiten sind, wie wir gesehen haben, absolute Größen, die von der Beschaffenheit des Auges und der Beleuchtung nicht abhängen. Die Beziehung der Gegenfarben dagegen ist von beiden Faktoren abhängig und man kann eine Identität der grundsätzlich verschiedenartigen Größen nicht erwarten. Es bleibt also nichts anderes übrig als mit Hilfe der objektiv bestimmbaren Reinheitszahlen die Äquivalente zu messen, nach denen sich zwei Gegenfarben zu neutralem Grau absättigen.

Das Ergebnis einer entsprechenden Untersuchung ist nun im Lichte der eben angestellten Überlegungen recht überraschend. Es stellt sich heraus, daß tatsächlich die Neutralisationsverhältnisse mit den Reinheitsverhältnissen übereinstimmen und daß die unkritische Vermu-

tung ihrer Gleichheit durch das Experiment bestätigt wird. Ich habe, um diese Frage zu prüfen, sämtliche 50 Paare meines Farbenkreises, deren Reinheit ich vorher gemessen hatte, mit Hilfe des Pomi auf ihr Neutralisationsverhältnis untersucht, wobei ich, um eine etwaige Einseitigkeit des Apparats unschädlich zu machen, Doppelbestimmungen mit verwechselter Lage der Komponenten ausgeführt habe. Das Ergebnis ist durch Fig. 6 veranschaulicht. Die starke Linie stellt die Reinheitsverhältnisse nach den objektiven Messungen dar, während die schwache Linie die Neutralisationsverhältnisse zum Ausdruck bringt. Beide Linien verlaufen zum Teil identisch, zum Teil nahe nebeneinander. Ob die Abweichung, welche

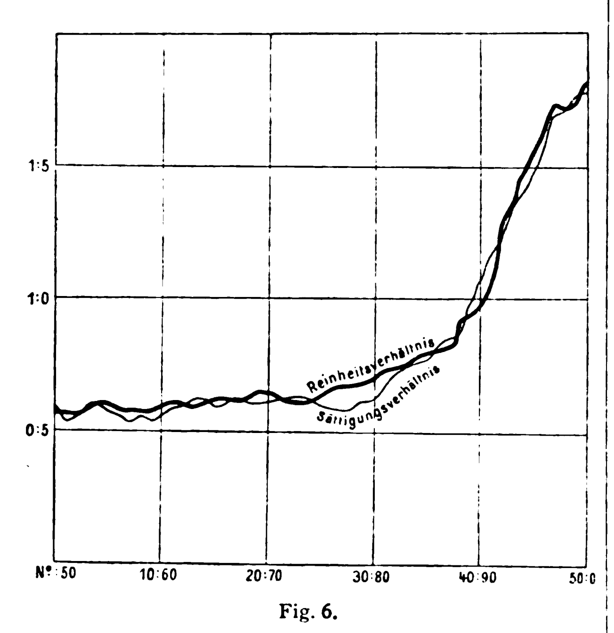


Fig. 6.

zwischen den Nummern 25 bis 33 eintritt, reell ist, was im Lichte der oben angestellten Betrachtungen durchaus nicht ausgeschlossen erscheint, oder ob sie von ungenügender Bestimmung der Reinheit in dem besonders schwierigen Gebiete der purpurnen und violetten Farben herrührt, wage ich noch nicht zu entscheiden. Unter allen Umständen ist die generelle Übereinstimmung der beiden Züge so groß, daß man das Gesetz von der Gleichheit der Neutralisations- und der Reinheitsverhältnisse jedenfalls als Grundgesetz dieses Gebietes ansprechen kann und nur noch festzustellen hat, ob sekundäre Abweichungen vom Grundgesetz stattfinden, welchen Betrag sie erreichen und wovon sie abhängig sind.

Die Helligkeit.

Ein weiteres Beispiel in gleichem Sinne bietet das Problem der Helligkeit dar. Die bisherigen Erörterungen haben ergeben, daß die Helligkeit für die Definition der Farbenmannigfaltigkeit nicht die Rolle spielt, welche man ihr früher zugeschrieben hat, da sie überhaupt keine Rolle in diesem Kapitel zu spielen hat. Nichtsdestoweniger liegt hier eine psychologische Tatsache vor, welche in dem übereinstimmenden Urteil über die Helligkeit der Farben zum Ausdruck kommt, das seit dem Beginn der Farbenlehre gefällt worden ist. Von allen Farben ist die gelbe die hellste, darauf kommt Grün, Rot, Blau und Violett. Nun wird freilich von fachkundiger Seite mit anscheinend sehr guten Gründen behauptet, daß die Bestimmung der Helligkeit bunter Farben unausführbar sei. Insbesondere Helmholtz hat seinerzeit das starke Gefühl der Unsicherheit und Willkür hervorgehoben, über welches er trotz großer Erfahrung auf diesem Gebiete nicht hat hinwegkommen können. Untersucht man die Verhältnisse näher, so stellt sich heraus, daß die Schwierigkeiten zum allergrößten Teile auf dem Umstande beruhen, daß man die Untersuchungen mit unbezogenen Farben angestellt hat und daß man sich bemüht hat, unmittelbar die Helligkeit verschiedener mehr oder weniger reiner Farben zu vergleichen.

Stellt man sich aber eine Grauleiter, wie vorher beschrieben, aus einer Anzahl kurzer paralleler Streifen her, die derart auf einen Rahmen geklebt sind, daß zwischen ihnen gleich breite offene Zwischenräume bestehen, so gewährt folgendes Experiment alsbald die Überzeugung, daß die Bestimmung einer spezifischen Helligkeit jeder beliebigen bunten Farbe eine durchaus ausführbare Aufgabe ist. Legt man nämlich diese Grauleiter so auf den zu untersuchenden Aufstrich, daß dessen Farbe in den Zwischenräumen hervortritt, so konstatiert man auf den ersten Blick, daß die Helligkeit der Farbe an dem schwarzen Ende der Grauleiter größer ist, als die der grauen Stufen, während sie an dem weißen Ende geringer ist. Man findet dann auch mit großer Sicherheit diejenige Stelle, an welcher von den beiden angrenzenden grauen Streifen der eine heller und der andere dunkler ist als die dazwischen liegende Farbe. Erleichtert wird die Beobachtung, wenn man das Ganze so gegen das Fenster orientiert, daß an den Rändern der grauen Streifen keine Schatten entstehen. Auch kann man auf solche Weise feststellen, daß verschiedene Beobachter, soweit sie nicht mit Anomalien behaftet sind, in bezug auf die Beurteilung der Helligkeit weitgehend übereinstimmen.

Ebenso kann man in irgendeinem Photometer die Helligkeit bunten Lichtes bestimmen, wenn man nur dafür Sorge trägt, als Kompen-



sation nicht irgendeine andere bunte Farbe, sondern ein neutrales Grau zu benutzen. In einem von mir konstruierten Halbschattenphotometer kann ich die Einstellung auf gleiche Helligkeit zwischen bunt und grau mit einem nur wenig größeren Fehler ausführen, als bei gleichfarbigen Feldern.

Läßt sich dergestalt für jede beliebige bunte Farbe ein Grau angeben, welches die gleiche Helligkeit wie diese besitzt, so kann man durch die Photometrierung dieses Graus ein quantitatives Maß für die Helligkeit der bunten Farbe gewinnen. Diese besteht nun ihrerseits aus dem reinfarbigen Anteil und einem bestimmten Grau. Die Helligkeit der vorhandenen Mischfarbe muß sich somit als eine verhältnismäßige Summe des tatsächlich vorhandenen Graus und des Graus darstellen lassen, welches der reinen gesättigten Farbe äquivalent ist.

Letztere läßt sich nicht messen, weil es absolut reinfarbige Aufstriche nicht gibt. Mißt man aber an einem trübfarbigen dessen Helligkeit und subtrahiert von dieser in angemessener Weise die Helligkeit des vorhandenen Graus, so läßt sich daraus die Helligkeit des reinen Anteils berechnen. Man gewinnt so ein Mittel, die Helligkeitseigenschaften dieser idealen Farben quantitativ zu bestimmen. Ist nämlich h die Helligkeit einer vorgelegten Farbe und h_0 die Helligkeit der zugehörigen reinen Farbe, so wird man unter der oben gemachten Voraussetzung die Gleichung aufstellen können $h = rh_0 + (1 - r)\, g$, wo g das Grau nach der oben gegebenen Definition darstellt, welches in der vorgelegten Farbe mit der reinen Farbe vermischt ist. Um g in gemessenen Werten auszudrücken, erinnern wir uns, daß es als das Verhältnis des Weiß geteilt durch die Summe von Weiß und Schwarz definiert wurde. Nun ist das Weiß $= h_2$ und das Weiß und Schwarz ergänzt die Reinheit zu Eins, hat also den Betrag $1 - (h_1 - h_2)$. Führt man diese Werte in den Ausdruck für h ein und löst ihn nach h_0 auf, so ergibt sich die Formel

$$h_0 = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2}.$$

Diese Gleichung überrascht durch ihre Einfachheit und bietet sich einer Prüfung an der Hand der Erfahrung besonders willig dar. Das Experiment bestätigt nun den Ansatz durchaus. So wurde beispielsweise ein aus Lithopon hergestellter Füllfarbstoff von Naphtolgelb mit 1 Proz. Diamantschwarz vermischt, wodurch ein ziemlich dunkelgefärbtes Grüngrau oder Olivgrün entstand. Durch Neutralisation erwies sich das darin enthaltende Gelb als Nr. 2 entsprechend und es wurden Helligkeitsbestimmungen sowohl an dem Gemisch, wie an der Farbkarte Nr. 2 ausgeführt. Die nachstehende Tabelle

	h	h_1	h_2	$h_0$ber.
Reinstes Gelb Nr. 2	0,80	0,89	0,09	0,90
Naphtolgelb u. Schwarz	0,30	0,33	0,10	0,87

gibt die einzelnen Daten und in der letzten Spalte die beiden berechneten Werte von h_0, der Helligkeit des idealreinen Gelb Nr. 2. Der Unterschied zwischen beiden, welcher 3 Proz. beträgt, liegt innerhalb der Versuchsfehler und beweist die Richtigkeit jenes fundamentalen Ansatzes. Ähnliche übereinstimmende Resultate wurden in zahlreichen anderen Fällen erhalten.

Dies Ergebnis veranlaßt alsbald die Fragestellung nach dem Helligkeitsverlauf der ideal

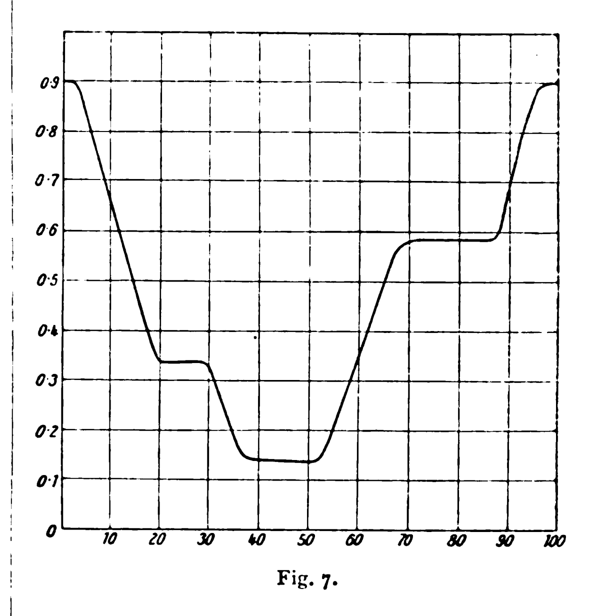


Fig. 7.

reinen Farben durch den ganzen Farbenkreis, den man offenbar feststellen kann, wenn man je eine beliebige zu jeder Nummer des Farbenkreises gehörige Farbe in der beschriebenen Weise analysiert. Eine entsprechend durchgeführte Versuchsreihe ergab Werte, die in der vorstehenden Fig. 7 übersichtlich dargestellt sind. Als Abszissen dienten die Nummern im Farbenkreise, als Ordinaten die Helligkeitswerte h_0. Wie man sieht, bestätigt sich zunächst jene allgemeine Schätzung bezüglich der Helligkeit der Farben. Dazu tritt aber eine Besonderheit, auf die ich durchaus nicht gefaßt war und deren Prüfung ich deshalb eine Anzahl weiterer Messungen gewidmet habe, durch welche sie immer wieder bestätigt worden sind. Die Kurve für die Helligkeit der reinen Farben im Farbenkreise verläuft nämlich nicht einfach sinusartig, wie man das erwarten würde, sondern sie zeigt deutliche Unterbrechungen wo die Helligkeit

über ein längeres Gebiet praktisch konstant bleibt. Und zwar sind vier derartige Terrassen vorhanden. Die eine liegt zwischen 95 und 3 im Gelbgrün und hellsten Gelb, die zweite zwischen 20 und 30 im lebhaften Rot von Mennige bis Karmin, die dritte zwischen 37 und 52 im Violett und die vierte endlich zwischen 68 und etwa 87 im mittleren Grün.

Auch diese bemerkenswerte Erscheinung deutet auf die physiologischen Hilfsmittel hin, mit denen unser Sehapparat seine Funktionen verrichtet und wird demgemäß ein wesentliches Element einer künftigen allseitig zureichenden Theorie der Farbenempfindungen bilden.

Diese ersten Ergebnisse der Farbenmeßkunst oder Chromometrie rechtfertigen wohl die Erwartung, daß diese das Tor zu neuen wichtigen Gebieten eröffnet, deren Umfang und Inhalt sich zurzeit nicht entfernt übersehen läßt.

(Eingegangen 5. Juli 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Hugo Dingler, Die Grundlagen der Naturphilosophie. gr. 8°. X u. 262 S. Leipzig, Verlag Unesma. 1913. Geh. M. 6.—, geb. M. 7.—.

Unter den sechs Kapiteln des Buches, in denen der Verfasser, vielfach von neuen Gesichtspunkten aus, die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Naturwissenschaften und deren Zusammenhänge mit allgemein psychologischen und logischen Fragen darzulegen sucht, ist für den Physiker namentlich das zweite Kapitel von großem Interesse, das „Von der Wissenschaft“ betitelt ist. Dingler zeigt sich in diesem Kapitel stark von Machschen Ideen beeinflußt, an die er öfter anknüpft; aber vielfach geht er in origineller Weise über sie hinaus, so namentlich, wenn er die Wichtigkeit der gedanklichen Zerlegung eines Vorganges in elementare Vorgänge betont, wenn er als notwendige Voraussetzung aller wissenschaftlichen Forschertätigkeit die sorgfältige Auswahl des Forschungsmaterials und die Abgrenzung des Forschungsgebietes hinstellt, wenn er von der Isolierung der wesentlichen Umstände bei dem Experimente spricht. Die ständige Verstärkung des „logischen Elementes“ in einer Wissenschaft, die fortschreitende „Abbildung des logischen Gerüstes“ der Mathematik auf sie sind es, die nach Dingler eine Wissenschaft aus dem experimentellen Stadium, in dem sie nur eine Sammlung von Einzeltatsachen darstellt, in das exakt-theoretische überführen. Die theoretische Wissenschaft aber zeigt die Tendenz, immer neue Teile der Wirklichkeit ihrer Behandlung zu unterwerfen, um (wie der Verfasser meint, in unendlich ferner Zeit) das ganze Wissen von der Wirklichkeit in einem einzigen großen „logischen Urbau“ zu vereinigen.

A. E. Haas.

K. Sumpf und K. H. L. Magnus, Der praktische Lehrer. Übungen für Schulhandfertigkeit und Werkunterricht. 3. Auflage, bearbeitet von Rich. Maurer. gr. 8°. XV u. 233 S. mit 325 Abbildungen. Hildesheim und Leipzig, August Lax. 1915. Geh. M. 3.—, geb. M. 3.60.

Je mehr die seit 20 Jahren ernstlich erstrebte Vertiefung des naturwissenschaftlichen Unterrichts durch Schülerübungen verwirklicht wird, um so wichtiger wird für den Lehrer die Beherrschung der einfachsten Versuchshilfsmittel und vor allem die Fähigkeit, aus den Grundstoffen Holz und Pappe, Glas, Kork, Blech und Draht mit geeignetem Werkzeug einige Apparate selbst herzustellen. Das vorliegende Buch will hierfür dem Lehrer Anleitung, Rat und Hilfe geben, und zwar nach Maßgabe der Anforderungen, welche in Lehrerseminarien in der Ausbildung künftiger Volksschullehrer gestellt sind. Der Bearbeiter der 3. Auflage ist selbst im Lehrerseminar zu Freiburg tätig und versteht es, innerhalb der gegebenen bescheidenen Grenzen auf den ersten 167 Seiten die unentbehrlichsten Hilfsarbeiten und Anordnungen zu den einfachsten physikalischen Versuchen der Mechanik, Wärmelehre, Optik und Elektrizität mit Magnetismus auf knappem Raum sehr zweckmäßig zu behandeln. Den Abschluß (S. 168—216) bilden Fachübungen über Raumlehre und Feldmessen, Heimat- und Himmelskunde und Rechnen und (Seite 217—227) Preisangaben über Werkstatteinrichtungen und Apparatbaustoffe, sowie ein ausführliches Namen- und Sachregister. Für den Lehrer an höheren Schulen ist die Auswahl des Stoffes zu eng, dagegen kann den Schülern der höheren Lehranstalten das Büchlein als Anleitung zu „physikalischen Basteleien“ sehr empfohlen werden.

K. T. Fischer.

Tagesereignisse.

Die Berliner Akademie der Wissenschaften wünscht für das Ellersche Legat eine Untersuchung, welche eine Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie, sei es durch eigene, sei es durch fremde Beobachtung, liefert, oder für eine künftige Prüfung neue Wege weist. Der ausgesetzte Preis beträgt 2000 Mark. Bewerbungsschriften können in deutscher, lateinischer, französischer, englischer oder italienischer Sprache abgefaßt sein und müssen bis zum 31. Dezember 1918 an das Bureau der Akademie gesandt werden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Frankfurt a. M. Professor Dr. Heinrich Bechhold für medizinische Physikochemie.

Ernannt: Der a.o. Professor an der Universität Basel Dr. Erich Hecke zum ord. Professor der Mathematik ebendaselbst.

Gestorben: Der frühere Professor der Chemie an der Universität London Sir William Ramsey, der ord. Professor der Astronomie, Meteorologie und mathematischen Geophysik an der Universität Krakau Dr. Moritz Rudzki, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Technischen Hochschule Budapest Dr. Viktor Zemplén (auf dem italienischen Kriegsschauplatz gefallen), der Observator an der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg Dr. Walther Zurhellen (gefallen als Vizefeldwebel bei einem Infanterie-Regiment).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. 15. August 1916. 17. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 17 am 19. August 1916.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über thermodynamische Maschinen, die unter Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten.

II. Teil.

Von V. Bjerknes.

7. Über zusammengesetzte Maschinen und zusammengesetzte Betriebsmethoden. — Wir haben bisher die denkbar einfachste Elementarmaschine betrachtet und für diese das Prinzip abgeleitet, daß für die Nutzwirkung der Maschine der Niveauunterschied zwischen Wärme- und Kältequelle ausschlaggebend ist. Dasselbe Prinzip muß man notwendig wiederfinden, wenn man zu den konkreten Maschinen übergeht, die man durch Zusammensetzung von Elementarmaschinen aufbauen kann.

Ohne noch den Versuch zu machen, die konkrete Maschine eingehender zu diskutieren oder die komplizierteren Betriebsbedingungen erschöpfend zu behandeln, werde ich hier durch ein paar erläuternde Beispiele auf einige naheliegende Fehlschlüsse aufmerksam machen.

In Wirklichkeit wird man nie nur an einer Stelle Wärmeabfuhr haben. Man betrachte z. B. eine stationäre atmosphärische Zirkulation. Die Bewegung verläuft in geschlossenen, in sich zurücklaufenden Stromröhren. Jede elementare Stromröhre ist eine elementare Wärmemaschine der von uns betrachteten Art. Nur ist die Zu- und Abfuhr von Wärme nicht lediglich an zwei Stellen lokalisiert, sondern über die ganze Bahn stetig verteilt. Dementsprechend können wir bei unserer Maschine Wärmereservoire passender Temperatur längs der ganzen Röhrenleitung verteilen. Dabei muß man aber genau prüfen, welche Wärmebehälter wirklich als Wärme- oder Kältequelle thermisch tätig sind, und nicht ohne weiteres die Behälter mit den Quellen identifizieren. Man muß also untersuchen, an welchen Stellen wirklich Wärme der arbeitenden Substanz zugeführt oder entzogen wird. Diese Stellen brauchen nicht mit denen höchster bzw. tiefster Temperatur zusammenzufallen.

Als einfachstes Beispiel können wir in unserer Maschine eine Anzahl Reservoire übereinander legen mit Temperaturen, die nach dem adiabatischen Gesetz nach oben abnehmen. In dieser Weise kann man beliebig hohe Wärmebehälter I und II bauen. Wenn nun zu Anfang die arbeitende Substanz in Ruhe ist, so wird bei der Herstellung der thermischen Verbindung die ganze Flüssigkeitssäule innerhalb der Wärmequelle erwärmt werden. Sobald aber die Bewegung nach oben einsetzt, bleibt nur ein Element des Wärmebehälters, das unterste, tätig. Dieses Element allein übernimmt die

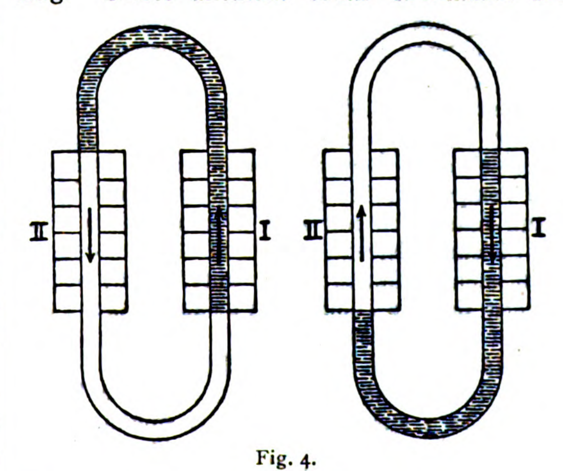


Fig. 4.

Wärmezufuhr zu den neu zuströmenden kalten Massen. Und wenn die erwärmte Säule den Kältebehälter erreicht, wird das oberste Element desselben alle Abkühlung besorgen. Nachdem einmal der stetige Betrieb eingesetzt hat, hat man nur mit dem untersten Element des Be-

hälters I als Wärmequelle und mit dem obersten Element des Behälters II als Kältequelle zu rechnen (Fig. 3a). Dies gilt beim Vorwärtslauf der Maschine. Hat man dagegen einen Rückwärtslauf zustande gebracht, so wird das oberste Element des Behälters I als Wärmequelle und das unterste des Behälters II als Kältequelle tätig sein. Eine Folge hiervon ist, daß die Maschine bei Rücklauf kleinere Nutzwirkung als bei Vorwärtslauf hat. Der Unterschied kann auch das Vorzeichen der Nutzwirkung betreffen. Die Maschine wird bei dem Rücklauf nicht arbeitleistend, sondern arbeitvernichtend wirken, sofern das untere Ende des Behälters II niedriger liegt als das obere Ende des Behälters I (Fig. 3b). Besonders ist deshalb hervorzuheben, daß man zu einem völlig fehlerhaften Schlusse kommen würde, wenn man, in dem einen oder anderen Falle, das Niveau der Wärmequelle etwa mit dem mittleren Niveau des Behälters I und das Niveau der Kältequelle mit dem mittleren Niveau des Behälters II identifizierte. Und wenn man, wie in der Atmosphäre, nicht sichtbare Wärme- oder Kältebehälter vor sich hat, so muß man sich hüten, die Ausdehnung der Wärme- oder Kältequelle mit der Ausdehnung der von ihr ausgehenden warmen oder kalten Luftsäule zu identifizieren.

Auch muß man beachten, daß das Prinzip von dem Niveauunterschied der Wärme- und Kältequelle nur für den stetigen Betrieb einer dauernd arbeitleistenden oder arbeitvernichtenden Maschine gilt. Die dem stetigen Betrieb einer Maschine entsprechende Bewegung darf man nicht mit der vorübergehenden Bewegung schwingender oder zirkulierender Natur verwechseln, die man mit nur einer Wärmequelle erzielen kann.

Entsprechend den Bewegungen, die man mit einer Wärmequelle erzeugt und so lange als arbeitleistende Bewegung unterhalten kann, als die Temperatur der Wärmequelle noch steigt (3), kann man auch mit zwei Wärmequellen selbst in gleichem Niveau sehr charakteristische, arbeitleistende Bewegungen unterhalten, vorausgesetzt, daß die Temperatur beider Quellen Funktionen der Zeit sind.

Man stelle z. B. die beiden Behälter I und II in das gleiche Niveau und lasse die Temperatur von I steigen, die von II sinken. Dann entsteht eine Zirkulation, die oben von I nach II und unten von II nach I führt. Die Anordnung ist arbeitleistend, d. h. immer mehr Wärme wird in kinetische Energie verwandelt, solange der Temperaturunterschied der beiden Reservoire zunimmt. Gibt man jetzt den Behältern konstante Temperaturen, so hält sich die erzeugte Zirkulation unverändert, die Arbeitsleistung hört auf. Läßt man die Temperatur von I abnehmen und die von II steigen, so erhält man eine arbeitvernichtende Anordnung. Die erzeugte kinetische Energie wird vermindert und wird zuletzt Null. Wenn das Sinken der Temperatur von I und das Steigen der von II andauert, so wird Zirkulation der entgegengesetzten Richtung eintreten, und man hat wieder eine arbeitleistende Anordnung, die so lange andauert, bis man wieder die Temperatur beider Behälter konstant hält. Dann kann man die Temperatur der Behälter in entgegengesetzter Richtung verändern und dadurch nochmals eine Umkehr der Bewegung erzwingen usf. Mit zwei Wärmebehältern in gleichem Niveau, die periodisch veränderliche Temperatur haben, kann man deshalb eine periodisch wechselnde Zirkulation unterhalten.

8. Übergang zur Thermodynamik eines bewegten Kontinuums. — In unseren Überlegungen haben wir nichts vorausgesetzt über eine spezielle Form der in sich zurücklaufenden Röhre. Unsere Resultate sind anwendbar auf Röhren der kompliziertesten Formen, mit beliebig veränderlichem Querschnitt. Aus solchen elementaren Röhren, die man nebeneinander legt, kann man Systeme bauen, die den Raum stetig füllen. Die Röhrenwände kann man sich unendlich dünn denken, und körperliche Wärme- und Kältereservoire braucht man nicht. Die haben wir nur zur Veranschaulichung eingeführt, anstatt abstrakt von den Stellen zu reden, wo Wärme durch Strahlung oder Leitung zugeführt oder weggenommen wird. Wir können in dieser Weise zu jeder denkbaren Bewegung eines stetig raumfüllenden Mediums gelangen, die dadurch charakterisiert ist, daß sie in einem unveränderlichen System von in sich zurücklaufenden Röhren verläuft. In dieser Weise können wir unsere Resultate auf ein bewegtes Kontinuum übertragen.

Die Zahl der Bewegungen, die man in dieser Weise konstruieren kann, ist natürlich außerordentlich viel größer als die Zahl solcher Bewegungen, die das freie Kontinuum wirklich auch weiter ausführt, wenn man die starren Wände der elementaren Stromröhren entfernt. Dies beeinträchtigt aber nicht die Allgemeinheit unserer Schlüsse. Denn unsere Resultate gelten für alle Bewegungen, für diejenigen, die als nicht weiter existenzfähig auszuscheiden sind, wie für die einzig wichtigen, die ohne starre Wände weiter bestehen können.

Zu den Bewegungen, die auszuscheiden sind, wenn man zu einem freien Kontinuum übergeht, gehören aller Wahrscheinlichkeit nach besonders die rückläufigen Bewegungen, die durch eine rückläufige Anfangszirkulation eingeleitet

werden mußten. Diese würden sich sicher alle als instabil erweisen, sobald man die starren Wände der ursprünglichen Röhren durch die nachgiebigen Wände der freien Stromröhren ersetzte.

Von diesen rückläufigen Bewegungen können wir deshalb ganz absehen, wenn wir unsere Resultate auf die Bewegung beispielsweise von Atmosphäre und Meer übertragen wollen. Diese eigenartigen Bewegungen haben insofern nur ein theoretisches Interesse, wenn auch ein großes, weil man sie notwendig mit in Betracht ziehen muß, um die Maschine vollständig zu charakterisieren. Andererseits würden sie eine eminent praktische Bedeutung gewinnen, wenn vielleicht einmal Maschinen dieser Art technische Verwendung finden sollten.

Eine andere wichtige Bemerkung ist die folgende. In der geschlossenen Röhre mit starren Wänden wird man stationäre Bewegung erhalten können, wie hoch man auch den oberen Röhrenbogen oberhalb des Niveaus der Kältequelle und wie tief man auch den unteren Bogen unterhalb des Niveaus der Wärmequelle verlängert. Die Stellen, wo die Bewegung von Aufsteigen in Absteigen oder von Absteigen in Aufsteigen übergeht, ist dabei geometrisch bestimmt durch das Umbiegen der Röhre, und die starren Röhrenwände leisten immer den für die Richtungsveränderung der Bewegung erforderlichen Druck. Im freien Kontinuum kann dagegen die Bewegung nicht in dieser Weise an beliebig vorgeschriebenen Stellen umkehren. Bei dem stationären Zustande können die Umkehrstellen nur da auftreten, wo dauernd Ursachen der Umkehr tätig sind. Das heißt, das Aufsteigen wird nur an der Kältequelle in Heruntersteigen übergehen, nachdem die Partikelchen hier durch Abgabe von Wärme schwerer geworden sind, und das Absteigen wird nur an der Wärmequelle in Aufsteigen übergehen, wenn die Partikelchen hier durch Aufnahme von Wärme leichter werden. Ehe der Dauerzustand sich eingestellt hat, können sehr verwickelte Bewegungen auftreten. Der Dauerzustand selbst wird sich aber durch eine großzügige Einfachheit auszeichnen. Die von einer Wärme- und einer Kältequelle in einem freien Kontinuum unterhaltene Bewegung wird sich auf eine Schicht beschränken, die oben durch eine Niveaufläche durch den höchsten Punkt der Kältequelle und unten durch eine Niveaufläche durch den untersten Punkt der Wärmequelle begrenzt ist. Und in der Schicht zwischen diesen Grenzniveaus wird die Bewegung bestehen in dem Aufsteigen der erwärmten Partikelchen von der Wärme- zu der Kältequelle und ein Herabsinken der abgekühlten Partikelchen von der Kälte- zu der Wärmequelle.

Die Bewegung weiter in den Einzelheiten zu bestimmen, die sich in einem Kontinuum ausbilden wird, wenn die Wärme- und Kältequelle gegeben sind, bleibt natürlich eine verwickelte Aufgabe. Die umgekehrte Aufgabe ist dagegen leichter: wenn die Bewegung bekannt ist, Rückschlüsse zu ziehen über die Lage und die Wirkungsweise der Wärmequellen. Denn verläuft die gegebene Bewegung stationär, also in räumlich festliegenden, in sich zurücklaufenden Stromröhren, so kann man sich die Wände der elementaren Stromröhren erstarrt denken und jede einzelne Stromröhre für sich betrachten als eine elementare thermodynamische Maschine. Um volle Anschaulichkeit zu erreichen, kann man eine solche Röhre aus dem Kontinuum herausgreifen und, als Ersatz für die thermische Wechselwirkung derselben mit ihren unmittelbaren Umgebungen oder mit fernen strahlenden Körpern, die entsprechenden materiellen Wärme- und Kältequellen längs der Wände der Röhre so verteilen, wie es die gegebene Bewegung erfordert.

9. Über die atmosphärischen und ozeanischen Wärmemaschinen. — Wenn man von den kleineren Störungen absieht, kann man die großen atmosphärischen oder ozeanischen Bewegungen als stationär ansehen. Die Stromröhren müssen dann in sich zurücklaufen, und alles liegt in einfachster Form für die Anwendung unserer Resultate zurecht.

Wir können also die einzelnen Röhren als elementare thermodynamische Maschinen betrachten und sie, in der angegebenen Weise, mit den längs ihrer ganzen Länge verteilten Wärme- und Kältequellen versehen denken. Dieses zusammengesetzte System von Wärme- und Kältequellen können wir zuletzt zur Vereinfachung durch ein thermodynamisch gleichwertiges einfaches System ersetzen, bestehend aus nur einer Wärme- und einer Kältequelle. Für dieses einfache System gilt dann notwendig das Resultat, das wir für den Niveauunterschied von Kälte- und Wärmequelle abgeleitet haben. Also:

In den stationären, thermisch unterhaltenen atmosphärischen oder ozeanischen Strömen muß notwendig die Kältequelle höher als die Wärmequelle liegen.

Dies ist das überaus wichtige und fruchtbare Prinzip, das zuerst J. W. Sandström ausgesprochen, theoretisch abgeleitet, durch lehrreiche Versuche illustriert und erfolgreich auf die Diskussion meteorologischer Erscheinungen angewendet hat[1]).

1) J. W. Sandström, Meteorologische Studien im schwedischen Hochgebirge. Göteborgs Kungl. Vetenskaps och Vitterhetssamhäller Handlingar, Fjerde Följden XVII, 2, Göteborg 1916.

Weil sich das Meerwasser thermisch normal verhält, gilt das Gesetz für Meeresströme ebenso wie für Luftströme. Wenn dagegen in Süßwasserseen bei Temperaturen zwischen 0^0 und 4^0 stationäre, thermisch getriebene Zirkulationsbewegungen auftreten, so gilt das entgegengesetzte Gesetz, daß die Wärmequelle höher als die Kältequelle liegen muß.

Auf Anwendungen des Gesetzes in Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. Nur seien zum Schluß einige allgemeine Bemerkungen über die atmosphärischen und die ozeanischen Wärme- und Kältequellen gemacht.

Die große Wärmezufuhr geschieht durch die Sonnenstrahlung, die große Wärmeabgabe durch die Ausstrahlung. Beide machen sich am kräftigsten am festen Erdboden und an der Grenzfläche von Luft und Meer geltend, sehr viel schwächer dagegen in der freien Atmosphäre oder in größeren Meerestiefen. Schon an jeder einzelnen Stelle gleichen sich Ein- und Ausstrahlung einigermaßen aus; und wenn an einer Stelle die Wärmezufuhr, an einer andern die -abfuhr im Überschuß ist, so werden diese Stellen meistens in nahe gleichem Niveau liegen. Die Bedingungen sind also sehr ungünstig für das Zustandekommen stärkerer Bewegungen. Die atmosphärischen und ozeanischen Zirkulationen werden nur unterhalten durch einen kleinen Überschuß der Einstrahlung über die Ausstrahlung an genügend tiefliegenden und einen kleinen Überschuß der Ausstrahlung über die Einstrahlung an genügend hochliegenden Stellen. Diese Stellen sind die Wärme- und die Kältequellen der Atmosphäre und der Hydrosphäre. Ihre Erforschung wird grundlegend für die gesamte Meteorologie und Hydrographie sein.

Was zunächst das Meer anbetrifft, so liegen die Verhältnisse für das Zustandekommen kräftiger thermischer Maschinen besonders ungünstig. Auf die geringe Nutzwirkung, die man selbst mit den größten denkbaren Niveauunterschieden zwischen Wärme- und Kältequelle erreichen kann, wenn Seewasser die arbeitende Substanz ist, ist schon früher hingewiesen worden (10). Nun kommt noch dazu, daß sowohl die wesentliche Erwärmung als die wesentliche Abkühlung in genau demselben Niveau vor sich geht, nämlich an der Meeresoberfläche. Eine thermisch betriebene Zirkulation zwischen Polen und Äquator kann deshalb nur zustande kommen, sofern die Erwärmung in den äquatorialen Gegenden in tieferes Niveau hinabdringt. Und zwar liegen die Verhältnisse dafür insofern günstig, als die steil auffallenden Sonnenstrahlen in den äquatorialen Gegenden in größere Tiefen gelangen, als die schrägen der höheren Breiten. Dabei ist auch die größere Durchsichtigkeit der tropischen Meere in Betracht zu ziehen. Auch hat man nur in diesen Meeren die starken Temperaturgradienten, die einen merkbaren Wärmestrom nach unten durch Leitung unterhalten können, und die starke Verdunstung, die zum Ausgleich des Salzgehalts lokale Vertikalzirkulation erzeugt und dadurch Wärme nach unten befördert. Man kann aber nur auf schwache thermisch betriebene Ströme im Meere rechnen, die außerdem beschränkt sein müssen auf eine Schicht von relativ geringer Mächtigkeit. Alles scheint auch darauf hinzudeuten, daß in den großen Meerestiefen keine merkbare Bewegung vorhanden ist.

Wenn es sich um die Atmosphäre handelt, so liegen die Verhältnisse insofern anders, als die Erdoberfläche, wo die größte Ein- und Ausstrahlung stattfindet, nicht mehr wie die Meeresfläche eine Niveaufläche ist, sondern alle Höhen bis über 8000 m erreicht. Dies gibt uns gleich eine Anzahl geographisch bestimmter tiefgelegener Wärme- und hochgelegener Kältequellen für den Betrieb der atmosphärischen Wärmemaschine. Als tiefgelegene Wärmequellen werden alle solche Niederungen gelten, wo die Einstrahlung, wenn auch noch so wenig, stärker als die Ausstrahlung ist, und dazu noch die Gebiete, wo die Luft mit warmen Meeresströmungen in Berührung kommt. Die hochgelegenen Kältequellen sind vor allem die hohen Berge, die wegen ihrer Schneedecke viel Wärme ausstrahlen, im Winter auch niedrigere schneebedeckte Berge. Besonders auf diese Kältequellen bringt Sandström sein Gesetz in Anwendung, wie er auch durch seine Beobachtungen in Gebirgsgegenden zur Winterszeit zu seinem Gesetze geführt wurde.

Das Gesetz führt aber zwingend zu dem Resultat, daß auch andere Kältequellen in der Atmosphäre tätig sein müssen. Eine stationäre Luftzirkulation wie der Passat kann nur unter der Bedingung bestehen, daß neben der niedriggelegenen Wärmequelle eine hochgelegene Kältequelle vorhanden ist. Die erwärmte aufgestiegene Luft kann nicht den Erdboden oder das Meeresniveau wieder erreichen nach dem Durchlaufen ausschließlich adiabatischer Prozesse. Sie muß in der Höhe Wärme abgeben, um wieder herunterzukommen. Der Gedanke, daß solche hohe Kältequellen vorhanden sein müssen, ist natürlich nicht neu, und ist auch früher unter Anwendung des Carnotschen Prinzipes eingehender begründet worden. In allgemeiner Form hat Ekholm dieses gemacht in einer Arbeit, wo er auch die allgemeine Bedeutung hochge-

legener Kältequellen betont[1]). Dr. Wenger hat dieselben Betrachtungen unter Anwendung des neueren aerologischen Beobachtungsmaterials durchgeführt[2]).

Die Stellen, wo diese Wärmeabgabe stattfindet, sind nicht mehr geographisch bestimmt. Neben den geographisch lokalisierbaren Kältequellen sind wir also gezwungen, die Existenz einer zweiten Klasse von Kältequellen in der freien Atmosphäre anzunehmen. Sofern die Stratosphäre gar nicht an der Zirkulation teilnimmt, müssen sie noch in der Troposphäre gelegen sein und wohl in deren höchsten Schichten, in der Substratosphäre. Was die Art der Wärmeabgabe betrifft, so muß man auch hier in erster Linie an die Strahlung denken, Strahlung der Luft selbst, Strahlung der Zirren oder Strahlung hoher, von unten nicht sichtbarer Wolken. Die Intensität dieser Strahlung wird im Vergleich zu der der hochgelegenen Schneeflächen äußerst schwach sein. Dafür kann aber der Prozeß über Gebieten von großer Ausdehnung vor sich gehen, und die hohe Lage macht schon eine schwache Wärmeabgabe thermodynamisch sehr wirksam.

Geht man vom Passat zum Monsun über, so kann die monatelange stationäre Luftströmung ebensowenig ihre hohe Kältequelle entbehren wie der Passat. Dabei kann vielleicht der indische Wintermonsun mit dem schneebedeckten Himalaya auskommen. Der Sommermonsun muß aber seine Kältequelle notwendig in höheren Schichten der freien Atmosphäre haben.

Auch die weniger konstanten Windsysteme, Zyklonen und Antizyklonen, können sich anscheinend längere Zeit thermisch und dynamisch stationär halten. Sind nun diese Gebilde thermodynamisch in sich geschlossene Systeme und nicht lediglich dynamisch getriebene Nebenzyklen zu den großen atmosphärischen Zirkulationsbewegungen, wird man wieder zwingend zu dem Resultat geführt, daß hohe Kältequellen mitwirken müssen. Wir müßten dann auch mit der Möglichkeit vorübergehend auftretender und vielleicht wandernder Kältequellen in den hohen Schichten rechnen.

Unter den allgemeinsten dynamischen Bedingungen komplizieren sich die Verhältnisse außerordentlich. Dabei kommen auch, wie wir gesehen haben, die zeitlichen Temperaturänderungen der Wärme- und der Kältequellen, unabhängig von den Höhenunterschieden, als Faktoren von entscheidender Bedeutung in Betracht. Mit Wärme- und Kältequellen periodisch wechselnder Temperatur kann man periodisch wechselnde Zirkulationen, entsprechend beispielsweise dem Land- und Seewinde, erzeugen, selbst in dem Grenzfalle, wenn die Quellen keine Ausdehnung in vertikaler Richtung haben und außerdem beide und daneben noch in demselben Niveau liegen. Dies haben wir schon an einem Beispiel gezeigt (7). Diese Wirkung der Temperaturänderung der Wärme- und Kältequellen dürfte sich auch bei den Monsunen zur Zeit der Monsunkenterung geltend machen, ganz abgesehen davon, daß sie im stationären Stadium ihre hochgelegenen Kältequellen nicht entbehren können.

Aus dem Vorhergehenden wird jedenfalls ersichtlich, daß die Erforschung der atmosphärischen und ozeanischen Wärme- und Kältequellen grundlegende Bedeutung für die dynamische Meteorologie und Hydrographie haben wird. In der Atmosphäre hat man dabei mit zweierlei Kältequellen zu tun, den geographisch gegebenen und den in der freien Atmosphäre vorhandenen. Am leichtesten zugänglich sind die ersteren, mit denen sich auch Sandström so erfolgreich beschäftigt hat. Die Erforschung der andern erfordert die Anwendung aerologischer Beobachtungsmethoden, und Gegenstand der Untersuchung wird hier nicht bloß die Lage und Ausdehnung, sondern auch zeitliche Änderungen, vorübergehendes Auftreten und Verschwinden, vielleicht Bewegung solcher Kältequellen sein.

Besonders wichtig wird die Frage von der relativen Bedeutung, die einerseits die freien atmosphärischen Kältequellen und andererseits die geographisch bestimmten Kältequellen für die Unterhaltung der atmosphärischen Zirkulationsbewegungen haben. Erst wenn hierüber bestimmtere Resultate vorliegen, wird man imstande sein, endgültig Stellung zu nehmen, zu den interessanten Gedanken, die Sandström über den Zusammenhang der geologischen Klimate mit den Gebirgsbildungen entwickelt hat.

Leipzig, Geophysikalisches Institut der Universität. Juli 1916.

(Eingegangen 13. Juli 1916.)

1) Ekholm, Anwendung des Carnotschen Satzes auf die Kreisläufe in der Atmosphäre. Meteorologische Zeitschrift **8**, 366, 1891.

2) Wenger, Untersuchungen über die Mechanik und Thermodynamik der freien Atmosphäre im nordatlantischen Passatgebiet. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre. **3**, 113, 1910.

Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform.

Von Karl Uller.

1. Innere Reflexion; Unstetigkeiten.

Bei den Versuchen, die Wellenbewegung in stetig inhomogenen Körpern der theoretischen Behandlung zu unterwerfen, entwickelte sich sozusagen von selbst die Schichtmethode, die



sich den Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, in welch jeder der Körperparameter als konstant angesehen werden darf, und die in jeder Schicht die Welle wie in einem homogenen Körper nach bekanntem Rechenverfahren behandelt. Diese Vorstellung liefert in der Tat gekrümmte Bahnen, verlangt aber unweigerlich unendlich kleine, unendlich viele Unstetigkeiten der Wellengrößen, also eine „innere Reflexion". Es erhob sich die Frage, ob diese Folgerung aus den genannten zwei Annahmen auch der Wirklichkeit entspricht. Dabei scheint die theoretische Schwierigkeit, die darin besteht, daß mehrere voneinander ganz unabhängige Körperparameter auftreten können, und somit mehrere Schichtensysteme, die sich schneiden können, überhaupt nicht in den Gesichtskreis getreten zu sein. Zur Prüfung bot sich der — freilich schwierige — Weg über eine direkte Integration der Wellengleichungen für inhomogene Körper dar. Der erste Forscher, der diese Aufgabe in Angriff genommen hat, ist Herr Boussinesq[1]) gewesen, der einen langsam veränderlichen und reellen Körperparameter voraussetzt und sich auf ebene Schichtung beschränkt. Nach ihm hat Herr Seeliger[2]) für elektromagnetische Wellen als Ergebnis einer noch nicht veröffentlichten Rechnung bekannt gegeben, daß in einem durch den Brechungsindex charakterisierten Medium eine gewisse Größe sich als konstant im Strahl erweise, die er als die Lichtmenge im Querschnitt anspricht. Das Resultat scheint auf Grund von Vorstellungen und Sätzen der geometrischen Optik zustande gekommen zu sein mit Beischuß von gewissen Vernachlässigungen. Die Konstanz der Energieströmung in der fortschreitenden Welle, die beide Forscher gefunden hatten, sprach gegen eine innere Reflexion. Zu diesem Resultat kommt neuerdings auch Herr Gans[3]) unter Voraussetzung eines langsam veränderlichen und reellen Körperparameters und einer ebenen Schichtung; indessen hält es der Genannte nicht für ausgeschlossen, daß bei stärkerer räumlicher Veränderlichkeit doch noch innere Reflexion auftrete.

Aus den Grundgleichungen, wie ich sie jüngst in dieser Zeitschrift veröffentlicht habe[4]), ist nun ohne weiteres ersichtlich, daß — gleichgültig ob es sich um elastische, elektromagnetische oder Flüssigkeits-Wellen handelt und gleichgültig, welcher Art die Mitwirkung des Körpers sei — Wellenvektor und Wellennormalenpaar stetige Größen sind, solange die Körperparameter sowie ihre Gefälle stetige Ortsfunktionen sind. Von „innerer Reflexion", die doch bedingt wäre durch unendlich kleine Unstetigkeiten der genannten Wellengrößen, kann keine Rede sein, wie stark oder wie schwach auch die genannten Gefälle sich von Punkt zu Punkt stetig ändern mögen, solange nur die Gleichungen der zugrunde liegenden Theorie gültig sind. Diese sind allemal aus räumlicher Mittelwertsbildung hervorgegangen, versagen mithin, wenn wir die entsprechenden Vorgänge in Räumen untersuchen müssen, die intermolekulare Abmessungen haben. Mit dieser Herkunft hängt auch zusammen, daß die Wellenlänge groß sein muß gegen den mittleren Molekelabstand; und ferner, daß die genannten Gefälle nicht über alle Grenzen stark sein dürfen; im ersteren Falle kann man überhaupt nicht mehr von einer Reflexion in oder an einem im kleinen homogenen Körper reden.

„In der Natur gibt es keine Sprünge". So lautet ein kategorischer Satz, der sich auch in der Physik eingebürgert hat. Wenn dem so wäre, würden wir — vorausgesetzt, daß überhaupt Differentialgleichungen zur theoretischen Darstellung zulässig sind, — keine Wellenzurückwerfungen an Körperoberflächen beobachten können. Sprunglosigkeit der Körperparameter ergibt sich aus der physikalischen Herkunft der Grundgleichungen von selbst, Sprünge der Parametergefälle werden wir gerade auf Grund der Tatsache der Reflexion an Körperoberflächen gezwungen als in der Natur verwirklicht zu sehen. Dem widerspricht auch nicht der molekulare Unterbau der Grundgleichungen, der absichtlich in ihnen verwischt ist. Damit wird jetzt verständlich, weshalb Rayleigh[1]) und später Herr Schlick[2]) in ihren Rechnungen Reflexion an einer stetig inhomogenen Platte mit stetigem Übergang des Körperparameters erhalten haben. Sie ist keine innere, sondern lediglich Oberflächen-Reflexion, hervorgerufen durch den Sprung des Parametergefälles in den beiden Begrenzungsebenen, wobei noch anzumerken ist, daß nur der Sprung in der zweiten Begrenzungsebene die Ursache zahlloser hin- und herlaufender Wellen in der Platte ist.

Daß wir bei Oberflächen-Reflexion das Parametergefälle in unseren praktischen Rechnungen unendlich groß setzen, was die Annahme eines

1) J. Boussinesq, C. R. 129, 794, 859, 1899.
2) H. Seeliger, diese Zeitschr. 5, 237, 1904.
3) R. Gans, Ann. d. Phys. 47, 709, 1915.
4) K. Uller, Grundlegung I; diese Zeitschr. 17, 168, 1916; K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen. Ebenda 17, 302, 1916.

1) Rayleigh, Proc. London Mathematical Soc. 11, 51, 1880.
2) M. Schlick, Über die Reflexion in einer inhomogenen Schicht. Diss. Berlin 1904.



Sprunges des Parameters selbst zur Folge hat, ist ein rein mathematischer und fast ausschließlich erlaubter Schritt, diktiert vom Gesetze der Ökonomie. Dieser mathematische Grenzfall liefert also vereinfachte Formeln, welche stets die Stärke der zurückgeworfenen Welle etwas zu groß, die der gebrochenen Welle etwas zu klein angeben.

Nunmehr wird auch der Fehler der Schichtmethode sichtbar:

Sie setzt an jeder Schicht das Parametergefälle unendlich groß, in jeder Schicht gleich null — und geht dann zu unendlich kleinen Schichtdicken über.

Die Schichtmethode in der Wellentheorie ist also unhaltbar.

2. Die Strahlung in isotropen Körpern.

Die Strahlung in einer Welle ist, da sie stets eine Funktion des Wellenvektors und des Wellennormalenpaares ist, nach einem Satze des vorigen Abschnitts notwendig stetig in Gebieten, wo die Körperparameter und ihre Gefälle stetig sind.

Wir wenden uns jetzt zu den Beziehungen des Strahlvektors $\overline{\mathfrak{R}}$, der früher[1]) erläutert wurde, zu den eben genannten Wellengrößen.

Die mittlere Strahlung $\overline{\mathfrak{R}}$ in einem schwingenden elektromagnetischen Felde ist definiert durch $V[\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{M}}]$, wobei die Konstante $4\pi V$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum sein soll. Mit Bezug auf die in der Grundlegung I § 4 unter C angegebenen elementaren Schwingungsform wird sonach

$$\overline{\mathfrak{R}} = V/4 \cdot e^{-2\nu'' t}\{[EM^*] + [E^*M]\}, \quad (1)$$

indem nach Ausführung der Multiplikation einfach die Glieder, die den Faktor $e^{i2\nu t}$ bzw. $e^{-i2\nu^* t}$ enthalten, gestrichen werden, da sie im Zeitmittel fortfallen, wenn wir wie immer die positive oder negative Dämpfung ν'' klein voraussetzen.

Für eine Welle geht (1) nach den am eben genannten Ort stehenden Feldgleichungen für isotrope Körper über in

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{R}} = V/4 \cdot e^{-2(\nu'' t + \Phi'')} \{ &(\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*)(\mathfrak{w}_m/a_e + \mathfrak{w}_m^*/a_e^*) \\ &- \{(\mathfrak{m}^*, \mathfrak{w}_m/a_e)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}, \mathfrak{w}_m^*/a_e^*)\mathfrak{m}^*\} \qquad (2) \\ &+ i\{[\mathfrak{m}, \operatorname{rot}\mathfrak{m}^*]/a_e - [\mathfrak{m}^*, \operatorname{rot}\mathfrak{m}]/a_e^*\}\}.\end{aligned}$$

Hierin ist die Divergenzlosigkeit der elektrischen Erregung zum Ausdruck gebracht, jedoch die der magnetischen nur gefordert. Diese ist aber erfüllt in der Identität

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{w}_m/a_e - \mathfrak{w}_m^*/a_e^*, [\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*]] = \\ &(\mathfrak{m}^*, \mathfrak{w}_m/a_e)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}, \mathfrak{w}_m^*/a_e^*)\mathfrak{m}^* \qquad (3) \\ &+ i\operatorname{div}(a_m\mathfrak{m}) \cdot \mathfrak{m}^*/a - i\operatorname{div}(a_m^*\mathfrak{m}^*) \cdot \mathfrak{m}/a^*,\end{aligned}$$

so daß wir als Ausdruck für die Strahlung in einer elektromagnetischen Welle haben

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{R}} = \frac{V}{4} e^{-2(\nu'' t + \Phi'')} \Big\{ &(\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*)\left(\frac{\mathfrak{w}_m}{a_e} + \frac{\mathfrak{w}_m^*}{a_e^*}\right) \\ &- \left[\frac{\mathfrak{w}_m}{a_e} - \frac{\mathfrak{w}_m^*}{a_e^*}, [\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*]\right] \qquad (4) \\ &+ i\left\{\left[\mathfrak{m}^*, \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{m}}{a_e}\right] - \left[\mathfrak{m}, \frac{\operatorname{rot}\mathfrak{m}^*}{a_e^*}\right]\right\} \\ &+ i\left\{\frac{\operatorname{div}(a_m\mathfrak{m})}{a}\mathfrak{m}^* - \frac{\operatorname{div}(a_m^*\mathfrak{m}^*)}{a^*}\mathfrak{m}\right\}\Big\}.\end{aligned}$$

Wollen wir die elektrische Welle $(\mathfrak{e}; \mathfrak{w}_e)$ bevorzugen, so haben wir in (2), (3) und (4) einfach $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{w}_m$ durch $\mathfrak{w}_e$ zu ersetzen, sowie a_e durch a_m und a_m durch a_e.

Wenn $\mathfrak{w}$ das Wellennormalenpaar und damit $\mathfrak{m}$ der Wellenvektor sein soll, verschwindet in (4) das letzte Glied, wie wir sehen werden, indem $(\mathfrak{m}\mathfrak{w}) = 0 = -i \operatorname{div}(a_m\mathfrak{m})$ ist.

Ausgenommen der Fall, wo rot $\mathfrak{m}$ verschwindet, ist die Strahlung nicht mit dem Wellennormalenpaar umkehrbar, auch dann nicht, wenn das magnetische oder das elektrische Feld strichpolarisiert ist.

Weiter lesen wir an (4) ab, daß die Richtung der Strahlung $\overline{\mathfrak{R}}$ und die der Isophasennormale $\mathfrak{w}' = {}^1/_2(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^*)$ auseinandergehen, und zwar sogar in einem homogenen und konservativen Körper.

Die Sätze von Fermat, Malus und Helmholtz haben also selbst in solchen Körpern keine allgemeine Gültigkeit.

Im allgemeinen existiert auch keine Hamiltonsche Funktion.

Ferner ist die Strahlung im allgemeinen nicht die Summe der Partialstrahlungen der geradlinig schwingenden Komponenten, in welche die elliptische Schwingung zerlegt gedacht werden kann.

Selbst in einem umkehrbaren Strahl fallen nur dann Strahlung und Isophasennormale zusammen, wenn der Körper konservativ ist und die Schwingung geradlinig.

Wegen Einzelheiten zur Strahlung in Planwellen sowie zur Strahlung im natürlichen Lichte sei auf meine Wellenstudie verwiesen[1]).

Den Betrag der in einer Volumeneinheit des Feldes durch die Eigenschaften des Körpers im Zeitmittel verlöschten Feldenergie mißt

1) K. Uller, Grundlegung usw. I, § 2, diese Zeitschr. 17, 168, 1916.

1) K. Uller, Eine Wellenstudie, Elster-Geitel-Festschrift 1915.



$$\operatorname{div}\overline{\mathfrak{R}} = -\frac{V}{2}\left\{\frac{a_e - a_e^*}{2i}(EE^*) + \frac{a_m - a_m^*}{2i}(MM^*)\right\} \tag{5}$$

wie wir direkt aus (1), die Grundgleichungen des Feldes hinzunehmend, finden.

Wir kennen nicht eine Absorption magnetischer Energie, infolgedessen müssen wir den magnetischen Erregungskoeffizienten μ reell nehmen, so daß $a_m' = \mu\nu'/V$ und $a_m'' = \mu\nu''/V$ wird. Bei permanenten Schwingungen ($\nu'' = 0$) geht also die Verlöschung ausschließlich auf Kosten des elektrischen Feldes. Bei zeitlich ansteigenden Intensitäten der Schwingungen, was z. B. angenähert zutrifft, wenn diese auf eine Resonanz zuschreiten, ist ν'' somit auch a_m'' negativ, wirkt also das magnetische Feld einer Vermehrung der Energieumsetzung entgegen. Bei zeitlich abfallenden Intensitäten, also bei gedämpften oder von einer Resonanz abfallenden Schwingungen, ist ν'' mithin a_m'' positiv, wirkt also das magnetische Feld einer Verminderung der Energieumsetzung entgegen. In diesen Sätzen blickt die verallgemeinerte Lenzsche Regel durch.

Wir können den Wellenvektor $\mathfrak{m}$ stets auf die Form bringen

$$\mathfrak{m} = \chi\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\cdot e^{\log\chi}. \tag{6}$$

Hierin soll bedeuten: $\mathfrak{l}$ einen (komplexen) Einheitsvektor und χ eine Ortsfunktion. Damit ist M auf die Form: $\mathfrak{m}_1 \cdot e^{i\Phi_1}$ gebracht mit $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{l}$ und $\Phi_1 = \Phi - i\log\chi$. Setzen wir jetzt $\mathfrak{w} + i \operatorname{grad}\log\chi = \mathfrak{u}$, so können wir den Ausdruck (4) für die Strahlung, der gilt, was man auch unter $\mathfrak{m}$ und Φ verstehen mag, auch schreiben:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{R}} = \frac{V}{4} e^{-2(\nu'' t + \Phi'')}\cdot\chi\chi^* \times \\ \Big\{2\left(\frac{\mathfrak{u}_m}{a_e} + \frac{\mathfrak{u}_m^*}{a_e^*}\right) - \left[\frac{\mathfrak{u}_m}{a_e} - \frac{\mathfrak{u}_m^*}{a_e^*}, [\mathfrak{l}\mathfrak{l}]^*\right] \\ + i\{[\mathfrak{l}^*, \operatorname{rot}\mathfrak{l}]/a_e - [\mathfrak{l}, \operatorname{rot}\mathfrak{l}^*]/a_e^*\} \\ + i\left\{\frac{\operatorname{div}(a_m\mathfrak{l})}{a}l^* - \frac{\operatorname{div}(a_m^*\mathfrak{l}^*)}{a^*}\mathfrak{l}\right\}\Big\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wegen $\operatorname{div}(a_m M) = 0$ können wir statt $\operatorname{div}(a_m\mathfrak{l})$ auch $i a_m(\mathfrak{u}\mathfrak{l})$ einführen, es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß $\mathfrak{u}$ nicht als Wellennormalenpaar angesprochen werden kann, daß also $(\mathfrak{u}\mathfrak{l})$ keineswegs im allgemeinen verschwindet. Bei nicht sehr starker Krümmung der Feldlinien ist die Strahlung im wesentlichen durch die beiden ersten Glieder in (7) bestimmt; in dieser Form findet (7) Anwendung bei Darstellung der umkehrbaren Strahlung in inhomogenen Körpern.

Die Komponente der elastischen Strahlung $\mathfrak{R}$ nach der Richtung $\mathfrak{n}$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{R}_n = -(\mathfrak{T}\dot{\mathfrak{S}}), \tag{8}$$

worin $\mathfrak{S}$ die Verrückung und $\mathfrak{T}$ die Spannung mißt. Nun ist die Spannung in einer Welle von der Form:

$$\mathfrak{T} = {}^1/_2\cdot\{\mathfrak{t}\cdot e^{i\Phi}\cdot e^{i\nu t} + \mathfrak{t}^*\cdot e^{-i\Phi^*}\cdot e^{-i\nu^* t}\},$$

so daß das Zeitmittel der genannten Strahlungskomponente in einer elastischen Scherungswelle

$$\mathfrak{S}_g = {}^1/_2\cdot\{\mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi}\cdot e^{i\nu t} + \mathfrak{f}^*\cdot e^{-i\Phi^*}\cdot e^{-i\nu^* t}\} \text{ ist:}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_{gn} = e^{i(\nu-\nu^*)t}\cdot e^{i(\Phi-\Phi^*)}\, 1/4i\cdot\{\nu(\mathfrak{t}_g^*\mathfrak{f}) - \nu^*(\mathfrak{t}_g\mathfrak{f}^*)\}, \tag{9}$$

und in einer elastischen Verdünnungswelle

$$\mathfrak{S}_v = {}^1/_2\cdot\{\mathfrak{s}\cdot e^{i\Phi}\cdot e^{i\nu t} + \mathfrak{s}^*\cdot e^{-i\Phi^*}\cdot e^{-i\nu^* t}\}$$

lautet:

$$\overline{\mathfrak{R}}_{vn} = e^{i(\nu-\nu^*)t}\cdot e^{i(\Phi-\Phi^*)}\cdot 1/4i\cdot\{\nu(\mathfrak{t}_v^*\mathfrak{s}) - \nu^*(\mathfrak{t}_v\mathfrak{s}^*)\}. \tag{10}$$

Dem § 4 der oben genannten Grundlegung I entnehmen wir unter B

$$\mathfrak{t}_g = \varepsilon_g\{-i(\mathfrak{n}\mathfrak{f})\mathfrak{w} - i(\mathfrak{n}\mathfrak{w})\mathfrak{f} + [\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{f}] + 2(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{f}\} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_v = \sigma\{-i\{\mathfrak{w}^2 - i\operatorname{div}\mathfrak{w}\}(\varepsilon_v - {}^2/_3\varepsilon_g)\mathfrak{n} \\ + 2\varepsilon_g\{(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{w} - i(\mathfrak{n}\mathfrak{w})\mathfrak{w}\}\},\end{aligned} \tag{12}$$

worin Gebrauch gemacht ist von der früher[1]) bewiesenen Beziehung $\mathfrak{s} = \sigma\cdot\mathfrak{w}$, wenn σ eine Konstante bezeichnet. Damit erhalten wir für die Strahlung in einer elastischen Scherungswelle:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{R}} = e^{-2(\nu'' t + \Phi'')}\cdot\varepsilon_g/4\cdot\{(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)\{\nu^*\mathfrak{w} + \nu\mathfrak{w}^*\} \\ + [\nu^*\mathfrak{w} - \nu\mathfrak{w}^*, [\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*]] + i\{\nu^*[\mathfrak{f}^*\operatorname{rot}\mathfrak{f}] - \nu[\mathfrak{f}\operatorname{rot}\mathfrak{f}^*]\} \\ + 2i\{\nu^*(\mathfrak{f}^*\nabla)\mathfrak{f} - \nu(\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{f}^*\} \\ + \{\nu(\mathfrak{w}^*\mathfrak{f}^*)\mathfrak{f} + \nu^*(\mathfrak{w}\mathfrak{f})\mathfrak{f}^*\}\},\end{aligned} \tag{13}$$

wenn wir die Identität

$$\nu^*(\mathfrak{f}^*\mathfrak{w})\mathfrak{f} + \nu(\mathfrak{f}\mathfrak{w}^*)\mathfrak{f}^* = [\nu^*\mathfrak{w} - \nu\mathfrak{w}^*, [\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*]] + \nu(\mathfrak{f}^*\mathfrak{w}^*)\mathfrak{f} + \nu^*(\mathfrak{f}\mathfrak{w})\mathfrak{f}^*$$

einführen. Durch Umformung des vorletzten Gliedes in (13) geht dieser Ausdruck über in

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{R}} = e^{-2(\nu'' t + \Phi'')}\cdot\varepsilon_g/4\cdot\{(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)\{\nu^*\mathfrak{w} + \nu\mathfrak{w}^*\} \\ + [\nu^*\mathfrak{w} - \nu\mathfrak{w}^*, [\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*]] + i\{\nu[\mathfrak{f}^*, \operatorname{rot}\mathfrak{f}] - \nu^*[\mathfrak{f}, \operatorname{rot}\mathfrak{f}^*]\} \\ - i(\nu - \nu^*)\operatorname{grad}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*) + i(\nu + \nu^*)\operatorname{rot}[\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*] \\ + i\{\nu\operatorname{div}\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f}^* - \nu^*\operatorname{div}\mathfrak{f}^*, \mathfrak{f}\}\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Wenn $\mathfrak{w}$ das Wellennormalenpaar und $\mathfrak{f}$ der Wellenvektor sein soll, verschwindet in diesem sechsgliedrigen Ausdruck das letzte Glied, indem $(\mathfrak{f}\mathfrak{w}) = 0 = -i\operatorname{div}\mathfrak{f}$ ist.

Selbst bei schwach gekrümmten Feldlinien, in welchem Fall nur die zwei ersten Glieder wesentlich sind, unterscheidet sich die Strahlung elastischer Scherungswellen im Bau von der Strahlung elektromagnetischer Wellen, indem das zweite Glied in (14) das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie das entsprechende unter (4). Im übrigen

1) K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen, diese Zeitschr. **17**, **302**, **1916**.

wäre zu dem Ausdruck (14) ähnliches zu sagen wie oben zur elektromagnetischen Strahlung.

Für die Strahlung in einer elastischen Verdünnungswelle kommt aus (10) mit Benutzung von (12)

$$\bar{\mathfrak{R}} = e^{-2(\nu'' t + \vartheta'')} \cdot \sigma\sigma^*/4 \cdot \Big\{ 2\varepsilon_g (\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) \{\nu^* \mathfrak{w} + \nu \mathfrak{w}^*\} + (\varepsilon_v - {}^2/_3 \varepsilon_g) \{(\mathfrak{w}^{*2} - i \operatorname{div} \mathfrak{w}^*) \nu \mathfrak{w} + (\mathfrak{w}^2 + i \operatorname{div} \mathfrak{w}) \nu^* \mathfrak{w}^*\} - i 2 \varepsilon_g \{\nu (\mathfrak{w} \nabla) \mathfrak{w}^* - \nu^* (\mathfrak{w}^* \nabla) \mathfrak{w}\} \Big\} \cdot$$

Diesen dreigliedrigen Ausdruck können wir im letzten Glied noch umformen, so daß schließlich ist

$$\bar{\mathfrak{R}} = e^{-(2\nu'' t + \vartheta'')} \cdot \sigma\sigma^*/4 \cdot \Big\{ 2\varepsilon_g (\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) \{\nu^* \mathfrak{w} + \nu \mathfrak{w}^*\} + (\varepsilon_v - {}^2/_3 \varepsilon_g) \{(\mathfrak{w}^{*2} - i \operatorname{div} \mathfrak{w}^*) \nu \mathfrak{w} + (\mathfrak{w}^2 + i \operatorname{div} \mathfrak{w}) \nu^* \mathfrak{w}^*\} - 2\varepsilon_g (\nu + \nu^*) i \{\operatorname{div} \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{w} - \operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{w}^*\} + 2\varepsilon_g (\nu + \nu^*) i \operatorname{rot} [\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*] - 2\varepsilon_g i (\nu - \nu^*) \operatorname{grad} (\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) \Big\} \qquad (15)$$

In homogenen Körpern ist $\mathfrak{w}^2 + i \operatorname{div} \mathfrak{w}$ gleich der Wellencharakteristik $a = \nu^2 D / (\varepsilon_v + {}^4/_3 \varepsilon_g)$ zu setzen.

Die Strahlung liegt, wenn wir von dem letzten Glied absehen, das bei permanenten Schwingungen verschwindet, in der Ebene des Wellennormalenpaares, falls $([\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*], \operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*]) = 0$ ist, und fällt nur in besonderen Fällen mit der Isophasennormale zusammen.

In früheren Veröffentlichungen habe ich dargetan, daß der Brechungsexponent nur in konservativen Körpern verwendbar sei. Beim Beweise setzte ich Planwellen in homogenen Körpern voraus, und zeigte, daß in wellenlöschenden Körpern nur in ganz besonderen Fällen eine Größe, die man Brechungsexponenten nennen mag, Konstante in einem Brechungsgesetz sein kann. Jetzt komme ich von allgemeinstem Gesichtspunkt auf die Sache zurück. Da im allgemeinen schon in konservativen und homogenen Körpern eine Isodynamennormale auftritt und infolgedessen auch eine Strahlabweichung von der Isophasennormale, (falls nicht gerade die Welle strichpolarisiert ist), da außerdem im allgemeinen die Strahlrichtung vom Polarisationszustand der Welle abhängt, so kann von einer Beherrschung der Brechungsverhältnisse durch einen Brechungsexponenten keine Rede sein. Der oben erwähnte Gültigkeitsbezirk des Brechungsexponenten ist also noch enger zu ziehen, indem ein Brechungsexponent nur insofern in konservativen und homogenen Körpern die Brechung beherrscht als die Wellen umkehrbar angesehen werden können, oder was dasselbe besagt, Planwellen sind.

Gießen, Anfang Juli 1916.

(Eingegangen 10. Juli 1916.)

Über die Gleichrichterwirkung des Siliziums und seine Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe.

Von Franz Fischer und Ernst Baerwind.

In Band 14, S. 439ff. (1913) dieser Zeitschrift berichteten wir und Richard Lepsius über den charakteristischen Unterschied verschiedener technisch höchstprozentiger Siliziumsorten in ihrem thermoelektrischen Verhalten. Über die Fortsetzung dieser Arbeit, die sich hauptsächlich auf chemisch-analytischem und synthetischem Gebiet bewegte, berichten wir in der „Zeitschrift für anorganische Chemie"[1]). Hier aber sei das eigenartige Verhalten geschildert, welches die thermoelektrisch verschiedenen Siliziumsorten als Gleichrichter zeigen.

Durch ein Gespräch mit Herrn Prof. O. von Baeyer wurden wir veranlaßt, die vorhandenen Siliziumsorten auf ihre Wirkung als Gleichrichter hin zu untersuchen.

Als Gleichrichterwirkung bezeichnet man die Erscheinung, daß eine Kombination zweier verschiedener Substanzen den elektrischen Strom in der einen Richtung besser leitet als in der anderen; im allgemeinen ist es für die Gleichrichterwirkung wesentlich, daß die beiden Substanzen sich an der Kontaktstelle nur locker berühren. Als solche Kombinationen sind bekannt: Metall-Braunstein, Metall-Kupferkies, Metall-Kupferglanz, Metall-Tellur und andere mehr. Auch von Silizium weiß man, daß es in Kombination mit irgendeinem der typischen Metalle als Gleichrichter wirkt.

Legt man an die Enden einer dieser gleichrichtenden Kombinationen eine Wechselstromspannung, so zeigt ein in die Leitung eingeschaltetes Galvanometer einen Gleichstrom an. Schickt man einen Gleichstrom durch die Kombination, so zeigt das Galvanometer bei gleicher angelegter Spannung eine verschieden hohe Stromstärke an, je nach der Richtung, in der man den Strom durchsendet. Wir stellten nur mit Gleichstrom Versuche an.

Die Kontaktstelle wurde gebildet, indem ein 0,3 mm dicker Golddraht, der in einem Feilkloben eingespannt war, gegen das ebenfalls in einem Feilkloben eingespannte Siliziumstück gepreßt wurde. Dieser elastische Kontakt erwies sich als genügend konstant, falls den Arbeitstisch keine allzu starken Erschütterungen trafen. Die Schaltung der Gleichstromquelle, des Gleichrichters und der Meßapparate geht aus der Fig. 1 hervor. Der Widerstandskasten W, der im Nebenschluß zu dem Galvanometer

1) Vgl. auch Baerwind, Diss. Technische Studien Heft 9 Verlag von Gerhard Stalling, Berlin u. Oldenburg.

liegt, gestattet es, die Empfindlichkeit des Galvanometers herabzusetzen.

Es zeigte sich nun, daß die technischen Siliziumsorten, die sich thermoelektrisch scharf voneinander unterscheiden, auch in ihrer Gleichrichterwirkung voneinander verschieden sind. Die Gleichrichterkombinationen mit thermoelektrisch positiven Siliziumsorten leiten besser, wenn der Strom vom Silizium zum Gold fließt, als bei umgekehrter Stromrichtung. Die Gleichrichter mit thermoelektrisch negativen Sorten verhalten sich entgegengesetzt; sie leiten besser, wenn der Strom vom Gold zum Silizium fließt. Der stärkere Gleichstrom, bzw. der gleichgerichtete Wechselstrom fließt also gerade entgegengesetzt dem Thermostrom, der entstehen würde, wenn man die Kontaktstelle erhitzte[1]).

Die Stärke der Gleichrichterwirkung hängt außer vom Material auch von der Stromstärke

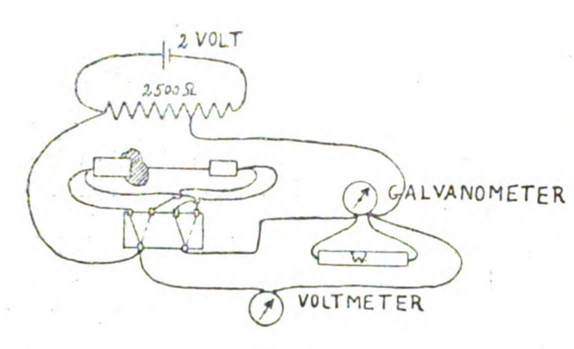


Fig. 1.

ab. Der stärkste Gleichrichtereffekt, der beobachtet wurde, war 28 : 1, d. h. das Galvanometer zeigte in der einen Richtung einen 28fach größeren Strom an als in der anderen. Diese Gleichrichterwirkung ist bedeutend größer als die von Austin (l. c.) angegebene Gleichrichterwirkung an der Silizium-Stahl-Kombination. Im allgemeinen wird die Gleichrichterwirkung mit der Zunahme der Stromstärke größer. Als Beispiel hierfür seien zwei Reihen von Messungen gegeben, die in der in Fig. 1 angegebenen Weise vorgenommen wurden. Zur ersten Reihe diente das thermoelektrisch positive Silizium von Deutsch-Matrei.

Tabelle I.

Angelegte Spannung	Ausschlag des Galvanometers bei der Stromrichtung a) vom *Au* zum *Si*	b) vom *Si* zum *Au*	Ohm im Nebenschluß z. Galvanometer	Stromstärke in 10^{-6} Amp. a	b	Ausschlag b / Ausschlag a
0,14	2	3,5		5,4	9,4	1,8
0,28	4,1	12,0		10,9	32,2	2,9
0,42	2,2	9,8	190	17,5	77,7	4,5
0,56	2,6	15,1	150	24,3	141	5,8
0,70	1,5	10,2	50	34,0	231	6,8
0,84	0,9	6,8	20	47,4	358	7,6
0,98	1,2	9,5	20	63,2	499	7,9
1,12	1,4	13,0	20	73,8	685	9,3
2,0	1,0	12,1	5	203	2450	12,1

Der zweiten Meßreihe wurde das thermoelektrisch negative Silizium von der Deutschen Gold- und Silberscheideanstalt zugrunde gelegt:

Tabelle II.

Angelegte Spannung	Ausschlag des Galvanometers bei der Stromrichtung a) vom *Au* zum *Si*	b) vom *Si* zum *Au*	Ohm im Nebenschluß z. Galvanometer	Stromstärke in 10^{-4} Amp. a	b	Ausschlag a / Ausschlag b
0,14	4,0	1,8	10	4,1	1,9	2,2
0,28	16,6	3,9	10	17,1	4,0	4,3
0,42	11,6	1,5	2	58,3	7,5	7,8
0,56	14,0	1,2	1	140	12,0	11,6
0,70	13,2	0,9	0,5	264	18,2	14,7
0,84	—	—	—	—	—	—
0,98	15,0	0,9	0,3	500	30,2	16,7
1,12	13,3	0,7	0,2	665	25,0	19,0
2,0	15,2	0,75	0,05	3040	150	20,3

Bei der positiven Siliziumsorte beobachtet man also größere Stromstärken, wenn der Strom vom Silizium zum Golde fließt; bei dem negativen Silizium ist die Stromstärke größer, wenn der Strom vom Gold zum Silizium fließt. Ferner zeigen diese beiden Tabellen, wie die Gleichrichterwirkung bei beiden Siliziumsorten mit wachsender Stromstärke zunimmt, und zwar bei der negativen Sorte noch stärker als bei der positiven.

Bei den thermoelektrisch einheitlichen Sorten war auch durchweg die Gleichrichterwirkung eindeutig in der entsprechenden Richtung. Die Sorten dagegen, die thermoelektrisch zwar im allgemeinen positiv oder negativ waren, aber ab und zu auch einen entgegengesetzten Wert zeigten, gaben auch als Gleichrichter neben dem normalen Effekt bisweilen einen umgekehrten. Es mußte nun, auch im Hinblick auf die schon von Austin einmal beobachtete Ausnahme, als sehr interessant erscheinen, zu untersuchen, ob wirklich ein regelmäßiger Zusammenhang zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung

1) Diese Tatsache hatte übrigens Austin schon einmal an der Kombination Silizium-Stahl beobachtet (Austin, Bulletin of the Bureau of Standards 5, 1908, Nr. 1). Austin benutzte bei seinen Versuchen offenbar nur eine Siliziumsorte, und zwar eine nicht vollkommen homogene. Denn er schreibt, daß in seinem Silizium-Stahl-Gleichrichter der stärkere Gleichstrom vom Stahl zum Silizium floß, daß dagegen „curiously enough“ eine Probe vom selben Stück umgekehrte Gleichrichterwirkung und „still more curiously“ auch eine der normalen Richtung entgegengesetzte Thermokraft zeigte.

bei allen Siliziumsorten vorlag. Hierzu war es notwendig, die Bestimmung der Thermokraft und die der Gleichrichterwirkung in der gleichen Apparatur an denselben Berührungsstellen vorzunehmen.

Das zu untersuchende Siliziumstück wurde in einen Feilkloben fest eingespannt und der 1,2 mm dicke Platindraht, der am unteren Ende zu einer Spitze ausgehämmert war, von oben auf das Silizium herabgelassen. Der Platindraht war durch eine Bohrung in einem Eisenstück geführt, wodurch der Draht festen Halt bekam, aber ohne in seiner Ausdehnung beim Erwärmen gehindert zu sein. Von dem oberen Ende des Platindrahts führte eine leicht bewegliche Drahtverbindung zu dem feststehenden Teil der Apparatur. Diese wird durch Fig. 2 dargestellt. Die

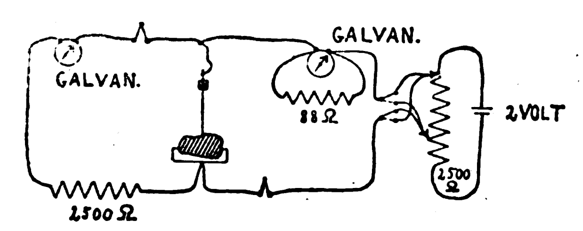


Fig. 2.

beiden Ausschalter ermöglichten es, ohne die gesamte Anordnung zu erschüttern, den rechten oder den linken Stromkreis einzuschalten. Der rechte Stromkreis diente zur Messung der Gleichrichterwirkung, der linke zur Messung der Thermokraft. Die Erwärmung der Kontaktstelle Platin-Silizium wurde mit Hilfe einer kleinen Flamme und eines Lötrohrs vorgenommen. Dadurch konnte man die Erhitzung gerade auf die Berührungsstelle von Platindraht und Siliziumstück richten, ohne die gesamte Anordnung sehr zu erwärmen. Wurde jetzt nach der Bestimmung der Thermokraft die Gleichrichterwirkung zum zweitenmal gemessen, so ergab sich regelmäßig der auch zuerst erhaltene Wert. Die Berührungsstelle war also trotz der Erwärmung mit der Stichflamme die gleiche geblieben.

Bei einer sehr großen Zahl von Messungen, die jetzt an fast allen vorhandenen Siliziumsorten vorgenommen wurden, zeigte sich nun klar die Parallelität zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung. Hatten die Messungen an den homogenen Sorten diesen Zusammenhang schon in der Anordnung von Fig. 1 erkennen lassen, so war er hier nun besonders auffallend bei den Sorten, die sowohl positiven wie negativen Wert der Thermokraft gaben. Der positiven Thermokraft entsprach regelmäßig ein stärkerer Gleichstrom in der Richtung vom Silizium zum Gold, der negativen Thermokraft ein stärkerer Gleichstrom in der umgekehrten Richtung. Es sei noch besonders erwähnt, daß auch alle die Siliziumproben, die bei den später beschriebenen Umwandlungsversuchen erhalten worden waren und die ja häufig neben den regelmäßigen Werten der Thermokraft noch einige entgegengesetzte aufwiesen, in dieser Apparatur auf den Zusammenhang zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung hin untersucht wurden; sie zeigten durchweg die beschriebene Parallelität.

In zwei Fällen unter allen Versuchen nur entsprach bei der Untersuchung eines ganz besonders inhomogenen Stückes einer Gleichrichterwirkung nicht die normale Thermokraft, sondern es war eine, allerdings ganz geringe, Thermokraft im entgegengesetzten Sinne zu beobachten. Diese Ausnahme ist wohl darauf zurückzuführen, daß die Platinspitze noch nicht fein genug war für dieses ganz besonders inhomogene Material, und daß sie in diesen beiden Fällen sowohl mit positivem wie negativem Silizium zu gleicher Zeit in Berührung war. — Die weit überwiegende Überzahl aller anderen Versuche jedoch zeigte deutlich die Parallelität zwischen Gleichrichterwirkung und Thermokraft.

Die Erscheinung der Gleichrichterwirkung ist noch in keiner Weise erklärt.

Man könnte meinen, daß die beobachtete Gleichrichterwirkung gar nichts mit der inneren Zusammensetzung des Siliziums, von der ja die Thermokraft jedenfalls abhängt, zu tun habe, sondern als reine Oberflächenerscheinung nur von der Art des Kontakts bedingt sei. Es könnte die Gleichrichterwirkung z. B. auf einer der Siliziumoberfläche anhaftenden Feuchtigkeitsschicht beruhen und die Gegensätzlichkeit der Gleichrichterwirkung bei den beiden Siliziumarten durch ein verschiedenes Polarisationspotential beider Sorten zu erklären sein. Es wurde nun eine Reihe von Versuchen unternommen, um diese Möglichkeit bei einer absichtlich hergestellten Flüssigkeitsschicht an der Oberfläche des Siliziums zu prüfen. Zwischen Siliziumstück und Golddraht wurde ein Tropfen Wasser, dem auf 100 ccm ein Tropfen Schwefelsäure zugesetzt war, gebracht. Es war dann stets eine Gleichrichterwirkung infolge der Polarisation zu beobachten, aber diese Gleichrichterwirkung lag stets in der gleichen Richtung, einerlei, welche Siliziumsorte (oder auch höherprozentige Ferrosiliziumsorte) benutzt wurde. Sobald der Golddraht aber die Flüssigkeitsschicht durchbrach und mit dem Siliziumstück in direkte Berührung kam, zeigte die Gleichrichterwirkung wieder den typischen Unterschied zwischen positivem und negativem Silizium. Dieser beruht also sicher nicht auf einer Polarisations-

erscheinung in einer der Siliziumoberfläche anhaftenden Feuchtigkeitsschicht.

Die Thermokraft hat man zwar zur Erklärung der Gleichrichterwirkung schon herangezogen. So hat Tissot[1]) für einige Substanzen einen Zusammenhang zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung in der Weise behauptet, daß der durch die Joulesche Erwärmung der Berührungsstelle von Silizium und Metalldraht entstehende Thermostrom sich in der einen Richtung zu dem durch den Gleichrichter gesandten Strom addiert, in der anderen Richtung dem primären Strom entgegenwirkt und ihn so vermindert. Für Silizium aber gilt diese Erklärung sicher nicht, denn bei beiden Sorten fließt der stärkere Gleichstrom gerade dem Strom, den die Thermokraft hervorrufen würde, entgegen. Tissot nennt auch Silizium nicht unter den Substanzen, für die dieser Zusammenhang zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung besteht; und ebenso rechnet C. W. Pierce[2]) Silizium zu den Substanzen, bei denen eine Erklärung der Gleichrichterwirkung durch einen thermoelekrischen Effekt nicht möglich sei.

Ohne nun aus diesen Versuchen eine Theorie über den Zusammenhang zwischen Gleichrichterwirkung und Thermokraft oder Peltiereffekt aufstellen zu wollen, möchten wir nur der Meinung Pierces entgegentreten, daß ein Zusammenhang zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung beim Silizium unwahrscheinlich sei. Die deutliche Parallelität zwischen beiden Erscheinungen geht aus den angeführten Versuchen klar hervor, wenn wir auch zurzeit über ihren ursächlichen Zusammenhang nur Vermutungen haben können.

1) Zenneck, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie. 2. Aufl. Stuttgart 1913, S 324 ff.
2) Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen. 1905, S. 774 ff.

Charlottenburg, Elektrochemisches Laboratorium der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 8. Juli 1916.)

Über die Brownsche Bewegung elektrisch geladener Teilchen in Gasen.

Von A. Schidlof und A. Targonski.

Mehrere in der letzten Zeit veröffentlichte Abhandlungen, namentlich die der Herren E. Schrödinger[1]) und M. v. Smoluchowski[2]), ferner der Herren D. Konstantinowsky[3]), H. Fletcher[1]) und F. Zerner[2]) führen uns zu der Annahme, daß dem im obigen Titel genannten Gegenstande von verschiedenen Seiten reges Interesse entgegengebracht wird. Einige der in den aufgezählten Arbeiten erwogenen Gesichtspunkte sind vorläufig als in experimentaler Hinsicht noch nicht geklärt zu betrachten. Da nun auch wir in einer vor einigen Monaten ausgeführten Untersuchung uns mit eben denselben Fragen beschäftigt haben, möchten wir auch an dieser Stelle unsere Ansichten äußern in der Hoffnung, daß ein kurzer zusammenfassender Bericht über unsere Versuchsergebnisse manchem vielleicht nicht unwillkommen sein dürfte.

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. 16, 289, 1915.
2) v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 16, 318, 1915.
3) D. Konstantinowsky, diese Zeitschr. 16, 369, 1915.

I. Versuchsanordnung.

Bei unseren Beobachtungen der Brownschen Bewegung von Öltröpfchen, sowie von Zinn- und Kadmiumpartikeln in Luft bei Atmosphärendruck oder in verdünnter Luft sowie in einigen anderen Gasen haben wir im wesentlichen die gleiche Versuchsanordnung benützt wie bei früheren Experimenten, über welche hier schon berichtet worden ist[3]). Um die Dauer der Einzelbeobachtungen abzukürzen und gleichzeitig die Ausführung längerer Beobachtungsreihen zu erleichtern, haben wir meistens eine stärkere Objektivvergrößerung angewendet, während das bisher benützte Okular beibehalten wurde.

Da es zu diesem Zwecke nötig war, das Fernrohrobjektiv näher an den Kondensator heranzubringen als mit dem früher verwendeten Apparate möglich gewesen wäre, ließen wir einen kleineren Plattenkondensator anfertigen, der wie der frühere in einem luftdicht schließenden, gußeisernen Gehäuse untergebracht war. Die Stahlplatten des neuen Kondensators hatten einen Durchmesser von 5 cm und einen Abstand von genau 0,5 cm. Das Beleuchtungsobjektiv konnte bis 8 cm an den Kondensatormittelpunkt herangebracht werden, und das Beobachtungsobjektiv befand sich in einem Abstand von 7 cm. Da nun die Öffnungen des Kondensators die gleiche Größe hatten, aber besser ausgenutzt werden konnten, wie bei den früheren Versuchen, so wurde die mittlere Beobachtungsapertur von 0,05 auf 0,151 und die Beleuchtungsapertur von 0,1 auf 0,145 erhöht. Für das Produkt der beiden Aperturen ergibt sich ein Gewinn von:

$$\frac{0{,}141 \times 0{,}151}{0{,}1 \times 0{,}05} = 4{,}25.$$

1) H. Fletcher, diese Zeitschr. 16, 316, 1915.
2) F. Zerner, diese Zeitschr. 16, 10, 1915; 17, 165, 1916.
3) A. Schidlof und A. Karpowicz, diese Zeitschr. 16, 42, 1915; A. Schidlof, diese Zeitschr. 16, 372, 1915.

Wäre die von Siedentopf und Zsigmondy zur Berechnung der Sichtbarkeitsgrenze ultramikroskopischer Partikeln verwendete Formel[1]) auf unsere optische Anordnung anwendbar, so hätte man jetzt mindestens viermal kleinere Partikeln beobachten können wie vorher. Das war aber tatsächlich nicht der Fall; es wurden trotz Anwendung der verschiedensten Zerstäubungsmethoden niemals kleinere Teilchen beobachtet als in den früheren Versuchen. Dies bestätigt die schon früher aufgestellte und begründete Behauptung, daß die erwähnte Formel auf unsere optische Anordnung nicht anwendbar ist[2]).

Die Vergrößerung der Aperturen ist nichtsdestoweniger vorteilhaft, weil sie die Beobachtung der Partikeln erleichtert und die Ermüdung des Beobachters bei langen Serien verringert.

Die Öltröpfchen wurden mittels eines gläsernen Zerstäubers hergestellt.

Das Zinn wurde in einem eisernen Gefäß über den Schmelzpunkt erhitzt und dann in ähnlicher Weise, wie das Öl, meistens in einer Atmosphäre von gereinigtem (von Sauerstoff befreitem und getrocknetem) Stickstoff zerstäubt. Kadmiumpartikeln erhielten wir durch Kondensation von Kadmiumdämpfen gewöhnlich in einer Wasserstoffatmosphäre. Bei manchen Versuchen wurde dem Wasserstoff absichtlich eine gewisse Menge Luft beigefügt.

Einige Beobachtungen an Öltröpfchen wurden in verdünnter Luft bei einem Druck von 15 bis 70 mm ausgeführt.

II. Beobachtungsmethode.

Bekanntlich läßt sich die elementare Ladung der Gasionen durch Fall- und Steigversuche an geladenen Partikeln feststellen: Bezeichnet man mit $\overline{\lambda^2}$ das mittlere Verschiebungsquadrat in der Zeiteinheit, welches sich aus der Beobachtung der Brownschen Bewegung der Partikel ergibt, mit N die sogenannte Loschmidtsche Zahl, mit R die Gaskonstante, mit T die absolute Temperatur, so besteht zwischen diesen Größen und der „Beweglichkeit" B der Partikel die bekannte Einsteinsche Gleichung (1), während anderseits B mit der Fallgeschwindigkeit v_1 im Felde der Schwerkraft, mit der Steiggeschwindigkeit v_2 in einem elektrischen Felde von der Feldstärke F und mit der Gesamtladung ne der Partikel durch eine zweite Gleichung (2) verknüpft ist. Man hat also:

$$B = \frac{N}{2RT}\overline{\lambda^2} \qquad (1)$$

$$B = \frac{v_1 + v_2}{neF}. \qquad (2)$$

Die Elimination von B zwischen diesen zwei Gleichungen dürfte im allgemeinen allerdings bloß bei kugelförmigen Partikeln gestattet sein, weil bloß in diesem Falle die Fall- und Steigbeweglichkeit (Gleichung 2) von der Einstellung der Partikel zur Bewegungsrichtung unabhängig ist. Wir wollen aber vorläufig diese Bedingung als erfüllt ansehen und die beiden Gleichungen zur Berechnung der Ladung der Gasionen E benutzen.

Bedeutet e die sogenannte Elektronenladung — die Gesamtladung ist stets ein ganzes Vielfaches von e, und zwar ist bei unseren Versuchen n stets eine kleine Zahl — so ist:

$$E = Ne.$$

Somit ergibt sich aus (1) und (2)

$$E = \frac{2RT(v_1 + v_2)}{nF\overline{\lambda^2}}. \qquad (3)$$

Wie zuerst Herr E. Schrödinger[1]) in einwandsfreier Weise bewiesen hat, kann $\overline{\lambda^2}$ aus den Fall- und Steigversuchen mittels einer von E. Weiss[2]) angegebenen höchst einfachen Formel (4) berechnet werden. Prinzipiell kann man die Brownschen Schwankungen sowohl an den Fall- als auch an den Steigdauern beobachten, doch erleiden die letzteren immer elektrische Störungen[3]). Aus diesem Grunde haben wir ausschließlich die Schwankungen der Falldauern beobachtet.

Bezeichnet man mit t die in einer Einzelbeobachtung auftretende Falldauer, mit t_1 die mittlere Falldauer, mit L die Fallstrecke und mit m die Zahl der Einzelbeobachtungen, so gilt:

$$\overline{\lambda^2} = \frac{L^2}{mt_1^2}\sum_1^m \frac{(t - t_1)^2}{t}. \qquad (4)$$

Wir wollen nun auch in der Gleichung (3) v_1 und v_2 durch die Länge L und die mittlere Falldauer t_1 sowie die mittlere Steigdauer t_2 ersetzen, ferner an Stelle von F die Potentialdifferenz in Volt V und den Abstand der Kondensatorplatten d einführen. Man erhält so die Formel:

$$E = \frac{600\,RTdL}{nV\overline{\lambda^2}}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) \qquad (5)$$

Nun ist der wahrscheinliche Fehler bei einer Bestimmung von λ^2 aus m Einzelbeobachtungen nach Herrn E. Schrödinger:

1) Siedentopf und Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10, 1, 1903.
2) A. Schidlof, l. c.

1) E. Schrödinger, l. c.
2) E. Weiss, Wien. Ber. CXX, IIa, 1021, 1911.
3) A. Targonski, Arch. d. sc. phys. et nat. (Genf) 41, 181, 269, 357, 1916.

$$\frac{\overline{\Delta \lambda^2}}{\overline{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}. \qquad (6)$$

Somit ist der Wert von E selbst bei einer großen Zahl von Bestimmungen mit einem relativ großen Fehler behaftet; beispielsweise ist der Fehler noch 1,4 Proz. für $m = 10000$. Dagegen kann man die mittleren Fall- und Steigdauern den „wahren" gleichsetzen, da der wahrscheinliche Fehler sich aus der (vereinfachten) Schrödingerschen Formel zu:

$$\frac{\overline{\Delta t_1}}{t_1} = \sqrt{\frac{\overline{\lambda^2}}{L v_1 m}} \qquad (7)$$

ergibt, eine Größe die bei der hier erstrebten Annäherung praktisch gleich Null zu setzen ist, auch wenn die Zahl der Beobachtungen nicht sehr groß ist.

Abgesehen von der Bestimmung des Ladungsquantums E bezweckten wir bei dieser Untersuchung, uns einige Aufschlüsse über die Gestalt und die Größe der beobachteten ultramikroskopischen Partikeln zu verschaffen. Dabei bedienten wir uns einer ähnlichen Methode wie die Herren E. Meyer und W. Gerlach[1]). Da, wie frühere Versuche gezeigt hatten[2]), die Stokes-Cunninghamsche Formel auf Öltröpfchen anwendbar ist in der Form:

$$B = \frac{1 + \frac{0{,}87\, l}{a}}{6 \pi \eta a}, \qquad (8)$$

wo a den Halbmesser des (kugelförmigen) Teilchens bedeutet, l die mittlere Weglänge der Gasmolekeln und η den Reibungskoeffizienten des Gases, so kann man die Gleichungen (2) und (8) zur Bestimmung der Elektronenladung e verwenden, weil man ja außerdem noch die Dichte σ der Partikel kennt und somit die Fallgleichung

$$\mathfrak{m} g = \frac{4 \pi a^3 \sigma g}{3} = \frac{v_1}{B} \qquad (9)$$

zur Berechnung des Halbmessers a benutzen kann ($\mathfrak{m}$ bedeutet die Masse der Partikel und g die Fallbeschleunigung).

Bei Öltröpfchen haben wir auf diese Weise stets Werte von e erhalten, die mit dem bekannten Millikanschen[3]) gut oder wenigstens ungefähr übereinstimmen, bei den Zinn- und Kadmiumpartikeln aber ergeben sich so ausnahmslos bedeutende Unterschreitungen des Elementarquantums der Ladung, sogenannte Subelektronen.

Nun sind aber unserer Meinung nach solche Subelektronen keine objektive Erscheinung, sondern kommen nur daher, daß entweder die Dichte der Partikel unrichtig angesetzt wird, oder aber daß ihre Gestalt nicht kugelförmig ist, in welchem letzteren Falle beide Gleichungen (8) und (9) ihre Bedeutung verlieren. Man kann aber doch diese Gleichungen dazu benutzen, um für Körperchen von unbekannter Form unter Annahme des Wertes

$$e = 4{,}774 \times 10^{-10} \text{ E.S.E.}$$

der elementaren Ladung aus (2), (8) und (9) eine Größe σ zu berechnen, welche wir die „scheinbare" Dichte nennen wollen. Natürlich fällt so für Körper von gleicher Dichte aber von verschiedener Gestalt die „scheinbare" Dichte verschieden aus.

III. Die Elektronenladung nach Beobachtungen an Öltröpfchen.

Zunächst sollen nun die Werte der Elektronenladung e angegeben werden, die wir für die beobachteten Öltröpfchen mittels der Gleichungen (2), (8) und (9) berechnet haben. Außer der Protokollnummer und dem Werte von e ist für jede Partikel die mittlere Falldauer und der Halbmesser a angegeben. Bei den in verdünnter Luft ausgeführten Versuchen ist außerdem noch der Gasdruck p, bei welchem beobachtet wurde, beigefügt. Für die zu einer Gruppe vereinigten Beobachtungen war die Fallstrecke L stets die gleiche.

Öltropfen. Erste Gruppe.
$L = 0{,}285$ cm

Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.	Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.	Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.
155	30,34	8,76	4,89	202	79,24	5,24	4,74	189	142,88	3,83	5,30(!)
153	42,94	7,41	4,63	158	81,13	5,20	4,96	195	159,22	3,59	5,04
152	44,22	7,20	5,10	194	86,24	4,31	4,76	167	174,00	3,43	4,90
165	53,34	6,50	4,71	200	100,94	4.61	5,68(!)	159	194,32	3,21	5,05
192	53,92	6,49	4,89	193	109,94	4,41	4,61	198	218,38	3,22	5,43(!)
161	61,36	6,05	4,64	160	119,26	4,23	4,81	197	224,60	3,02	5,64(!)
201	66.22	5,79	4,61	170	120,20	4,22	4,40	166	227,72	2,95	4,55
199	74,32	5,45	4,81	203	123,10	4,15	5,39(!)	184	461,80	1,96	5,42(!)
168	78,80	5,28	5,14	188	138,38	3,89	5,15	191	514,60	1,84	4,94

1) E. Meyer und W. Gerlach, Elster und Geitel-Festschrift 1915. — 2) A. Schidlof und J. Murzynowska, C. R. **156**, 304, 1913. — 3) R. A. Millikan, Phys. Rev. **2**, 109, 1913.

Öltropfen. Zweite Gruppe.
$L = 0{,}05075$ cm

Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.	Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.	Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.
211	7,87	7,19	4,74	215	16,48	4,84	4,56	206	24,67	3,87	4,63
212	10,90	6,01	5,53 (!)	218	17,10	4,75	4,66	217	29,80	3,51	4,78
205	14,14	5,23	4,84	213	18,35	4,57	4,81	207	48,62	2,66	4,66
216	15,60	5,00	4,58	214	19,83	4,37	4,65	208	71,63	2,13	5,72 (!)
210	15,64	4,97	4,71	209	23,49	4,00	4,58				

Öltropfen in verdünnter Luft.
$L = 0{,}1015$ cm

Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.	p mm	Nr.	t_1 sec	$10^5 a$ cm	$10^{10} e$ E.S.E.	p mm
229	12,59	4,56	5,75 (!)	56	226	10,03	4,06	4,23	34
227	7,37	4,46	6,71 (!)	27	222	8,68	3,90	5,30	27
221	12,55	4,27	4,75	50	219	24,63	3,05	4,48	70
231	7,45	4,09	3,34 (!)	24	223	6,66	3,03	3,84 (!)	15

Wie diese Tabellen zeigen, erhält man für Tröpfchen von sehr verschiedener Größe, die unter mehrfach wechselnden Versuchsbedingungen beobachtet worden sind, ziemlich gut übereinstimmende Resultate. Auffallend sind einige besonders große Werte von e, auf die durch Ausrufszeichen aufmerksam gemacht wird. Im allgemeinen sind es besonders sehr kleine Tröpfchen, bei welchen sich diese Anomalie zeigt. Trotzdem wir bemüht waren, das Einbringen von Staub in den Kondensator zu vermeiden, ist es doch möglich und sogar wahrscheinlich, daß von Zeit zu Zeit ein mit Öl mehr oder minder benetztes Staubkörnchen an Stelle eines Öltropfens beobachtet worden ist. Solche Irrtümer sind bei der zur Erzeugung und Beobachtung der Tröpfchen verwendeten Methode, namentlich wenn man hauptsächlich ganz kleine Partikeln beobachten will, unvermeidlich.

Auf eine andere Ursache sind die Unstimmigkeiten bei den in verdünnter Luft ausgeführten Versuchen zurückzuführen. Natürlich können auch unter diesen Bedingungen gelegentlich Staubpartikeln beobachtet worden sein. Wenn man aber bedenkt, daß bei diesen Versuchen der Cunninghamsche Korrektionsfaktor, der vom Halbmesser a der Partikel der mittleren Weglänge der Gasmolekeln l und einem empirischen Koeffizienten A, den wir gleich 0,87 setzen, abhängt, Werte bis zur Größe 60 annehmen kann, und daß alle Größen, die in diesen Faktor eingehen, mehr oder minder ungenau bestimmt sind, so muß man die erzielte Genauigkeit der Resultate als befriedigend betrachten. Vielleicht ist die Messung des Gasdruckes von den Herren H. Fletcher[1]) und C. F. Eyring[1]) genauer ausgeführt worden wie von uns; sicherlich aber sind Versuche in verdünnten Gasen ungeeignet zur genauen Bestimmung der Elektronenladung mit Hilfe des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes, weil in diesem Falle mehrere außerordentlich schwer zu vermeidende Fehlerquellen vorliegen. Ganz besondere Fehlerquellen, auf die wir bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werden, sind zu berücksichtigen, wenn die Versuche in Wasserstoff ausgeführt worden sind.

Aus diesen Gründen beweisen die von Herrn F. Zerner[2]) entdeckten Unstimmigkeiten, die sich aus den Versuchen der Herren Fletcher und Eyring ergeben, einerseits bloß, daß auch diese Autoren wahrscheinlich gelegentlich Staubteilchen statt Öltropfen beobachtet haben, anderseits aber, daß die von diesen Forschern zur Beobachtung der Brownschen Bewegung gewählten Versuchsbedingungen sich nicht gut zur Berechnung der Elektronenladung mit Hilfe des ungenau bekannten Widerstandsgesetzes eignen.

Hier sei noch angemerkt, daß sich aus unseren oben angegebenen Resultaten, bei Ausschluß der besonders großen Werte (Staubinklusionen) sowie aller in verdünnter Luft ausgeführten Bestimmungen, der Mittelwert (für 33 Tropfen) ergibt:

$$e = 4{,}774 \times 10^{-10} \text{ E.S.E.}$$

IV. Scheinbare Dichte der Zinn- und Kadmiumpartikeln.

Wendet man die Stokes-Cunninghamsche Formel auf nicht kugelförmige Metall-

1) H. Fletcher, Phys. Rev. 33, 81, 1911.

1) C. F. Eyring, Phys. Rev. 5, 412, 1915.
2) F. Zerner, l. c.

partikeln an, so entstehen noch viel auffallendere Unstimmigkeiten, wie namentlich von den Herren E. Meyer und W. Gerlach[1]) bewiesen worden ist. Auch aus unseren Beobachtungen ergeben sich zahlreiche Beispiele zur Beleuchtung dieser Tatsache. So haben wir beispielsweise die scheinbare Dichte der in der oben angegebenen Weise erzeugten Zinnpartikeln mit Hilfe der Formeln (2), (8) und (9) berechnet und sind zu nachfolgenden Resultaten gelangt: Sind Spuren von Luft und Feuchtigkeit vorhanden, so bilden sich Partikeln, deren scheinbare Dichte 0,8 ist. 22 Partikeln dieser Art wurden beobachtet und ergaben ganz merkwürdig gut übereinstimmende Resultate. Da die Übereinstimmung nicht dem Zufall zugeschrieben werden kann, so beweist sie (nach der im Vorangehenden gemachten Bemerkung), daß alle diese Partikeln nicht nur dieselbe wahre Dichte, sondern auch die gleiche Gestalt haben.

Wenn das geschmolzene Zinn in reinem Stickstoff zerstäubt wurde, so bekam man Partikeln mit der scheinbaren Dichte 1,6, die in 16 Fällen beobachtet wurde. Da bei der Reinheit des Gases die Bildung chemischer Verbindungen unwahrscheinlich schien, kamen wir auf den Gedanken, daß die jähe Abkühlung der geschmolzenen Teilchen Kristallbildung oder doch eine starke Formverzerrung bewirke. Bei langsamer Abkühlung gelang es nun wirklich, Partikeln von größerer scheinbarer Dichte zu erhalten, und zwar wurden 24 Zinnpartikeln beobachtet, deren scheinbare Dichte größer als 2 ist und bis 4,2 wächst. Weil nun selbst bei geringer Abweichung von der Kugelgestalt die scheinbare Dichte von der wahren stark verschieden sein dürfte, und die bei reinem Zinn zu erwartende Dichte 7 ist, so dürfte eine Partikel, deren scheinbare Dichte 4,2 ist, fast eine Zinnkugel sein. Langsames Abkühlen der geschmolzenen Partikeln scheint also tatsächlich die vorausgesetzte Wirkung herbeizuführen.

Bei den Kadmiumpartikeln stimmen die scheinbaren Dichten minder gut untereinander überein, was möglicherweise darauf zurückzuführen ist, daß der von uns verwendete Wasserstoff niemals ganz rein war, sondern bald mehr bald weniger Luft enthielt. Dennoch kann auch in diesem Falle mit Bestimmtheit behauptet werden, daß die Kadmiumpartikeln, deren scheinbare Dichten zwischen 0,15 und 0,75 liegen, nicht kugelförmig sind.

Die Abweichung von der Kugelgestalt war in den meisten Fällen so groß, daß die Stokes-Cunninghamsche Formel nicht einmal roh angenäherte Resultate für die Dichte der Partikeln gibt. Aus diesem Grunde sind unsere Folgerungen gültig ganz abgesehen von besonderen Annahmen über die chemische Reinheit des von uns verwendeten Materials.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß sich in feuchtem Stickstoff oder in unreinem Wasserstoff chemische Verbindungen gebildet haben; ferner kann die mittlere Dichte ultramikroskopischer Körperchen durch Gasadsorption oder durch andere physikalische Vorgänge geändert werden, aber so große Änderungen der mittleren Dichte, als unseren Beobachtungen entsprechen würden, sind ganz unmöglich.

V. Berechnung der Ladung mit Hilfe der Brownschen Schwankungen.

Wir wollen uns nun mit den Resultaten unserer Beobachtungen der Brownschen Bewegung der Partikeln beschäftigen. Zunächst wurde für jede einzelne Partikel der Wert der Elektronenladung e, mittels der Gleichungen (1) und (2) berechnet, wobei der Bestimmung von $\overline{\lambda^2}$ die Weisssche Formel (4) zugrunde gelegt und für N der (Millikansche) Wert:

$$N = 6{,}06 \times 10^{23}$$

angesetzt wurde. Man bekam so Werte von e, welche um den zu erwartenden Mittelwert:

$$e = 4{,}774 \times 10^{-10} \text{ E.S.E.}$$

schwanken; und zwar waren die Abweichungen stets ungefähr von der Größenordnung, die sich aus Schrödingers Theorie mittels der Formel (6) berechnen läßt. Besser übereinstimmende Werte erhält man, wenn man das Mittel berechnet für eine größere Zahl von Partikeln, wobei natürlich jedem Teilresultat für eine einzelne Partikel ein Gewicht beigelegt werden muß, das der Zahl m der Fallbeobachtungen proportional ist.

Auf diese Weise sind wir zu den Zahlen der nachstehenden Tabelle gekommen, in wel-

Die Elektronenladung aus Beobachtungen der Brownschen Bewegung.

Verwendetes Material	P	m	$e \times 10^{10}$	$\Delta e \times 10^{10}$	$\frac{\Delta e}{e}$	$\sqrt{\frac{2}{m}}$
Öltropfen in Luft bei Atmosphärendruck	47	1380	5,05	0,27	+ 5,7 Proz.	± 3,7 Proz.
Öltropfen in verdünnter Luft	8	365	4,18	0,59	− 12,5 „	± 7,4 „
Zinn in Stickstoff	15	721	4,31	0,46	− 9,5 „	± 5,3 „
Kadmium in Wasserstoff	9	523	4,91	0,14	+ 2,9 „	± 6,2 „

1) E. Meyer und W. Gerlach, l. c.

cher P die Zahl der benutzten Partikeln bedeutet, m die Zahl der Einzelbeobachtungen, e die Elektronenladungen, Δe die Abweichung von dem zu erwartenden Mittelwert, $\frac{\Delta e}{e}$ den prozentuellen Fehler und $\sqrt{\frac{2}{m}}$ den theoretischen wahrscheinlichen Fehler.

Der Mittelwert aus 2989 Beobachtungen, die an 79 Partikeln ausgeführt worden sind, ist

$$(e)_{\text{Mittel}} = 4{,}765 \times 10^{-10}$$

mit einer Abweichung

$$\frac{\Delta e}{e} = -0{,}2 \text{ Proz.},$$

während der wahrscheinliche Fehler

$$\sqrt{\frac{2}{m}} = \pm 2{,}6 \text{ Proz.}$$

sein sollte.

Wie man sieht, stimmt dieser Mittelwert mit dem bekannten Millikanschen ausgezeichnet überein.

Gegen die benützte Rechenmethode läßt sich einwenden, daß die Schätzung des Wertes der Teilresultate im Grunde ziemlich willkürlich ist. Eine volle Übereinstimmung mit der Schrödingerschen Theorie läßt sich ja nur bei einer sehr großen Zahl m von Einzelbeobachtungen erwarten. Auf kleine Zahlen lassen sich Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen streng genommen nicht anwenden.

Aus diesem Grunde haben wir uns nun auch noch einer zweiten Rechenmethode bedient: Wie im Vorangehenden erwähnt worden ist, dürfen nach Schrödinger die „wahren", Fall- und Steigdauern als genau bestimmbar angesehen werden, vorausgesetzt daß die Zahl m der Einzelbeobachtungen genügend groß ist. (Siehe Gl. 7). Da nun alle anderen Größen, welche in die Formel (3) eingehen, noch viel genauer meßbar sind, so kann man annehmen, daß die mangelhafte Übereinstimmung der Resultate relativ kurzer Meßreihen auf die Brownsche Bewegung zurückzuführen ist. Berechnet man aber für jede Einzelbeobachtung eine Größe x mit Hilfe der Formel:

$$x = \sqrt{\frac{L n V t_2}{t_1(t_1+t_2)}} \, \frac{t-t_1}{\sqrt{t}}, \tag{10}$$

so muß, wenn die obige Annahme richtig ist, wenn also wirklich, wie man wohl voraussetzen darf, die elementare Ladung aller Gasionen den gleichen Wert hat, das mittlere Quadrat der x-Werte, welches wir mit $\overline{x^2}$ bezeichnen wollen, der Gleichung genügen:

$$E = \frac{600 R T d}{\overline{x^2}}. \tag{11}$$

Diese Rechenmethode schaltet jede mehr oder minder willkürliche Gewichtsbestimmung der Teilresultate aus. Jede einzelne Beobachtung an einer beliebigen Partikel wird als Teilresultat der gleichen Meßreihe aufgefaßt.

VI. Das theoretische Verteilungsgesetz der x-Werte.

Ein vollkommen befriedigender und ganz unwiderleglicher Beweis, daß E eine konstante Größe ist, und den theoretisch zu erwartenden Wert hat, kann dadurch erbracht werden, daß man kontrolliert, ob die x-Werte dem theoretischen Verteilungsgesetz genügen. Auf den ersten Blick scheint diese Prüfung auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen, weil L, n, V, t_1 und t_2 in jeder Meßreihe andere Werte haben. Wir werden aber beweisen, daß die Prüfung nicht nur möglich ist, sondern auch in höchst einfacher Weise ausgeführt werden kann.

Ziehen wir zunächst die Verteilung der Werte:

$$\frac{v_1(t_1-t)}{\sqrt{t}} = \frac{L - v_1 t}{\sqrt{t}}$$

für eine und dieselbe Partikel in Betracht, so gilt für die Wahrscheinlichkeit einer Falldauer, die zwischen die Grenzen t und $t+dt$ fällt, das von den Herren E. Schrödinger und M. v. Smoluchowski aufgestellte Gesetz:

$$p(t)dt = \frac{L}{\sqrt{2\pi\overline{\lambda^2}}} e^{-\frac{(L-v_1 t)^2}{2\overline{\lambda^2} t}} t^{-\frac{3}{2}} dt. \tag{12}$$

Hierin bedeutet $\overline{\lambda^2}$ den quadratischen Mittelwert der Größe:

$$\frac{v_1 t - L}{\sqrt{t}} = \xi. \tag{13}$$

Löst man die Gleichung (13) nach t auf, so findet man:

$$t = \frac{\xi^2}{2v_1^2} + t_1 \pm \frac{\xi}{v_1}\sqrt{t_1 + \frac{\xi^2}{4v_1^2}}. \tag{14}$$

Und zwar bezieht sich das Pluszeichen des Wurzelausdruckes auf positive ξ-Werte, nämlich auf solche, für welche $t > t_1$ ist, während das Minuszeichen für die negativen ξ-Werte gilt, für welche $t < t_1$ ist.

Durch Substitution von ξ in die Gleichung (12) erhält man den Ausdruck der Wahrscheinlichkeit gegebener positiver und negativer ξ-Werte:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}(+\xi)d\xi &= \frac{2L}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \\ &\quad e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} \frac{d\xi}{2L+\frac{\xi^2}{2v_1}+\frac{\xi}{\sqrt{2v_1}}\sqrt{2L+\frac{\xi^2}{2v_1}}} \\ \mathfrak{L}(-\xi)d\xi &= \frac{2L}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \\ &\quad e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} \frac{d\xi}{2L+\frac{\xi^2}{2v_1}-\frac{\xi}{\sqrt{2v_1}}\quad 2L+\frac{\xi^2}{2v_1}} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Entwickelt man nun die Ausdrücke (15) in Potenzreihen nach steigenden Potenzen von

$$\frac{\xi}{2\sqrt{Lv_1}},$$

so erhält man durch gliedweise Integration Formeln, welche die Verteilung der ξ-Werte zu berechnen gestatten. Es genügt die ersten Glieder der Entwicklungen auszurechnen, weil die Reihen rasch konvergieren. Dabei fallen, wie man leicht aus (15) erkennt, alle geraden Potenzglieder weg. Man findet also:

$$\mathfrak{L}(\pm\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}}$$
$$e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} d\xi \left(1 \mp \frac{\xi}{2\sqrt{Lv_1}} \pm \frac{\xi^3}{16(Lv_1)^{3/2}} \mp \ldots\ldots\right).$$

Beschränkt man sich auf die Berechnung der Verteilung der absoluten Werte von ξ, so findet man durch Addition der beiden Ausdrücke (15):

$$\mathfrak{L}(+\xi)d\xi + \mathfrak{L}(-\xi)d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} d\xi\ .$$

Man gelangt also zu nachfolgendem Satz:

Die Zahl der absoluten (positiven oder negativen) ξ-Werte, welche in gegebene Grenzen fallen, kann nach dem Gaußschen Fehlergesetz berechnet werden. Dieser Satz ist namentlich deshalb bemerkenswert, weil er sich nun ohne weiteres auf die x-Werte anwenden läßt, welche aus den ξ-Werten durch Multiplikation mit dem Faktor

$$\beta = \sqrt{\frac{nVt_2}{L(t_1+t_2)}}$$

entstehen[1]).

Ersetzt man zur Abkürzung den doppelten quadratischen Mittelwert der Größe x durch α^2, so findet man für eine gegebene große Zahl M von Einzelbeobachtungen an verschiedenen Partikeln, für welche t_1, β und L beliebige Werte haben können, die Gesamtzahl $\mu_+ + \mu_-$ der absoluten Werte von x, welche in die Grenzen x_1 und x_2 fallen, ausgedrückt durch das Integral:

$$\mu_+ + \mu_- = \frac{2M}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} dx\ . \qquad (16)$$

Der quadratische Mittelwert von x kann aus der Summe der absoluten x-Werte in der gleichen Weise berechnet werden, als ob die x-Werte dem Verteilungsgesetz der Beobachtungsfehler gehorchten, also mittels der Formel:

$$\overline{x^2} = \frac{\pi}{2M}\left(\sum|x|\right)^2. \qquad (17)$$

Hier bedeutet $\Sigma|x|$ die Summe der absoluten (stets positiv genommenen) x-Werte. Der sogenannte „wahrscheinliche Wert" von x (im Sinne des Gaußschen Fehlergesetzes — allerdings hat diese Größe hier nicht dieselbe Bedeutung wegen der unsymmetrischen Verteilung der x-Werte —) ist:

$$\eta = 0{,}6745\sqrt{\frac{600\,RTd}{E}}. \qquad (18)$$

Der Beweis, daß die Ladungen aller Partikeln ganze Vielfache der gleichen Elementarladung sind, kann also in nachfolgender Weise erbracht werden: Man berechnet zunächst η, beziehungsweise den Parameter α des Integrals (16)

$$\alpha = \sqrt{2\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{1200\,RTd}{E}} \qquad (19)$$

und vergleicht die beobachtete Verteilung der absoluten Werte von x mit der theoretisch ermittelten. Diese Methode hat den großen Vorteil, daß η sehr genau berechnet werden kann, wenn man annimmt, daß die elementare Ladung der Gasionen der der elektrolytischen gleich ist. Dann ist nämlich zu setzen:

$$E = 2{,}895 \times 10^{14}\ \text{E. S. E.} \qquad (20)$$

Ferner ist:

$$R = 8{,}315 \times 10^7.$$

Der Plattenabstand war bei unseren Versuchen $d = 0{,}5$ und war mit einer Genauigkeit von mindestens 0,2 Proz. bestimmt. Die Temperatur kann bis auf 1 Proz. (also 3^0) konstant angesehen werden, und zwar ist der Wert:

$$T = 293^0$$

anzusetzen.

Man findet so:

$$\eta = 0{,}1072.$$

Um die Resultate anderer Beobachter, die mit verschiedenen Abständen der Kondensatorplatten gearbeitet haben, auf das gleiche Verteilungsgesetz zu bringen, genügt es, an Stelle des oben (Gleichung 10) angegebenen Faktors den Ausdruck

1) Das Produkt $\beta\sqrt{2\lambda^2}$ soll nämlich, wie oben bewiesen wurde (siehe Gl. 10 und 11), einer konstanten Größe α gleich sein.

$$\sqrt{\frac{LnVt_2 0,5}{t_1(t_1+t_2)}} \qquad (21)$$

zu benützen, in welchem d den bei den in Betracht gezogenen Versuchen verwendeten Plattenabstand bedeutet.

VII. Weitere Diskussion der Beobachtungsresultate.

Um die Beobachtungsresultate nach der im Vorangehenden beschriebenen Methode zu prüfen, haben wir die x-Werte in Intervalle von der Größe $0{,}56\,\eta$ eingeteilt. Das letzte Intervall dehnt sich ins Unendliche aus, doch wurde tatsächlich nie ein Wert von x, der größer als $6{,}4\,\eta$ wäre, beobachtet.

Außer der halben Zahl der absoluten x-Werte, welche in ein gegebenes Intervall fallen ($\mu_{beob.}$), haben wir auch die Zahlen der beobachteten positiven und negativen x-Werte (μ_+ und μ_-) angegeben. Natürlich muß der Leser seine Aufmerksamkeit hauptsächlich den Zahlenreihen $\mu_{beob.}$ und $\mu_{ber.}$ zuwenden, von denen die letztere die nach dem Gaußschen Fehlergesetz berechneten, mit den $\mu_{beob.}$ zu vergleichenden Zahlen enthält. Die Gesamtzahl der Beobachtungen ist stets mit M bezeichnet.

Tabelle I. Öltropfen.

$M = 1745; \frac{M}{2} = 872{,}5.$

μ_+	μ_-	$\mu_{beob.}$	$\mu_{ber.}$
248,5	232,5	240,5	256,5
221	238	229,5	223,0
148	184	166	168,1
113	111	112	110,2
52	70	61	62,9
37	45	41	31,1
9	11	10	13,5
8	8	8	5,0
2	1	1,5	1,7
6	0	3	0,5
844,5	900,5	872,5	872,5

Tabelle II. Zinn- und Kadmiumpartikeln.

$M = 1244; \frac{M}{2} = 622$

μ_+	μ_-	$\mu_{beob.}$	$\mu_{ber.}$
170,5	178,5	174,5	182,8
175	166	170,5	159,0
104	100	102	120,0
84	93	88,5	78,6
36	49	42,5	44,9
22	27	24,5	22,1
13	13	13	9,6
6	2	4	3,5
0	1	0,5	1,2
1	3	2	0,4
611,5	632,5	622	622,1

Man wird bemerken, daß die Übereinstimmung der beobachteten und der berechneten Verteilung im allgemeinen sehr gut ist. Es kann demnach kein Zweifel bestehen, daß die in (20) gemachte Annahme richtig ist, mit anderen Worten, daß die elementare Ladung der Gasionen der der elektrolytischen tatsächlich gleich ist. Für diese wichtige Grundtatsache bringen unsere Tabellen einen ganz objektiven und darum besonders überzeugenden Beweis.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich hingegen eine zwar nicht sehr bedeutende, nichtsdestoweniger aber beachtenswerte Abweichung vom theoretischen Verteilungsgesetz.

Einerseits ist die berechnete Zahl jener Werte von x, welche in dem ersten Intervalle ($x < 0{,}56\,\eta$) liegen, stets größer als die beobachtete, anderseits sind die großen Werte von x zahlreicher als sie nach dem theoretischen Verteilungsgesetz sein sollten. Nicht nur unsere Meßreihen sondern **alle** nach dieser Methode ausgeführten Versuche zeigen dieselben Abweichungen[1]). Als Beispiel mögen die Resultate des Herrn Konstantinowsky (l. c.) angeführt werden, aus welchen wir die x-Werte für 571 Teilbeobachtungen (nämlich für alle diejenigen, für welche die Rechnung nach der oben angegebenen Methode möglich war) ausgerechnet haben.

Tabelle III. Beobachtungen des Herrn Konstantinowsky.

$M = 571; \frac{M}{2} = 285{,}5.$

μ_+	μ_-	$\mu_{beob.}$	$\mu_{ber.}$
68,5	78,5	73,5	83,9
62	69	65,5	73,0
38	63	50,5	55,0
44	43	43,5	36,1
15	33	24	20,6
9	18	13,5	10,1
7	5	6	4,4
1	5	3	1,6
2	3	2,5	0,6
5	2	3,5	0,2
251,5	319,5	285,5	285,5

Wie man sofort erkennt, geht die Identität der elementaren Ladungen der Gasionen und der elektrolytischen Ionen auch aus Herrn Konstantinowskys Messungen deutlich hervor, doch ist die oben angegebene Abweichung vom theoretischen Verteilungsgesetz hier noch größer.

1) Vgl. A. Targonski, l. c.

Zum leichteren Vergleiche dürfte es nützlich sein, die x-Werte in drei Gruppen einzuteilen:

1. „Kleine Werte", welche der Bedingung genügen sollen: $x \leqq 0{,}56\,\eta$.
2. „Mittlere Werte", für welche:

$$0{,}56\,\eta < x \leqq 1{,}68\,\eta.$$

3. „Große Werte", für welche: $x > 1{,}68\,\eta$.

In der nachfolgenden Tabelle sind nun die Unterschiede zwischen den beobachteten und theoretisch berechneten Verteilungen übersichtlich zusammengestellt für unsere Beobachtungen an Öltropfen, an Zinn- und Kadmiumpartikeln, sowie für die Bestimmungen, die Herr Konstantinowsky an Gold- und Hg-Partikeln ausgeführt hat.

Tabelle IV. Übersichtlicher Vergleich der berechneten und beobachteten Verteilung der Resultate.

		Öltropfen	Sn- und Cd-Partikeln	Partikeln des Herrn Konstantinowsky
Kleine x-Werte	$\mu_{ber.}$	256,5	182,8	83,9
	$\mu_{beob.}$	240,5	174,5	73,5
	$\varDelta$	—6,2 %	—4,6 %	—12,4 %
Mittlere x Werte	$\mu_{ber.}$	391,1	279,0	128,0
	$\mu_{beob.}$	395,5	272,5	116,0
	$\varDelta$	+1,1 %	—2,3 %	—5,5 %
Große x-Werte	$\mu_{ber.}$	225,0	160,2	73,6
	μ_{beob}	236,5	175,0	96,0
	$\varDelta$	+5,1 %	+9,2 %	+30,5 %

Daß die Zahl der kleinen x-Werte stets zu klein sein muß, ist leicht verständlich. Die zufälligen Beobachtungsfehler (Stoppfehler, kleine Temperaturschwankungen, Luftströmungen usw.) müssen sich den Brownschen Schwankungen superponieren und dadurch die x-Werte vergrößern. Wenn nun die in dieser Weise aus der Gruppe der „kleinen" x-Werte verdrängten Beobachtungen nicht unter den „mittleren" Werten, die dann einen entsprechenden Überschuß zeigen würden, sondern unter den „großen" Werten auftreten, so beweist das nur, daß die Störungen, welche diese Erscheinung verursachen, relativ groß sind.

Bei der von uns angewendeten Methode der Zeitmessung mittels einer gewöhnlichen Stoppuhr läßt sich ein mittlerer Stoppfehler von 0,1 sec annehmen. Daß der Stoppfehler, eventuell mit anderen Beobachtungsfehlern verquickt, tatsächlich diesen Wert hat, wurde von uns durch besondere Versuche, auf die wir hier nicht näher eingehen können, festgestellt. Es liegt nun der Gedanke nahe, jene Versuchsreihen (d. h. die Beobachtungen an jenen Partikeln) auszuschließen, bei welchen der Stoppfehler einen relativ beträchtlichen Einfluß auf die Genauigkeit der Bestimmungen haben könnte, also jene Partikeln, für welche

$$\sqrt{\frac{LnVt_2}{t_1+t_2}}\cdot\frac{0{,}1}{t_1} = \overline{\varDelta x}$$

größer ist als ein gewisser Bruchteil von η.

Soll die Ausschließung den gewünschten Erfolg haben, so darf der gewählte Bruchteil von η nicht zu klein sein, aber anderseits muß bei dieser Ausschließung behutsam umgegangen werden. Versuchsweise haben wir nun jene Partikeln ausgeschlossen, für die

$$\overline{\varDelta x} > 0{,}025,$$

also mehr als ungefähr ein Viertel von η ist. Man erhält so für die Öltröpfchen eine Verteilung, die sich der theoretischen sehr eng anschließt, wie aus der nachfolgenden Tabelle hervorgeht.

Tabelle V. Öltropfen.

$$M = 1367;\ \frac{M}{2} = 683{,}5$$

$\mu+$	$\mu-$	$\mu_{beob.}$	$\mu_{ber.}$
200	196	198	200,8
168	186	177	174,5
128	141	134,5	132,0
87	86	86,5	86,4
36	52	44	49,3
26	32	29	24,3
7	11	9	10,5
4	3	3,5	3,9
2	0	1	1,3
2	0	1	0,5
660	707	683,5	683,5

Kleine x-Werte: $\mu_{ber.}$ 200,8; $\mu_{beob.}$ 198,0; $\varDelta$ —1,4 Proz.

Mittlere x-Werte: $\mu_{ber.}$ 306,5; $\mu_{beob.}$ 311,5; $\varDelta$ +1,6 Proz.

Große x-Werte: $\mu_{ber.}$ 176,2; $\mu_{beob.}$ 174,0; $\varDelta$ —1,25 Proz.

Jedenfalls kann man sagen, daß die aus den „kleinen" x-Werten verdrängten Einzelbeobachtungen jetzt nicht mehr „große", sondern bloß „mittlere" x-Werte ergeben. Übrigens sind jetzt die Unterschiede zwischen der nach Gl. 16 berechneten und der beobachteten Verteilung ganz unbedeutend. Das theoretische Verteilungsgesetz bewährt sich quantitativ.

Bei den Sn- und Cd-Partikeln lassen sich nach dem oben angegebenen Kriterium bloß zwei Versuchsreihen mit zusammen 194 Teilresultaten anschließen, doch werden dadurch die Abweichungen von der theoretischen Verteilung nicht verringert, wie aus nachfolgender Übersicht hervorgeht.

Tabelle VI. *Sn*- und *Cd*-Partikeln.

$$M = 1050; \frac{M}{2} = 525.$$

Kleine x-Werte	$\mu_{ber.}$ 154,2	Mittlere x-Werte	μ_{ber} 235,1	Große x-Werte	$\mu_{ber.}$ 135,6
	$\mu_{beob.}$ 150,5		$\mu_{beob.}$ 227,0		$\mu_{beob.}$ 147,5
	Δ −2,4 Proz.		Δ −3,4 Proz.		Δ +8,8 Proz.

Es liegt nahe, diese Verschiedenheit der Versuchsergebnisse für die Öl- und die Metallpartikeln auf die nichtkugelförmige Gestalt der letzteren zurückzuführen. Warum nichtkugelige Teilchen der Theorie minder gut genügen als kugelförmige, wird im Nachfolgenden noch erörtert werden.

Daß die Messungen des Herrn Konstantinowsky zu noch minder gut stimmenden Resultaten führen, als unsere Versuchsreihen mit Metallpartikeln, kann vielleicht dadurch erklärt werden, daß die im elektrischen Lichtbogen erzeugten Partikeln eine von der Kugelsymmetrie sehr stark abweichende Gestalt haben.

Für diese Annahme spricht eine mit unserer Versuchsanordnung ($L = 0{,}285$ cm) ausgeführte, allerdings ziemlich kurze Meßreihe an elektrisch zerstäubten Quecksilberpartikeln[1]).

Tabelle VII. Elektrisch zerstäubtes *Hg*.

$$M = 301; \frac{M}{2} = 150{,}5$$

Kleine x-Werte	$\mu_{ber.}$ 44,2	Mittlere x-Werte	$\mu_{ber.}$ 67,5	Große x-Werte	$\mu_{ber.}$ 38,8
	$\mu_{beob.}$ 25,5		$\mu_{beob.}$ 60,5		$\mu_{beob.}$ 64,5
	Δ −42,3 Proz.		Δ −10,4 Proz.		Δ +66,2 Proz.

Übrigens ist zu bemerken, daß im allgemeinen der Einfluß der Beobachtungsfehler um so größer wird, je kleiner die Meßlänge L ist. Daß anderseits bei relativ großen Meßlängen L, wie sie in unseren Versuchen zur Anwendung gekommen sind, selbst starke Abweichungen von der Kugelsymmetrie unter Umständen ohne Einfluß auf dis Resultate der Messungen sein können, wird noch im weiteren gezeigt werden.

VIII. Absolute Werte von $\overline{x^2}$ und E.

Was den von uns gefundenen Wert der Größe E betrifft, so wollen wir uns auf die Angabe des aus der Serie von 1367 Beobachtungen an Öltröpfchen berechneten beschränken.

Die Durchrechnung der Resultate für die *Sn*- und *Cd*-Partikeln hat uns gezeigt, daß sie fast genau zu den gleichen Absolutwerten führen wie die Öltröpfchenserie; wir haben aber diese Rechnung bisher noch nicht mit der gewünschten Genauigkeit nachprüfen können. Für die Öltropfen wurde die Rechnung dreimal überprüft. Man findet:

$$\overline{x^2} = 0{,}2560 \text{ (aus den Beobachtungen)},$$

während der aus Gleichung (19) berechnete theoretische Wert

$$\overline{x^2} = 0{,}2525$$

ist. Somit ergibt sich:

$$E = 2{,}852 \times 10^{14} \text{ (beobachtet)}$$

statt:

$$E = 2{,}895 \times 10^{14} \text{ E.S.E.}$$

Der Fehler beträgt −1,5 Proz., während nach Herrn Schrödinger der zu erwartende wahrscheinliche Fehler

$$\sqrt{\frac{2}{m}} = \pm 3{,}7 \text{ Proz.}$$

sein sollte.

Also ist die gute Übereinstimmung teilweise dem Zufall zuzuschreiben.

IX. Über die Vermehrung der großen x-Werte bei Beobachtungen an nicht kugelförmigen Partikeln.

Wie schon oben angedeutet, müssen nicht kugelförmige Partikeln im Mittel zu große Werte von x ergeben. Da nämlich nicht nur die Translationsbewegung der Partikeln, sondern auch ihre Rotation Brownschen Schwankungen unterliegt, so ist bei Körpern, die keine Kugelsymmetrie besitzen, die Beweglichkeit B in der Gleichung (9)

$$mg = \frac{v_1}{B}$$

nicht konstant, sondern mit der Zeit veränderlich[1]). Aus diesem Grunde müssen sich die Falldauern t nicht nur wegen der Brownschen Schwankungen der Translationsgeschwindigkeit ändern, sondern auch wegen der Änderung der statistischen Mittelwerte von B. Wenn sich nun dieser Effekt der eigentlichen Brownschen Bewegung superponiert, werden die x-Werte zu groß.

Es läßt sich aber voraussehen, daß in der Brownschen Rotationsbewegung selbst die Möglichkeit steckt, diese Erscheinung zum Verschwinden zu bringen. Bekanntlich ändert sich der Winkel bei Partikeln mit großer Rotationsbeweglichkeit äußerst rasch. Sind also die Abweichungen von der Kugelsymmetrie nicht sehr bedeutend, so muß namentlich bei größeren

1) Vgl. A. Schidlof, l. c. und A. Targonski, l. c.

1) Vgl. K. Przibram, Wien. Ber. CXXI. IIa, 2339, 1912.

Fallstrecken L, wo die Partikel bei jedem Sturz mehrmals nach allen möglichen Richtungen umschlägt, sich bald eine merkliche Konstanz der Größe B ergeben. Dies erklärt, weshalb unsere Beobachtungen an nicht kugelförmigen Partikeln, die mit wesentlich längeren Fallstrecken ausgeführt worden sind als die des Herrn Konstantinowsky, Resultate ergeben, welche sich den mit kugelförmigen Teilchen erzielten stark nähern. Außerdem dürften die Abweichungen von der Kugelsymmetrie bei unseren Partikeln minder bedeutend sein als bei den im elektrischen Lichtbogen erzeugten.

Berechnet man den Halbmesser einer nichtkugelförmigen Partikel aus ihrer mittleren Beweglichkeit B unter Zugrundelegung des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes (Gleichung 8), also in derselben Weise als ob die Partikel eine Kugel wäre, dann erhält man eine Größe a, welche wir den „scheinbaren" Halbmesser nennen wollen. Sieht man nun die Resultate der Untersuchungen, die über die Brownsche Bewegung nicht kugelförmiger Körperchen in Gasen gemacht worden sind, durch, so kommt man zu nachfolgendem Satze[1]: Ist l die mittlere Weglänge der Gasmolekeln bei den gewählten Versuchsbedingungen, so nähert sich der berechnete Wert von $\overline{x^2}$ um so mehr dem wahren, je größer das Verhältnis $\frac{l}{a}$ ist.

Allerdings ist die Gültigkeit dieses Satzes auf Versuche beschränkt, die mit ungefähr der gleichen Fallstrecke L gemacht sind. Bei wachsender Fallstrecke muß sich der beobachtete Wert von $\overline{x^2}$ ebenfalls dem wahren nähern. Der experimentale Beweis dieser Tatsache ist bisher noch nicht erbracht worden.

Bei kugelförmigen Partikeln (Öltröpfchen) ist der Unterschied zwischen den beobachteten und berechneten Werten der Größe $\overline{x^2}$ von $\frac{l}{a}$ und L unabhängig.

Die wahre Bedeutung der vorangehenden Sätze ist folgende: Für Partikeln von gegebener Gestalt wächst die Intensität der Brownschen Bewegung, wenn das Verhältnis $\frac{l}{a}$ zunimmt, und man nähert sich dann mehr und mehr den Bedingungen, wo die Elimination der Größe B aus den Gleichungen (1) und (2) gestattet ist. Bei welcher Grenze diese Bedingung erfüllt ist, hängt aber nicht bloß von $\frac{l}{a}$, sondern auch wesentlich von der Größe der Fallstrecke L und von der Gestalt der Partikel ab. Bei Kugelgestalt kann man B eliminieren für Partikeln von beliebiger Größe und für beliebige Werte der Weglänge l.

1) A. Targonski, C. R. 161, 778, 1915.

X. Überschuß der negativen ξ-Werte.

Wir wollen uns nun noch mit dem Überschuß an negativen ξ-Werten beschäftigen, der in den vorangehenden Tabellen deutlich erkennbar ist. Die Gesamtzahl der positiven oder negativen ξ-Werte läßt sich aus den Formeln (15), beziehungsweise mit Hilfe der daraus abgeleiteten Reihenentwicklungen, leicht mit großer Genauigkeit berechnen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{\overline{\lambda^2}}{2Lv_1}}=\varrho\,, \tag{22}$$

so findet man durch gliedweise Integration:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \mathfrak{L}(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\varrho-\frac{\varrho^3}{2}+\ldots\right)\\ \int_0^\infty \mathfrak{L}(-\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\varrho-\frac{\varrho^3}{2}+\ldots\right)\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Bei unseren Versuchen war ϱ so klein, daß alle folgenden Glieder weit unter der Grenze des Beobachtbaren liegen. Übrigens ist unter allen Umständen

$$\sqrt{\frac{\overline{\lambda^2}}{Lv_1}}<1\,,$$

weil sonst die Partikel überhaupt nicht fallen würde.

Leider läßt sich eine genaue Kontrolle der Versuchsergebnisse nicht ausführen, weil ϱ für die verschiedenen Öltropfen ganz verschiedene Werte hat. Um diesem Übelstande abzuhelfen, haben wir eine Serie von 1000 Einzelbeobachtungen an 5 Öltröpfchen, deren Fallgeschwindigkeit im Mittel 0,00177 cm/sec war, ausgeführt. Durch besondere Vorsichtsmaßregeln haben wir getrachtet, bei dieser Versuchsreihe den störenden Einfluß submikroskopischer Staubpartikeln zu vermeiden[1]). Da die Rechnungen noch nicht beendet sind, müssen wir uns hier auf die Kontrolle der Verteilung der positiven und negativen ξ-Werte beschränken.

Ist M die Gesamtzahl der Beobachtungen,

1) Anmerkung bei der Korrektur: Bei der Ausrechnung der Versuchsergebnisse hat sich herausgestellt, daß bei diesen langen Versuchsreihen hie und da diskontinuierliche Massenänderungen der beobachteten Tröpfchen durch Auffangen winzig kleiner Staubkörnchen hervorgebracht worden sind. Trägt man diesem Umstande Rechnung, so ergibt sich der Anschluß an die Theorie bedeutend besser als vor Beachtung dieser Fehlerquelle.

so berechnet sich der relative Überschuß der negativen ξ-Werte aus (23) zu:

$$\frac{\mu_- - \mu_+}{M} = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \,. \qquad (24)$$

Bei der zuletzt erwähnten Beobachtungsreihe war: $\overline{\lambda^2} = 0{,}835 \times 10^{-6}$; $L = 0{,}5075$ cm; $v_1 = 0{,}00177$ cm/sec.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} = 3{,}85 \text{ Proz.}$$

Der beobachtete Überschuß betrug ungefähr 4,5 Proz., war also zu groß.

Daß die Versuche eine zu große Zahl von negativen ξ-Werten ergeben, hat uns nicht überrascht. Wir hatten im voraus Überlegungen angestellt, welche eine Erscheinung dieser Art erwarten ließen. Allerdings sind die nachfolgenden Erwägungen bloße Umrisse einer Theorie, die viel schärfer gefaßt werden müßte, um quantitativ bestätigt werden zu können.

XI. Allgemeine Bemerkungen über die Beobachtungsmethode.

Obwohl der Hauptzweck dieser Untersuchung die Bestimmung der Elektronenladung durch Beobachtung der Brownschen Schwankungen der Falldauern elektrisch geladener, ultramikroskopischer Partikeln war, sowie der Beweis, daß die Ladung der Gasionen sich in allen Fällen aus den gleichen Elementarquanten zusammensetzt, wurden wir doch im weiteren Verlauf der Messungen dazu veranlaßt, uns eingehend mit der Theorie der Versuchsmethode und mit der Frage nach ihrer Genauigkeit zu befassen.

Dabei bemerkten wir eine gewisse Zahl von Fehlerquellen, die wir nach Möglichkeit zu vermeiden oder zu vermindern suchten.

Nun haben wir noch eine neue Fehlerquelle kennen gelernt, welche sich durch eine allzu große Zahl negativer ξ-Werte bemerkbar macht. Wir wollen versuchen, diese Erscheinung zu erklären.

Die wichtigste und heikelste Messung, auf die es bei den Fall- und Steigversuchen ankommt, ist die genaue Bestimmung der Zeitpunkte, wo die Partikel durch die zwei Marken durchgeht, und zwar handelt es sich nach Schrödinger darum, den Moment des ersten Durchganges festzustellen. Das ist aber im Sinne der strengen mathematischen Definition gar nicht möglich. Bei Körperchen mit starker Brownscher Bewegung kann man eigentlich gar nicht von einem genau bestimmbaren Durchgangszeitpunkt sprechen, sondern nur von dem Zeitpunkt, wo der Beobachter den Eindruck hat, daß die Partikel die Marke überschreitet. Dieser Zeitpunkt tritt stets verspätet ein, und zwar kann die Verspätung bei Teilchen mit starken Schwankungen zeitweilig große Werte annehmen.

In einer großen Zahl von Fällen werden sich allerdings die Beobachtungsfehler an den beiden Marken im Mittel wegheben. Ist aber die Unbestimmtheit beim Durchgang durch die erste Marke besonders groß, so wartet der Beobachter, bis er einen Moment erfaßt, wo der Durchgang glatt und rasch erfolgt. Hat er doch nach einigen Zehntelsekunden den Eindruck, daß er sich geirrt hat, so stoppt er und fängt seine Bestimmung von neuem an. Dagegen muß jede Messung, welche bis zum Durchgang durch die zweite Marke gelangt ist, in Betracht gezogen werden; auch dann, wenn der zweite Durchgang nicht ganz mit der gewünschten Genauigkeit beobachtet werden konnte.

Da man nun den Durchgang erst dann markieren kann, wenn man seiner Sache sicher ist, also stets zu spät, so sind die beobachteten Falldauern entweder fast richtig, in allen Fällen nämlich, wo die Fehler an den beiden Marken sich ungefähr aufheben, oder aber, wenn die Unbestimmtheit an der zweiten Marke größer ist, als die, welche sich der Beobachter bei der ersten gestattet, zu groß. Es ist somit zu setzen:

$$t' = t + \varepsilon \,.$$

Hierin bedeutet t' die notierte Falldauer, t die richtige, ε den Fehler. In den meisten Fällen wird man ε gleich Null setzen können. In einigen wenigen Fällen dagegen ist ε relativ groß, dann aber stets positiv.

Somit wird die mittlere Falldauer einer Serie im allgemeinen zu groß sein. Statt der „wahren“ mittleren Falldauer t_1 findet man einen Mittelwert t_1' und zwar ist:

$$t_1' = t_1 + \varepsilon_1 \,,$$

wo ε_1 sehr klein aber positiv ist. Die beobachteten Abweichungen vom Mittelwert sind:

$$t' - t_1' = t - t_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 \,.$$

In den seltenen Fällen, wo ε groß (und dann positiv) ist, sind die beobachteten Schwankungen zu groß, in den weitaus zahlreicheren Fällen dagegen, wo ε fast Null ist, sind die Schwankungen zu klein. Somit muß der Fehler einen Überschuß von negativen ξ-Werten bewirken, wie dies unseren letzten Beobachtungen entspricht.

Bei Benutzung einer unterteilten Fallstrecke, wie sie bei den Versuchen der Herren H. Fletcher und C. F. Eyring zur Anwendung gekommen ist, müßte sich der Fehler stark verringern, da bei den Durchgängen durch die inneren Marken der erwähnte Irrtum im Mittel

keine Wirkung haben kann. Somit wäre eine Prüfung der Verteilung der von diesen Forschern beobachteten t-Werte höchst wünschbar und dürfte bemerkenswerte Resultate ergeben, sofern nicht andere Fehler, die bei Beobachtungen in stark verdünnten Gasen unter Benutzung sehr kurzer Fallstrecken auftreten können, das Verteilungsgesetz allzusehr entstellen.

XII. Zusammenfassung.

Zusammenfassend möchten wir bemerken, daß unsere Beobachtungen über die Brownsche Bewegung in Gasen die Resultate der Herren H. Fletcher und C. F. Eyring (l. c.) bestätigen. Die elementare Ladung der Gasionen ist der der elektrochemischen gleich. Das geht nicht nur aus Messungen an kugelförmigen Tropfen hervor, sondern auch aus jenen, die an nicht kugelförmigen Metallpartikeln ausgeführt worden sind. Auch die Beobachtungen des Herrn Konstantinowsky (l. c.) können zum Beweis dieser Tatsache dienen.

Die Prüfung der Verteilung der bei einer großen Zahl von Einzelbeobachtungen gemessenen Schwankungen der Falldauer erlaubt gewisse Fehlerquellen zu erkennen, von denen die einen bei kugelförmigen Partikeln, andere wieder bei genügender Intensität der Brownschen Bewegung belanglos werden.

Der Berechnung der theoretischen Verteilung und der absoluten Werte wurden Formeln zugrunde gelegt, die aus den von den Herren E. Schrödinger und M. v. Smoluchowski (l. c.) aufgestellten Beziehungen abgeleitet worden sind. Die quantitative Bestätigung des theoretischen Verteilungsgesetzes darf somit als eine Verifikation dieser Theorie aufgefaßt werden. Aus den von Herrn Fletcher (l. c.) benützten Formeln ließe sich ein so einfaches Verteilungsgesetz nicht in voller Strenge ableiten.

Physikalisches Institut der Universität Genf, Juli 1916.

(Eingegangen 3. Juli 1916.)

Sichtbarmachung der Ionisationsbahnen von H-Teilchen, die durch Zusammenstoß von α-Teilchen mit H-Atomen erzeugt sind.

Von Debendra Bose.

Die Tatsache, daß α-Teilchen, die eine dünne Schicht Materie durchlaufen haben, zum Teil eine verhältnismäßig große Ablenkung erfahren, hat Rutherford[1]) unter der Annahme seines bekannten Atommodells theoretisch behandelt.

1) Phil. Mag. 21, 669, 1911.

Seine Formeln sind unter der Annahme abgeleitet, daß die Masse des gestoßenen Atoms, im Verhältnis zu derjenigen des α-Teilchens, sehr groß ist, und daß das Atom demzufolge durch den Zusammenstoß nicht in Bewegung gesetzt wird. Die Versuche der Herren Geiger und Marsden[1]) haben die Rutherfordsche Hypothese bestätigt. Herr Darwin[2]) erweitert die Formel für den Fall, daß die von dem α-Teilchen getroffenen Atome bei dem Zusammenstoß in Bewegung gesetzt werden. Für Zusammenstöße mit Wasserstoffatomen ergibt sich für die Geschwindigkeit des H-Atoms nach dem Zusammenstoß die Geschwindigkeit

$$u = \frac{8}{5} v \cos \Theta , \qquad (1)$$

wo Θ der Winkel zwischen der Bahn des gestoßenen H-Atoms und der ursprünglichen Richtung des α-Teilchens ist, und v die Geschwindigkeit des α-Teilchens vor dem Zusammenstoß darstellt. Für einen geraden Stoß wird $u = \frac{8}{5} v$; (1); die Reichweite eines solchen H-Teilchens ist dann $(8/5)^3 =$ ca. 4 mal so groß, wie diejenige des ursprünglichen α-Teilchens in Wasserstoff. Herr Marsden[3]) versuchte die Existenz von solchen H-Teilchen durch die Szintillationsmethode nachzuweisen. Er stellte den Szintillationsschirm in solcher Entfernung von der Quelle der α-Teilchen auf, daß die α-Teilchen direkt keine Szintillationen hervorrufen konnten. Daß er trotzdem solche erhielt, spricht für die Existenz von H-Teilchen, die sich mit hoher Geschwindigkeit bewegen.

Da anzunehmen ist, daß die H-Teilchen das Gas längs ihrer Bahn ionisieren, müßte diese Bahn sich nach der Wilsonschen Methode[4]) photographisch darstellen lassen, was noch ein sicherer Beweis für ihre Existenz und ihre Entstehungsweise sein würde. Die Herren Mc Lennan und Mercer[5]) versuchten daher diese Bahn mit Hilfe der Wilsonschen Methode zu photographieren. Sie erhielten jedoch nur ein negatives Ergebnis. Ich habe mich mit ähnlichen Versuchen beschäftigt, und es ist mir gelungen, eine Reihe von Aufnahmen zu erhalten, welche die Existenz der Ionisationsbahnen der H-Teilchen beweisen, und auch den Vorgang ihrer Entstehung durch die Stöße der α-Teilchen direkt erkennen lassen. Durch die Veröffentlichung der Herren Mc Lennan und Mercer veranlaßt, gebe ich im Folgenden eine kurze

1) Phil. Mag. 25, 604, 1913.
2) Phil. Mag. 27, 499, 1914.
3) Phil. Mag. 27, 824, 1914.
4) Jahrbuch d. Rad. u. Elektronik, 10, 34, 1913.
5) Phil. Mag. 30, 676, 1915.



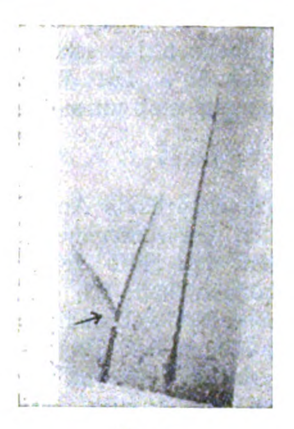


Fig. 1.

Notiz über meine bisherigen Resultate. Ein ausführlicher Bericht wird später folgen.

Der von mir gebrauchte Apparat ist eine in dem unterzeichneten Institut ausgearbeitete Modifikation des Wilsonschen Expansionsapparates[1]), die an anderer Stelle näher beschrieben werden wird. Durch eine geeignete elektroma-

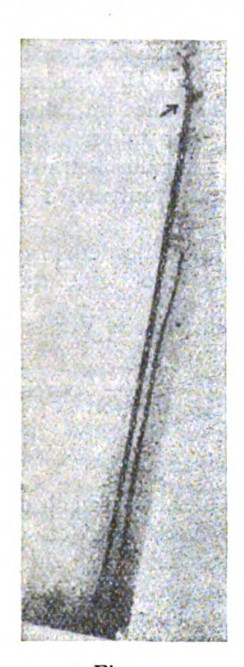


Fig. 2.



Fig. 3.

gnetische Auslösung kann die Expansion, die Beleuchtung und das Wegziehen eines Glimmerschirms von der α-Strahlenquelle gleichzeitig oder in den notwendigen kurzen Abständen erfolgen. Das Expansionsgefäß ist zylindrisch, hat 12,5 cm Durchmesser, und ist am Ende mit einer Glasplatte verschlossen, durch welche hindurch die Aufnahmen gemacht werden. Als α-Strahlen-

1) loc. cit.

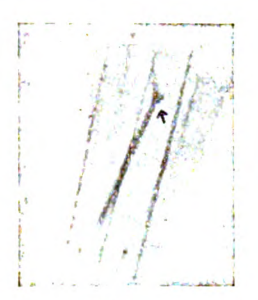
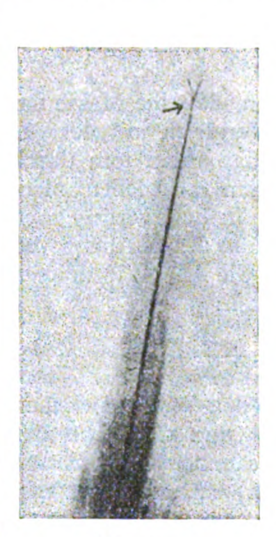


Fig. 4.

quelle dient ein Poloniumpräparat. Um die Geschwindigkeit der α-Teilchen zu verringern, war das Präparat in verschiedene Metallblätter von passender Dicke eingewickelt. Zur Füllung der Expansionskammer wurde der im Handel erhältliche Wasserstoff verwendet.

Unter einer großen Anzahl von Aufnahmen wurde nur eine kleine Zahl erhalten, die die gesuchte Erscheinung zeigten. Von diesen sind sechs, bei denen über die Deutung kein Zweifel sein kann, in den Figuren 1—6 wiedergegeben. Sie zeigen die ionisierenden Bahnen der α- und H-Teilchen in doppelter natürlicher Größe. Bei den Aufnahmen Fig. 1, 2, 6 war das Poloniumpräparat in einem Aluminiumblatt von



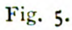


Fig. 5.



Fig. 6.

0,017 mm Stärke eingewickelt. Das Expansionsverhältnis war 1,43. Bei Fig. 3 war das Präparat in einem Stanniolblatt von 0,011 mm Stärke eingewickelt, und das Expansionsverhältnis 1,43, während in Fig. 4 u. 5 das Präparat in einem Silberblatt von 0,0044 mm Stärke eingewickelt war, und das Expansionsverhältnis 1,42 war.

Auf den Aufnahmen ist deutlich die plötzliche Teilung der Ionisationsbahnen des α-Teil-

chens in zwei Bahnen an den mit Pfeilen markierten Stellen zu sehen. Da die Erscheinung an die Anwesenheit des Wasserstoffs gebunden ist, kann kein Zweifel bestehen, daß wir in den beiden Teilbahnen die des abgelenkten α-Teilchens und die des gestoßenen H-Teilchens vor uns haben. Leider werden durch die Projektion auf eine Ebene die Längenverhältnisse der gegen die Einstellungsebene des aufnehmenden Objektives geeigneten Bahnen, geändert (verkleinert).

Es ist von Interesse, das von mir erhaltene Resultat mit der Rutherfordschen Formel[1]) zu vergleichen. Nach dieser Formel ist der Bruchteil P der α-Teilchen, welche durch eine dünne Schicht Materie von der Stärke t um einen Winkel φ, zwischen φ_1, und φ_2 abgelenkt werden

$$P = \frac{\pi}{4} n t b^2 (\cot^2 \varphi_1/2 - \cot^2 \varphi_2/2) \ldots \quad (2)$$

wo n die Anzahl der Atome pro ccm der zerstreuenden Schicht

$$b = \frac{2 N e E}{M u^2}.$$

Ne die positive Kernladung des zerstreuenden Atoms,
M die Masse des α-Teilchens,
E dessen Ladung,
u dessen Geschwindigkeit.

Hierbei ist angenommen, daß die Masse des zerstreuenden Atoms, im Vergleich mit der des α-Teilchens, so groß ist, daß das Atom durch den Zusammenstoß mit dem α-Teilchen nicht in Bewegung gesetzt wird. In dem vorliegenden Falle jedoch, ist die Masse m des H-Atoms von derselben Größenordnung wie M. Wir müssen daher nach Darwin[2]) setzen:

$$b = \frac{2 N e E}{u^2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \ldots \quad (3)$$

Dann bedeutet φ in (2) den Winkel zwischen der Bahn des H-Teilchens und der Bahn des α-Teilchens nach dem Zusammenstoß. Setzen wir den Ausdruck (3) in (2) ein, so ergibt sich

$$P = \pi n t \cdot \frac{N^2 e^2 E^2}{u^4} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 (\cot^2 \varphi_1/2 - \cot^2 \varphi_2/2). \quad (4)$$

In der Versuchsreihe, zu der die Fig. 4 u. 5 gehören, waren 42 Aufnahmen gemacht worden. Es war möglich, 1038 α-Teilchenbahnen zu zählen, die ihren Lauf innerhalb des Expansionsgefäßes beendeten. Sieben von diesen erzeugten auf dem letzten Zentimeter ihrer Bahn, durch Zusammenstoß, ionisierende H-Teilchen. Der Winkel zwischen den entsprechenden H- und α-Teilchenbahnen lag schätzungsweise zwischen 40^0 und 80^0. Die Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß unter dieser Bedingung ist also $\frac{7}{1038}$.

Um die zu erwartende Anzahl der H-Teilchen, die unter den vorliegenden Verhältnissen erzeugt werden, mit Hilfe der Formel (4) berechnen zu können, habe ich die Annahme gemacht, daß u, die Geschwindigkeit des α-Teilchens in dem Augenblick des Zusammenstoßes, gleich ist derjenigen Geschwindigkeit, welche ein α-Teilchen am Anfang des letzten Zentimeters seiner Bahn in Wasserstoff hat. Zur Berechnung von u benutzte ich die empirische Formel Geigers[1])

$$u^3 = u_0^3 \left(1 - \frac{x}{R} \right).$$

Hierin ist für u_0 die Anfangsgeschwindigkeit des α-Teilchens von Polonium zu setzen, während R die Reichweite des α-Teilchens in Wasserstoff, unter dem Druck nach der Expansion etwa 540 mm bedeutet; dann ist u die Geschwindigkeit des α-Teilchens nach der Zurücklegung von x cm seiner Bahn. Die beobachteten Zusammenstöße fanden alle im letzten Zentimeter der Bahn statt. Wir müssen dann in Formel (4) für die Dicke t der durchstrahlten Schicht, in der die Erscheinung auftritt, 1 cm setzen.

Führen wir in Formel (4) außerdem noch die Werte $\varphi_1 = 40^0$ und $\varphi_2 = 80^0$ ein, dann erhalten wir $P = \frac{7,7}{1000}$, während die Versuche nach obigen Ausführungen $P = \frac{7}{1038}$ ergeben hatten.

Zusammenfassung.

Durch photographische Aufnahmen nach der Wilsonschen Expansionsmethode werden die Ionisationsbahnen von H-Teilchen, die durch Zusammenstoß von α-Teilchen bei ihrem Durchgang durch Wasserstoff mit H-Atomen erzeugt werden, nachgewiesen. Die Bahnen der stoßenden, abgelenkten α-Teilchen werden dabei gleichzeitig sichtbar. Die Anzahl der H-Teilchen, welche nach den Rutherford-Darwinschen Formeln bei den gegebenen Versuchsbedingungen zu erwarten sind, steht mit der durch den Versuch gefundenen Anzahl in guter Übereinstimmung.

1) Rutherford, Phil. Mag. **21**, 674, 1911.
2) Darwin, Phil. Mag. **27**, 500, 1914.

1) Geiger, Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **83**, 492, 1910.

Berlin, Physikalisches Institut der Landwirtschaftlichen Hochschule, Juli 1916.

(Eingegangen 21. Juli 1916.)

Über die Möglichkeit des Nachweises eines Erdbewegungseinflusses auf die Erscheinungen der Selbstinduktion.

Von A. v. Schütz.

Durch die Induktionswirkungen, die durch die Bewegung eines Drahtes in irgendeinem Magnetfeld in dem Draht entstehen, kann man bekanntlich in keiner Weise den Einfluß des ruhenden Äthers nachweisen, der sich durch diese Bewegung des Drahtes und vollends das Hinzukommen der Bewegung der Erde relativ zum ruhenden Äther bemerkbar machen müßte: der Einfluß der Erdbewegung fällt stets aus der Rechnung heraus und es verbleibt der Einfluß der allgemeinen Relativbewegung zwischen den beiden Systemen des Magnetfeldes und des Drahtes. Anders ist es bei der Selbstinduktion.

Die fließenden Leitungselektronen eines in Richtung der Erdbewegung fließenden Drahtstromes haben als Geschwindigkeit V relativ zum ruhenden Äther die Erdgeschwindigkeit v plus der Stromgeschwindigkeit w, d. h. plus der Geschwindigkeit, die die Elektronen relativ zum Draht und damit zur Erde haben. Es ist also $V = v + w$. Wenn nun ein in Richtung der Erdbewegung fließender Drahtstrom unter Beibehaltung seiner Stromstärke um seine Achse um 180^0 gedreht wird, so daß er jetzt wieder in der Erdbahn, aber entgegen der Erdbewegungsrichtung fließt, so ist damit eine Verminderung der Geschwindigkeit V, die die negativen, im Draht fließenden Elektronen relativ zum ruhenden Äther haben, verbunden, und zwar entsprechend $2w$, der doppelten Geschwindigkeit der fließenden negativen Elektronen relativ zum Draht. Es ist also deren Geschwindigkeit relativ zum ruhenden Äther jetzt $V = v - w$. Genau dieselbe Verminderung der Elektronengeschwindigkeit relativ zum ruhenden Äther kann man nun auch hervorrufen, indem man den Draht unbewegt läßt, den Strom aber abstellt, so daß $V = v$ wird, und ihn dann in entgegengesetzter Richtung wieder angehen läßt, so daß $V = v - w$ wird. Würde das magnetische Feld nun von der Geschwindigkeit der Elektronen relativ zum ruhenden Äther abhängen, so müßte sich beim Drehen des Drahtes aus der Erdbewegungsrichtung entsprechend der damit verbundenen Veränderung der Elektronengeschwindigkeit relativ zum ruhenden Äther auch eine Veränderung der magnetischen Feldstärke und ebenso eine entsprechende Selbstinduktion bemerkbar machen, genau so wie dies beim Anhalten und Abstellen des Stromes und seinem Wiederangehenlassen in entgegengesetzter Richtung geschieht. Wenn es nur auf die Bewegung der Elektronen relativ zum ruhenden Äther ankäme, dann müßte es hier völlig einerlei sein, durch welche Umstände diese Bewegung geändert wird. In Wirklichkeit tritt aber nur in einem einzigen Falle eine Selbstinduktion ein: wenn sich die Geschwindigkeit der fließenden Elektronen relativ zum Draht verändert — ihre Geschwindigkeitsveränderung relativ zum Äther, durch einfaches Drehen des Drahtes relativ zur Erdbahn, bleibt völlig ohne Einfluß. Um dies zu erklären, gibt es nur die eine Möglichkeit: es muß das magnetische Feld eben durch die Bewegung der negativen Elektronen relativ zum Draht, d. h. zu dessen positiven Atomkernen, und nicht durch ihre Bewegung relativ zum ruhenden Äther hervorgerufen werden. Dann kann man den Draht beliebig um seine Achse drehen — wenn nur die Stromstärke, d. h. die Geschwindigkeit der negativen Elektronen relativ zu den positiven, dieselbe bleibt, bleibt auch die Stärke des Magnetfeldes unverändert und es kann daher keine Selbstinduktion eintreten. Und auch beim An- und Ausgehen des Stromes dessen Selbstinduktion vermeiden kann man bekanntlich nur durch bifilare Wickelung des Drahtes, indem sich hier sowohl das Magnetfeld wie auch die Selbstinduktion in sich selber aufhebt.

Diese offenbaren Erscheinungen der Selbstinduktion geben die deutlichste Antwort auf die Frage, ob das magnetische Feld durch die Bewegung der Elektronen relativ zum Äther oder relativ zum Draht hervorgerufen wird: sie sind der versuchsmäßige Beweis für die Behauptung der Abhängigkeit des magnetischen Feldes von der Bewegung der Elektronen relativ zum Draht; die eigentliche Frage allerdings, ob die Lorentzsche Annahme des ruhenden Äthers oder die Einsteinsche des Fehlens jeglichen Äthers berechtigt ist und ob also die Einsteinsche Annahme der Relativität aller Bewegungen zur Notwendigkeit wird, ist damit noch nicht beantwortet.

(Eingegangen 26. Juni 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Chr. Ries, Sehende Maschinen. Eine kurze Abhandlung über die geheimnisvollen Eigenschaften der lichtempfindlichen Stoffe und der staunenswerten Leistungen der sehenden Maschinen. gr. 8. 120 S. mit 95 Abbildungen. Dießen vor München, J. C. Huber. 1916. M. 4,50.

Der durch seine verschiedenen wertvollen Sammelbücher über die Selenzellen und ähnliche lichtelektrische Apparate bekannte Verfasser hat hier, veranlaßt durch den Verleger, versucht, die reizvollen lichtelektrischen Erscheinungen der Physik und ihre verlockenden Anwendungsmöglichkeiten dem Laienpublikum nahezubringen. Das zeigt schon das Schlagwort „Sehende Maschinen", um das er seinen Bericht gruppiert. Es wird ihm seine Absicht ja auch gewiß gelingen, Fernerstehende zum Staunen und selbst Erfahrene zum Stutzen zu bringen. Doch fürchte ich, daß die lobenswerte andere Absicht des Vorworts, zu ernster Mitarbeit anzuspornen, nicht erreicht, sondern nur der schon viel zu große Kreis der „Erfinder" vermehrt wird, welche mit Hilfe von Selenzellen jedes technische Problem spielend — wenigstens auf dem Papier — lösen. Es ist ja wahr: „Gebt mir eine ideale Selenzelle, und ich hebe die Erde aus ihren Angeln". Wer aber mit den wirklichen Selenzellen zu tun gehabt hat, weiß, wie sehr die meisten, so verlockend erscheinenden Selenzellenerfindungen verurteilt sind, interessante Anfänge oder gar nur geistreiche Ideen zu bleiben. Behandelt werden: Hertzeffekt, Hallwachseffekt, Becquereleffekt, Selenzellen und Verwandtes, Lichtkurven, automatische Signal- und Registrierapparate, Lichtmessung mittels lichtelektrischer Effekte, Zeitbestimmung auf tausendstel Sekunden, Sortierung nach Farben, Prüfung der Qualität von Lampen, Lichttelegraphie, Lichtphonograph, Optophon von Fournier d'Albe, Bildtelegraphie von Korn, Fernsehen. — Man erkennt schon an dieser Zusammenstellung, daß wahllos wertvolle und durchgearbeitete Methoden mit rein papiernen Erfindungen zusammengestellt worden sind, die sicherlich niemals wirklich, sondern lediglich in dem Kopf des Erfinders funktioniert haben. Gerade hier hätte es not getan, einmal Spreu vom Weizen zu sondern und genau zu sagen, was ins Bereich der Phantasie gehört. Die Darstellung ist auch sonst ziemlich oberflächlich, gelegentlich werden Apparate und Methoden mit falschem Autornamen zitiert; nirgendwo sind Hinweise auf ernsthafte Literatur gegeben, wo man sich genauere Auskunft holen könnte. — Alles in allem scheint es mir schade zu sein, daß sich der sonst so ernsthafte Verfasser auf die Bahn wissenschaftlicher Popularitätshascherei hat drängen lassen. H. Th. Simon.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Dr. phil. **H. Sirk**, Privatdozent an der Universität Wien, ist als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter für Röntgenographie, einem Militärspitale zugeteilt worden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a.o. Professor für Chemie an der Universität Jena Dr. Wilhelm Schneider zum Vorsteher des organischen Laboratoriums der Universität mit einem Lehrauftrag für organische Chemie, der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Edgar Lilienfeld zum a.o. Professor der Physik an derselben Universität, die Privatdozenten an der Universität Erlangen Dr. Richard Baldus (Mathematik) und Dr. Joseph Würschmidt (Physik) zu a.o. Professoren daselbst.

Berufen: Der a.o. Professor der Pharmakologie an der Universität Würzburg Dr. Ferdinand Flüry an das Kaiser-Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie in Berlin-Dahlem.

Gestorben: Der frühere Professor der Chemie an der Handelsakademie Wien Dr. Nicolaus Teclu, der ord. Professor der physikalischen Chemie an der Johns Hopkins Universität in Baltimore Dr. Harry C. Jones, der Professor der Chemie in Baltimore Dr. Wilh. Simon.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. | 1. September 1916. Redaktionsschluß für No. 18 am 2. September 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Anwendbarkeit der Daniel Berthelotschen Zustandsgleichung auf das Verhalten von Dämpfen.

Von Hans Schimank.

(Aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Berlin.)

Für eine ganze Anzahl thermodynamischer Berechnungen, wie beispielsweise von Verdampfungswärmen, ist die Annäherung an die Wirklichkeit bei Verwendung der Gasgesetze eine zu geringe und demzufolge die Kenntnis einer Gleichung erwünscht, die den Abweichungen der wirklichen Gase von den idealen gut Rechnung trägt. Unter den Zustandsgleichungen, die dieser Bedingung Genüge tun, zeichnet sich die D. Berthelotsche[1]) aus durch ihre vielfältige Anwendbarkeit und die Genauigkeit, mit der sie das Verhalten der Gase bei nicht zu hohen Drucken wiedergibt. Ausgehend von der Gültigkeit des Theorems der übereinstimmenden Zustände für nicht zu stark komprimierte Gase gelangt D. Berthelot zu der Gleichung

$$p \cdot v = RT\left(1 + \frac{p}{\pi_0} \cdot \frac{9}{128} \frac{\vartheta_0}{T}\left[1 - 6\frac{\vartheta_0^2}{T^2}\right]\right), \quad (1)$$

worin π_0 und ϑ_0 jeweils den kritischen Druck und die kritische Temperatur des untersuchten Gases bedeuten.

Es schien nun interessant, nachdem Berthelot selbst schon einige ähnliche Rechnungen vorgenommen hat, an der Hand neuerer experimenteller Befunde zu prüfen, wie weit die obige Formel imstande ist, das Verhalten von gesättigten oder nahezu gesättigten Dämpfen darzustellen, die sicher den Gesetzen für ideale Gase nicht folgen. Wenn man einer solchen Prüfung nur durchaus zuverlässige Zahlen zugrunde legen will, ist die Auswahl nicht sehr groß.

Direkte Bestimmungen der Dampfdichte sind für eine Anzahl von Kohlenstoffverbindungen durch Ramsay und Steele[1]), bei je zwei verschiedenen Temperaturen für verschiedene Drucke ausgeführt worden. Die Ergebnisse dieser Messungen sind sowohl tabellarisch wie in graphischer Darstellung wiedergegeben. Die Werte, die der nachfolgenden Rechnung zugrunde gelegt wurden, sind den Kurven der vorgenannten Autoren entnommen, die den Wert der Gaskonstanten $\frac{PV}{T}$ in Abhängigkeit vom Druck wiedergeben. Die prozentische Abweichung von $\frac{PV}{T(p)}$ für einen Druck von p Atmosphären von dem Grenzwert für ideale Gase, wie er sich bei einem Druck $p = 0$ einstellt, muß der Korrektion entsprechen, die der Ausdruck

$$\frac{p}{\pi_0} \frac{9}{128} \frac{\vartheta_0}{T}\left(1 - 6\frac{\vartheta_0^2}{T^2}\right)$$

der Berthelotschen Gleichung bedingt. In der folgenden Tabelle sind nun für die verschiedenen Substanzen diese Werte der wirklichen und der berechneten Abweichungen zusammengestellt. Jeweils gibt die erste Spalte den Namen der Substanz, die zweite die absolute Temperatur T, die folgenden den Druck p in Millimetern Quecksilber, die beobachtete prozentische Abweichung $A_{\text{beob.}}$, die nach Berthelot berechnete $A_{\text{Berth.}}$, die Abweichung nach Nernst A_{Nernst}, den kritischen Druck π_0 und die kritische Temperatur ϑ_0.

1) Sur les thermomètres à gaz. Par M. Daniel Berthelot. Paris, Gauthier-Villars 1903. Vgl. auch Nernst, Theoretische Chemie, 7. Aufl. S. 241 ff.

1) Ramsay und Steele, Die Dampfdichten einiger Kohlenstoffverbindungen; ein Versuch ihr genaues Molekulargewicht zu bestimmen. Zeitschr. f. Phys. Chemie 44, 348 ff., 1903.

Substanz	T	p	A beob.	A Berth.	A Nernst	π_0	ϑ_0
Äther	372,8	330	0,771	0,903	1,04	35,61	466,9
Äther	402,7	570	1,09	1,21	1,81	35,61	466,9
Benzol	372,8	640	2,10	2,35	1,49	47,89	561,6
Benzol	402,7	720	1,83	2,07	1,68	47,89	561,6
Diisobutyl	372,8	420	2,64	2,81	1,79	24,55	549,9
Diisobutyl	402,7	600	3,15	3,15	2,81	24,55	549,9
n-Hexan	372,8	540	2,28	2,33	2,06	29,62	507,9
n-Hexan	402,7	480	1,43	1,62	1,89	29,62	507,9
Methylalkohol	402,7	517,1	0,709	0,687	0,845	78,50	515,1
n-Oktan	402,7	480	3,07	2,80	2,20	24,65	569,3
Toluol	372,8	420	2,36	2,14	1,13	41,6	595,7
Toluol	402,7	600	2,42	2,39	1,60	41,6	595,7

Wie man sieht, ergibt sich bei allen untersuchten Stoffen gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung. Die Abweichungen liegen dabei unregelmäßig verteilt, so daß irgendein systematischer Gang an der Hand dieser Zahlen nicht ersichtlich ist.

Besonders interessant erschien es nun eine ähnliche Rechnung für Wasserstoff durchzuführen, dessen kritische Temperatur $\vartheta_0 = 31{,}95$[1]) außerordentlich niedrig ist, und dessen Dichten bei verschiedenen Drucken von H. K. Onnes und W. J. de Haas[2]) bestimmt sind. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse dieser Berechnung mit den experimentell ermittelten Zahlen zusammengestellt, und zwar beziehen sich die Dichten auf Wasserstoff von $273{,}1^0$ als Einheit. Als Korrektion wurde einmal die Berthelotsche Formel angewendet, ein zweites Mal der von Nernst angegebene Ausdruck $\left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right)$, über den weiterhin noch zu sprechen sein wird. Die Spalten der Tabelle geben der Reihe nach: die absolute Temperatur T, den Druck p in Atmosphären, die beobachtete Dichte $d_{\text{beob.}}$, den unter Anwendung der Gasgesetze berechneten Wert $d_{\text{unkorr.}}$, d_B die Dichte nach Berthelot, sowie d_N, die entsprechenden Daten nach der Nernstschen Formel.

T	p	d beob.	d unkorr.	d_B	d_N
20,5	0,34786	4,7568	4,6339	4,8628	4,756
20,5	0,60358	8,4597	8,0406	8,7542	8,416
17,6	0,10964	1,6918	1,7011	1,7418	1,715
17,6	0,20672	3,2560	3,2075	3,3588	3,256
17,6	0,27759	4,4133	4,3072	4,5844	4,395
17,6	0,31318	5,0026	4,8593	5,2152	4,968
17,6	0,31294	4,9992	4,8557	5,2109	4,964
15,8	0,06698	1,1582	1,1577	1,1698	1,163
15,8	0,13153	2,3091	2,2734	2,3681	2,294

1) Fritz Bulle, Über die Dampfdruckkurve des Sauerstoffs und über eine Bestimmung der kritischen Daten von Wasserstoff. Diese Zeitschr. **14**, 860ff., 1913.

2) H. Kamerlingh Onnes und W. J. de Haas, The compressibility of hydrogen vapour, at and below the boiling point. Comm. Leiden 127c, 1912.

Wie man sieht, gibt in diesem Falle die Berthelotsche Formel eine zu starke Korrektion, während der Nernstsche Ausdruck der Wirklichkeit außerordentlich nahe kommt.

Schließlich ergab sich als Prüfungsmöglichkeit noch die Berechnung von Verdampfungswärmen aus der Dampfdruckkurve und der Vergleich dieser Werte mit den experimentell bestimmten.

Aus den beiden ersten Hauptsätzen der Thermodynamik folgt bekanntlich die Beziehung

$$\lambda = (V - V')\, T \frac{dp}{dT}, \tag{2}$$

(λ molekulare Verdampfungswärme, V und V' Molekularvolumen des Gases bzw. des Kondensats, p Dampfdruck), woraus sich unter Vernachlässigung von V' gegen V und Anwendung der Gesetze idealer Gase ergibt

$$\lambda = R T^2 \frac{d \ln p}{dT}, \tag{3}$$

oder in dekadischen Logarithmen

$$\lambda = 4{,}571\, T^2 \frac{d \log p}{dT}. \tag{3a}$$

Statt diese Vernachlässigung zu machen, kann man besser die von Nernst[1]) empirisch gefundene Beziehung anwenden

$$p(V - V') = RT\left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right) \tag{4}$$

(π_0 kritischer Druck), so daß (aus 2) folgt

$$\lambda = 4{,}571\, T^2 \frac{d \log p}{dT}\left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right). \tag{5}$$

Aus der gleichfalls empirischen Formel für die molekulare Verdampfungswärme

$$\lambda = (\lambda_0 + 3{,}5\, T - \varepsilon T^2)\left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right) \tag{6}$$

in der ε und l_0 spezifische Konstante bedeuten, erhält man dann aus (2) sowie (4) und (6)

$$\lambda_0 + 3{,}5\, T - \varepsilon T^2 = R T^2 \frac{d \ln p}{dT}, \tag{7}$$

1) Nernst, Theoretische Chemie 7. Aufl. S. 236 ff.

was nach Integration

$$\ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{3{,}5}{R}\ln T - \frac{\varepsilon}{R}T + i + \ln R \quad (8)$$

liefert. Es lassen sich also aus der Dampfdruckkurve, die durch (8) dargestellt wird, λ_0 und ε bestimmen. Benutzt man an Stelle des Nernstschen Ausdrucks den Berthelotschen, so wird aus (2)

$$\lambda = 4{,}571\, T^2 \frac{d\log p}{dT}\left(1 + \frac{9}{128}\frac{p}{\pi_0}\frac{\vartheta_0}{T}\left[1 - 6\frac{\vartheta_0^2}{T^2}\right] - \frac{V'p}{RT}\right). \quad (9)$$

Die Berthelotsche Korrektion wird mit der Nernstschen identisch für Werte von $\frac{T}{\vartheta_0} = 0{,}65$ bis $0{,}70$, da dann

$$\frac{9}{128}\frac{\vartheta_0}{T}\left(1 - 6\frac{\vartheta_0^2}{T^2}\right)$$

nahe gleich -1 ist.

Für die nachfolgenden Vergleiche zwischen Rechnung und Versuch wurden ausschließlich neue Messungen von Verdampfungswärmen herangezogen, bei denen elektrische Methoden angewendet wurden. Entsprechend wurden nur solche Dampfdruckkurven herangezogen, bei denen Formel (8) über ein weites Temperaturgebiet bestätigt ist. Für mehrere Substanzen hat diesen Vergleich bereits v. Siemens[1]) durchgeführt und in der nachfolgenden Übersicht sind die von ihm gefundenen Zahlen mit aufgenommen. Für die Verdampfungswärmen organischer Substanzen liegen Neubestimmungen vor von Tyrer[2]) sowie von Nagornow und Rotinjanz[3]), die verglichen wurden mit den Werten, die sich aus den Dampfdruckbestimmungen von Mündel[4]) bzw. für Benzol von Barker[5]) ergeben. Was die Verdampfungswärme von Argon anlangt, so sei betreffs der Berechnung auf eine kürzlich erschienene Arbeit von Nernst[6]) verwiesen, der ich meine Zahlen entnommen habe. Eine experimentelle Bestimmung liegt von Eucken[7]) vor, doch ist der von ihm gefundene Wert wahrscheinlich etwas zu klein.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der berechneten und beobachteten Werte. Es bedeuten: T die absolute Temperatur, π_0 und ϑ_0 kritischen Druck und kritische Temperatur, $\lambda_{\text{unkorr.}}$, den nach Gleichung (3a) folgenden Wert der Verdampfungswärme, λ_N und Korr_N Verdampfungswärme und prozentische Korrektion nach (5), λ_B und Korr_B, das gleiche nach (9), $\lambda_{\text{beob.}}$ schließlich gibt die experimentell gefundenen Werte und den Namen des Beobachters an.

Substanz	T	π_0	ϑ_0	λ unkorr.	λ N	Corr.N	λ B	Corr.B	λ beob.	
Argon	87,3	47,996	150,7	1607	1573	2,08	1531	4,71	1501	(Eucken)
Stickstoff	77,2	33,0	127,1	1410	1368	3,01	1327	5,99	1335	(Alt)
Sauerstoff . . .	90,1	50,8	154,3	1658	1625	1,97	1585	4,45	1629 1599	(Alt) (Eucken)
Schwefelkohlenstoff	287,2	72,87	546,2	6771	6743	0,425	6667	1,55	6614	(Koref.)
Äthyläther . . .	307,8	35,61	466,9	6665	6477	2,82	6380	4,28	6403	(Tyrer)
Tetrachlorkohlenstoff	350,8	44,98	556,2	7431	7263	2,26	7139	3,92	7210	(Tyrer)
Äthylalkohol . . .	351,2	63,0	516,2	9472	9333	1,56	9265	2,18	9224	(Tyrer)
Benzol	353,4	47,89	561,6	7496	7339	2,09	7223	3,64	7364	(Tyrer)
Chlorbenzol . . .	404,7	44,64	632,3	8842	8647	2,21	8516	3,68	8539	(Nagornow und Rotinjanz)
Brombenzol . . .	430,1	44,64	670,1	9504	9289	2,26	9153	3,70	9090	(Nagornow und Rotinjanz)

Um die Ergebnisse der obigen Tabelle richtig einschätzen zu können, ist es noch nötig sich einen Überblick über die möglichen Fehlergrenzen zu verschaffen. Für die berechnete Verdampfungswärme ist entscheidend die Genauigkeit von $\frac{d\log p}{dT}$. Den Messungen des Dampfdruckes in der Nähe des Siedepunktes wird man eine Sicherheit von mehr als 1 Promille zuschreiben dürfen und etwa die gleiche Sicherheit kann für ihre Wiedergabe durch Formel (8) in Anspruch genommen werden. Für $\frac{d\log p}{dT}$ ergibt dies eine

1) H. v. Siemens, Über Dampfdruckmessungen und Thermometrie bei tiefen Temperaturen. Ann. d. Phys. **42**, 871 ff., 1913.

2) D. Tyrer, Latent heats of vaporisation of mixed liquids. Journ. of the Chem. Soc. **99**, 1640 ss., 1911; **101**, 81 ss., 1104 ss. 1912.

3) N. Nagornow und L. Rotinjanz, Eine einfache direkte Bestimmungsmethode der Verdampfungswärme von Flüssigkeiten mittels elektrischer Heizung. Zeitschrift f. Phys. Chem. **77**, 700 ff., 1911.

4) C. F. Mündel, Experimentelle Bestimmung und theoretische Berechnung kleiner Dampfdrucke bei tiefen Temperaturen. Zeitschr. f. Phys. Chem. **85**, 435 ff., 1913.

5) J. T. Barker, Experimentelle Bestimmung und thermodynamische Berechnung der Dampfdrucke von Toluol, Naphtalin und Benzol. Zeitschr. f. Phys. Chem. **71**, 235 ff., 1910.

6) W. Nernst, Über die experimentelle Bestimmung chemischer Konstanten. Zeitschr. f. Elektrochemie **22**, 185 ff., 1916.

7) A. Eucken, Über das thermische Verhalten einiger komprimierter und kondensierter Gase bei tiefen Temperaturen. Verhdl. d. D. Phys. Ges. **18**, 4 ff., 1916.

Zuverlässigkeit von ungefähr 1 Proz., so daß man diesen Wert als wahrscheinlichen Fehler der berechneten Verdampfungswärme anzusehen hätte. Die experimentell ermittelten Daten besitzen wohl — außer für Argon und Stickstoff — gleichfalls eine Zuverlässigkeit von mehr als 1 Proz., durchschnittlich etwa 0,5 Proz., wie ein Vergleich der Werte, die von den verschiedenen Beobachtern angegeben werden, lehrt.

Betrachtet man von diesem Standpunkt aus die erhaltenen Zahlen, so findet man, daß die Berthelotsche Formel zwar im extremen Falle des Wasserstoffs versagt, im übrigen aber in der Mehrzahl der Fälle der Wirklichkeit besser entspricht als der Nernstsche Ausdruck. Jedenfalls wird aber auch bei Anwendung der letzteren Formel eine größere Annäherung erreicht als durch Benutzung der Gasgesetze, und man wird also bei thermodynamischen Rechnungen sich zumindest ihrer, besser aber der Berthelotschen Gleichung bedienen.

Für Wasserstoff, wie oben erwähnt, mit seiner extrem niedrigen kritischen Temperatur versagt die Berthelotsche Korrektion und liefert unter Umständen sogar schlechtere Werte als die bloße Anwendung der Gasgesetze. Der Faktor $\frac{9}{128}$ ist also nicht als Konstante für alle Substanzen anzusehen, sondern wird wahrscheinlich durch eine Funktion der kritischen Temperatur zu ersetzen sein. Ich halte das geringe experimentelle Material, das zurzeit vorliegt, aber noch nicht für hinreichend, um auf seiner Grundlage den Versuch einer entsprechenden Abänderung zu unternehmen. Man wird damit warten müssen, bis eine größere Anzahl von Dichtebestimmungen der Gase in der Nähe ihres Siedepunktes bei verschiedenen Drucken vorliegt.

Die obigen Rechnungen wurden auf Veranlassung von Herrn Professor Nernst ausgeführt. Ich möchte nicht versäumen, ihm für die Anregung dazu sowie für seine mehrfache liebenswürdige Unterstützung meinen allerverbindlichsten Dank auszusprechen.

Berlin, im Juli 1916.

(Eingegangen 22. Juli 1916.)

Die Änderung der Luftzusammensetzung mit der Höhe.

Von Albert Wigand.

Für einige Probleme der Aerophysik ist die Frage nach dem Grade der vertikalen Durchmischung der Atmosphäre von großer Bedeutung. Wir sind aber noch nicht einmal über die qualitative Seite der Frage sicher genug unterrichtet. Ob in der Troposphäre, den unteren 10 bis 12 Höhenkilometern, in denen durch die auf- und absteigende Luftbewegung eine Durchmischung stattfinden kann, die Diffusionsgeschwindigkeit der Luftbestandteile hinreichend groß ist, um unter der Wirkung der Schwerkraft eine merkliche Abweichung von der vollkommenen vertikalen Durchmischung zu bewirken, wissen wir nicht mit Gewißheit.

Noch weniger sicher bekannt ist der Betrag, um den die leichteren Gase der Atmosphäre mit der Höhe auf Kosten der schwereren zunehmen, und der Einfluß, den Ort und Wetter darauf ausüben. Ob bereits in der Troposphäre, vielleicht in der Nähe ihrer oberen Grenze, eine vollständige Einstellung des Diffusionsgleichgewichts stattfindet und die Zusammensetzung der Luft nach dem Daltonschen Gesetze und der Schwere sich regelt, ist noch zu erforschen. Und auch für die darüberliegenden Luftschichten, die Stratosphäre, fehlt bis jetzt der durch Luftanalysen zu erbringende direkte experimentelle Beweis für die Superposition der Einzelatmosphären der gasförmigen Luftbestandteile, wenn auch zahlreiche andere Erscheinungen bereits sehr entschieden dafür sprechen.

Ausgehend vom Kohlendioxyd-Gehalt der Luft begann ich im Jahre 1910 eine Untersuchung über die Änderung der Luftzusammensetzung mit der Höhe durch Analyse von Luftproben, die ich in verschiedenen Höhen der Troposphäre bis 9000 m bei vier Freiballonfahrten in den Jahren 1911 und 1912 sammelte. Die Analyse erstreckt sich einerseits auf die leichtesten Bestandteile, Wasserstoff, Helium und Neon (vom Wasserdampf abgesehen), andererseits auf das schwerste Gas der Luft, Kohlendioxyd. Die Änderung des Kohlendioxyd-Gehalts der Luft mit der Höhe hat noch besondere Bedeutung für den Kreislauf des Kohlenstoffs in der Natur und für die Absorption der Wärmestrahlen in der Atmosphäre.

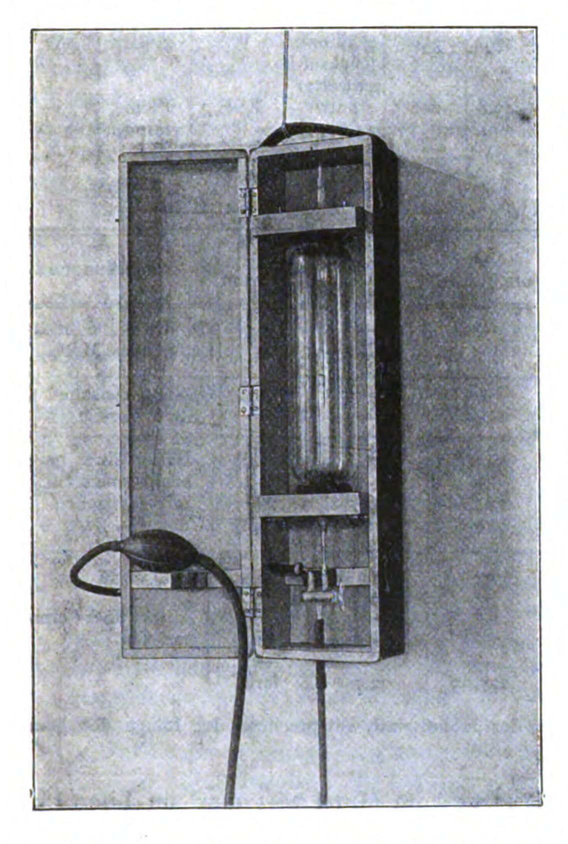
Die Untersuchung der Luftproben übernahm Herr E. Erdmann im Institut für angewandte Chemie in Halle nach seiner bereits bei früheren Luftanalysen bewährten Methode der fraktionierten Kondensation[1]). Im August 1913 wurden vier der von mir gesammelten elf Luftproben von den Herren E. Erdmann und H. Lange untersucht; seitdem konnten weitere Analysen aus Zeitmangel nicht gemacht werden. Da auch wegen des Krieges eine Fortsetzung und Beendigung der Untersuchung in abseh-

---

1) E. Erdmann und H. Stoltzenberg, Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. 43, 1702 u. 1708, 1910; Erg. d. Arb. d. Kgl. Aeron. Obs. Lindenberg, 6, 223, 1911.

barer Zeit nicht zu erwarten ist, sollen hier die bisherigen Ergebnisse kurz mitgeteilt und besprochen werden.

Auf die Ausbildung eines möglichst einwandfreien, bequemen und zuverlässigen Verfahrens für die Aufnahme von Luftproben im Ballon wurde besonders Wert gelegt. Die zwei Liter fassende Luftflasche (Figur) hat die



zur Analyse zweckmäßige Form eines Zylinders, der in zwei dickwandige Kapillaren ausläuft; die eine Kapillare ist zugeschmolzen, die andere geht in einen mit Vakuum-Hahnfett geschmierten Dreiwegehahn über, der durch Zuschmelzen der Kapillare leicht abgezogen werden kann. Die Flasche sitzt stoßsicher in einem widerstandsfähigen Holzkasten, der während der Aufnahme der Luftprobe im Ballon vom Korbring herab oberhalb des Korbrandes nach außen aufgehängt wird. Vor der Ballonfahrt ist die Flasche auf einige Zehntel Millimeter Druck an der Quecksilberluftpumpe evakuiert und längere Zeit auf Dichtigkeit geprüft worden. Ein 30 m langes Aluminiumrohr von 7 mm Außendurchmesser und 1 mm Wandstärke hängt außen vom Korbrand herunter, ist an den Dreiwegehahn durch ein kurzes Gummischlauchstück angeschlossen und wird, je nach der Stellung des Hahnes, mit einem seitlich angebrachten Gummisauggebläse oder der Flasche in Verbindung gesetzt. Das Aluminiumrohr besteht aus 20 Einzelstücken von $1\frac{1}{2}$ m Länge, die miteinander durch Verbindungsmuttern aus Messing bald nach Beginn der Fahrt verschraubt werden; die Verbindungsstellen sind mit etwas Vakuum-Hahnfett gedichtet. Soll die Luftprobe aufgenommen werden, so füllt man zunächst durch ein paar Züge des Saugers das Aluminiumrohr mit der Luft aus der Höhe vom unteren Ende des Rohres und dreht dann den Hahn so, daß die evakuierte Flasche mit dem Aluminiumrohr in Verbindung steht und die Luft einströmen kann. Darauf wird die Flasche sogleich wieder mit dem Hahn vorläufig verschlossen. Sobald als irgend möglich nach der Landung ist schließlich die Flasche in der Flamme einer mitgenommenen Gebläselampe durch Abziehen des Hahnstückes endgültig zu verschließen. In solchem Zustande kann dann die Luftprobe unbedenklich einige Zeit lang bis zur Analyse aufbewahrt werden.

Daß die Luftprobe durch die Berührung mit Hahnfett und Gummischlauch verunreinigt oder in ihrer Zusammensetzung verändert würde, was auch bei der Erdmannschen Analysenmethode nicht völlig von der Hand gewiesen werden kann, ist bei Verwendung gut gereinigten Materials für Hahnfett und Gummi und bei der kurzen Dauer der Berührung der Luft mit diesen Stoffen kaum anzunehmen.

Bei dem benutzten Aufnahmeverfahren wäre eine Verunreinigung der Luftprobe denkbar durch Füllgas des Ballons (Wasserstoff) und Ausatmungsluft (Kohlensäure). Um zu vermeiden, daß sich Wasserstoff vom Ballon her der Luftprobe beimischte, geschah die Füllung der Flasche nur dann, wenn der Ballon langsam fiel oder sich in einer Gleichgewichtslage befand. Die Kohlensäure der Ausatmungsluft läßt sich dadurch praktisch unschädlich machen, daß etwa fünf Minuten lang vor Entnahme der Luftprobe alle Korbinsassen nur durch Glasröhren, die mit körnigem Natronkalk gefüllt sind, ausatmen. Bei Anwendung von Sauerstoffatmung in größerer Höhe werden solche Absorptionsröhren vor die Ausatmungsventile der Atmungsmasken gesteckt. Während der zweiten und dritten der vier Ballonfahrten wurde so verfahren. Die Belästigung durch die Kohlensäurefänger ist jedoch bei einer ohnehin recht anstrengenden Hochfahrt so groß, daß während der vierten Fahrt darauf verzichtet wurde; da wir nur zu zweien im Korbe waren und die Luftproben vom Ende des Füllrohres 30 m unterhalb des Korbes stammen, ist eine Verunreinigung mit ausgeatmeter Kohlensäure trotzdem unwahrscheinlich.

Tabelle I.

Fahrt Nr.	Datum	Ballon	Aufstieg	Landung	Größte Höhe (m)	Tiefste Temp. (°C)	Fahrtstrecke (km)	Wetter	Bodenwind beim Aufstieg	Führer	Mitfahrer
1	2./3. 8. 1911	Nordhausen, 1680 m³ Wasserstoff	Bitterfeld, $8^{p}55$	Vorhop-Knesebeck, $9^{a}40$	3260	+ 0,9	176	antizyklonal	ESE	Lindner	Härtel, Borsche, W.
2	27. 8. 1911	Nordhausen, 1680 m³ Wasserstoff	Bitterfeld, $7^{a}54$	Lautitz-Löbau, $12^{p}48$	4990	— 7,6	195	zyklonal	SW	Lindner	Steiger, Schmidt, W.
3	30. 9. 1911	Nordhausen, 1680 m³ Wasserstoff	Bitterfeld, $9^{a}32$	Bolkenhain-Liegnitz, $3^{p}58$	6350	— 28,8	350	zyklonal, Rückseitenwetter	W	Müller	W.
4	28. 9. 1912	Harburg III, 2200 m³ Wasserstoff	Bitterfeld, $8^{a}27$	Klaffenb.-Chemnitz, $1^{p}43$	9100	— 43,8	206	antizyklonal	ESE	Flemming, W.	—

Tabelle II.

Fahrt Nr.	Luftflasche Nr.	Zeit	Bei Füllung der Luftflasche: Ballonort	Luftdruck (mm)	Temp. (°C)	Ballonhöhe[1] (m)	CO_2 (mm³ i. Lit.)	$H_2 + He + Ne$ (mm³ i. Lit.)	H_2-Spektrum	Bemerkungen
1	1	$6^{a}0$	Platendorf (Lüneburger Heide)	—	+ 14,1	1540	—	—	—	In der Nähe brennendes Moor.
1	(2)	$7^{a}15$		—	+ 1,6	3150	—	—	—	
2	(3)	$11^{a}5$	Senftenbg.-Bautzen	456	— 3,1	4200	—	—	—	Ballon zwischen Ci-Str u. Str-Cu.
2	4	$11^{a}34$		416	— 7,2	4930	—	—	—	
3	2	$11^{a}25$	Torgau-Pirna	364	— 24,8	5750	294,1	22,8	deutlich	Ballon über geschlossenem Str. mit aufstrebenden Cu.
3	6	$11^{a}50$		345	— 25,8	6150	—	—	—	
3	7	$12^{p}27$		340	— 27,5	6250	283,6	27,1	—	
3	5	$12^{p}15$		335	— 28,8	6350	278,3	24,5	deutlich	
4	3	$11^{a}57$	Merseburg-Chemnitz	262	— 36,6	8220	—	—	—	Ballon über einzelnen Cu.
4	8	$1^{p}2$		247	— 40,7	8640	—	—	—	
4	(10)	$12^{p}53$		241	— 41,5	8800	—	—	—	
4	9	$12^{p}32$		236	— 42,3	8950	—	—	—	
4	11	$12^{p}41$		235	— 42,4	8980	—	—	—	
4	12	$12^{p}22$		233	— 42,8	9040	277,05	33,7	stark	

1) Die zu den einzelnen Luftproben gehörigen Werte der Höhe sind, entsprechend der Länge des herabhängenden Füllrohres, um 30 m niedriger als die Ballonhöhen.

In Tabelle I sind die Hauptdaten der vier Ballonfahrten mitgeteilt. Die erste Fahrt hatte nur den Zweck, die Methode zur Füllung der Luftflaschen zu erproben; Flasche 2 wurde nach dieser Fahrt wieder entleert. Bei der zweiten Fahrt zerbrach die Kapillare der Flasche 3 oberhalb des Hahnes infolge des Landungsstoßes. Die Kapillare der Flasche 10 sprang nach der vierten Fahrt beim Abschmelzen des Hahnes. Diese drei Luftproben scheiden daher für die Analyse aus.

Tabelle II enthält die wichtigsten Einzelheiten für die bei den vier Fahrten gesammelten Luftproben und die Ergebnisse der bis jetzt ausgeführten Analysen.

Die von den Herren Erdmann und Lange nach derselben Methode zum Vergleich ausgeführten Analysen Hallescher Luft ergaben folgendes: Nach fünf Bestimmungen im Jahre 1910, deren Werte um höchstens 1,3 mm³ voneinander abwichen, war der Gehalt an Neon, Helium und Wasserstoff zusammengenommen („Restgas") im Mittel 26,3 mm³ im Liter Luft; bei späteren Analysen (1913) wurden auch kleinere Restgasmengen gefunden. Freier Wasserstoff konnte spektroskopisch nicht nachgewiesen werden. Der Kohlendioxyd-Gehalt war stets größer als 300 mm³ im Liter Luft. Sonstige Kohlendioxyd-Bestimmungen haben selbst außerhalb von Städten kaum weniger als 290 mm³ ergeben; der Durchschnitt für das mitteleuropäische Festland ist 300 mm³ im Liter Luft[1]).

Wenn es gestattet ist an die in Tabelle II mitgeteilten vier Analysen von Luftproben aus größerer Höhe, mit allem Vorbehalt wegen des spärlichen Materials, bereits Folgerungen anzuknüpfen, so ist deutlich zu ersehen, daß in der freien Atmosphäre bis zu der Höhe von 9000 m:

1. der Kohlendioxyd-Gehalt der Luft mit zunehmender Höhe abnimmt,

1) J. Hann, Lehrb. d. Meteorologie, 3. Aufl. S. 5—6, 1913.

2. der Gehalt der Luft an Neon, Helium und Wasserstoff mit der Höhe wächst.

Die Abnahme der Kohlendioxydmenge in der Luft mit zunehmender Höhe ist hierdurch jedenfalls qualitativ gefunden worden. Frühere Bestimmungen des Kohlendioxyd-Gehalts[1]) der Luft auf hohen Bergen und bei Ballonfahrten bis 4000 m Höhe ergaben nicht mit Sicherheit eine merkliche systematische Änderung.

Ältere Analysen von Luftproben, die bei Ballonfahrten gesammelt waren, haben kaum eine Änderung in der Zusammensetzung der Atmosphäre ergeben[2]). Durch neuere Forschungen[3]) ist aber eine Zunahme der Mengen von Neon, Helium und Wasserstoff in der Luft für den Höhenbereich bis 8000 m festgestellt worden, was nun durch meine Versuche bis 9000 m Höhe bestätigt wird. Bei Gelegenheit der Annäherung des Halleyschen Kometen an die Erde im Jahre 1910 veranlaßte das Kgl. Aeronautische Observatorium in Lindenberg und die K. K. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien Freiballonfahrten zum Zwecke von Luftuntersuchungen. Die bei den Lindenberger Fahrten gesammelten sieben Luftproben wurden von E. und H. Erdmann und H. Lange nach der Methode der fraktionierten Kondensation untersucht. Die Analysen ergaben, daß die Gesamtmenge Neon, Helium und Wasserstoff („Restgas") zwischen 80 und 8000 m Höhe von 26,2 auf 37,7 mm^3 im Liter Luft anwächst, und daß auch der Gehalt an jedem einzelnen der drei Bestandteile mit der Höhe zunimmt; Kohlendioxyd konnte in der bei 8000 m Höhe entnommenen Probe qualitativ nachgewiesen werden. In den 14 Luftproben, die bei den Wiener Fahrten bis 7800 m Höhe gesammelt wurden, wies Haschek eine Zunahme des Wasserstoffgehalts mit der Höhe spektroskopisch nach.

Die Vermutung liegt nahe, daß die Wetterlage einen bestimmenden Einfluß auf den Grad der vertikalen Durchmischung in der Troposphäre ausübt. Die Antizyklone mit ihrer gleichmäßig ruhigen, absteigenden Luftbewegung wird für die Einstellung des Diffusionsgleichgewichts, für die Ausbildung einer Luftschichtung nach der Dichte der Bestandteile günstiger sein als die Zyklone mit den verhältnismäßig stärkeren und wechselnden, aufsteigenden Luftströmungen. Im Tief wird die Durchmischung kräftiger sein als im Hoch. Ein derartiger Einfluß der Wetterlage ist vielleicht bereits in der Zusammensetzung meiner vier bisher analysierten Luftproben erkennbar.

1) J. Hann, l. c.
2) J. Hann, l. c. S. 8.
3) O. Tetens, Erg. d. Arb. d. Kgl. Aeron. Obs. Lindenberg, 6, 219, 1911; A. Konschegg, Met. Zeitschr. S. 480, 1912.

Die dritte Ballonfahrt fand statt auf der Rückseite eines großen, nach Osten abziehenden Tiefs bei dauernder starker Stratus-Bildung in 1500 m Höhe mit hochaufstrebenden Cumuluswolken und lebhaftem Westwind. Die Zusammensetzung der Luft von dieser Fahrt aus 5720 bis 6320 m Höhe weicht, wenn die Schwankungen der Analysenergebnisse reell sind, nur in einigen Zahlenwerten, sowie durch die deutliche Sichtbarkeit des Wasserstoffspektrums in dem zu erwartenden Sinne von der Zusammensetzung der Luft am Boden ab. Die vertikale Durchmischung im Tief ist jedenfalls bis 6000 m Höhe wirksam, genügt aber doch nicht immer vollständig zur Ausgleichung der unter der Wirkung der Schwere stattfindenden Diffusion.

Während der vierten Fahrt befand sich der Ballon mitten in einem Hoch bei nur leichter, vorübergehender Cumulusbildung unterhalb 400 m Höhe und schwachen, mit wechselnder Höhe vielfach drehenden Winden. Die Luftprobe von dieser Fahrt aus 9010 m Höhe zeigt deutlich in allen Punkten, und zwar erheblich mehr als die Proben zyklonaler Luft von der dritten Fahrt aus 6000 m Höhe, die Änderung der Luftzusammensetzung mit der Höhe im Sinne des Daltonschen Gesetzes. Jedoch selbst in diesem, durch die antizyklonale Wetterlage besonders günstigen Falle war das Diffusionsgleichgewicht in 9000 m Höhe nicht entfernt erreicht. Das lehrt der Vergleich des Analysenresultats mit der Luftzusammensetzung, die sich nach dem Daltonschen Gesetz und der Barometerformel für die verschiedenen Höhen berechnen läßt unter der Voraussetzung, daß jede vertikale Durchmischung fehlt. So findet beispielsweise Tetens[1]), indem er teilweise noch unsichere Annahmen über die Zusammensetzung der Luft am Boden zugrunde legt, folgende Zahlenwerte für die Volumenteile der hier in Betracht kommenden Luftbestandteile:

Höhe in km	0	4	8	12
CO_2	0,000300	0,000231	0,000173	0,000126
Ne	0,000010	0,000012	0,000014	0,000017
He	0,000010	0,000015	0,000024	0,000041
H_2	0,000020	0,000032	0,000053	0,000092

Es sind also nach den Analysen zwar bereits in der Troposphäre merkliche Abweichungen von der vollkommen gleichmäßigen vertikalen Durchmischung im Sinne einer Entmischung gemäß dem Daltonschen Gesetze vorhanden; eine vollständige Einstellung des Diffu-

1) O. Tetens, Erg. d. Arb. d. Kgl. Aeron. Obs. Lindenberg, 7, 63, 1912.

sionsgleichgewichts aber findet jedenfalls in 9000 m Höhe noch nicht statt. Dasselbe zeigt auch die Zusammensetzung der bei den Lindenberger Ballonfahrten von 1910 gesammelten Luftproben bis zur Höhe von 8000 m.

Es liegt nahe, zur Kontrolle dieses Ergebnisses der Luftanalysen die Theorien der Diffusion auf das vorliegende Problem anzuwenden. Man könnte versuchen, rechnerisch zu ermitteln, in welcher Zeit für eine bestimmte Höhe bei gegebenen Werten von Druck und Temperatur die Entmischung der ebenso wie am Boden zusammengesetzten Luft bis zur praktischen Einstellung des Diffusionsgleichgewichts stattfindet, wenn man die bekannten Diffusionskoeffizienten k benutzt. Da jedoch die experimentell gefundene Veränderlichkeit von k schon mit den verschiedenen Diffusionstheorien schlecht übereinstimmt, hat man um so weniger für die wesentlich veränderten Bedingungen der vorliegenden Aufgabe bis jetzt die erforderlichen Grundlagen.

Andererseits könnte man daran denken, für die Troposphäre zu berechnen, welche Zeit die Luft braucht, um bei den wirklich stattfindenden Mischungsvorgängen vom Diffusionsgleichgewicht bis zu einer mittleren Zusammensetzung durchmischt zu werden. Aber hierfür reicht das vorliegende Beobachtungsmaterial über den vertikalen und horizontalen Luftaustausch und die Turbulenz in der Troposphäre zurzeit noch nicht aus.

Nach den Erwägungen über den Einfluß der Wetterlage auf den Grad der vertikalen Durchmischung der Luft in der Troposphäre ist zu vermuten, daß auch die Luft der untersten Schichten merkliche Schwankungen der Zusammensetzung in bestimmter Beziehung zur Wetterlage zeigen wird. Solche Untersuchungen, die vielleicht auch Aufschlüsse über die vorkommenden Geschwindigkeiten der Entmischung und Durchmischung bringen werden, sind in Aussicht genommen.

Zusammenfassung.

1. Bei vier Freiballonfahrten sind 11 Luftproben in Höhen zwischen 1500 und 9000 m gesammelt worden.

2. Ein von den bisherigen Methoden abweichendes Verfahren zur Aufnahme der Luftproben im Ballon wird beschrieben.

3. Ein Teil der Luftproben wurde von Herrn E. Erdmann nach der Methode der fraktionierten Kondensation auf den Gehalt an CO_2, Ne, He, und H_2, untersucht.

4. Es ergab sich mit wachsender Höhe in der Zusammensetzung der Luft eine Abnahme des Gehalts an CO_2 und eine Zunahme der Mengen von Ne, He und H_2.

5. Eine vollständige Einstellung des Diffusionsgleichgewichts nach dem Daltonschen Gesetze unter dem Einfluß der Schwere findet zwar in 9000 m Höhe noch nicht statt; jedoch kommen bereits in der Troposphäre merkliche Abweichungen von der gleichmäßigen vertikalen Durchmischnng vor.

6. Der Einfluß der Wetterlage auf den Grad der vertikalen Durchmischung in der Troposphäre wird besprochen.

Für Unterstützung dieser Arbeit aus der Trenkle-Stiftung und der Parey-Stiftung bin ich der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte und der Philosophischen Fakultät der Universität Halle zu Dank verpflichtet.

Halle a. d. S., den 29. Juli 1916.

(Eingegangen 31. Juli 1916.)

Über die tägliche Periode der mikroseismischen Bewegung.

Von Otto Meißner.

Über die mikroseismische Bewegung von kurzer Periode sind in dieser Zeitschrift schon wiederholt Mitteilungen gemacht[1]). Im allgemeinen wird als Ursache meist noch nach der Wiechertschen Hypothese die Brandung an der norwegischen Küste angesehen, während Pechau diese mikroseismische Bewegung für örtlichen Ursprungs ansieht, was sie aber wegen der Gleichzeitigkeit der Ab- und Zunahme (im großen und ganzen) über weite Ländergebiete doch nicht sein kann. In einer kleinen Arbeit in den „Beiträgen zur Geophysik" (Band 13, S. 204—209[2])) habe ich auf Grund einer Zusammenstellung mit den verschiedenen meteorologischen Elementen einen Zusammenhang mit dem Luftdruck bzw. der Luftdruckverteilung über Europa gefunden, in dem Sinne, daß bei starker mikroseismischer Bewegung über Nordeuropa tiefer, über Süd- und Südosteuropa dagegen hoher Luftdruck herrscht, während bei Fehlen von mikroseismischer Bewegung die Luftdruckdifferenzen viel geringer sind. Dies bezieht sich vornehmlich auf die kalte Jahreszeit. Ein Parallelismus mit dem Seegang in Norwegen findet sich nach meinen Untersuchungen gleichfalls, was aber nicht wundernehmen kann, da dieser ja selbst wieder mit dem

1) B. Gutenberg, diese Zeitschr. 11, 1184—1185, 1910; C. Mainka, ebenda 14, 555—557, 1913; W. Pechau, ebenda 15, 415—416, 1914.

2) Vgl. auch: Seismometr. Beobachtungen in Potsdam für 1914, S. 21—23.

Luftdruck in engster Beziehung steht. Dagegen ist es sehr fraglich, ob er als primäre Ursache aufgefaßt werden kann, da in den Einzelfällen keineswegs ein sehr deutlicher Parallelismus besteht, sondern eben nur im allgemeinen.

Da die mikroseismische Bewegung im Sommer stets klein ist, ist natürlich auch ein roher Parallelismus mit der Temperatur vorhanden. Auch diese kann aber als primäre Ursache nicht in Frage kommen.

Nun hat die mikroseismische Bewegung aber auch eine, bisher wenig beachtete, und wo dies geschehen, meist auf Verkehrseinflüsse, also „künstliche" Störungen, geschobene, tägliche Periode. Für Graz finden sich nun dankenswerterweise aus den Jahren 1911—1915 (1914 fällt jedoch aus) viermal tägliche Ablesungen: um 0, 6, 12 und 18 Uhr abgedruckt. Diese lassen, wie aus der kleinen hier mitgeteilten Tabelle hervorgeht, die tägliche Periode sehr gut erkennen. (Für die Monate Mai bis September ist die mikroseismische Bewegung so klein, daß sie unberücksichtigt bleiben mußte.)

Mikroseismische Bewegung in Graz in μ.

	0h	6h	12h	18h	Mittel
Jan.	0,47	0,59	0,66	0,57	0,57
Febr.	0,40	0,52	0,59	0,50	0,50
März	0,21	0,31	0,35	0,30	0,29
April	0,05	0,09	0,10	0,09	0,08
Okt.	0,10	0,14	0,15	0,14	0,13
Nov.	0,21	0,28	0,33	0,30	0,28
Dezbr.	0,24	0,30	0,34	0,32	0,30
Mittel	**0,24**	**0,32**	**0,36**	**0,32**	**0,31**
Abw.	—0,07	+0,01	+0,05	+0,01	

Hiernach ist nicht anzunehmen, daß die tägliche Periode der mikroseismischen Bewegung allein vom menschlichen Verkehr herrührt; dann dürfte ihre Amplitude keine mit der Gesamtamplitude der mikroseismischen Bewegung parallele Schwankung zeigen, und selbst wenn man versuchte, dies auf den stärkeren Einfluß der Verkehrsstörungen bei Frostwetter zu schieben, so bliebe das Mittagsmaximum immer noch völlig unerklärt. Übrigens ist die Berufung auf den Frost als Ursache stärkerer mikroseismischer Bewegung, so plausibel sie auf den ersten Blick zu sein scheint, doch völlig hinfällig, wie schon vor längerer Zeit von Hecker mit meiner Unterstützung ausgeführte Untersuchungen gezeigt haben[1]).

Eine unbefangene Betrachtung der Tabelle zeigt entschieden, daß die tägliche Periode der mikroseismischen Bewegung einen „thermischen" Charakter hat. Keineswegs aber ist irgendwie an einen direkten Einfluß oder Zusammenhang mit der Temperatur oder auch der Sonnenstrahlung zu denken, denn diese Schwankungen sind ja gerade im Winter klein, im Sommer, wo die mikroseismische Bewegung fast verschwindet, groß!

Diese tägliche Periode zeigt sich nun auch in gleicher Größenordnung in Potsdam und in Hamburg. Sie bietet jeder bisher vorgeschlagenen Erklärung der mikroseismischen Bewegung große Schwierigkeiten. Die Brandung hat jedenfalls keine tägliche Periode von irgend merklicher Amplitude, aber auch die Luftdruckdifferenzen nicht. (Die tägliche Periode des Luftdrucks selbst ist bekanntlich eine doppelte und so klein, daß sie als Erklärungsgrund von vornherein ausscheidet.)

Mit aller Vorsicht möchte ich darauf hinweisen, daß ein gewisser, indirekter Einfluß der Sonnenstrahlung vielleicht doch zur Erklärung dieser täglichen Periodizität herangezogen werden könnte. Man könnte annehmen, daß unter dem Einfluß der ja auch im Winter immerhin noch vorhandenen Konvektionsströmungen der Wind tagsüber mehr stoßweise, in der Nacht dagegen gleichmäßiger weht, und daß hierdurch irgendwie eine Vergrößerung der Amplitude der mikroseismischen Bewegung während der hellen Tageszeit bewirkt wird. Eine große Wahrscheinlichkeit möchte ich dieser Erklärung freilich selbst nicht beilegen, doch scheint sie mir immerhin noch besser als gar keine.

O. Somville hat in einer „Contribution à l'étude des mouvements microsismiques"[1]) eine mit meiner Auffassung gut in Einklang zu bringende, aber etwas mehr spezialisierte Erklärung der Entstehung der kurzperiodischen mikroseismischen Bewegung gegeben. Die Stärke der mikroseismischen Bewegung soll der Luftdruckdifferenz in einem festen Ring um die Station proportional sein; Brandung als Ursache verwirft auch er. Der parallele Gang beider Erscheinungen, der mikroseismischen Bewegung und der Stärke der Brandung, weist eben nur auf eine beiden gemeinsame Ursache hin; nach Somvilles sowohl wie nach meiner Erklärung ist für beide Erscheinungen Parallelismus im großen und ganzen, im einzelnen aber oft Verschiedenheit zu erwarten, ganz wie es die Beobachtungen tatsächlich zeigen.

Ich möchte auch noch darauf hinweisen, daß die kurzdauernden Veränderungen der Windstärke bisher noch sehr wenig erforscht sind. Es gibt solche von sehr kurzer Dauer,

1) Seismometrische Beobachtungen in Potsdam für 1905, S. 15.

1) Publication de l'Observatoire royal de Belgique, 1914. (Referat in den Beiträgen zur Geophysik Band 14, Heft 1.)

von etwa einigen Tausendsteln Sekunden, wie das bekannte Summen der Telegraphendrähte beweist, das nach meinen Untersuchungen mit der absoluten Stärke des Windes nicht zusammenhängt, obwohl es zweifellos durch den Wind hervorgebracht wird. Von hier aus gibt es wahrscheinlich eine kontinuierliche Zunahme der Dauer dieser Schwankungen bis zu denen, die man auf den Anemographenaufzeichnungen als mehr oder weniger regelmäßige Perioden von einigen Minuten Dauer verfolgen kann, und die man auch ohne jeden Apparat selbst empfindet. Ich halte es doch für nicht unmöglich, daß die Intensität der mikroseismischen Bewegung mit der Häufigkeit und Stärke gerade dieser kurzen Schwankungen der Windstärke in engem Zusammenhange steht.

Zusammenfassung: Die tägliche Periodizität der mikroseismischen Bewegung bietet allen bisherigen Erklärungsversuchen große Schwierigkeiten. Sie hängt möglicherweise mit kurzperiodischen Schwankungen der Windstärke zusammen. Ferner: die Brandung ist nicht als Ursache der mikroseismischen Bewegung anzusehen, sondern hat nur mit ihr einen annähernd parallelen Gang.

Potsdam, Geodätisches Institut, 3. August 1916.

(Eingegangen 4. August 1916.)

Zur Theorie des Glimmstroms. VI.[1])

Von Ragnar Holm.

Im Februar 1915 habe ich eine Theorie der Glimmstrom-Vorgänge vor der Kathode veröffentlicht[2]), woraus folgende Hauptsätze entnommen werden:

1. Ein gewisses Gebiet, die Kanalstrahlenquelle, liefert die zum Befreien der primären Kathodenstrahlen nötigen positiven Ionen.

2. Das räumliche Gebiet des Kathodenfalles, bis zum Glimmsaum gerechnet, ist etwas kleiner als die Kanalstrahlenquelle. Der Kathodenfall (nach älterer Definition, vgl. unten) ist ein wenig kleiner als der auf die Kanalstrahlenquelle fallende Potentialfall.

3. Bei einem bestimmten Kathodenfall ist die Dicke der Kanalstrahlenquelle vor einer genügend großen Scheibenkathode in freien Weglängen der Elektronen gemessen eine bestimmte, in weiten Grenzen unabhängig vom Druck.

4. Für die Abhängigkeit des Kathodenfalles von Druck und Stromdichte lassen sich, wie ich loc. cit. gezeigt habe, einfache Formeln durch Ähnlichkeitsbetrachtungen berechnen.

In der mir damals bekannten Beobachtungsliteratur fand ich allerdings keine vollkommene Bestätigung der hergeleiteten Formeln[1]). Ich habe leider erst nachträglich gefunden, daß die mangelnde Übereinstimmung mit den Beobachtungen darauf beruht, daß diese nicht mit Scheibenkathoden, sondern mit Drahtkathoden ausgeführt wurden. Für Drahtkathoden gelten besondere Gesetze, wie unten bewiesen werden soll.

Einige Monate nach mir hat C. A. Skinner[2]) eine mit der meinen im wesentlichen übereinstimmende Theorie des Kathodenfalles veröffentlicht und hat Teile seiner Theorie durch schöne Beobachtungen bestätigt. Diese Beobachtungen bestätigen auch meine Theorie.

Meine Berechnungen haben den Vorzug, daß sie von einem Minimum der Voraussetzungen ausgehen. Skinner, dessen Theorie weiter als die meine zielt, baut auf teilweise unsichere, bzw. unrichtige, vereinfachende Voraussetzungen (z. B. Ionisierung bei jedem Stoß). Ich wiederhole meine Ableitung hier in einer solchen Form, daß eine Schätzung für den Fall der Drahtkathoden daraus gefolgert werden kann. Dabei definiere ich den Kathodenfall als den Potentialfall zwischen dem Anfang der Kanalstrahlenquelle im neg. Glimmlicht, nahe dem Glimmsaum, und der Kathode. Diese Definition dürfte recht genau mit der für Messungen praktischen Definition Skinners: „Der Kathodenfall ist gleich der Potentialdifferenz zwischen dem Ort des Gradientenminimums im neg. Glimmlicht und der Kathode“ übereinstimmen.

Wir denken uns, wie in T. d. G. II, § 4[3]), zwei ähnliche Entladungsröhren I und II, von denen II a-mal größere lineare Dimensionen (aller Teile) als I hat. Homologe Punkte sollen in beiden dasselbe Potential besitzen. Wie in T. d. G. II, § 4 bewiesen wurde, wird dies der Fall sein, wenn die Beziehungen A bis F des § 4 gelten. Aus den Beziehungen C und E und dem obigen Hauptgesetz 3 in der jetzt naheliegenden erweiterten Form: Bei ähnlicher Vergrößerung des Entladungsrohres und der freien Weglängen bleibt, im Falle konstanten Kathoden-

1) Meine Veröffentlichungen „Zur Theorie des Glimmstroms“, diese Zeitschr. **15**, 241, 289, 782, 1914 und **16**, 20, 70, 1915, werden im folgenden mit T. d. G. I, II usw. bezeichnet.

2) R. Holm, T. d. G. IV, § 8, diese Zeitschr. **16**, 20 u. f. (besonders 26 bis 28), 1915.

1) Vgl. R. Holm, loc. cit. S. 28.

2) C. A. Skinner, Phys. Rev. **5**, 483 und **6**, 158, 1915. Referate von Schottky, Beibl. **40**, 26 und 28, 1916 sind mit Bezug auf meine Priorität irreführend.

3) R. Holm, diese Zeitschr. **15**, 289, 1914.

falles, die Dicke der Kanalstrahlenquelle, in freien Molekül- oder Elektronenweglängen gemessen, konstant — folgt dann unmittelbar das Gesetz:

Bei ähnlicher Vergrößerung des Entladungsrohres (mitsamt den Elektroden) und gleicher Vergrößerung der Molekülweglängen, aber unverändertem Kathodenfall verändert sich die Stromdichte an der Kathodenoberfläche umgekehrt proportional dem Quadrat der genannten Vergrößerung.

Wenn die Kathoden so große Scheiben sind, daß fast alle Kraftlinien die Kanalstrahlenquelle senkrecht zur Kathodenoberfläche durchqueren, kann die seitliche Ausdehnung der Kathode keine Bedeutung für die Abhängigkeit der Stromdichte vom Druck haben. Dann gilt einfach:

Bei konstantem Kathodenfall ist die Stromdichte an der Oberfläche großer Scheibenkathoden proportional dem Quadrat des Druckes.

Dieses Gesetz wurde für den Fall des normalen Kathodenfalles von Skinner experimentell bestätigt. Bei größerem Kathodenfall tritt natürlich als störendes Moment die Temperaturerhöhung im Gas immer mehr auf.

Beobachtungen an Zylinderkathoden mit dem Drucke angepaßten Durchmessern liegen nicht vor. Stark[1]) und Hehl[2]) haben ihre Beobachtungen über die Abhängigkeit der Kathodenstromdichte vom Druck an unveränderten drahtförmigen Kathoden gemacht. Die folgende Berechnung führt zu demselben angenähert gültigen Gesetz, das von Stark und Hehl gefunden wurde.

Es möge bedeuten: $\bar{\sigma}$ und σ die negative elektrische Ladungsdichte einer ebenen bzw. einer zylindrischen Kathodenoberfläche; $\bar{\varrho}$ und ϱ räumliche Ladungsdichte im Gase vor den betr. Kathoden; $\bar{l}$ und l Dicke der betr. Kanalstrahlenquellen; x Entfernung von der ebenen Kathode; r_0 Radius der zylindrischen Kathode und r Entfernung von deren Achse. Das Potential der Kathode wird gleich 0 gesetzt. Dann ist das Potential eines Punktes x, in der Kanalstrahlenquelle vor der ebenen Kathode

$$V = 2\pi\bar{\sigma}x_1 - 2\pi\int_0^{x_1}(x_1 - x)\,\bar{\varrho}\,dx, \qquad (1)$$

und das Potential eines Punktes r_1 vor der zylindrischen Kathode

$$V = 2\pi r_0\sigma\log\frac{r_1}{r_0} - 2\pi\int_{r_0}^{r_1} r\varrho\,dr\log\frac{r_1}{r}. \qquad (2)$$

1) J. Stark, diese Zeitschr. 3, 88, 1901.
2) N. Hehl, diese Zeitschr. 3, 547, 1902.

Wählen wir die Aufpunkte am Ende der Kanalstrahlenquelle, so wird $V = V_0$, dem Kathodenfall;

$$x = \bar{l} \text{ und } r_1 = r_0 + l\,^{1}) \qquad (3)$$

und außerdem, weil das Feld jenseits der Kanalstrahlenquelle als gleich Null betrachtet werden kann

$$\int_0^{\bar{l}}\bar{\varrho}\,dx = \bar{\sigma} \text{ und } \int_{r_0}^{r_0+l} r\varrho\,dr = r_0\sigma. \qquad (4)$$

Wir denken uns nun ein Entladungsrohr mit zylindrischer Kathode, dessen Radius r_0 klein im Verhältnis zu l sei. Wir denken uns auch ein zweites ähnliches Entladungsrohr, dessen Kathodenradius ar_0 sei, wo $a > 1$, während bei konstantem Kathodenfall der Druck im zweiten Rohr a-mal kleiner als im ersten sei. Wenn Ladungsdichte und Stromdichte im ersten Rohr ϱ und j sind, so sind sie nach oben erwähnten Gesetzen und laut Beziehung D in T. d. G. II § 4 im zweiten Rohr gleich $\frac{\varrho}{a^2}$ und $\frac{j}{a^2}$. In dem zweiten Rohr denken wir uns nun bei konstant gehaltenem Druck und Kathodenfall den Kathodenradius bis auf den ursprünglichen Wert r_0 verkleinert, wobei die Ladungsdichten gleich σ' und ϱ' werden. Wir können die Dicke al der Kanalstrahlenquelle dabei als angenähert konstant betrachten. Es gilt für den Fall des Kathodenradius ar_0

$$V_0 = 2\pi a r_0\frac{\sigma}{a^2}\log\frac{a(r_0+l)}{ar_0} - 2\pi\int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r\frac{\varrho}{a^2}\,dr\log\frac{a(r_0+l)}{r}, \qquad (5)$$

und für den Fall des wieder bis auf r_0 verkleinerten Kathodenradius

$$V_0 = 2\pi r_0\sigma'\log\frac{r_0+al}{r_0} - 2\pi\int_{r_0}^{r_0+al} r\varrho'\,dr\log\frac{r_0+al}{r} \qquad (6)$$

Aus (4) folgt

$$ar_0\frac{\sigma}{a^2} = \int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r\frac{\varrho}{a^2}\,dr \text{ und } r_0\sigma' = \int_{r_0}^{r_0+al} r\varrho'\,dr.$$

Durch Substitution in (5) und (6) erhalten wir:

$$V_0 = 2\pi\int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r\frac{\varrho}{a_2}\,dr\log\frac{r}{ar_0}, \qquad (5')$$

1) Wahrscheinlich sind $\bar{l}$ und l auch bei gleichen Kathodenfällen nicht genau gleich groß. Sowohl der Kathodenfall wie die Dicke der Kanalstrahlenquelle muß etwas von der Form der Kathode abhängen.

$$V_0 = 2\pi \int_{r_0}^{r_0+al} r\varrho' dr \log \frac{r}{r_0}. \qquad (6')$$

Wir sondern nun diejenigen Teile der Integrale, welche die den Kathodensprung bildenden reflektierten (nach Skinner[1]) Ionenladungen enthalten, aus. Wenn die betr. Kathodensprünge S und S' sind, so sind die Werte der ausgesonderten Teilintegrale bzw. S und S'. Es gilt also

$$V_0 = S + 2\pi \int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r \frac{\varrho_1}{a^2} dr \log \frac{r}{ar_0}, \qquad (5'')$$

$$V_0 = S' + 2\pi \int_{r_0}^{r_0+al} r\varrho_1' dr \log \frac{r}{r_0}, \qquad (6'')$$

wo jetzt die Ladungsdichten ϱ_1 und ϱ_1' nur die gegen die Kathode bewegten Kanalstrahlen umfassen. Das letzte Integral kann geschrieben werden:

$$2\pi \int_{r_0}^{ar_0} r\varrho_1' dr \log \frac{r}{r_0} + 2\pi \int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r\varrho_1' dr \left(\log \frac{r}{ar_0} + \log a\right)$$
$$- 2\pi \int_{r_0+al}^{a(r_0+l)} r\varrho_1' dr \log \frac{r}{r_0}. \qquad (7)$$

In diesem Ausdruck (7) können wir, wenn r_0 genügend klein ist, $\log a$ im großen Ganzen gegen $\log \frac{r}{ar_0}$ vernachlässigen. Das Integral $\int_{r_0}^{ar_0}$ umfaßt einen sehr kleinen Raum, dessen Ladung aus schnell bewegten Ionen besteht und deswegen nicht groß sein kann. Das Integral $\int_{r_0+al}^{a(r_0+l)}$ umfaßt auch einen kleinen Raum, dessen Raumladungsdichte außerdem klein ist. Die beiden letztgenannten Integrale können also gegen das mittlere Integral des Ausdruckes (7) vernachlässigt werden. Wir erhalten also schließlich als annähernd gültig:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= S + 2\pi \int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r \frac{\varrho_1}{a^2} dr \log \frac{r}{ar_0} \\ &= S' + 2\pi \int_{ar_0}^{a(r_0+l)} r\varrho_1' dr \log \frac{r}{ar_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Wir machen die Annahme

$$S = S'. \qquad (9)$$

Dann wird die Gleichung (8) befriedigt, wenn

$$\varrho_1' \equiv \frac{\varrho_1}{a_2} \qquad (10)$$

ist.

Es ist einleuchtend, daß die Lösung (10) auch mit guter Annäherung den Bedingungen des Ionisationsvorganges genügt, denn die Ionisation zwischen den Flächen $r = ar_0$ und $r = r_0$ ist belanglos und auf dem übrigen Teil der Kanalstrahlenquelle dürfte die Ionisation auch bei etwas variierendem Potentialfall innerhalb des betr. Raumes in der Hauptsache eine Funktion der Anzahl freier Weglängen, von $r = ar_0$ aus gemessen, sein.

Aus (10) folgt, daß bei a-facher Verminderung des Druckes ohne Veränderung des Kathodenfalls und ohne Veränderung der drahtförmigen Kathode, die Stromdichte in der Fläche $r = ar_0$ gleich j_0/a^2 wird, wenn j_0 die ursprüngliche Stromdichte an der Kathodenoberfläche bedeutet. In der Fläche $r = r_0$ ist die Stromdichte j_0' natürlich a·mal größer als in der Fläche $r = ar_0$.

Es ist also

$$j_0' = \frac{j_0}{a}. \qquad (11)$$

Die Gleichung (11) enthält gerade das von Stark und Hehl[1]) beobachtete Gesetz: Die Stromdichte an einer drahtförmigen Kathode, dessen Durchmesser klein gegen die Dunkelraumdicke ist, ändert sich bei konstantem Kathodenfall angenähert umgekehrt proportional dem Druck.

Die experimentelle Bestätigung von (11) enthält auch eine gewisse Bestätigung von (9).

Die obige Ableitung ist mit ziemlich groben Vernachlässigungen gemacht. Eine genauere Berechnung würde, wie aus der Art der Vernachlässigung leicht eingesehen, ein kleineres ϱ' ergeben und also etwa zu einem Gesetz

$$j_0' = \frac{j_0}{a^\varepsilon}, \qquad (11')$$

wo $1 < \varepsilon < 2$ ist, führen.

Es ist zu bemerken, daß die höhere Temperatur der Kathode und des Gases unmittelbar vor der Kathode bei vermehrtem Druck eine Vergrößerung der freien Weglänge und damit eine Verkleinerung des gemessenen ε bringt, d. h. das ohne Temperatureinwirkung genaue Gesetz (11') nach (11) zu verschiebt. Die bisherigen Messungen sind offenbar nicht gegen den Temperatureinfluß korrigiert. Hierin liegt wohl ein Grund ihrer guten Übereinstimmung mit (11).

Wir gehen nun zu einer vergleichenden

1) Vgl. T. d. G. IV, diese Zeitschr. **16**, 21 (besonders die Note 3), 1915.

1) Stark, loc. cit.; Hehl, loc. cit., vgl. T. d. G. IV, § 8, diese Zeitschr. **16**, 28, 1915.



Schätzung der Stromdichten an ebenen und zylindrischen Kathoden unter sonst gleichen Umständen über.

Wir nehmen an, daß derselbe Druck und derselbe Kathodenfall vor einer ebenen und einer zylindrischen Kathode vorhanden sind. Aus (1) und (2) ergibt sich dann:

$$V_0 = 2\pi\left[\bar{\sigma}\,\bar{l} - \int_0^{\bar{l}} (\bar{l} - x)\,\bar{\varrho}\,dx\right] \qquad (12)$$

$$V_0 = 2\pi\left[r_0\sigma \log\frac{r_0+l}{r_0} - \int_{r_0}^{r_0+l} r\varrho\,dr \log\frac{r_0+l}{r}\right].$$

Der Schwerpunkt der Ladungsschichten $\bar{\varrho}\,dx$ möge sein:

$$x = X.$$

Dann ist

$$\int_0^{\bar{l}} (\bar{l} - x)\,\bar{\varrho}\,dx = \bar{\sigma}(\bar{l} - X).$$

Wenn wir schreiben:

$$\int_{r_0}^{r_0+l} r\varrho\,dr \log\frac{r^0+l}{r} = \int_{r_0}^{r_0+l} r\varrho\,dr\,(\log(r_0+l) - \log r),$$

so sehen wir, daß eine Art Schwerpunkt, $\log R$, zu den Ladungsschichten $r\varrho\,dr$ auch vorhanden ist, der folgender Gleichung genügt:

$$r_0\sigma \log\frac{r_0+l}{R} = \int_{r_0}^{r_0+l} r\varrho\,dr \log\frac{r_0+l}{r}.$$

Anstatt (12) können wir also schreiben:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= 2\pi\bar{\sigma}X = \\ &= 2\pi r_0\sigma \log\frac{R}{r_0} \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Es mögen $\bar{j}$ und j die betr. Stromdichten an der ebenen und der zylindrischen Kathodenoberfläche bedeuten. Es ist:

$$\bar{j} = \bar{v}_0\bar{\sigma}, \qquad (14)$$

wo $\bar{v}_0$ eine gewisse mittlere Geschwindigkeit der Ionen bedeutet.

Den Vorgang vor der zylindrischen Kathode untersuchen wir für $\lim\limits_{r_0=0}$. Die Ladungen der Kanalstrahlenquelle werden hauptsächlich von durch sekundäre Kathodenstrahlen mittels Stoßes erzeugten positiven Ionen während ihrer Bewegung nach der Kathode gebildet. Auf das Erzeugungsgebiet dieser Ionen muß ein größerer Potentialfall als eine Ionisierungsspannung fallen. Man kann demnach bei abnehmendem r_0 mit einer unteren Grenze v_0 der mittleren Ladungsgeschwindigkeit rechnen. Außerdem ist klar, daß es bei abnehmendem r_0 auch eine untere Grenze R_0 des R gibt. Die Stromdichte an der zylindrischen Kathode ist somit

$$j \geqq v_0\sigma, \qquad (15)$$

oder nach Substitution aus (13)

$$j \geqq v_0\bar{\sigma}\frac{X}{r_0\log\frac{R}{r_0}} \geqq v_0\bar{\sigma}\frac{X}{r_0\log\frac{R_0}{r_0}} = \frac{v_0}{\bar{v}_0}\,\frac{\bar{v}_0\bar{\sigma}X}{r_0\log\frac{R_0}{r_0}}$$

oder

$$j \geqq \frac{v_0}{\bar{v}^0}\cdot\frac{X}{r_0\log\frac{R_0}{r_0}}\cdot\bar{j}\,. \qquad (16)$$

(Bemerkung: Es dürfte gelten $v_0 < \bar{v}_0$).

Offenbar ist infolge (16)

$$\lim_{r_0=0}\frac{j}{\bar{j}} = \infty\,,$$

und zwar nähert sich $j/\bar{j}$ der Unendlichkeit nach demselben Gesetz wie es bei abnehmendem r_0

$$\frac{1}{r_0\log\frac{R_0}{r_0}}$$

tut.

Da es nicht anzunehmen ist, daß zu einem gewissen Kathodenradius ein Minimum des j gehört, dürften wir behaupten können, daß bei konstantem Kathodenfall und Druck die Stromdichte an einer zylindrischen Kathode größer als an einer ebenen ist und daß sie mit abnehmendem Kathodenradius zunimmt.

Über die Herleitung der Beziehung zwischen Kathodenfall und Stromdichte siehe T. d. G. IV, § 8[1])!

1) R. Holm, diese Zeitschr. **16**, 27, (erste Spalte) 1915.

(Eingegangen 3. August 1916.)

Über Röntgenstrahlspektra, die an gekrümmten Kristallflächen erzeugt wurden.

Von P. Cermak.

Schon von de Broglie[1]), der zuerst auf photographischem Wege Röntgenstrahlspektra aufnahm, ist vorgeschlagen worden, die Interferenzreflexion der Strahlen statt an einer drehbaren Kristallplatte an einem gekrümmten Kristalle zustande kommen zu lassen. Der Gedanke ist von verschiedenen Autoren durchgeführt worden; man gewinnt auf diesem Wege an Versuchszeit, doch verlieren die so gewonnenen Spektra für die genaue Ausmessung der Wellenlängen an Wert, da der Reflexionsort beim gebogenen Kristall nicht für alle Wellenlängen an der gleichen

1) de Broglie, Journ. de Phys. (5) **4**, 101, 1914.

Stelle liegt[1]). Immerhin sind solche Versuche zu schneller Orientierung wertvoll bei allen jenen Kristallen, die eine Biegung zulassen. Daß sie unter Umständen auch Aufschlüsse über Kristalleigenschaften geben können, davon sollen die folgenden Zeilen Zeugnis geben.

An einigen Mineralien, die eine Biegung unter typisch verschiedenen Bedingungen zulassen oder in natürlichem Zustande gekrümmte Flächen aufweisen, wurde mittels der Versuchsanordnung von de Broglie das Linienspektrum des Platins aufgenommen[2]). An eine technische Röntgenröhre mit guter Kühlung und Regeneriervorrichtung war ein kupferner Tubus angeschmolzen, der ein Loch von etwa 2 mm Durchmesser enthielt, das mit 0,01 mm Aluminium luftdicht überdeckt war. So trat aus der Röhre ein kräftiges und ziemlich enges Röntgenstrahlbündel aus und durch einen 2 cm tiefen, 0,2 mm weiten Spalt in einen als Röntgenspektrometer ausgebauten, lichtdichten Bleikasten ein, worin der Kristall in gleichem Abstande von Spalt und Platte auf einem Tischchen stand, das, wenn nötig, mit einem Uhrwerke in Drehung versetzt werden konnte. Eine besondere, aus einem alte Orchestrion hergestellte Anordnung schaltete sowohl Röhre wie Uhrwerk mit beliebig einstellbaren Pausen ein, so daß die einmal in Betrieb gesetzte Röhre ohne wesentliche Regenerierung stundenlange Belastung mit 3—5 Milliampere ohne Schaden vertrug. Für die Aufnahmen wurden Lumiere-Jougla-Platten und als diese infolge des Krieges nicht mehr erhältlich, gewöhnliche Schleußnersche Röntgenplatten benutzt.

Versuche mit Steinsalz. Steinsalzspaltungsstücke lassen sich bei einer Anwärmung auf mehr als 200° C bequem biegen und diese Biegung führt zu einer dauernden Deformation. Untersuchungen über die dabei stattfindenden Vorgänge im Kristallgefüge[3]) führten zur Annahme, daß dabei Gleitungen, Translationen auftreten, daß also die Biegung dadurch zustandekommt, daß Steinsalzschichten aneinander hingleiten, daß die Gleitflächen den Rhombendodekaederflächen parallel sind und daß die Gleitung in der Richtung [110] geschieht. Bei der Ausführung einer solchen Biegung entsteht also eine Steinsalzfläche, die leicht verwendbar ist, um ohne Drehung des Kristalls eine Aufnahme des Platinspektrums zu erhalten. Es fragt sich nun, ob die so erhaltene Aufnahme wesentliche Unterschiede gegen eine mit Drehkristall gewonnene aufweist.

Zur Verdeutlichung dieser Unterschiede ist zunächst eine Linienaufnahme am ebenen Drehkristall wiedergegeben (bei sehr weicher Röhre) und dazu noch eine zweite anders gewonnene Drehaufnahme, bei der die Reflexion an einer künstlich zusammengeklebten Steinsalzplatte stattfand, deren eine Hälfte ein Spaltstück aus einem farblosen, deren andere ein Stück aus einem tiefblauen Steinsalz war. Der Farbunterschied bedingt, wie zu erwarten war, keine Abänderung der Linien, aber die Aufnahme zeigt in der einen ihrer Hälften, und zwar besonders stark in der Nähe des Randes der betreffenden Hälfte, eine horizontale Unterteilung bzw. Streifung der Linien. Auch hat in der horizontalen Mittellinie des Bildes (das entspricht am Kristall der Stelle, wo die Ränder der beiden Spaltstücke verkittet sind) eine allgemeine Aufhellung zwischen den einzelnen Linien stattgefunden. Die Erscheinung ist wohl so zu deuten, daß bei der Spaltung der Stücke, besonders an den Rändern, sich Gleitungen ausbilden können und daß an den Rändern selbst auch eine allgemeine Verwirrung des Kristallgefüges zustandekommen kann, die dann für die allgemeine Aufhellung verantwort-

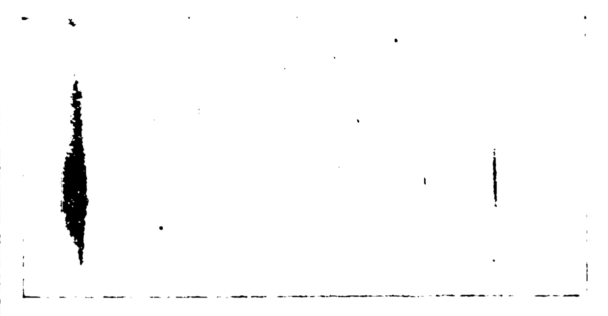


Fig. 1.

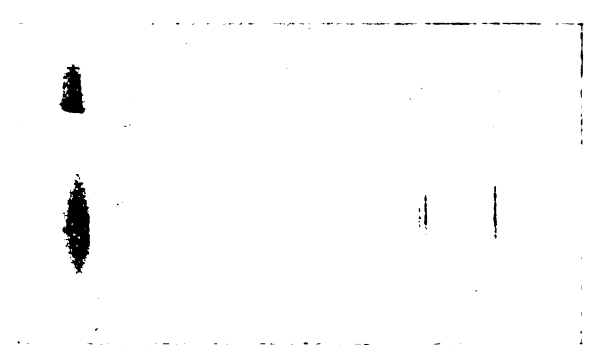


Fig. 2.

1) Eine eingehende Diskussion der Methode der Interferenzreflexion am sich drehenden Kristalle findet sich bei E. Wagner, diese Zeitschr 16, 30, 1915 und Ann. d. Phys. 46, 868, 1915.

2) Bei der Auswahl der für die Biegungserscheinungen charakteristischen Mineralien hat mich in liebenswürdiger Weise Herr Prof. Dr. H. Meyer in Gießen unterstützt. Das benutzte Röntgeninstrumentarium hat mir der Direktor der Veifa-Werke, Herr Ingenieur Fried. Dessauer in Frankfurt, bereitwillig zur Verfügung gestellt. Beiden Herren möchte auch ich an dieser Stelle danken.

3) Eine zusammenfassende, für Physiker geschriebene Darstellung dieser Vorgänge findet sich bei A. Johnsen, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik, 11, 226, 1914.

lich gemacht werden kann. Diese Vermutungen werden aber gewissermaßen erst rückwärts bestätigt durch das Aussehen der nun folgenden dritten Aufnahme, die das an einem nicht gedrehten aber gebogenen Spaltstücke gewonnene Spektrum wiedergibt. Die Linien des Spektrums bleiben durchaus kenntlich und an ihrem Ort; doch sind sie sowohl horizontal unterteilt wie vertikal zerfasert, ja es kommt vor, daß die Linie an irgendeiner Stelle in zwei bis drei, nebeneinanderliegende, natürlich viel feinere Elemente aufgelöst ist. Außerdem erscheinen neben den von der Drehaufnahme bekannten Linien eine Unzahl von einzelnen, feinen Linienstückchen. Bei vergrößerter Betrachtung erinnert das Aussehen an das von H. Seemann[1]) erhaltene Viellinienspektrum des Platins, und die von Wagner, Bragg und Seemann selbst gegebene Erklärung dieser damals irreführenden Aufnahme findet so nochmals eine Bestätigung. Auffallend am Bild 3 ist ferner, daß die Breite der Linienelemente wesentlich geringer ist, als die Linien bei der Drehaufnahme erscheinen. Während bei der Drehaufnahme am ebenen Kristall die Linienbreite auf der Platte durch die Spaltbreite und die Abstände des Kristalls von Spalt und Platte gegeben ist[2]), ist diese Beziehung natürlich nicht mehr gültig, wenn das zur Reflexion beitragende Element wesentlich kleiner als der Spalt selbst ist. Die Dicke der translatierten Schichten ist an Steinsalzkristallen zu 0,7 μ bestimmt worden[3]).



Fig. 3.

Wir können also die Zerfaserung der eigentlichen, immer auftretenden Platinlinien den Gleitungen nach den Rhombendodekaederflächen zuschreiben (aus deren Orientierung nach [110] erklärt sich wohl auch, daß viele dieser Elementchen eine Neigung gegen die Hauptrichtung der Linie aufweisen); die neu auftretenden Viellinien aber sind einer allgemeinen Wirrnis zuzuschreiben, die gerade am Steinsalze bei einer solchen gewaltsamen Biegung eintritt und die besonders scharf noch zutage tritt an den Enden des Spaltungsstückes, da, wo die bei der Biegung immer sich ergebende Sattelfläche vielleicht sogar ein Zerreißen der aufbauenden Kristallelemente bedingt. Diese Wirrnis ist übrigens schon von Rinne[1]) an solchen gebogenen Spaltstücken mittels der v. Laueschen Durchstrahlungsmethode festgestellt worden. (Vgl. die Abbildung 4 seiner Tafel XX.) Wir haben also beim Steinsalz sowohl Translationen wie eine allgemeine Verwirrung in der Translationsrichtung vor uns.

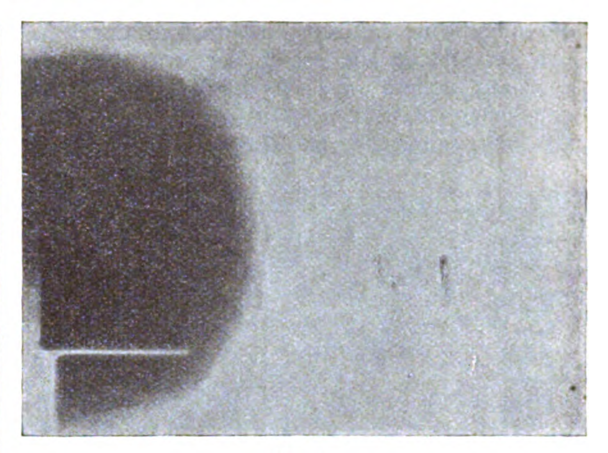


Fig. 4.

Ist die bisherige Darstellung richtig, sind also bei der gewaltsamen Biegung die aufbauenden Elemente des Kristalls in Verwirrung gekommen, so ist ja der Spalt für die ganze Versuchsanordnung nicht mehr wesentlich, da dann die einzelnen, so kleinen Elemente des Kristalls selbst reflektierende Elemente darstellen würden. Bei ganz vollkommener Verwirrung freilich müßte die Reflexion nach allen möglichen Richtungen hin stattfinden und auf der photographischen Platte könnte keine Abbildung zustandekommen. Da jedoch nach unsrer bisherigen Annahme die in ganz bestimmter Richtung translatierten Elemente das Übergewicht haben müßten, so müßte gerade durch diese Elemente eine (wenn auch nicht gerade gute) Aufnahme des Linienspektrums ohne jede Anwendung eines ausblendenden Spaltes möglich sein. Und dies bestätigt das Bild 4, bei dem ein gebogenes Steinsalzstück, ohne daß ein Spalt vorgesetzt wäre, dem Einfluß des aus der Röhre tretenden Strahlenbündels ausgesetzt ist. Die Hauptlinien des Platinspektrums sind darauf deutlich erkennbar, doch sind sie aufgelöst in einzelne neben und übereinander liegende zarte Elemente und auch

1) H. Seemann, diese Zeitschr. **15**, 794, 1914; Ann. d. Phys. **49**, 470, 1916.
2) E. Wagner, l. c.
3) A. Johnsen, l. c.

1) F. Rinne, Ber. d. math-phys. Klasse d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. **67**, 303, 1915.

die allgemeine Wirrung ist da, wo der Rand der Sattelfläche lag, erkennbar.

Ganz anders wird das Reflexionsbild beim gebogenen, elastischen Glimmer. Das Bild 5 läßt den unmittelbaren Vergleich mit Steinsalz

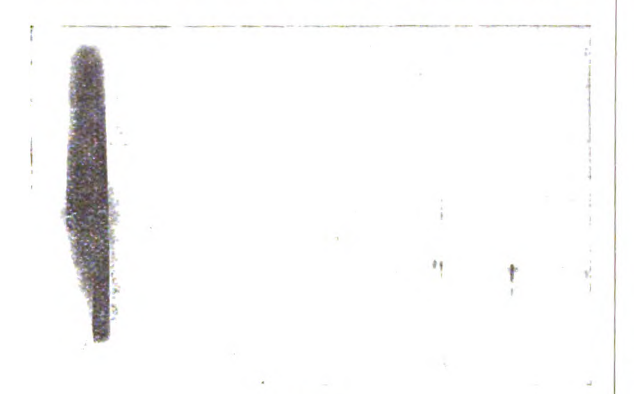


Fig. 5.

zu. Das Glimmerblatt war um einen Kork passenden Durchmessers gelegt und dieser Kork wurde auf ein gebogenes Steinsalzstück oben so aufgekittet, daß die beiden Reflexionsflächen auf dem gleichen Zylindermantel liegen sollten. Das wurde nicht ganz erreicht und deshalb divergieren die beiden Spektra im Bilde etwas. Die Reflexion am Glimmer geschah natürlich an der Basisfläche (001). Wesentlich ist jedenfalls, daß im Reflexionsspektrum des Glimmers, das Linien enthält, die den Spektren 1. bis 4. Ordnung angehören, alle Linien glatt und ohne Zerfaserung sind. Es tritt also hier eine ganz andere Art von Biegung vor uns, die keine dauernde Deformierung ergibt und sich deshalb auch nicht so wie bei Steinsalz im Bilde äußert. Bei elastischer Biegung erhalten wir demnach weder eine Zerfaserung der Linien noch ein Viellinienspektrum. Zwar sind bei genauerem Zusehen auch auf diesem Bilde dem Glimmer zugehörende Linien zu finden, die bei einer regelrechten Drehaufnahme nicht gefunden werden, doch hat das sicherlich den andern Grund, daß bei dem so leicht spaltbaren Glimmer immer Abblätterung ganz feiner Schichten erfolgt, die dann Reflexionsmöglichkeiten ergibt, die nicht zum eigentlich gesuchten Interferenzbilde gehören.

Nun kommen in der Natur vielfach gekrümmte Kristallflächen und gebogene Kristalle vor und es fragt sich, ob man mit Hilfe dieser Methode aufklären kann, inwieweit die betreffenden Kristallerscheinungen durch dauernde Translation, durch elastische Biegung oder durch andere Ursachen zustande gekommen sind. Das soll noch an einigen wenigen Beispielen gezeigt werden.

Läßt man die Reflexion am rhombischen Antimonit, und zwar an der Fläche (010) vor sich gehen (der mir in einem gut ausgebildeten, wellig gebogenen Exemplare zur Verfügung stand), so zeigt das gewonnene Bild (Figur 6) in bezug auf seine Linienstruktur eine deutliche Ähnlichkeit mit dem Steinsalze. Alle Linien



Fig. 6.

sind zerfasert und bestehen aus einzelnen Elementchen, die Elementchen behalten aber die Hauptrichtung der Linien im wesentlichen bei (da [010] zugleich Translationsfläche ist). Im Unterschiede zum Steinsalzbilde fehlt hier vollkommen das Viellinienspektrum. Wir hätten also im Antimonit einen Fall vor uns, bei dem die Biegung durch dauernde Translation zustande gekommen wäre, aber ohne eine allgemeine Verwirrung der aufbauenden Kristallelemente.

Beim Gips (Reflexion an der Fläche [010]) findet sich, wie Fig. 7 zeigt, ein Linienstruktur-



Fig. 7.

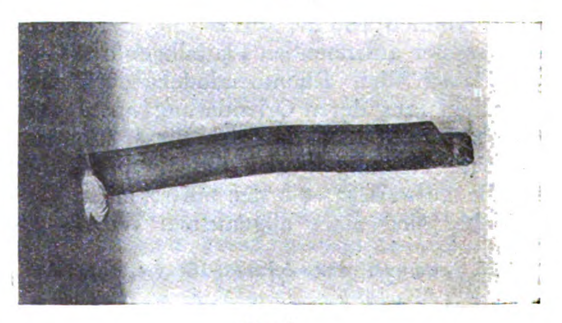


Fig. 8.

bild, das dem des Glimmers entspricht. Fig. 8 mag direkt einmal das bei dem Versuche verwendete Stück (in halber Größe) zeigen. Die Linien treten sowohl im ersten, wie im zweiten Spektrum glatt und ohne jede Zerfaserung auf und auch das Viellinienspektrum fehlt. Das so erhaltene Resultat, das freilich mit den bisherigen mineralogischen Annahmen etwas in Widerspruch steht, würde also besagen, daß der gebogene Gipskristall bei seiner Entstehung elastisch gewesen ist und daher keine Translation der Kristallelemente stattgefunden hat.

Ich benutzte dann weiter zur Reflexion die gekrümmte Rhombendodekaederfläche eines schönen großen Diamanten aus Südwestafrika und erhielt beim ruhenden Kristalle überhaupt kein Interferenzbild. So gekrümmte Flächen sind also überhaupt nicht durch Biegung entstanden, sondern haben ihren Grund wohl in bestimmten Anlagerungserscheinungen.

Diese wenigen Beispiele meiner vorläufigen Untersuchung mögen also zeigen, wie mit Hilfe der Interferenzreflexionsmethode der Röntgenstrahlen man Aufschluß erhalten kann über das Zustandekommen von Biegungen bei elastischen und nichtelastischen Kristallen.

Schließlich möchte ich noch auf eine in mehreren der angeführten Bilder zutage tretende Eigenschaft der Linien hinweisen. Sowohl beim Gips wie beim Antimonit stehen die erhaltenen Linien nicht nur als vertikale Striche da, sondern sie haben oben und unten Ansätze unter Winkeln, die durchaus denen entsprechen, die die reflektierende Fläche des Kristalls mit den angrenzenden Flächen bildet. (Das den Kristall treffende Röntgenstrahlbündel hatte in vertikaler Richtung eine größere Ausdehnung als die reflektierende Fläche.) Ich fand übrigens die gleiche Erscheinung bei einer hier nicht wiedergegebenen Drehaufnahme an der Oktaederfläche eines großen Diamanten. Wie mir scheint, liegt hier eine gewisse tatsächliche Bestätigung vor der Haüyschen Vorstellung von den molécules intégrantes, wonach sich alle Kristallformen irgendeiner kristallisierenden Substanz aus den zunächst gleichgestalteten Primitivformen aufbauen. (Am besten zu verstehen an Figur 9, die dem Lehrbuch der Mineralogie von Klockmann, 5. Auflage Seite 23 entnommen ist und darstellen soll, wie aus der Primitivform des Würfels sich das Dodekaeder entwickelt.)

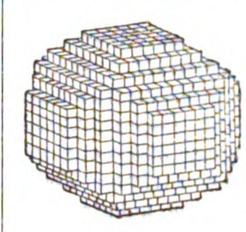


Fig. 9.

Es ist wohl leicht einzusehen, daß man ganz zwangsweise zu einer solchen Auffassung geführt wird; denn wenn wir etwa die Erscheinung beim Gips betrachten (Fig. 7), so würden erstens einmal die Netzebenen, die den schrägliegenden Anschlußflächen parallel sind, wenn sie wirklich als solche zur Reflexion beitrügen, im allgemeinen einen ganz andern Netzebenenabstand haben und so müßten die von ihnen herrührenden Spektra an andern Orten liegen als Spektra, die der vertikal liegenden Fläche entsprechen. Aber selbst wenn in einem ganz speziellen Falle der Netzebenenabstand für beide Flächenarten der gleiche wäre, so würden die Spektra, die von den Anschlußflächen herrühren, auf Geraden angeordnet erscheinen, die auch durch den Durchstoßpunkt des Primärbündels gehen, mit der horizontalen Richtung aber Winkel einschließen würden (entsprechend dem Kantenwinkel der beiden Flächen.) Es bliebe also nur noch der Ausweg übrig anzunehmen, daß gerade diese Netzebenen im Raume um die Primärstrahlrichtung als Drehachse gekrümmt verliefen, dann könnten die Fahnen der Linien an die Linien selbst sich anschließen; dann aber müßte auch die Fahne im zweiten Spektrum doppelt so lang sein wie die im ersten, und das ist durchaus nicht der Fall. Also scheint wirklich ein Nachweis des Raumgitteraufbaues vorzuliegen.

Gießen, Physikal. Institut der Universität, August 1916.

(Eingegangen 6. August 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Kinetik von Elektronen und Ionen in Gasen.

Von J. Franck und G. Hertz.

Einer Aufforderung der Schriftleitung des Blattes folgend wollen wir hier eine Zusammenfassung unserer Arbeiten über Kinetik der Ionen und Elektronen bringen, etwa in der Art, wie es der eine von uns anläßlich eines Vortrages in Göttingen getan hat. Wir werden dabei auf Arbeiten anderer Autoren soweit eingehen, wie es zum Verständnis des Zusammenhanges erforderlich ist.

Eng verknüpft mit den Fragen der Kinetik der Elektronen und Ionen sind die Vorgänge bei der Stoßionisation; eine jede Stoßionisations-



theorie baut sich auf der Kenntnis der Kinetik der Elektronen und Ionen auf. Wir haben daher damit anzufangen kurz die Grundlagen der Stoßionisationstheorie zu erläutern.

Nachdem durch Versuche über Absorption von Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen sichergestellt war, daß schnellbewegte Elektronen und Ionen bei Zusammenstößen mit Gasmolekülen diese zu zertrümmern vermögen, und zwar so, daß die Gasmoleküle ein oder mehrere Elektronen verlieren und selbst positiv geladen zurückbleiben, hat es nicht an Versuchen gefehlt, das Auftreten der nach J. Stark so genannten selbständigen Gasentladung durch diesen Prozeß der Stoßionisation zu deuten. Die einzige bis jetzt ausgebaute Theorie ist die von Townsend, aber auch diese gibt nicht die verwickelten Erscheinungen bei der Entladung selbst wieder, sondern beschränkt sich darauf, den Übergang von der unselbständigen zur selbständigen zu erklären und die Bedingungen des Einsetzens der selbständigen Entladung festzulegen.

Wir wollen einen einfachen solchen Fall nach Townsend betrachten. Er läßt sich leicht verallgemeinern. Denken wir uns einen ebenen von 2 Metallplatten gebildeten Kondensator, der Gas von wenigen Millimetern Druck enthält und lassen wir auf die Kathodenplatte ultraviolettes Licht fallen, so daß Elektronen ausgelöst werden. Dann ergibt eine Stromspannungskurve das bekannte Bild, wie es die Fig. 1 zeigt.

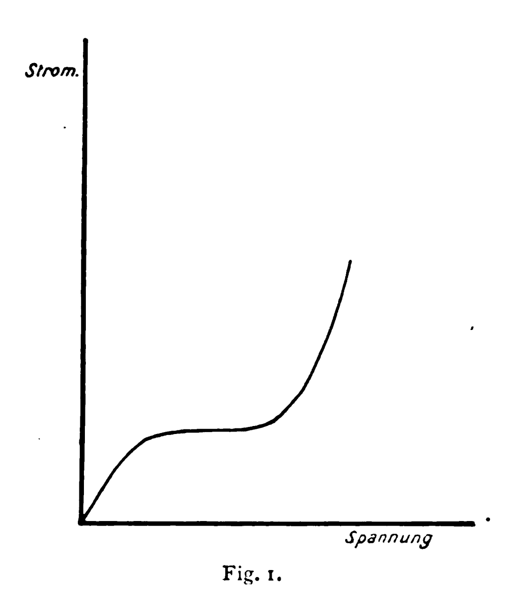


Fig. 1.

Zuerst steigt der Strom mit wachsender Spannung stark an, dann kommt das Gebiet der Sättigung, bis schließlich bei weiterer Spannungssteigerung der Strom wieder schnell ansteigt, um endlich in die selbständige Entladung überzugehen. Das Einsetzen der selbständigen Entladung erfolgt bei ganz bestimmten, vom Gasinhalt, Druck und Abstand der Platten abhängigen Potentialen. Die Entladung ist dann selbständig wenn ihr Bestehen unabhängig ist von der Einwirkung des fremden Ionisators, hier des ultravioletten Lichtes. Das Gebiet der Stromspannungskurve zwischen Sättigungsstrom und selbständiger Entladung ist es, was in der Stoßionisationstheorie behandelt wird. Die Voraussetzung, die man zugrunde legt, ist die, daß der Anstieg des Stromes über den Sättigungswert hinaus nur durch die Selbstvermehrung der Elektronen und Ionen durch Zusammenstöße mit den Molekülen bedingt ist.

Da man aus den Lenardschen Arbeiten weiß, daß bei kleineren Potentialen hauptsächlich die Elektronen zu ionisieren vermögen, nimmt man an, daß der erste Anstieg der Kurve nach der Sättigung nur durch Elektronenstoß hervorgerufen ist. Außer diesen experimentell begründeten Voraussetzungen wird von Townsend[1]) die Hypothese eingeführt, daß bei gegebenem linearen Potentialgradienten und gegebenem Gasdruck die Zahl der auf der Einheit der Wegstrecke durch ein stoßendes Elektron neu erzeugten Ionenpaare konstant ist. Es mögen α- Ionenpaare auf je 1 cm Weg, den ein Elektron von der Kathode zur Anode zurückzulegen hat, neu gebildet werden und bei der Sättigung n_0- Elektronen in der Sekunde von der Kathode ausgehen. l sei der Abstand der Elektroden, dann ist die Zahl der pro Sekunde an der Anode ankommenden Elektronen

$$n = n_0\, e^{\alpha l}.$$

Bei nicht zu niedrigen Drucken bzw. nicht zu hohen Feldstärken gibt diese Formel in der Tat die Abhängigkeit des Stromes vom Plattenabstand gut wieder. Geht man zu höheren Feldstärken über, bei welchen man sich dem Entladungspotential nähert, so steigt der Strom schneller an, als der Formel entspricht. In Übereinstimmung mit Erfahrungen, die Versuche an Kanalstrahlen ergeben haben, nimmt Townsend an, daß jetzt auch die positiven Ionen sich an der Ionisation durch Stoß beteiligen (in einer Arbeit von E. v. Bahr und J. Franck[2]) ist die Berechtigung dieser Auffassung direkt erwiesen worden durch Aufnahme von Stromspannungskurven in einer Anordnung, in welcher von der Anode positive Ionen ausgingen, anstatt der von der Kathode ausgehenden Elek-

1) J. S. Townsend, The Theory of Ionization of Gases by Collision. London 1910.

2) E. v. Bahr und J. Franck, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 57, 1914.



tronen). Nennen wir jetzt β die Anzahl der Ionenpaare, die unter diesen Bedingungen die positiven Ionen pro Zentimeter Wegstrecke bilden, so ergibt die Rechnung für die Abhängigkeit der Zahl der ankommenden Elektronen von der Zahl der ausgehenden die Beziehung:

$$n = n_0 \frac{(\alpha - \beta) e^{(\alpha-\beta)l}}{\alpha - \beta e^{(\alpha-\beta)l}}.$$

Bei höheren Feldstärken stimmt diese Gleichung gut mit der Erfahrung überein; sie ermöglicht es, eine Aussage über das Einsetzen der selbständigen Entladung zu machen. Der Begriff der selbständigen Entladung bedeutet ja, daß eine endliche Anzahl von Elektronen an der Anode ankommt, wenn die von der Kathode ausgehende Zahl von Elektronen $n_0 = 0$ ist. Die Gleichung zeigt, daß dieser Fall eintreten muß, wenn

$$\alpha = \beta e^{(\alpha-\beta)l}$$

ist. Auch diese Folgerung der Townsendschen Theorie hat sich gut bestätigt.

Townsend hat weiter versucht, aus der experimentell gefundenen Abhängigkeit der Größen α und β vom Gasdruck und der Feldstärke weitere Schlüsse zu ziehen über die Kinetik der Elektronen und Ionen; insbesondere hat er versucht, die Ionisierungsspannung der Elektronen zu berechnen. Den Begriff der Ionisierungsspannung haben Stark, Lenard und Thomson geprägt. Sie haben festgestellt, daß Elektronen eine bestimmte Mindestgeschwindigkeit haben müssen, um durch Stoß Moleküle ionisieren zu können. Die Spannung, welche die Elektronen frei durchlaufen müssen, um diese zur Ionisierung erforderliche Mindestgeschwindigkeit zu erlangen, nennt man die Ionisierungsspannung. Die ersten direkten Messungen dieser Größe hat Lenard[1]) vorgenommen. Nach Lenard besitzt ein Elektron die Ionisierungsenergie, wenn es 11 Volt durchfallen hat. Will man mit Townsend die Ionisierungsspannung aus der Stromspannungskurve berechnen, so muß man eine Hypothese über die Art der Zusammenstöße der Elektronen mit den Gasmolekülen einführen. Townsend nahm an, daß die Elektronen die Energie, die sie im elektrischen Felde zwischen zwei Zusammenstößen mit Molekülen gewinnen, bei jedem Zusammenstoß an die Gasmoleküle wieder abgeben. Dabei soll es ganz gleichgültig sein, ob das stoßende Elektron mehr oder weniger als die zur Ionisierung nötige Energie besitzt, immer ist der Stoß unelastisch. Die Elektronen können daher im elektrischen Felde keine größere Energie gewinnen, als sie auf einem einzelnen freien Wege erwerben können. Ionisierende Zusammenstöße können also nur diejenigen Elektronen ergeben, die auf einem freien Wege die Ionisierungsspannung oder mehr frei durchfallen haben. Es ist leicht ersichtlich, daß man auf Grund dieser Annahmen aus dem Wert der Größen von α und β bei bekanntem Druck und bekannter Feldstärke die Ionisierungsspannung berechnen kann, wenn man die freien Weglängen der Elektronen kennt. Indem Townsend für diese dieselben Werte einsetzt, wie sie die Gasmoleküle bei den betreffenden Drucken haben würden, erhält er für die verschiedenen Gase Werte der Ionisierungsspannung, die der Größenordnung nach mit den Lenardschen direkt gemessenen übereinstimmen. Aus dem Wert von β läßt sich die Ionisierungsspannung der positiven Ionen nicht berechnen, da die Annahme des völligen Energieverlustes beim Zusammenstoß bei positiven Ionen ja offensichtlich falsch ist.

Trotz der ungefähren Übereinstimmung wird man gegen diese Art der Berechnung der Ionisierungsspannung der Elektronen Bedenken hegen müssen, da eine Reihe von Erfahrungstatsachen über das Einsetzen der Entladung nicht mit den zugrunde gelegten Hypothesen in Einklang zu bringen ist. Im stärksten Widerspruch zu dieser Theorie steht das Verhalten der elektrischen Entladung in Edelgasen und Metalldämpfen. Z. B. haben Ramsay und Collie[1]) gefunden, daß Neon von 5 Atmosphären Druck die Entladung noch so leicht entstehen läßt, wie etwa Luft bei 1 cm Druck, und zwar tritt sie in Form eines Geißler-Bogens auf. Äußerst geringe Verunreinigungen erhöhten das Entladungspotential so stark, daß z. B. Neon, mit 1 Proz. Sauerstoff gemischt, sich nicht viel von gewöhnlicher Luft unterscheidet. Man kann das gesamte Verhalten der Edelgase und Metalldämpfe der Entladung gegenüber am besten wiedergeben durch die Annahme, daß in ideal reinen Gasen und bei höheren Drucken das Entladungspotential überhaupt völlig unabhängig vom Gasdruck wird. Weniger ausgesprochen, aber immer noch sehr deutlich, wie z. B. Warburg bei der Spitzenentladung gezeigt hat, ist die Beeinflussung der Entladung in Stickstoff und Wasserstoff durch Verunreinigungen. Dieser Einfluß der Verunreinigungen und die Unabhängigkeit der dielektrischen Festigkeit vom Druck ist mit Townsends Hypothese des allgemein unelastischen Stoßes der Elektronen unvereinbar, vielmehr muß man annehmen, daß die Gasmoleküle je nach der Art des betreffenden Gases sich den Elektronen gegenüber verschieden verhalten, wie schon Warburg[2]) ver-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. (4) 8, 149, 1903.

1) Ramsay und Collie, Proc. Roy. Soc. 59, 259, 1896.
2) E. Warburg, Ann. d. Phys. (4) 2, 295, 1900.

mutete. Ein experimenteller Anhalt dafür ergab sich aus den Untersuchungen von Franck[1]) über Ionenbeweglichkeit in diesen Gasen. Franck konnte zeigen, daß die verschiedenen Gase sich den bei der Ionisation abgespaltenen Elektronen gegenüber ganz verschieden verhalten. In reinen Edelgasen und Metalldämpfen und im Stickstoff bleiben die Elektronen bis zu ihrer Wiedervereinigung mit positiven Ionen als freie Elektronen bestehen. Dagegen werden sie in elektro-negativen Gasen, wie z. B. in Sauerstoff, Chlor, Brom oder Jod sofort von neutralen Gasmolekülen eingefangen und zu negativen Ionen umgebildet. Man kann die Gase entsprechend ihrer Fähigkeit, negative Ionen zu bilden, in eine Art Spannungsreihe der Elektronenaffinität einordnen. Neuerdings hat diese Reihe eine Erweiterung erfahren durch Versuche von Haines[2]). Bei dieser Sachlage erschien es uns aussichtsreich, in einer Reihe von Einzeluntersuchungen die Kinetik der Elektronen und Ionen in verschiedenen Gasen zu studieren, d. h. vor allen Dingen die mittlere freie Weglänge der Elektronen und Ionen und die Ionisierungsspannung sowie den Energieaustausch bei Zusammenstößen auf direkte Weise messend zu verfolgen. Die Untersuchungen beziehen sich dabei auf Elektronen und Ionen mit solchen Geschwindigkeiten, wie sie bei den gewöhnlichen Entladungen vorkommen, d. h. auf Geschwindigkeiten zwischen 0 Volt und der Ionisierungsspannung. Das Verhalten der größeren Geschwindigkeiten ist überdies in einer großen Reihe von Versuchen schon studiert worden, z. B. sehr eingehend von Lenard und seinen Schülern.

Die Aufgabe, die Kinetik der Elektronen und Ionen nach direkten Methoden zu untersuchen, läßt sich viel leichter ausführen als entsprechende Untersuchungen über das Verhalten der Moleküle. Man kann nämlich Elektronen und Ionen als eine prozentisch so geringe Verunreinigung im Gase auffassen, daß man nur die Zusammenstöße mit den Gasmolekülen, nicht die Zusammenstöße der Teilchen untereinander zu berücksichtigen braucht. Trotzdem jedoch kann man die Bewegungen dieser geringen Zahl von Teilchen verfolgen, da sie sich von den anderen Molekülen durch ihre Ladung auszeichnen, welche es außerdem ermöglicht, Betrag und Richtung ihrer Geschwindigkeit durch elektrische Felder zu beeinflussen.

Um das abweichende Verhalten der Edelgase und Metalldämpfe mit der Townsendschen Theorie in Einklang zu bringen, müßte man annehmen, daß die beiden nach dieser Theorie für das Verhalten der Elektronen allein maßgeblichen Größen, die mittlere freie Weglänge der Elektronen und die Ionisierungsspannung, in diesen Gasen extreme Werte besäßen. Um diese Möglichkeit zu prüfen, wurden zunächst Messungen dieser beiden Größen angestellt. Für die Ionisierungsspannung hatte, wie oben erwähnt, nach einer direkten Methode Lenard[1]) 11 Volt erhalten, während v. Baeyer[2]) und Dember[3]) mit ähnlichen Methoden 10 bzw. 9 Volt gefunden hatten. Ob die Ionisierungsspannung in verschiedenen Gasen eine charakteristische Größe sei, war nicht festgestellt. Lenard selbst ließ es offen, ob 11 Volt eine für alle Gase geltende Ionisierungsspannung wäre oder ob die gleiche Verunreinigung in allen untersuchten Gasen ein solches Resultat vorgetäuscht hätte. Unser Untersuchungsprinzip[4]) läßt sich leicht an Hand des in Fig. 2 dargestellten Schemas übersehen.

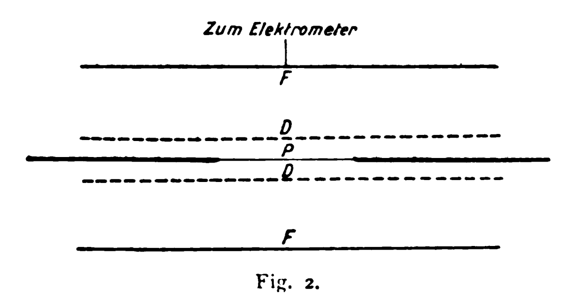


Fig. 2.

Als Elektronenquelle dient ein glühender Platindraht P, welcher sich in der Achse eines aus Platindrahtnetz bestehenden Zylinders D befindet. Dieser wird wieder von einem weiteren Zylinder F aus Platinfolie umschlossen, welcher mit einem empfindlichen Elektrometer verbunden ist. Bei der Messung wird der Glühdraht dauernd auf einem Potential von $+$ 10 Volt gegen Erde gehalten, das Drahtnetz wird auf ein variables Potential von $10 + V$ Volt gebracht. Auf diese Weise wird erreicht, daß die vom Glühdraht ausgehenden Elektronen zunächst durch eine Potentialdifferenz von der Größe V beschleunigt werden, um dann durch das Drahtnetz hindurch in ein verzögerndes Feld einzutreten. Da dieses stets um 10 Volt höher ist als das beschleunigende, so können die Elektronen nie den Auffangezylinder treffen. Dagegen muß eine Aufladung, und zwar eine positive des Elektrometers eintreten, wenn die

1) J. Franck, Verh. d. D. Phys. Ges. **12**, 291 u. 613, 1910.
2) Haines, Phil. Mag. (6) **30**, 503, 1915.

1) P. Lenard, l. c.
2) O. v. Baeyer, Verh. d. D. Phys. Ges. **10**, 96, 1908.
3) H. Dember, Ann. d Phys. (4) **30**, 137, 1909.
4) J Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 34, 1913.

Elektronen in dem Raum zwischen Drahtnetz und Auffangezylinder durch Stoß positive Ionen erzeugen. Steigert man also die Geschwindigkeit der Elektronen durch schrittweise Erhöhung der beschleunigenden Spannung V, so erhält man in dem Augenblick eine positive Aufladung des Elektrometers, in welchem die beschleunigende Spannung gleich der Ionisierungsspannung geworden ist. Mit wachsender Geschwindigkeit der Elektronen steigt der Strom dann schnell an, da immer mehr Elektronen zur Ionisation gelangen. Fig. 3 gibt ein Beispiel solcher Kurven, die das plötzliche Einsetzen des Stromes in Stickstoff bei 7,5 Volt und in Wasserstoff bei 11 Volt, den Ionisierungsspannungen dieser Gase, zeigen.

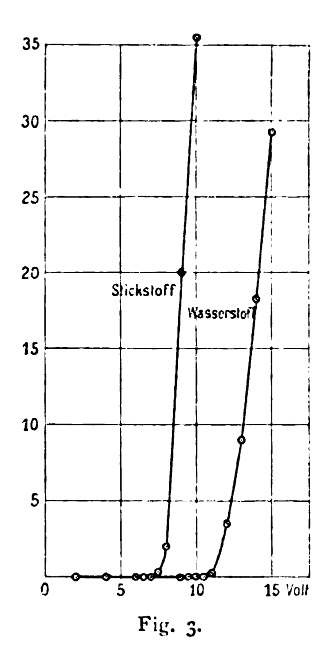


Fig. 3.

Es genügt nun nicht, die angelegte Spannung zu messen, bei der der Strom plötzlich einsetzt, sondern man muß sich auch überzeugen, daß die Elektronen die dieser Spannung entsprechende Geschwindigkeit wirklich besitzen. Kontaktpotentiale, elektrische Doppelschichten und die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen, mit der sie den Glühdraht verlassen, sind auszuschalten bzw. zu berücksichtigen. Besonderer Wert ist auf Reinheit der Gase zu legen, da in unreinem Gas der Strom da einsetzt, wo die am leichtesten ionisierbare Verunreinigung beginnt ionisiert zu werden. In Edelgasen, die eine hohe Ionisierungsspannung haben, sind solche Verunreinigungen besonders störend; völlig kann man sie hier nicht ausschließen, aber die Reinheit des Gases läßt sich soweit treiben, daß die wahre Ionisierungsspannung durch einen sehr scharfen Knick in der Stromspannungskurve erkennbar ist. Fig. 4 gibt ein Beispiel solcher Kurven in Argon und in Helium. Die Resultate für 6 Gase sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Helium	20,5 Volt	Wasserstoff	11 Volt
Neon	16 „	Sauerstoff	9 „
Argon	12 „	Stickstoff	7,5 „

Inzwischen ist eine bei Lenard ausgeführte Arbeit von F. Mayer[1]) erschienen, die unser Resultat insofern bestätigt, als ebenfalls definierte Ionisierungsspannungen für verschiedene

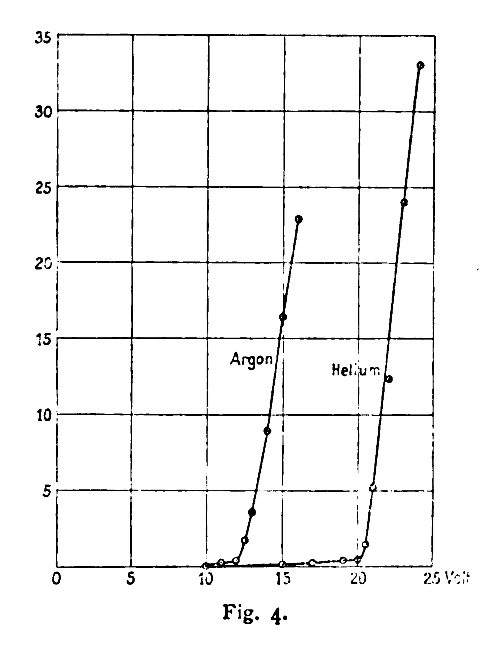


Fig. 4.

Gase erhalten wurden. Für Wasserstoff stimmen die Resultate überein; bei Stickstoff besteht eine Abweichung, die noch zu klären sein wird. Wir sind geneigt, unseren Wert für den richtigen zu halten, da bei Mayer die Versuchsverhältnisse nur wenig variiert wurden. Den Hauptwert legen wir jedoch auf die einatomigen Gase, da hier auch theoretisch die einfachsten Verhältnisse vorliegen und da ferner in diesen Gasen sich am sichersten jeder Einfluß von Doppelschichten auf den Metallen ausschließen läßt.

Nachdem gezeigt worden war, daß die Ionisierungsarbeit für die verschiedenen Gasmoleküle eine charakteristische Molekularkonstante ist, hat es an Versuchen nicht gefehlt, diese Größe auf Grund der verschiedenen neuen Vorstellungen über die Konstitution des Atoms zu berechnen. Zwei Wege müssen wir dabei unterscheiden. Bei dem ersten werden nur gewöhnliche Coulombsche Kräfte bei der Berechnung benutzt,

1) F. Mayer, Ann. d. Phys. (4) **45**, 1, 1914.

während der zweite auf der Quantentheorie basiert. Was zuerst auffällt, ist, daß sowohl in der Reihe der zweiatomigen wie der einatomigen Gase die Ionisierungsspannung um so größer ist, je kleiner der Molekularradius ist. Berechnet man die Arbeit, die gegen elektrostatische Kräfte zu leisten ist, wenn eine negative Einheitsladung von einer mit einer positiven Einheitsladung geladenen Kugel mit dem Radius des Gasmoleküls entfernt wird, so erhält man für die zu leistende Arbeit, je nachdem ob das Elektron im Innern der Kugel sitzt oder auf der Oberfläche, die Arbeiten

$$E = \frac{3}{2}\frac{e^2}{r} \quad \text{oder} \quad E = \frac{e^2}{r},$$

wobei e die Elementarladung und r den Atomradius darstellt. Die Messungsergebnisse zeigen eine recht gute Übereinstimmung mit der ersten Gleichung. Wir haben auf diesen Punkt hingewiesen, möchten uns jedoch mit einer späteren Berechnung von Beatty[1]) nicht einverstanden erklären, der auf diese Weise eine Übereinstimmung bis auf Bruchteile eines Volts zwischen Experiment und der Gleichung erhielt. Einerseits sind die Ionisierungsspannungen selbst nur auf ein halb Volt genau und andererseits ist der für den Atomradius einzusetzende Wert zu unsicher, um die Übereinstimmung als beweisend anzusehen.

Auch die zweite Auffassung ist verschiedentlich vertreten worden, z. T. schon bevor die sicheren Werte der Ionisierungsspannung feststanden, z. B. von J. Stark[2]). Sie beruht auf der Annahme, daß das loszulösende Elektron im Molekül eine Eigenfrequenz besitzt. Multipliziert man diese Frequenz mit dem Planckschen Wirkungselement h, so bekommt man eine Energie, die der Ionisierungsenergie gleichgesetzt ist. Nach dieser Auffassung ist die vom stoßenden Elektron zu übertragende Energie der kleinste Energiebetrag, den das schwingende Elektron aufzunehmen vermag. Setzt man als Frequenz des Elektrons diejenige der Dispersionselektronen an, so erhält man, besonders bei Benutzung der Cuthberthsonschen Werte, sehr gute Übereinstimmung. Aber auch dies durfte man nicht als beweisend ansehen, solange nicht direkt gezeigt werden konnte, daß die Energie des stoßenden Elektrons wirklich einem Elektron mit bestimmter experimentell feststellbarer Eigenfrequenz übertragen wird. Wir kommen auf diesen Punkt später zurück.

Ganz analoge Versuche, wie diejenigen über Ionisierungsspannung der Elektronen haben dann E. von Bahr und J. Franck (l. c.) über die Ionisierungsarbeit für positive Ionen ausgeführt. Die Apparatur war dieselbe, es wurden nur alle Feldrichtungen vertauscht und der Glühdraht entsprechend behandelt, so daß er viele positive Ionen abgab. Über die Ionisierung durch Stoß positiver Ionen kleiner Geschwindigkeit war noch nichts bekannt. Da sie sich bei der Stoßionisation erst bei größeren Geschwindigkeiten bemerkbar machen, so sollte man erwarten, daß die Ionisierungsspannung der positiven Ionen größer sei als die der Elektronen, um so mehr, als nach dem Impulssatz ein stoßendes positives Molekül dem Elektron im gestoßenen Molekül nicht seine ganze translatorische Energie übermitteln kann. Das Resultat entsprach der Erwartung nicht, wie deutlich aus den in Fig. 5

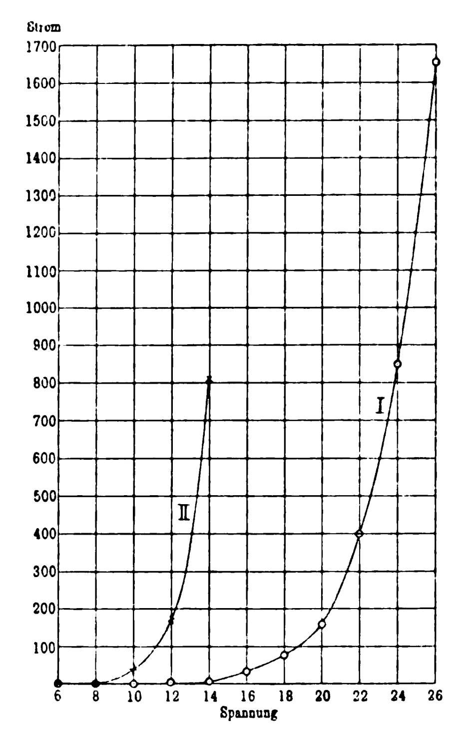


Fig. 5.

abgebildeten Kurven ersichtlich ist. Kurve I und Kurve II sind typisch für die Abhängigkeit der durch die positiven Ionen hervorgerufenen Ionisation von der Spannung, die sie durchlaufen haben. Beide Kurven sind in Wasserstoff vom gleichen Druck aufgenommen, nur ist bei Kurve II die Zahl der stoßenden positiven Ionen etwa 100mal größer als bei Kurve I. Das Ergebnis dieser Messungen ist, daß die positiven Ionen schlechtere Ionisatoren sind als die Elektronen und daß eine Ionisierungsspannung sich überhaupt nicht angeben läßt. Je mehr man die Zahl der primären stoßenden Ionen vergrößert,

1) R. T. Beatty, Phil. Mag. 26, 183, 1913.
2) J. Stark, diese Zeitschr. 9, 481 u. 889, 1908.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. | 15. September 1916. | 17. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 19 am 16. September 1916.

INHALT:

Dem Andenken der im Kriege gefallenen deutschen Physiker.

Georg Lutze.

Von Albert Wigand.

Über Georg Lutzes Leben liegt die ganze Tragik, aber auch der volle Glanz des allzu früh Dahingeschiedenen: Eine glückliche Kinderzeit, frohe Studentenjahre, eine kurze, durch Erfolg und Erleben reiche Zeit wissenschaftlicher Arbeit, ein begeisterter Auszug in den Krieg und in fröhlichem, siegreichem Vorwärtsstürmen ein schöner Soldatentod. Er hat dem Vaterlande mit seinem Leben einen wirklichen Wert zum Opfer gebracht.



Am 31. März 1887 wurde Lutze in Rudolstadt als Pfarrersohn geboren. Ostern 1906 verließ er das Rudolstädter Gymnasium mit dem Reifezeugnis, genügte zunächst in Leipzig seiner militärischen Dienstpflicht als Infanterist und studierte in Leipzig, Göttingen und Halle Physik, Mathematik, Chemie und Philosophie. In Halle wurde er Schüler von Karl Schmidt, der seinen Arbeiten die Richtung nach dem Gebiete der elektrischen Schwingungen gab. In freundschaftlicher Mitarbeit beteiligte er sich an meinen wissenschaftlichen Freiballonfahrten und benutzte sie, besonders die Hochfahrten, zur Behandlung funkentelegraphischer Probleme. Im Sommer 1913 nahm Lutze, einer ehrenvollen Aufforderung folgend, an der funkentelegraphischen Großstation in Brüssel-Laeken eine Stellung an, die seinen Neigungen entsprach. Dort hat er erfolgreich

an der zuverlässigen Verbindung sehr großer Entfernungen gearbeitet, indem er mit seinem in Halle bei Schmidt erworbenen Rüstzeug diese schwierige technische Aufgabe anfaßte.

Der Ausbruch des Krieges traf Lutze bei einer Übung als Leutnant in Deutschland. Gleich in den ersten Tagen rückte er aus und nahm kämpfend teil an dem deutschen Siegeszug durch Belgien und dem Einmarsch in Frankreich. Schon am 8. September 1914 ist der 27-Jährige in einem Infanteriegefecht südwestlich von Châlons-sur-Marne durch Kopfschuß gefallen. Er führte seine Kompagnie im Morgengrauen tapfer gegen das Dorf Lenharré, in dem sich die Franzosen verschanzt hatten. An einer Kirchenhecke fand er unerwartet starken Widerstand, so daß einige seiner Leute zurückweichen wollten. Da nahm Lutze einem von diesen das Gewehr ab und schoß selbst stehend auf den Feind. Beim zweiten oder dritten Schuß fiel er, von mehreren Kugeln getroffen, tot nieder. Über ihn hinaus stürmten die Seinen das Dorf und drangen weiter siegreich vor. Dort, wo er gefallen, fand er ein schlichtes Grab gemeinsam mit anderen Offizieren seines Regiments.

Es kann hier nur andeutungsweise ein Bild dieses gediegenen Charakters entworfen werden, der als ein reiner Mensch in einer feinen, herzgewinnenden Art still unter uns gelebt und mit ernster Tatkraft gewirkt hat. Seine mathematische Begabung und eine ausgesprochene Befähigung zu selbständiger Forschung und praktischer Tätigkeit führten ihn zu Erfolgen, die ihn tief befriedigten und beglückten. Die Anerkennung der Fachgenossen konnte ihm nicht versagt bleiben.

Lutzes Doktorarbeit enthält theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Vorgänge am Resonanztransformator, besonders über den Einfluß der Dämpfungsfaktoren, und gibt eine Methode an zur Kapazitätsmessung von Antennen mit dem Resonanztransformator. Ferner werden in der Dissertation oszillographische Messungen zur Theorie der Schwingungsvorgänge in gekoppelten Kondensatorkreisen mitgeteilt.

Die weiteren Arbeiten Lutzes, abgesehen von den zuletzt in Brüssel ausgeführten, über die keine Publikation vorliegt, behandeln hauptsächlich zwei Probleme der drahtlosen Telegraphie, zu deren Bearbeitung sich der Freiballon als hervorragendes Hilfsmittel erwies, nämlich das Gesetz der Wellenausbreitung nach Höhe und Entfernung, sowie die Natur der luftelektrischen Empfangsstörung. Daneben hat Lutze auch an meinen Luftfahrtsuntersuchungen über andere aerophysikalische Probleme (Kondensationskerne, Leitfähigkeit) mitgearbeitet. Die Erlebnisse unserer gemeinsamen Hochfahrten, besonders einer solchen bis 9425 m Höhe, schufen ein starkes persönliches Band zwischen uns beiden.

Lutzes Messungen der funkentelegraphischen Empfangsintensität bei Ballonfahrten in geringen Höhen und bei zwei Hochfahrten mit Maximalhöhen von 7005 und 6240 m ergaben eine Abnahme der Stärke der empfangenen Zeichen mit zunehmender Erhebung über den Erdboden und mit wachsender Entfernung von der Sendestation. Damit ist experimentell bewiesen, daß sich die Wellen vorzugsweise längs der Erdoberfläche fortpflanzen. Die Resultate stimmen mit der Sommerfeldschen Theorie der Oberflächenwellen quantitativ überein.

Die „luftelektrische Empfangsstörung" der drahtlosen Telegraphie, womit man die im Telephon der Empfangsstation auftretenden Nebengeräusche bezeichnet, hat Lutze bei mehreren Freiballonfahr-

ten beobachtet. Durch gleichzeitige Versuche in zwei Ballonen und auf einer Landstation ergab sich zwar eine Übereinstimmung des allgemeinen täglichen Ganges der Störungen, wie er sich ausprägt in einer doppelten Periode; die einzelnen Störungen sind jedoch auf lokale Ursachen zurückzuführen. Es zeigte sich, daß der meteorologische Charakter der Luftschicht, in der sich der Ballon befand, und auch die Beschaffenheit des darunter liegenden Geländes von bestimmendem Einfluß auf die Störungen ist, und daß sich besonders in Wolken eine starke Vermehrung der Empfangsstörungen feststellen läßt. Im allgemeinen nimmt die Anzahl der Empfangsstörungen mit zunehmender Höhe ab. In großen Höhen (über 5000 m) wurden stets sehr geringe Störungszahlen gefunden. Nach Versuchen von Lutze und Breyer mit einem „Momentankollektor" sind die Empfangsstörungen als Äußerungen schneller, häufig oszillatorischen Schwankungen des luftelektrischen Potentials anzusehen.

Veröffentlichungen von G. Lutze:

1. Untersuchungen an langsamen elektrischen Schwingungen. Mitt. d. Labor. f. Theoret. Physik Halle, Nr. 2. Inaug.-Dissert., Halle 1913, 33 S.
2. Ballonversuche über die Lautstärke funkentelegraphischer Zeichen in größeren Höhen. Elektrotechn. Zeitschr. 1913, S. 273; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **8**, 379—380, 1914.
3. Funkentelegraphische Empfangsversuche im Freiballon. Diese Zeitschr. **14**, 288—296, 1913.
4. Physikalische Untersuchungen im Freiballon I. Synoptische Messungen der luftelektrischen Empfangsstörung am Erdboden und im Ballon für verschiedene Luftschichten, mit gleichzeitigen Beobachtungen der Kondensationskernzahl und der luftelektischen Zerstreuung. Gemeinsam mit A. Wigand, unter Mitarbeit von E. Everling und G. Jenrich. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 1; Abh. d. Naturf. Ges. Halle, N. F. Nr. 2, 1913, 39 S.
5. Zusammenhang der Störungen des atmosphärischen Potentialgefälles mit den luftelektrischen Empfangsstörungen der drahtlosen Telegraphie, nach Untersuchungen am Boden und im Freiballon. Vorgetragen von A. Wigand bei der Wiener Naturforscherversammlung. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 4; Verh. d. D. Physik. Ges. **15**, 1100—1106, 1913; diese Zeitschr. **14**, 1148—1151, 1913; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **8**, 366—367, 1914.
6. Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen der drahtlosen Telegraphie längs der Erdoberfläche, nach Beobachtungen bei Freiballonhochfahrten. Vorgetragen von E. Everling bei der Wiener Naturforscherversammlung. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 5; Verh. d. D. Physik. Ges. **15**, 1107—1110, 1913; diese Zeitschr. **14**, 1151—1153, 1913; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **8**, 367—373, 1914.
7. Luftelektrizität und drahtlose Telegraphie. Die Antenne 1913, S. 121—126; 1914, S. 10—16.
8. Physikalische Untersuchungen im Freiballon II. Die luftelektrische Empfangsstörung sowie die Intensitätsverteilung elektromagnetischer Wellen für verschiedene Höhen und Luftschichten, nach Simultanmessungen am Erdboden und in zwei Ballonen, mit gleichzeitiger Beobachtung der Kondensationskernzahl, der luftelektrischen Zerstreuung und des Potentialgefälles. Gemeinsam mit E. Everling, unter Mitarbeit von A. Wigand und G. Jenrich. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 8; Abh. d. Naturf. Ges. Halle, N. F. Nr. 3, 1914. 79 S.
9. Bericht über eine wissenschaftliche Freiballonfahrt bis 9425 m Höhe. Gemeinsam mit A. Wigand. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 9; Beitr. z. Physik d. freien Atmosphäre **6**, 173—186, 1914.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Luftwiderstand von Kugeln.

Von R. Seeliger.

1. Bewegt sich eine Kugel unter dem Einfluß einer äußeren Kraft in einem widerstehenden Medium, so kann man die Bewegung phänomenologisch beschreiben durch eine Diff.-Gleichung der folgenden Form:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = A - c\left(\frac{dx}{dt}, K\right) \qquad (1)$$

worin A die äußere Kraft und c die der Bewegung entgegenwirkende Reibungskraft ist. c ist allgemein eine Funktion der Geschwindigkeit und einer Größe K, die ihrerseits zusammengesetzt zu denken ist aus gewissen physikalischen und geometrischen Konstanten, wie



an der zuverlässigen Verbindung sehr großer Entfernungen gearbeitet, indem er mit seinem in Halle bei Schmidt erworbenen Rüstzeug diese schwierige technische Aufgabe anfaßte.

Der Ausbruch des Krieges traf Lutze bei einer Übung als Leutnant in Deutschland. Gleich in den ersten Tagen rückte er aus und nahm kämpfend teil an dem deutschen Siegeszug durch Belgien und dem Einmarsch in Frankreich. Schon am 8. September 1914 ist der 27-Jährige in einem Infanteriegefecht südwestlich von Châlons-sur-Marne durch Kopfschuß gefallen. Er führte seine Kompagnie im Morgengrauen tapfer gegen das Dorf Lenharré, in dem sich die Franzosen verschanzt hatten. An einer Kirchenhecke fand er unerwartet starken Widerstand, so daß einige seiner Leute zurückweichen wollten. Da nahm Lutze einem von diesen das Gewehr ab und schoß selbst stehend auf den Feind. Beim zweiten oder dritten Schuß fiel er, von mehreren Kugeln getroffen, tot nieder. Über ihn hinaus stürmten die Seinen das Dorf und drangen weiter siegreich vor. Dort, wo er gefallen, fand er ein schlichtes Grab gemeinsam mit anderen Offizieren seines Regiments.

Es kann hier nur andeutungsweise ein Bild dieses gediegenen Charakters entworfen werden, der als ein reiner Mensch in einer feinen, herzgewinnenden Art still unter uns gelebt und mit ernster Tatkraft gewirkt hat. Seine mathematische Begabung und eine ausgesprochene Befähigung zu selbständiger Forschung und praktischer Tätigkeit führten ihn zu Erfolgen, die ihn tief befriedigten und beglückten. Die Anerkennung der Fachgenossen konnte ihm nicht versagt bleiben.

Lutzes Doktorarbeit enthält theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Vorgänge am Resonanztransformator, besonders über den Einfluß der Dämpfungsfaktoren, und gibt eine Methode an zur Kapazitätsmessung von Antennen mit dem Resonanztransformator. Ferner werden in der Dissertation oszillographische Messungen zur Theorie der Schwingungsvorgänge in gekoppelten Kondensatorkreisen mitgeteilt.

Die weiteren Arbeiten Lutzes, abgesehen von den zuletzt in Brüssel ausgeführten, über die keine Publikation vorliegt, behandeln hauptsächlich zwei Probleme der drahtlosen Telegraphie, zu deren Bearbeitung sich der Freiballon als hervorragendes Hilfsmittel erwies, nämlich das Gesetz der Wellenausbreitung nach Höhe und Entfernung, sowie die Natur der luftelektrischen Empfangsstörung. Daneben hat Lutze auch an meinen Luftfahrtsuntersuchungen über andere aerophysikalische Probleme (Kondensationskerne, Leitfähigkeit) mitgearbeitet. Die Erlebnisse unserer gemeinsamen Hochfahrten, besonders einer solchen bis 9425 m Höhe, schufen ein starkes persönliches Band zwischen uns beiden.

Lutzes Messungen der funkentelegraphischen Empfangsintensität bei Ballonfahrten in geringen Höhen und bei zwei Hochfahrten mit Maximalhöhen von 7005 und 6240 m ergaben eine Abnahme der Stärke der empfangenen Zeichen mit zunehmender Erhebung über den Erdboden und mit wachsender Entfernung von der Sendestation. Damit ist experimentell bewiesen, daß sich die Wellen vorzugsweise längs der Erdoberfläche fortpflanzen. Die Resultate stimmen mit der Sommerfeldschen Theorie der Oberflächenwellen quantitativ überein.

Die „luftelektrische Empfangsstörung" der drahtlosen Telegraphie, womit man die im Telephon der Empfangsstation auftretenden Nebengeräusche bezeichnet, hat Lutze bei mehreren Freiballonfahr-

ten beobachtet. Durch gleichzeitige Versuche in zwei Ballonen und auf einer Landstation ergab sich zwar eine Übereinstimmung des allgemeinen täglichen Ganges der Störungen, wie er sich ausprägt in einer doppelten Periode; die einzelnen Störungen sind jedoch auf lokale Ursachen zurückzuführen. Es zeigte sich, daß der meteorologische Charakter der Luftschicht, in der sich der Ballon befand, und auch die Beschaffenheit des darunter liegenden Geländes von bestimmendem Einfluß auf die Störungen ist, und daß sich besonders in Wolken eine starke Vermehrung der Empfangsstörungen feststellen läßt. Im allgemeinen nimmt die Anzahl der Empfangsstörungen mit zunehmender Höhe ab. In großen Höhen (über 5000 m) wurden stets sehr geringe Störungszahlen gefunden. Nach Versuchen von Lutze und Breyer mit einem „Momentankollektor" sind die Empfangsstörungen als Äußerungen schneller, häufig oszillatorischen Schwankungen des luftelektrischen Potentials anzusehen.

Veröffentlichungen von G. Lutze:

1. Untersuchungen an langsamen elektrischen Schwingungen. Mitt. d. Labor. f. Theoret. Physik Halle, Nr. 2. Inaug.-Dissert., Halle 1913, 33 S.
2. Ballonversuche über die Lautstärke funkentelegraphischer Zeichen in größeren Höhen. Elektrotechn. Zeitschr. 1913, S. 273; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **8**, 379—380, 1914.
3. Funkentelegraphische Empfangsversuche im Freiballon. Diese Zeitschr. **14**, 288—296, 1913.
4. Physikalische Untersuchungen im Freiballon I. Synoptische Messungen der luftelektrischen Empfangsstörung am Erdboden und im Ballon für verschiedene Luftschichten, mit gleichzeitigen Beobachtungen der Kondensationskernzahl und der luftelektischen Zerstreuung. Gemeinsam mit A. Wigand, unter Mitarbeit von E. Everling und G. Jenrich. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 1; Abh. d. Naturf. Ges. Halle, N. F. Nr. 2, 1913, 39 S.
5. Zusammenhang der Störungen des atmosphärischen Potentialgefälles mit den luftelektrischen Empfangsstörungen der drahtlosen Telegraphie, nach Untersuchungen am Boden und im Freiballon. Vorgetragen von A. Wigand bei der Wiener Naturforscherversammlung. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 4; Verh. d. D. Physik. Ges. **15**, 1100—1106, 1913; diese Zeitschr. **14**, 1148—1151, 1913; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **8**, 366—367, 1914.
6. Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen der drahtlosen Telegraphie längs der Erdoberfläche, nach Beobachtungen bei Freiballonhochfahrten. Vorgetragen von E. Everling bei der Wiener Naturforscherversammlung. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 5; Verh. d. D. Physik. Ges. **15**, 1107—1110, 1913; diese Zeitschr. **14**, 1151—1153, 1913; Jahrb. d. drahtl. Telegr. **8**, 367—373, 1914.
7. Luftelektrizität und drahtlose Telegraphie. Die Antenne 1913, S. 121—126; 1914, S. 10—16.
8. Physikalische Untersuchungen im Freiballon II. Die luftelektrische Empfangsstörung sowie die Intensitätsverteilung elektromagnetischer Wellen für verschiedene Höhen und Luftschichten, nach Simultanmessungen am Erdboden und in zwei Ballonen, mit gleichzeitiger Beobachtung der Kondensationskernzahl, der luftelektrischen Zerstreuung und des Potentialgefälles. Gemeinsam mit E. Everling, unter Mitarbeit von A. Wigand und G. Jenrich. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 8; Abh. d. Naturf. Ges. Halle, N. F. Nr. 3, 1914. 79 S.
9. Bericht über eine wissenschaftliche Freiballonfahrt bis 9425 m Höhe. Gemeinsam mit A. Wigand. Aerophysikalischer Forschungsfonds Halle, Abh. 9; Beitr. z. Physik d. freien Atmosphäre **6**, 173—186, 1914.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Luftwiderstand von Kugeln.

Von R. Seeliger.

1. Bewegt sich eine Kugel unter dem Einfluß einer äußeren Kraft in einem widerstehenden Medium, so kann man die Bewegung phänomenologisch beschreiben durch eine Diff.-Gleichung der folgenden Form:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = A - c\left(\frac{dx}{dt}, K\right) \qquad (1)$$

worin A die äußere Kraft und c die der Bewegung entgegenwirkende Reibungskraft ist. c ist allgemein eine Funktion der Geschwindigkeit und einer Größe K, die ihrerseits zusammengesetzt zu denken ist aus gewissen physikalischen und geometrischen Konstanten, wie



innere Reibung des Mediums, Volumen der Kugel usw.

In praxi geht man nun meist so vor, daß man c proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit setzt, ein Ansatz, der einerseits mit der Erfahrung innerhalb gewisser Grenzen gut übereinzustimmen scheint, andererseits wohl aus dem rein mathematischen Grund gewählt wird, weil er eine Integration der Bewegungsgleichung in geschlossener Form erlaubt; für andere Formen des Widerstandsgesetzes ist man auf Reihenentwicklungen oder graphische Methoden angewiesen. Da nun eine hydrodynamische Ableitung des Widerstandsgesetzes bisher noch fehlt und aus bekannten Gründen auch weiterhin auf die größten Schwierigkeiten stoßen dürfte, so scheint es jedenfalls empfehlenswert, vorerst den umgekehrten Weg zu gehen und aus Versuchen das Widerstandsgesetz empirisch zu konstruieren. Dieser Weg wurde nun in der Tat verschiedentlich eingeschlagen; trotz mannigfacher verschiedener Methoden (Schleppversuche, Pendelversuche, Messungen im bewegten Luftstrom) scheinen die Resultate jedoch noch nicht soweit festzustehen, daß nicht die Bearbeitung weiterer Spezialfälle von Nutzen sein könnte.

Ich möchte nun hier die von mir in einem solchen Spezialfall erhaltenen Resultate mitteilen, die sich auf die Bewegung eines kugelförmigen Ballons in der freien Atmosphäre beziehen. Das Versuchsmaterial lag in einer Reihe von aërologischen Untersuchungen der letzten Jahre fertig vor und bedurfte also nur einer sinngemäßen Bearbeitung[1]).

2. Auf einen in der freien Atmosphäre aufsteigenden Ballon wirkt nach oben der (freie) Auftrieb, nach unten die mit der Geschwindigkeit monoton ansteigende Reibungskraft. Unter dem Einfluß dieser beiden Kräfte nimmt der Ballon eine konstante Endgeschwindigkeit an, die Bewegung wird stationär. Besonders einfach gestalten sich nun die Verhältnisse bei einem geschlossenen prallen Ballon mit elastischer Hülle, wie er zu meteorologischen Zwecken vielfach verwendet wird, sei es nun als „ballon sonde" mit Registrierinstrumenten, sei es nach dem Vorgang von Hergesell in Form eines kleinen Gummiballons (Piloten) zur Erforschung der Windverhältnisse in den oberen Teilen der Atmosphäre. Bei derartigen Ballons kann man nämlich den Auftrieb als praktisch konstant ansehen und es resultiert eine konstante, d. h. von der Höhe unabhängige Steigegeschwindigkeit[1]), die sich sehr rasch — schon nach wenigen Metern — einstellt. Komplizierter liegen die Dinge bei einem offenen Prallballon, da hier der Auftrieb mit steigender Höhe ständig abnimmt; trotzdem wird man auch hier — und direkte Messungen bestätigen dies — wegen der beträchtlichen Größe der Reibungskraft einerseits, wegen der nur kleinen Änderung des Auftriebs andererseits wenigstens auf den einzelnen Abschnitten der Ballonbahn von einer — nun allerdings jeweils von der Höhenlage des betreffenden Bahnelementes abhängenden — konstanten Endgeschwindigkeit sprechen und mit dieser weiter rechnen können; man wird also die Bewegung als quasistationär ansehen können.

Für den oben genannten einfachsten Fall des geschlossenen elastischen Prallballons ist nun nach Gleichung (1) die konstante Endgeschwindigkeit gegeben als die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$A = c(v,k), \tag{2}$$

worin A eine Konstante ist, die sich folgendermaßen darstellt:

$$A = (\text{Auftrieb des Gases}) - (\text{Gewicht des Ballons} + \text{Ballastgewicht}). \tag{3}$$

Das Ziel unserer Untersuchung ist nun eine empirische Konstruktion der Funktion c. Wir stellen zunächst c dar als Produkt dreier Faktoren, deren funktionellen Aufbau wir dann einzeln bestimmen werden:

$$c(v,k) = \pi(p) \cdot \alpha(V) \cdot \psi(v). \tag{4}$$

Der letzte Faktor ψ stellt uns die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit v allein dar, der zweite Faktor α ebenso die Abhängigkeit vom Volumen V des kugelförmigen Ballons, während der erste Faktor π die Abhängigkeit von den physikalischen Konstanten (Reibungskoeffizient, Rauhigkeit der Oberfläche usw.) zusammenfaßt, die sich außer durch eigentliche „Ballonkonstante" alle durch den Luftdruck, d. h. durch die Dichte des reibenden Mediums darstellen lassen müssen. Inwieweit eine derartige Faktorenzerlegung gerechtfertigt ist, kann nur der Erfolg lehren, doch wollen wir vorerst in Anlehnung an die Methoden und Bedürfnisse der Praxis davon Gebrauch machen. Beschränken wir ferner unsere Überlegungen zunächst auf stets dasselbe Höhenniveau ent-

1) Ich möchte für das Folgende bemerken, daß die gegenwärtigen Verhältnisse mich zu einigen Unvollständigkeiten in der Abfassung der vorliegenden Notiz zwingen. Einerseits macht der Aufenthalt im Felde es mir unmöglich, Literaturangaben zu bringen und mich auf andere Arbeiten zu beziehen, andererseits verbietet die Benutzung des hier verwendeten Materials im militärischen Wetterdienst eine Mitteilung desselben in extenso und zwingt zu einer Beschränkung auf den allgemeinen Gang der Untersuchung und auf eine Publikation lediglich der Resultate in numerischer Form.

1) Vgl. jedoch das in Abschnitt 4 Gesagte.



sprechend $p = 760$ mm Hg, so können wir den Faktor $\pi(p)$ vorerst als irrelevant einfach fortlassen und haben also mit den folgenden beiden Gleichungen zu operieren:

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha(V)\,\psi(v) \\ A &= \text{Gasauftrieb } a - \text{Gesamtgewicht } g \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Man hat es nun in der Hand, durch Änderung der Größen a und g die Versuchsbedingungen weitgehend zu variieren und so die Funktionen α und ψ punktweise zu konstruieren; die Endgeschwindigkeit v ist durch Doppelvisierungen zu finden, a und g ergeben sich durch direkte Wägung an der Füllwage und V berechnet sich leicht aus a und aus der Differenz σ der spezifischen Gewichte von Füllgas (Wasserstoff) und Luft nach der Formel[1]):

$$A = \sigma V - g. \quad (6)$$

Variiert man A durch Variation von g allein, so kann man also bei konstantem V, d. h. für ein und denselben Ballon, verschiedene Endgeschwindigkeiten erzielen und die Funktion ψ bestimmen. Umgekehrt liefert eine Variation von a unter Konstanthaltung der Endgeschwindigkeit (durch Variation von g und V) die Funktion α bei konstanter Geschwindigkeit.

Eine willkommene Ergänzung der in solcher Weise an Gummipiloten gewonnenen Resultate liefern nun Versuche mit prallen (offenen) nichtelastischen Ballons, wie solche in Form von Papierballons benutzt werden. Die Resultate der Messungen an Gummi und Papierballons dürften untereinander kaum vergleichbar sein, da die letzteren bei weitem nicht so genau kugelförmig sind wie die ersteren, sondern mehr die Form einer Birne mit kugeligem oberen Teil haben und ferner das Beobachtungsmaterial an Papierballons bis jetzt weder so umfangreich ist noch so systematisch gehäuft zu sein scheint. Trotzdem möchte ich anhangsweise auf die Messungen an Papierballons aus folgendem Grund eingehen. Eine Bestimmung der Funktion π (Gleichung 4) ist an Gummiballons nur indirekt möglich, da mit einer Änderung der Luftdichte stets eine Änderung des Volumens verbunden ist und in diese die ganzen komplizierten elastischen Eigenschaften der Hülle eingehen. Diese Schwierigkeit fällt nun bei Papierballons insofern weg, als hier das Volumen mit steigender Höhe (abnehmendem Luftdruck) konstant bleibt; man kann also[2]) cet. par., d. h. bei konstantem Volumen und konstanter Geschwindigkeit den Wert der Reibungskraft für verschiedene Luftdrucke bestimmen und somit π konstruieren. Die Rechnung ist ganz ebenso wie früher auf Grund der Gleichungen (5) durchzuführen. Um jedoch nach Gleichung (6) die Größe A in verschiedenen Höhen bestimmen zu können, muß man den Luftdruck p in dieser Höhe kennen. Dies sowie das beschränkte Versuchsmaterial geben Veranlassung, die diesbezüglichen Resultate nur als eine erste Orientierung anzusehen. Ich habe nun den zu einer Höhe h gehörenden Druck einfach der üblichen barometrischen Höhenformel entnommen unter Annahme einer Temperatur $t_0 = 10^0$ am Erdboden und einer Temperaturabnahme von $0{,}5^0$ auf 100 m; die benutzten Werte sind die folgenden:

H	0	2000	4000	Meter
p	760	595	462	mm Hg

3. Für den geschlossenen Prallballon habe ich meinen Rechnungen die Angaben von Hergesell zugrunde gelegt, die graphisch die konstante Endgeschwindigkeit als Funktion des Gesamtballongewichts und des Auftriebs geben und sich auf Geschwindigkeiten von etwa 1—4 m/sec und auf Volumina von etwa 0,1—0,4 cbm erstrecken. Nach der eben entwickelten Methode ist daraus der Gang der Funktionen ψ und α berechnet und in den Fig. 1 und 2 dargestellt worden. Eine einfache Darstellung in analytischer Form hat sich nicht finden lassen, insbesondere ist eine Proportionalität mit irgendeiner ganzen oder gebrochenen Potenz von v bzw. V in dem ganzen benutzten Intervall auch nicht annähernd anzunehmen. Recht gut — bis auf Maximalfehler von etwa 4 Proz. — lassen sich dagegen die Funktion ψ und α durch folgende zweigliedrige Ausdrücke wiedergeben:

$$\left.\begin{aligned} \psi(v) &= 2{,}24\,v + v^2 \\ \alpha(V) &= 2{,}07\,V^{1/3} + V^{2/3} \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Endlich diene zur Orientierung über die absolute Größe der Reibungskraft, daß diese für eine Kugel von 0,2 cbm Inhalt bei einer Geschwindigkeit von 3 m/sec 149 g beträgt. Aus dieser Angabe und aus der Gleichung (7) können innerhalb des Gültigkeitsbereiches von (7) natürlich alle Absolutwerte berechnet werden.

Hinsichtlich der Resultate an Papierballons interessiert uns vor allem, daß sich aus ihnen innerhalb der allerdings recht großen Fehlergrenzen eine Proportionalität der Reibungskraft mit dem Druck ergibt, und zwar für Druckvariationen im Verhältnis 1 : 0,6, entsprechend einer Höhendifferenz von 4000 m. Im übrigen geben die Papierballons (Volumen ca 0,5 cbm) für ψ einen Verlauf, wie er durch die Fig. 3 dargestellt wird. Da die Form der Ballons wesentlich von der Kugel abweicht, ist ein genaueres

1) Vgl. jedoch Abschnitt 4 am Schluß.
2) Durch geeignete Auswahl der Versuchsdaten.

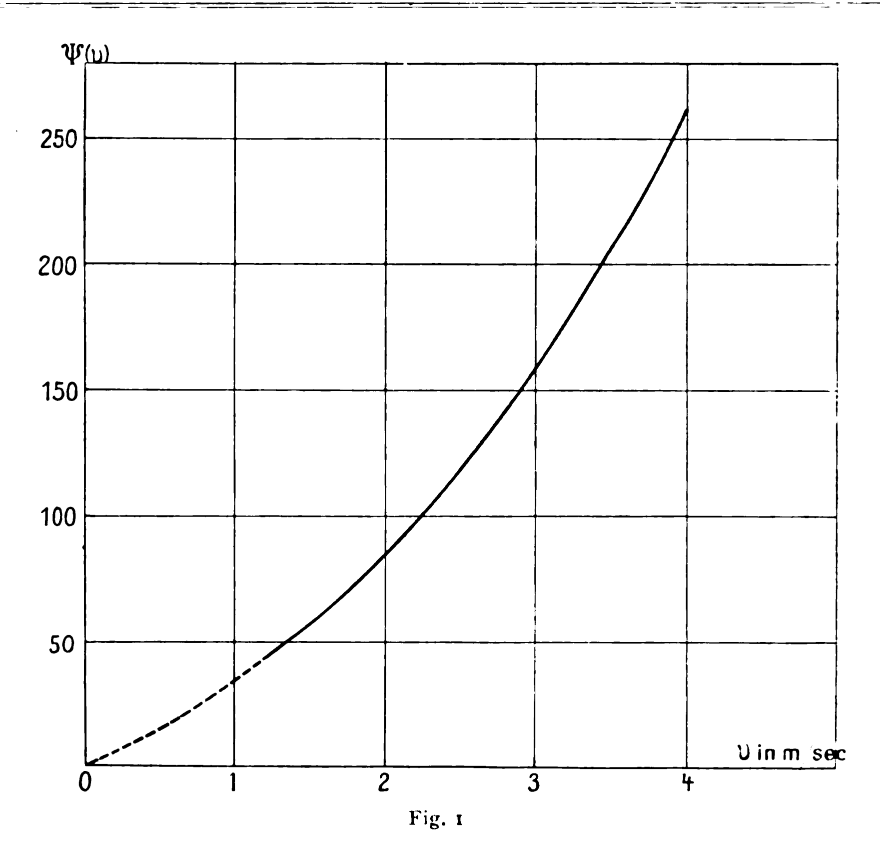


Fig. 1

Eingehen auf diese Verhältnisse wohl kaum von Interesse.

4. Zum Schluß sei noch auf eine eigenartige Schwierigkeit hingewiesen, ohne daß hier eine Lösung gegeben werden könnte. Nehmen wir für die Reibungskraft die oben benutzte (Gleichung 4) Faktorenzerlegung in einen Material-, einen Form- und in einen Geschwindigkeitsfaktor an, die sich an dem (allerdings nicht besonders ausgedehnten) hier benutzten Versuchsmaterial als brauchbar erwiesen hat, so ist das erste Integral der Bewegungsgleichung wie wir sahen:

$$A = \pi(p) \cdot \alpha(V) \cdot \psi(v).$$

Wenn v — d. h. die stationäre Steigegeschwindigkeit — konstant sein soll, so muß sein

$$\frac{A}{\pi(p) \cdot \alpha(V)} = \text{const}$$

Fig. 2.

eine Beziehung, die also insbesondere für ein und denselben geschlossenen elastischen Prallballon für alle Höhen gelten muß, innerhalb derer die Steigegeschwindigkeit nach den Ergebnissen der Doppelvisierungen sich als konstant gezeigt hat. Vernachlässigen wir nun den elastischen Druck der Hülle, so bleibt A konstant mit steigender Höhe; es müßte also $\pi \cdot \alpha$ konstant sein. Da wir nun nach den oben mitgeteilten Resultaten und wohl auch nach allgemeinen hydrodynamischen Überlegungen π pro-

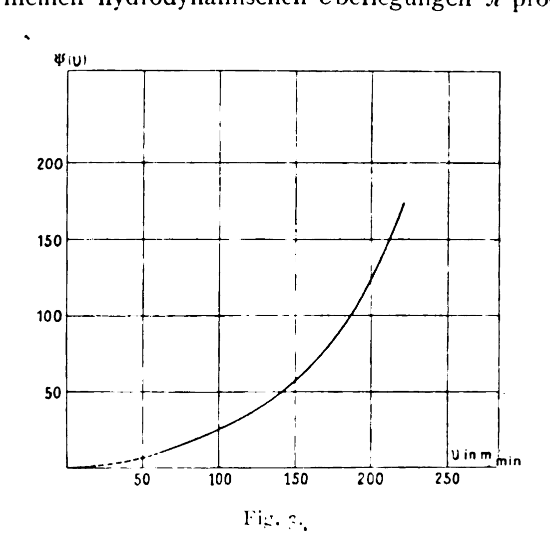


Fig. 3.

portional dem Druck anzunehmen haben, müßte α umgekehrt proportional dem Druck sein, oder es müßte, da V umgekehrt proportional dem Druck ist, α direkt proportional dem Volumen sein. Diese Forderung ist nun mit unserem Resultat (Fig. 2) nicht vereinbar und scheint auch rein hydrodynamisch nicht zu begründen zu sein. Rechnet man unter den eben genannten Voraussetzungen auf Grund der in Fig. 1 und 2 gegebenen Formen von ψ und α, so erhält man eine recht beträchtliche Zunahme der Steigegeschwindigkeit mit der Höhe. So würde z. B. ein Ballon, der am Boden ein Volumen von 0,1 cbm hat, die folgenden Steigerungen der Geschwindigkeit zeigen:

v am Boden	v in 5000 m
1 m/sec = 60 m/min	1,3 m/sec = 80 m/min
3 m/sec = 180 m/min	3,5 m/sec = 210 m/min

Das ist aber eine Inkonstanz der Geschwindigkeit, die außerhalb der Fehlergrenzen sowohl der Messungen wie unserer α- und ψ-Kurven liegt.

Es ist nun schwer zu sagen, worin der Grund dieser Differenz zu suchen ist, wenn anders man nicht die Konstanz der Steigegeschwindigkeit in Zweifel ziehen will. Sollte der tatsächliche Sachverhalt — über den ich mir aus Mangel an experimentellen Unterlagen kein Urteil bilden möchte — der sein, daß bei den Gummipiloten die Steigegeschwindigkeit mit wachsender Höhe wirklich zunimmt und daß man lediglich im Sinne einer den praktischen aërologischen Bedürfnissen genügenden Genauigkeit Konstanz der Steigegeschwindigkeit ansetzt, so sind die folgenden Ausführungen natürlich zum größten Teil irrelevant. Die vorhergehenden Rechnungen würden davon jedoch nicht berührt, da man die Bewegung ebenso wie die des offenen Prallballons für die dort angestellten Überlegungen als quasistationär betrachten kann. Denn auch ganz allgemein, d. h. ohne die hier gegebenen quantitativen Überlegungen wird man schließen, daß die Reibungskraft proportional dem Druck abnimmt, daß sie eine komplizierte Funktion des Volumens ist (jedenfalls nicht proportional dem Volumen ist) und daß also eine — etwa durch die elastischen Eigenschaften der Hülle bedingte — komplizierte Beziehung zwischen Volumen und Innendruck bestehen müßte, damit eine Konstanz der Steigegeschwindigkeit gewährleistet wird. Wie man unmittelbar einsieht, enthält diese Beziehung nämlich außer Konstanten noch die Funktion $\alpha(V)$, also ein den elastischen Eigenschaften der Hülle völlig fremdes Element; sind $P(V)$ der elastische Hüllendruck als Funktion des Volumens A_0 und a Konstante, so müßte sein

$$V \cdot P(V) = A_0 \cdot V - a \cdot \alpha(V).$$

Eine derartige Beziehung aber ist physikalisch nicht zu begründen. Inwieweit allerdings die Verhältnisse quantitativ durch die Elastizität der Hülle zugunsten einer Konstanz der Steigegeschwindigkeit modifiziert werden, ist nur schwer zu übersehen. Zu überlegen ist aber noch andererseits, wie die Existenz eines elastischen Hüllendrucks die von uns berechnete Kurve für $\alpha(V)$ beeinflussen wird. Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, haben wir bei den Rechnungen stets die Gleichung

$$A = \sigma V - g$$

mit der Nebenannahme $\sigma =$ const (d. h. unabhängig von V, nicht natürlich von der Steighöhe!) benutzt. In Wirklichkeit wird aber σ ebenfalls eine Funktion des Volumens sein, es wird also der Maßstab der Abszissen in der $\alpha(V)$-Kurve verzerrt werden. Ist im Höhenniveau 0 der Atmosphärendruck p_0, der Druck des Füllgases P_0, so ist σ nicht mehr gleich der Differenz der spezifischen Gewichte $s_0 - S_0$ von Luft und Füllgas, sondern es ist

$$\sigma = s_0 - S_0 \frac{P_0}{p_0} = (s_0 - S_0) + S_0 \left(1 - \frac{P_0}{p_0}\right).$$

Da nun aber S_0 sehr klein ist gegenüber $s_0 - S_0$, nämlich etwa $1/9$, so wird man annehmen können, daß die genannte Koordinatenverzerrung nur unbedeutend ist. Eine einfache Druckmessung könnte natürlich alle diese Fragen quantitativ entscheiden.

Mai 1916. Im Felde (Balkan).

(Eingegangen 9. Juli 1916.)

Bemerkungen zu der Arbeit von Th. Wereide: Die statistisch-mechanische Grundlage der allgemeinen Quantentheorie [1]).

Von Karl F. Herzfeld.

In der im Titel genannten Arbeit macht Th. Wereide den Versuch, die Plancksche Formel für die Resonatorenergie unter der Annahme einer Nullpunktsenergie von der Größe $\frac{h\nu}{2}$ abzuleiten [2]), ohne sonst an der klassischen Mechanik etwas zu ändern. Der für uns wichtige Gedankengang dieser Abhandlung ist (mit etwas andern Bezeichnungen) folgender.

1) Ann. d. Phys. **49**, 966, 1916; siehe auch diese Zeitschr. **17**, 104, 1916.

2) Die Rechnung für den speziellen Fall des Planckschen Resonators wird in der zweiten Arbeit: Th. Wereide, Ann. d. Phys. **49**, 983, 1916 ausgeführt.

Es sei ein System gegeben, das N gleiche, lose gekoppelte Freiheitsgrade besitzt, so daß die mittlere Energie des Gesamtsystems gleich der Summe der Einzelenergien ist. Sind dann q_n, p_n die generalisierten Koordinaten und Impulse, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Phasenpunkt in der Ebene q_n, p_n im Flächenelement df_n liegt

$$P_n = A_n e^{-\frac{E_n}{k\tau}} df_n. \qquad (1)$$

Kühlt man nun den Körper so weit als möglich ab, so möge er eine bestimmte Energie U^0 behalten. Dann bleiben in diesem Zustand die Zustandsvariablen innerhalb von Gebieten df_n^0, deren Mittelpunkt der Energie $E_n^0 = \frac{U^0}{n}$ entspricht. (Im Planckschen Fall bekanntlich $E_n^0 = \frac{h\nu}{2}$, $df_n^0 = h$). Nun hat Herr Wereide in seiner Ableitung von (1) df überall gleich angenommen. Da nun die Nullpunktsenergie endliche Gebiete df_n^0 erzwingt, schließt er, daß auch alle df_n^r, die anderswo in der Phasenebene liegen, von der gleichen Größe sein müssen und so die Endlichkeit der Phasenelemente durch bloße Annahme der Nullpunktsenergie abgeleitet sei.

Nun ist aber die Nullpunktsenergie mit der klassischen Mechanik nicht verträglich, wie man bei Betrachtung des Zusammenwirkens von Oszillatoren und Gasmolekülen bei tiefen Temperaturen einsieht.

Der Ansatz (1) aber beruht auf dem Liouvilleschen Satz (in Verbindung mit der Quasiergodenhypothese) und dieser wieder wird mittels der Hamiltonschen Gleichungen abgeleitet, die im Gebiete df_0 nicht gelten.

Wir wollen die Verhältnisse näher betrachten.

Zur Darstellung bedienen wir uns einer stationären virtuellen Gesamtheit von Systemen der früher betrachteten Art im $2N$-dimensionalen Phasenraum. Die Gebiete, innerhalb deren Abweichungen von der klassischen Theorie stattfinden, bilden $2N$-Zylinder parallel den Koordinatenachsen mit der Gleichung $E_n(q_n, p_n) = E^0$ für die Mantelfläche. Der Liouvillesche Satz sagt nun aus:

Betrachten wir ein Volumelement $d\tau$ außerhalb der Zylinder, das die Phasenpunkte von dZ-Systemen enthält. Dann werden diese dZ-Phasenpunkte beim Fortschreiten auf ihrer Bahn stets ein gleich großes Volumen $d\tau$ erfüllen, solange keine Zylinderwand überschritten wird.

Es sind daher solche gleichgroße Elemente $d\tau$ gleichwahrscheinlich, die mit Vermeidung der oben genannten Zylinder ineinander übergehen, während über ihr Verhalten nach Durchschreiten der Zylinderwand sich gar nichts sagen läßt. Da man aber über den näheren Verlauf der Bahnen nichts weiß, so kann man darauf überhaupt keinen verwertbaren Wahrscheinlichkeitsansatz gründen. Machen wir aber die Annahme, daß wir zwar über das Verhalten von $d\tau$ innerhalb der Zylinder nichts wissen, daß aber $d\tau$ beim Verlassen der Zylinder dieselbe Größe wieder annimmt, die es vor dem Eintreten hatte und nehmen die Quasiergodenhypothese für den Außenraum an, dann sind alle gleichgroßen Volumelemente $d\tau$ im Außenraum gleichberechtigt und es gilt für den Außenraum (1) mit beliebig kleinem df. Die mittlere Energie wird

$$E = \frac{aE_0 e^{-\frac{E_0}{k\tau}} + \int_h^\infty E e^{-\frac{E}{k\tau}} dq\,dp}{a e^{-\frac{E_0}{k\tau}} + \int_h^\infty e^{-\frac{E}{k\tau}} dq\,dp}.$$

Über die Größe a läßt sich nichts aussagen.

(Eingegangen 12. August 1916.)

Über die Analyse schwingender Tropfen vermittelst Wirbelringen.

Von Viktor Kutter.

1. Entstehung von Wirbelringen aus fallenden Tropfen.

Läßt man aus geringer Höhe von einigen Millimetern bis zu mehreren Zentimetern Tropfen nicht allzu rasch in eine andere Flüssigkeit fallen, so verwandeln sie sich beim Auftreffen auf den Flüssigkeitsspiegel in Wirbelringe, welche je nach der Fallhöhe mehr oder weniger tief ins Flüssigkeitsinnere eindringen. Die Erscheinung ist bei Anwendung farbiger Flüssigkeiten besonders gut sichtbar, so z. B. wenn man eine Lösung von Kaliumpermanganat in eine solche von Ferrosalz träufeln läßt. Die entstandenen Wirbelringe verschwinden alsdann immer wieder, solange das Permanganat zur Oxydation des Ferrosalzes verbraucht wird. Wie wir später sehen werden, lassen sich auch bei farblosen Flüssigkeitstropfen die Wirbelringe auf ihrem Weg ins Innere der Indikatorflüssigkeit beobachten, und man sollte nun meinen, daß die Ringe um so tiefer eindringen, je größer die Fallhöhe der erzeugenden Tropfen war. Dies trifft jedoch keineswegs zu, vielmehr wechselt die Einfalltiefe der Tropfen periodisch mit wachsender Fallhöhe, d. h. die Einfalltiefe ist eine periodische Funktion der Fallzeit oder der Zeit allgemein, wie die Kurve der Fig. 1 zeigt. Hier sind die Fall-



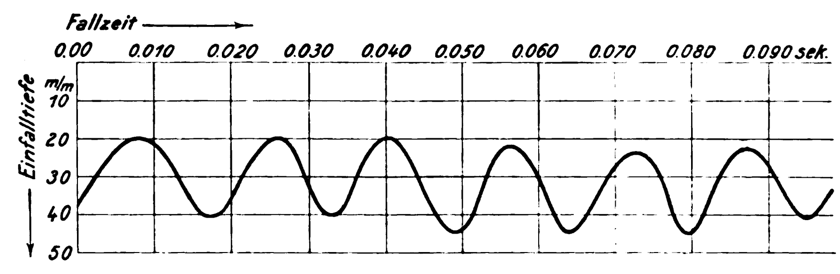


Fig. 1.

zeiten der Tropfen auf der Abszisse und die zugehörigen Einfalltiefen der Wirbelringe auf der Ordinate aufgetragen, und man erhält dann, wie ersichtlich, eine der Sinuslinie ähnliche Kurve, d. h. die graphische Darstellung einer Schwingungsbewegung.

2. Bestimmung der Oberflächenspannung durch Wirbelringe.

Bekanntlich führen frei fallende Tropfen ellipsoidische Schwingungen um die Gleichgewichtsform der Kugel aus, wobei die längste Achse abwechselnd in die horizontale und vertikale Lage kommt. Fällt nun solch ein Tropfen in eine Flüssigkeit, so wird beim Auftreffen auf den Flüssigkeitsspiegel zunächst die Berührungsstelle verschmelzen, so daß im nächstfolgenden Moment der Tropfen eine Ausbuchtung oder Deformation der Flüssigkeitsoberfläche bildet, die je nach der Schwingungsphase des auftreffenden Tropfens an Größe und Gestalt verschieden sein kann, wie Fig. 2 zeigt. Solche

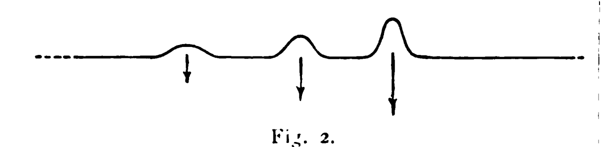


Fig. 2.

Deformationen werden aber durch die Oberflächenspannung sofort wieder zum Verschwinden gebracht, und zwar mit einer Kraft, die mit der Größe der Deformation selber wächst; somit ist die Einfalltiefe der Wirbelringe ein Maß der vorhergehenden Oberflächendeformation oder der diese bedingenden Phase des schwingenden Tropfens. Die in Fig. 1 gegebene Kurve, die Beziehung zwischen Fallzeit und Einfalltiefe darstellend, ist daher zugleich eine Abbildung der Schwingungen des Tropfens selbst.

Somit liefern uns die Wirbelringe ein einfaches Hilfsmittel, um die Bewegungsvorgänge beim schwingenden Tropfen zu analysieren. Nehmen wir gleich einmal eine ganze Beobachtungsreihe vorweg, so erhalten wir zu jeder Fallhöhe des Tropfens die zugehörige Einfalltiefe des Wirbelringes, bis, bei zu großen Fallhöhen, die Tropfen beim Auftreffen zersprühen und keine Wirbelringe mehr bilden. Aus den Fallzeiten kann man dann leicht mit Hilfe der Maxima der Einfallstiefen die Schwingungsdauer berechnen und erhält alsdann die umstehende Tabelle I, in welcher h die Fallhöhe in Millimetern, E die Einfallstiefe ebenfalls in Millimetern, t die Fallzeit und T die Schwingungsdauer in Sekunden, und N die Anzahl der Perioden bedeutet.

Man ersieht hieraus, daß die allerersten Schwingungen noch unregelmäßig sind, und gleichzeitig, daß zur Berechnung der Schwingungsdauer nur die Fallhöhen zu den Maxima der Einfalltiefen zu bestimmen sind, während die zwischenliegenden Werte übergangen werden können. Solche Bestimmungen sind aber von besonderem Interesse, weil man aus der Schwingungsdauer die Oberflächenspannung berechnen kann, und sich hierauf die bekannte, von Lenard ausgearbeitete und auch zuerst angewandte Methode der „schwingenden Tropfen" gründet.

P. Lenard benutzt zum Aufsuchen der Knoten und Bäuche eine optische Reflexmethode, und hat den Vorteil, bezüglich der Fallhöhen an keine engen Grenzen gebunden zu sein; dieser schätzenswerte Vorteil geht unserer Methode verloren, dafür ist aber andererseits die Apparatur einfacher und bietet ein einfaches Hilfsmittel zu einer vollkommeneren Analyse der Tropfenschwingungen, von der wir später noch einen besonderen Gebrauch machen werden.

Zunächst wollen wir nun aber unsere Wirbelringmethode auf ihre Brauchbarkeit zur Bestimmung der Oberflächenspannung einer Prüfung unterziehen. Zu diesem Zweck wurde eine größere Anzahl Beobachtungen am Wasser vorgenommen, weil von diesem Körper die meisten Beobachtungen nach anderen Methoden vorliegen, die zum Vergleich dienen können, und weil andererseits erst aus einer größeren Anzahl von Beobachtungsresultaten sich der Genauigkeitsgrad der Methode ersehen läßt.

Um die Wirbelringe des reinen Wassers sichtbar zu machen, wurde eine stark verdünnte salzsaure Auflösung von Antimonchlorid ($SbCl_3$)

Tabelle I.

h	E	t	N	T
0,0000	38	0,0000		
0,3368	20	0,00829	×	
0,8420	32	0,01310		
1,4317	40,3	1708	1	0,01708
1,6842	40	1852		
2,5262	25	2260		
3,3684	20	2620	×	
4,2104	35	2930		
5,0526	40	3310	2	0,01605
5 8946	30	3468		
6,7362	25	3707		
7,5788	24	3932		
8,0000	20	4040	×	
8,4210	22	4143		
9,2630	30	4340		
10,1052	40	4540		
10,9472	45	4745		
11,1158	45	4760	3	0,01586
11,7894	45	4900		
12,6314	35	5072		
13,4736	26	5242		
14,3158	23	5403		
15,1578	22,5	5560		
15,5788	22	5635	×	
16,0000	22	5714		
16,8420	25	5860		
17,6840	35	6050		
18,526	40	6142		
19,368	45	6285		
19,785	45	6355	4	0,01587
20,210	45	6420		
21,052	42	6555		
21,894	35	6680		
22,736	30	6812		
23,578	27	6935		
24,420	25	0,07060		
25,262	23	7175		
25,683	23	7235	×	0,01583
26,104	23	7300		
26,946	25	7410		
27,758	28	7525		
28,630	35	7640		
29,472	42	7755		
30,314	45	7865		
30,735	46	7923	5	
31,158	45	7970		
32,0000	43	8080		
32,842	40	8185		
33,684	34	8290		
34,526	30	8392		
35,368	28	8495		
36,210	24	8590		
37,052	23	8690		
37,894	23	8790	×	
38,736	24	8890		
39,578	24	8985		
40,420	26	9078		
41,262	33	9170		
42,112	35	9270		
42,962	40	9360		
43,812	41	9460	6	0 01577
44,662	40	9545		
45,512	36	9635		
48,062	25	9000		

als Indikatorflüssigkeit verwendet, in welche man die Wassertropfen einfallen ließ.

In dieser Flüssigkeit liefern die Wassertropfen, je nach der Konzentration des $SbCl_3$, milchig trübe bis weiße Wirbelringe, die eine sehr gute Beobachtung ermöglichen.

Die Berechnung der Oberflächenspannung α geschieht dann nach der Rayleighschen Formel:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{n(n-1)(n+2)} \cdot \frac{p}{g \cdot \alpha}} \cdot \cdots$$

worin T die Schwingungsdauer, p das Tropfengewicht, g die Gravitationskonstante, α die Oberflächenspannung und n einen Parameter bedeutet, welcher für die ellipsoidischen Schwingungen kleiner Tropfen den Wert 2 annimmt; also erhält man, für $n = 2$, zur Bestimmung von α die nachfolgende einfache Gleichung:

$$\alpha = \frac{3\pi}{8} \times \frac{p}{g \times T^2} = 0{,}12 \times \frac{p}{T^2} \cdot \cdots$$

In der nächsten Tabelle II, sind nun die Daten aus zwölf Beobachtungsreihen zusammengestellt, wie sie unmittelbar erhalten wurden, und schließlich ist in der letzten Rubrik der Wert von α vermittels des Temperaturkoeffizienten — 0,00221 auf 18⁰ reduziert.

Tabelle II.
(Oberflächenspannung des Wassers).

t^0	p	T	α_t	α_{18}
14,9	0,012280	0,014060	7,453	7,402
15,6	11980	13948	415	376
15,0	12019	13933	440	391
16,5	12245	14080	420	395
17,0	12532	14280	375	359
19,5	19190	17810	381	357
18,8	14156	15220	335	348
14,1	12325	14040	505	440
14,9	12263	14070	441	390
14 8	12336	14140	415	363
17,2	12128	14070	355	342
17,5	15364	15830	365	357

Hieraus ergibt sich als Mittelwert der Oberflächenspannung des Wassers bei 18⁰ der Wert

$$\alpha = 7{,}378 \text{ mg/mm.}$$

Auch die Messungen an Lösungen von Salzen, Säuren und Laugen lieferten mit anderweitigen Resultaten gute Übereinstimmungen, und werden zur Zeit weiter verfolgt, um die Beobachtungen sodann auf bisher noch nicht untersuchte Substanzen ausdehnen zu können.

Jedoch genügen schon die bisherigen Resultate, um die Brauchbarkeit der Wirbelringmethode in dieser Hinsicht darzutun, und wir geben daher eine kurze Schilderung der Apparatur, die das Studium der Wirbelringe ermöglicht.

Der Apparat besteht im wesentlichen aus einem Scheidetrichter von 200—300 ccm Inhalt, dessen lange Ausflußröhre unten mehrere Zentimeter lang zu einer Art Kapillare verengert ist, sich dann wieder erweitert und schließlich in die feine Spitze endigt, aus der die Tröpfchen austreten. Die nachstehende Figur 3 zeigt dieses untere Ende mit der verengten Stelle, in welche der Glasfaden „*f*" hineinreicht, durch dessen Verschiebung die Tropfgeschwindigkeit reguliert wird. Das Ausflußrohr *A* steckt dann mittels Korken

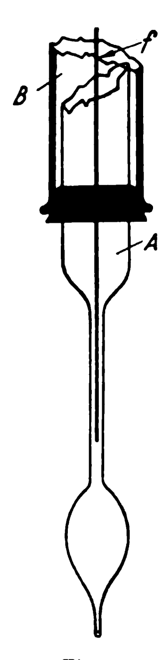


Fig. 3.

in einem weiteren mit Skala versehenen Rohr *B*, so daß man die Vertikalverschiebungen des gesamten Trichters, d. h. die Fallhöhen daran ablesen kann. Die Indikatorflüssigkeit, in welche die Tropfen fallen, befindet sich in einem graduierten Becherglas und wird vermittels eines Hebers auf konstantem Niveau gehalten. Nehmen wir noch ein Stativ, in dessen Klammer der Tropfapparat verschiebbar über dem Becherglas gehalten wird, und unsere Apparatur ist im wesentlichen fertig. Trotzdem sei aber erwähnt, daß die Einstellung auf den Nullpunkt der Fallhöhe, die auf den unteren Tropfenrand bezogen wird, schon einige Übung erfordert, da hier kleine Differenzen der Fallhöhe bereits beträchtlichen Periodenänderungen entsprechen, die leicht übersehen werden könnten.

Die Methode der Wirbelringe dürfte sich an erster Stelle zur Untersuchung gefärbter Flüssigkeiten eignen, wie Chamäleon-Jod- oder Blut-Lösungen, doch kann sie durch geeignete Wahl der Indikatorflüssigkeit auch auf eine große Anzahl anderer Lösungen ausgedehnt werden; so ist z. B. die salzsaure $Sb \cdot Cl_3$-Lösung ein bequemer Indikator für Wasser, für die Basen und für die Lösungen sehr vieler farbloser neutraler Salze. Eine alkalische Auflösung von Antimonsulfid eignet sich für Säuren und liefert schöne orangefarbene Wirbelringe, die bei größeren Konzentrationen eine bemerkenswert lange Lebensdauer haben. Zur Untersuchung von Ferrisalzen kann man Zinnchlorür verwenden, u. s. f., so daß also der persönlichen Wahl ein ziemlicher Spielraum bleibt, und die Erfahrungen der analytischen Chemie hier wertvolle Dienste leisten.

3. Analyse der Schwingung in zwei ungleiche Hälften.

Im ersten Teil ist die Anwendung der Wirbelringe zur Bestimmung der Oberflächenspannung gezeigt worden, und sofort übt nun die relative Genauigkeit und Gleichmäßigkeit der Resultate eine Rückwirkung dahin aus, daß sie ein begründetes Vertrauen in die Angaben der Wirbelringe in uns hervorrufen. Sehen wir daher zu, was sie uns weiter zeigen. Zu diesem Zwecke betrachten wir noch einmal die Tabelle I; dort sind unter *N* durch die Zahlen 1, 2, 3, usw. jeweils die vom Tropfen ausgeführten ganzen Schwingungen verzeichnet, während durch die dazwischen liegenden Zeichen „><" jeweils die halben Schwingungen angegeben sind. Man erhält daher für die ganzen und halben Schwingungen die folgenden zwei Teiltabellen III u. IV.

Tabelle III. (Ganze Schwingungen).

h	N	t	T
0,0000	0	0,0000	
1,4317	1	0,01708	0,01708
5,0526	2	3310	1605
11,1158	3	4760	1586
19,785	4	6355	1587
30,735	5	7923	1583
43,812	6	9460	1577

Tabelle IV. (Halbe Schwingungen).

h	N	t	T
0,0000	0.0	0,0000	
0,3368	0,5	0,00829	0,01658
3,3684	1,5	0,02620	1744
8,0000	2,5	4040	1616
15,5788	3,5	5635	1610
25,6830	4,5	7235	1608
37,8940	5,5	8790	1598

Sieht man von den beiden ersten, noch unregelmäßigen Schwingungen ab, so erhält man aus Tabelle III für t den Wert:

$$T = \frac{0{,}01586 + 0{,}01587 + 0{,}01583 + 0{,}001577}{4} = 0{,}015833 \text{ sec},$$

aus Tabelle IV hingegen ergibt sich auf demselben Wege ein etwas größerer Wert, nämlich:

$$T = 0{,}01608 \text{ sec},$$

Ähnliche Ergebnisse wurden bei allen untersuchten Tropfen gefunden, haben also ihre Ursache nicht in mangelhafter Beobachtung oder in der Unzulänglichkeit der Methode; vielmehr gestattet gerade diese, die Ursache hierfür auf einfachem Wege klarzulegen.

Zerlegt man nämlich die ganze Periode in je zwei Hälften, von denen die eine vom Maximum bis zum Minimum der Einfalltiefe reicht, die andere umgekehrt vom Minimum bis zum jeweiligen Maximum, indem man die diesen entsprechenden Werte von t in den Tabellen III und IV, voneinander subtrahiert, so erhält man:

a)	0,09460	0,07923	0,06355	0,04760
	—0,08790	—0,07235	—0,05635	—0,04040
	0,00670	0,00688	0,00720	0,00720
b)	0,08790	0.07235	0,05635	
	—0,07923	—0,06355	—0,04760	
	0,00867	0,00880	0,00875	

Dies bedeutet aber, daß die Gesamtschwingung sich aus zwei ungleichen Hälften zusammensetzt, und im vorliegenden Falle ist dann

$$T = 0{,}00700 + 0{,}00874 = 0{,}01574.$$

Insbesondere ist das Verhältnis der beiden Halbperioden nicht gleich Eins, sondern

$$D = \frac{0{,}00700}{0{,}00874} = 0{,}801.$$

Ganz analoge Resultate wurden bei allen untersuchten Tropfen vorgefunden, mit dem Merkmal, daß D bei jedem Tropfen einen etwas anderen Wert hatte.

Hieraus ergibt sich also, daß bei schwingenden Tropfen sich über der Hauptschwingung Oberschwingungen ausbilden, welche die Symmetrie der Hauptschwingung zerstören, während sie die Gesamtperiode unbeeinträchtigt lassen.

Zum Schluß sei auch noch bemerkt, daß die Stellen der Maxima der Einfalltiefe meistens schärfer ausgesprochen sind als die Minimalwerte, was eine Schwingungsform der Fig. 4 wahrscheinlich macht.

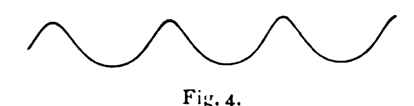


Fig. 4.

4. Auflösung der Wirbelringe.

Bei unseren Versuchen bilden sich die Wirbelringe in der Indikatorflüssigkeit aus, der wir immer ein etwas größeres spez. Gewicht geben, als es die einfallenden Tropfen besitzen; sonst würden die Ringe auf den Boden sinken und eine genaue Messung unmöglich machen. So aber erreicht der Wirbelring eine tiefste Stelle und hebt sich dann langsam wieder, wobei er allmählich seiner Auflösung verfällt. Hierbei bilden sich nun höchst charakteristische pilz- und baumartige Figuren und Strömungsgebilde, die eine überraschende Ähnlichkeit mit den Kohäsions- und Diffusions-Figuren, sowie mit den Strömungsgebilden haben, die beim Auflösen eines Körpers in einem Lösungsmittel entstehen. Es liegt daher der Schluß nahe, daß diese letzteren ebenfalls aus Wirbelringen, und zwar kleinerer Art entstehen, und es erscheint danach nicht unmöglich, auf diesem Wege einen experimentellen Beweis für die Helmholtz-Kelvinsche Theorie der Wirbelatome zu erbringen.

Zum Schlusse sei es nun noch gestattet, ein einfaches, aber für den ersten Anblick merkwürdiges Experiment zu schildern, dem man den Namen des „Wirbelringregens" geben könnte.

Bei unserer Tropfenanalyse war die Tropfenfolge eine ziemlich mäßige, das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tropfen lag durchschnittlich über einer Sekunde und betrug bis zu mehreren Sekunden. War nun unser Tropfapparat auf eine große Einfalltiefe der Wirbelringe, z. B. 80 mm, eingestellt und wurde bei dieser konstanten Fallhöhe jetzt die Tropfgeschwindigkeit, d. h. die Tropfenfolge langsam vergrößert, so verringert sich die Einfalltiefe mehr und mehr, ganz im Gegensatz zu dem, was man erwarten sollte, da ja mit größerer Tropfgeschwindigkeit das Tropfengewicht wächst. Die Sache wird aber noch interessanter, wenn die Zahl der pro Zeiteinheit auftreffenden Tropfen weiter wächst. Zunächst kommt man an einen Punkt, wo der Tropfen bei seinem Auftreffen auf den Spiegel der Indikatorflüssigkeit nicht sofort in diese hineinfällt, sondern erst einige Momente auf der Oberfläche liegen bleibt, um dann erst als Wirbelring langsam zu versinken. In einem folgenden Stadium hält sich der Tropfen noch länger als bisher auf der Oberfläche, so daß gleichzeitig ihrer immer mehrere vorhanden sind. Noch später ist ihre Zahl so groß geworden, daß sie sich gegenseitig beeinflussen, anziehen und abstoßen, und infolgedessen unregelmäßige Bewegungen ausführen, indem sie über den Flüssigkeitsspiegel wie über eine glän-



zende Metallfläche dahinrollen, bis sie an irgendeiner entfernten Stelle als Wirbelring langsam versinken. Dieses Spiel der flüssigen Kugeln ist äußerst zierlich und manchesmal kann man dabei beobachten, daß zwei derselben sich wie Doppelsterne im Kreise umeinander bewegen. Wird endlich die Ausflußgeschwindigkeit noch weiter erhöht, so daß ein feiner Tropfenstrahl entsteht, so bildet sich an der Auftreffstelle eine große Anzahl kleinerer Kugeln, welche von hier aus sternförmig nach allen Richtungen auseinanderschwirren, über die Flüssigkeitsoberfläche dahinrollen, und sich schließlich als ein förmlicher Regen von kleinen Wirbelringen in die Indikatorflüssigkeit ergießen.

Die Ursache für diese auffälligen Erscheinungen ist natürlich in den Tropfen selbst zu suchen, und zwar vor allem in den Strömungs- und Rotationsbewegungen, die sich bei der Tropfenentstehung ausbilden, und die bei rasch entstehenden Tropfen größer sein müssen, als bei anderen.

Dies ist auch die Ursache, weswegen wir an unserem Tropfapparat nach der verengten Stelle noch einmal eine Erweiterung anbringen; damit nämlich dort die Flüssigkeit nach dem Passieren der Kapillare sich von etwaigen Strömungen und Wirbelungen ausruhen kann, bevor sie zur langsamen Tropfenbildung Verwendung findet.

Die vorliegende Untersuchung entstand infolge einer Vorlesung, die Professor A. Schoenflies vor dem Kriege an der damals noch nicht eröffneten Universität Frankfurt a. M. über die Theorie des Kreisels hielt; die interessante Art und Weise, in der das Problem behandelt wurde, sowie auch die der Vorlesung folgende Beschäftigung mit dem die Materie erschöpfenden Werke von Klein und Sommerfeld veranlaßten mich zu Experimentaluntersuchungen auf diesem Gebiete, die schließlich zu einem besonderen Studium der Wirbelringe führten. Die Messungen selbst wurden im chemischen Laboratorium zu Wiesbaden ausgeführt, und ich freue mich, an dieser Stelle nochmals Herrn Geh. Regierungsrat H. Fresenius meinen besten Dank für seine Ratschläge und seine Freundlichkeit auszusprechen, womit er mir die nötigen Laboratoriumshülfsmittel, insbesondere einen erschütterungsfreien Raum, zur Verfügung stellte, Auch Herrn Geh. Regierungsrat Professor A. Schoenflies schulde ich noch besonderen Dank für das Interesse, daß er dem Fortgange der Untersuchung in reichem Maße entgegenbrachte.

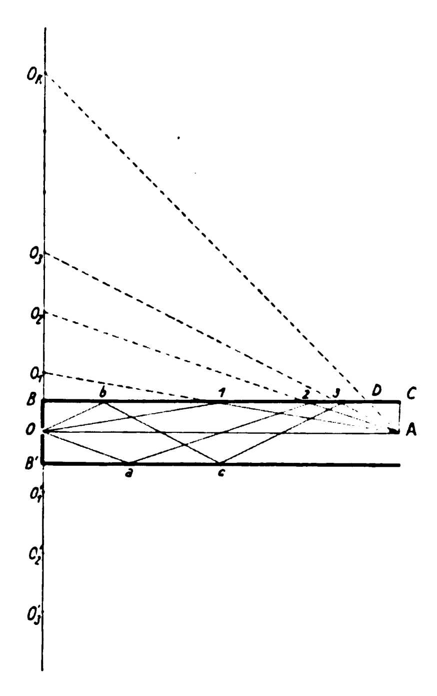
Wiesbaden, Chemisches Laboratorium. Ende Juni 1916.

(Eingegangen 16. August 1916.)

Lichterscheinungen in einer spiegelnden Röhre.

Von Anton Lampa.

Bringt man das Auge an eine Röhre mit innen spiegelnder Oberfläche (z. B. die Röhre eines Polarimeters für Zuckerlösungen) derart, daß die Pupille in der Achse der Röhre liegt, so sieht man die Oberfläche in verschieden helle, kreisförmig abgegrenzte Teile abgeteilt; ist die Röhre durch eine Platte mit einer zentrierten kreisförmigen Öffnung, deren Radius kleiner ist als der Radius der Röhre, abgeschlossen, so sieht man einige helle Ringe. Ich finde in der



Literatur keine Darlegung dieser allbekannten Erscheinung und so mag eine Notiz über dieselbe nicht unangebracht erscheinen.

Wir betrachten zunächst den Fall einer punktförmigen zentrierten Öffnung O in der Abschlußplatte der Röhre (Figur), deren Länge l, deren Radius r sei. Zur Pupille A gelangen erstens die direkten Strahlen OA, durch deren Vermittlung die Öffnung gesehen wird. Zweitens gelangen zu ihr Strahlen, welche eine Reflexion an der Röhrenwand erfahren haben, z. B. Strahl $O1A$. Da OA Symmetrieachse ist, sieht man in der Entfernung $C1$ einen Lichtring. Diese Entfernung ist, wie aus dem Reflexionsgesetz folgt, gleich der halben Röhrenlänge. Zweimal reflektierte Strahlen, wie $Oa2A$ geben drittens einen zweiten Lichtring in der Entfernung $C2 = \frac{l}{4}$. Weiter geben dreimal reflek-

tierte Strahlen wie $Obc3A$ einen dritten Lichtring in der Entfernung $C3 = \frac{l}{6}$ usw.

Am einfachsten ermittelt man die Lage dieser Lichtringe durch eine Konstruktion, wie sie in der Theorie des Winkelspiegels angewendet wird: man sucht die sukzessiven Spiegelbilder O_1, O_1', O_2, O_2', O_3, O_3', ... auf, indem man jedes Spiegelbild als Gegenstand für die nächste Spiegelung ansieht und zieht von diesen Spiegelbildern Strahlen zur Pupille A. Der Durchschnittspunkt jedes Strahls mit der Begrenzungslinie der Röhre gibt die Lage eines Lichtrings. Für die Entfernung des k ten Ringes $CD = x_k$ ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und O_kBD, da $CA = r$ und $BO_k = (2k - 1)r$, die Proportion

$$x_k/r = (l - x_k)/(2k - 1)r,$$

aus welcher $x_k = \frac{l}{2k}$ folgt. Man sieht natürlich nur eine begrenzte Zahl von Ringen, da ihre Lichtstärke mit der Ordnungszahl abnimmt. Ich verwendete eine innen polierte Messingröhre von $l = 274$ mm und $r = 16$ mm und konnte 4 Ringe wahrnehmen, wenn ich die Röhre gegen eine gleichmäßig helle Fläche (Himmel) richtete. Der Gesichtswinkel α_k, unter welchem der Radius des k ten Ringes gesehen wird, ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{2kr}{l}$. Ist also $\frac{r}{l}$ klein, so verhalten sich die Radien der ersten Ringe nahe wie $1:2:3:\ldots$. Mit Papierstreifen von der Länge $\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{6}, \ldots$, die man anfeuchtet, um volle Anschmiegung an die Röhre zu erzielen, kann man sich, indem man sie in die Röhre einlegt, überzeugen, daß die Ringe in den berechneten Entfernungen liegen.

In ähnlicher Weise ergibt sich die Deutung der Erscheinung bei voller Öffnung der Röhre. Man sucht jetzt die Lage der Spiegelbilder der Endpunkte B und B' eines Durchmessers auf, welche offenbar die Begrenzung der einzelnen hellen Abteilungen der Röhre bestimmen. Das k-te Spiegelbild liegt jetzt in der Entfernung $(2k + 1)r$ von O und für die Entfernung y_k der zugehörigen Begrenzungslinie vom anderen Röhrenende gilt die Proportion $y_k/r = (l - y_k)/2kr$, aus welcher $y_k = \frac{l}{2k + 1}$ folgt. Die erste, hellste Abteilung endet somit bei ein Drittel der Röhrenlänge von C aus gemessen, die zweite bei ein Fünftel usw. Bei meiner Röhre sind 4 Abteilungen deutlich sichtbar, der Rest der Röhre erscheint bereits ohne Gliederung dunkel. Sieht man schon in dem zuerst besprochenen Fall die Lichtringe ungleich hell, so ist hier außer dem Unterschied der Helligkeit auch der Unterschied der Farbe der einzelnen Abteilungen sehr auffallend. Blickt man gegen eine gleichmäßig helle weiße Fläche (bedeckter Himmel), so ist die erste Abteilung hell silberglänzend, die zweite schon deutlich gelblich, die dritte zeigt die charakteristische Messingfarbe, die vierte ist schon ziemlich dunkel. Blickt man gegen eine helle gefärbte Fläche, die nicht homogenes Licht ausstrahlt, z. B. den reinen blauen Himmel, so zeigt nur die erste Abteilung die Farbe der Fläche mit Metallglanz, im vorliegenden Fall ist die erste Abteilung hell stahlblau, aber schon bei der zweiten ist die Beimischung von Blau kaum merklich. Der Versuch zeigt deutlich die Selektion des Lichtes durch wiederholte Reflexion am farbigen Metall.

Entfernt man die Röhre vom Auge, während die Pupille in der Röhrenachse bleibt, so wandern im ersten Fall die Lichtringe, im zweiten die Begrenzungslinien der hellen Abteilungen gegen das Auge. Ihre Lage ist auch hier nach der angegebenen Konstruktion zu ermitteln, deren Prinzip auch zur Ermittelung der Erscheinung bei Verwendung einer Lochblende oder eines zentralen kreisförmigen Schirmes vor der Röhrenöffnung dienlich ist.

(Eingegangen 10. August 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Kinetik von Elektronen und Ionen in Gasen.

Von J. Franck und G. Hertz.

(Schluß.)

Nach den Ergebnissen unserer Messungen der mittleren freien Weglänge war zu erwarten, daß an Stelle des totalen Energieverlustes eine Richtungsänderung beim Zusammenstoß anzunehmen ist, also eine Reflexion der Elektronen an den Gasmolekülen. Da ferner die Abweichung von der Townsendschen Theorie bei den Edelgasen und Metalldämpfen (Gasen ohne Elektronenaffinität) am größten ist, während die Erscheinungen in Gasen mit Elektronenaffinität durch die Theorie sehr viel besser wiedergegeben



werden, so war weiter zu vermuten, daß die Reflexion der Elektronen mit einem Energieverlust verbunden ist, welcher in Gasen ohne Elektronenaffinität sehr gering und in anderen Gasen um so größer ist, je größer die Elektronenaffinität des Gases ist. Diese Vermutung ist nun durch die im folgenden dargestellten Versuche durchaus bestätigt worden. Es hat sich gezeigt, daß Elektronen, deren Energie nicht zur Ionisierung eines Moleküls durch Stoß ausreicht, an den Molekülen von Edelgasen und Metalldämpfen ohne Energieverlust und an den Molekülen anderer Gase mit einem mit der Elektronenaffinität steigenden Energieverlust reflektiert werden, welcher bei Gasen mit sehr großer Elektronenaffinität (Chlor, Brom, Jod) so groß werden kann, daß völlig unelastische Zusammenstöße auftreten.

Der Nachweis, daß die Elektronen überhaupt von Gasmolekülen reflektiert werden, konnte erbracht werden, indem wir die Erfahrungen benutzten, die v. Baeyer über Reflexion langsamer Elektronen an Metallblechen gemacht hat. Wir mußten nur statt der von ihm benutzten Metallreflektoren das Gasvolumen selbst als Reflektor benutzen. Die Anordnung wird durch die Fig. 7 dargestellt.

Als Elektronenquelle diente wiederum ein glühender Platindraht D. Die von diesem ausgesandten Elektronen wurden durch ein zwischen dem Glühdraht und dem feinmaschigen Platindrahtnetz N_1 erzeugtes elektrisches Feld beschleunigt und traten durch das Drahtnetz in den Raum S ein, welcher allseitig durch feinmaschiges Messingdrahtnetz abgeschlossen war. Dieses Netz und das Netz N_1 waren leitend miteinander verbunden. Zur Messung der Zahl und Geschwindigkeitsverteilung der aus dem Drahtnetz N_1 austretenden Elektronen wurde die in einem Schliff um die Achse A drehbare Messingplatte P in die in der Figur gezeichnete Stellung gebracht. Es konnte dann mit Hilfe eines Galvanometers die Zahl der auf die Platte P kommenden Elektronen als Funktion eines zwischen P und N_1 angelegten verzögernden Feldes bestimmt werden.

Zur Untersuchung der reflektierten Elektronen diente der durch das Platindrahtnetz N_2 und die ringförmige Auffangeplatte R gebildete Kondensator. R wurde mit dem Galvanometer und N_2 mit dem Schutzkäfig verbunden. Die Platte P wurde dann zur Seite gedreht und auf das Potential der Drahtnetze gebracht, so daß der Raum S vollkommen feldfrei war. Das Messingrohr M, das 2 mm über die Ebene der Drahtnetze hinausragte und mit ihnen leitend verbunden war, schloß den Raum, in dem sich der Glühdraht befand, seitwärts vollkommen gegen den Meßkondensator ab, so daß keine Ionen oder Elektronen durch seitliche Diffusion auf die Platte R gelangen konnten. Die Geschwindigkeitsverteilung der aus dem Raume S auf die Platte R gelangenden Elektronen wurde aufgenommen, indem mit dem Galvanometer die Zahl der in der Zeiteinheit ankommenden Elektronen als Funktion eines zwischen N_2 und R angelegten verzögernden Feldes bestimmt wurde.

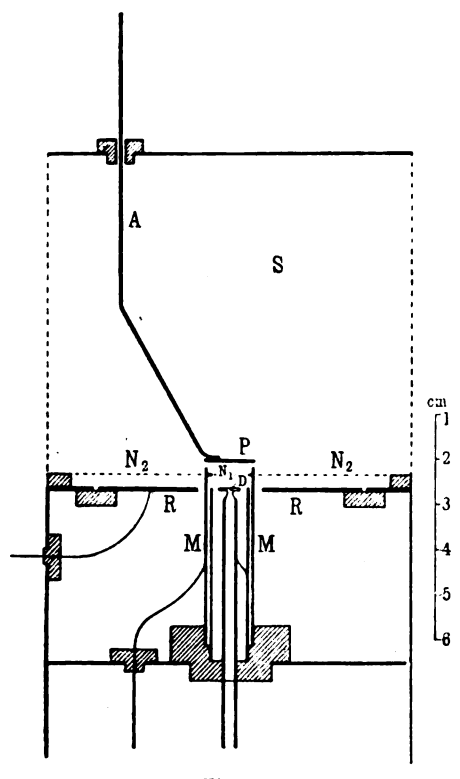


Fig. 7.

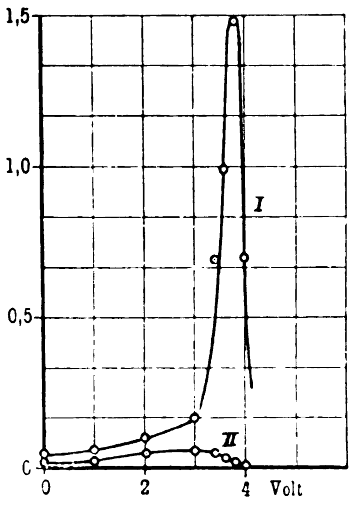


Fig. 8.

Kurve I der Fig. 8 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung der aus dem Drahtnetz N_1 austretenden Elektronen in Helium von 0,083 mm Druck bei einer beschleunigenden Spannung von 4 Volt.

Wenn auch dieses Verfahren der Geschwindigkeitsmessung nur ein angenähertes ist, da alle Strahlen, die nicht senkrecht durch das Drahtnetz hindurchtreten, auf diese Weise als langsamere Strahlen in die Messung eingehen als sie wirklich sind, so können wir doch mit Sicherheit aus der Kurve entnehmen, daß ein sehr großer Prozentsatz der Strahlen die der angelegten Spannung entsprechende Geschwindigkeit besitzt.

Die Kurve II gibt die Geschwindigkeitsverteilung der durch das Drahtnetz N_2 auf die Ringplatte R gelangenden Elektronen. Ein Vergleich der Kurven I und II erweckt den Anschein, als ob die reflektierten Elektronen mehr langsame Strahlen enthielten als die primären, jedoch ist zu bedenken, daß nach der Reflexion ein größerer Teil der Strahlen unter spitzen Winkeln durch das Drahtnetz hindurchtritt als bei den Primärstrahlen, so daß die Kurvenform stark verzerrt wird.

Das Verhältnis der Zahl der insgesamt auf die Ringplatte gelangenden Elektronen zu der Zahl der primär durch das Drahtnetz austretenden stimmt in guter Annäherung mit dem Wert überein, welcher nach der kinetischen Gastheorie zu erwarten ist, so daß schon aus diesen Versuchen mit großer Wahrscheinlichkeit zu schließen ist, daß alle Elektronen an den Heliumatomen reflektiert werden. Ob mit der Reflexion ein Energieverlust verbunden ist oder nicht, läßt sich nicht mit Sicherheit entscheiden, es läßt sich jedoch aus den Energieverteilungskurven als obere Grenze für einen etwa vorhandenen Energieverlust der Betrag von 1 Volt ableiten.

Die Ergebnisse unserer Messungen an Wasserstoff, von welchen Fig. 9 ein Beispiel gibt, ist, daß auch an Wasserstoffmolekülen die Elektronen reflektiert werden. Im Gegensatz zu dem Befunde bei Helium ist jedoch hier das Auftreten eines Energieverlustes festzustellen, wenn es auch noch nicht möglich ist, die Größe dieses Energieverlustes mit einiger Genauigkeit aus den Messungen zu entnehmen. In noch weit höherem Maße ist dies beim Sauerstoff der Fall, wo es uns indessen nur gelungen ist, qualitativ eine schwache Reflexion und offenbar großen Energieverlust festzustellen.

Die Messungen haben also ergeben, daß entsprechend unserer Vermutung die Elektronen an Gasmolekülen reflektiert werden, und zwar mit einem Energieverlust, welcher bei Edelgasen sehr klein oder Null und in anderen Gasen um

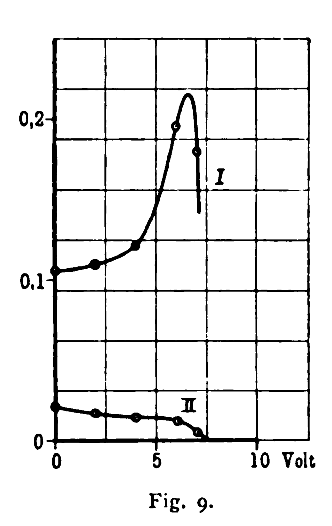


Fig. 9.

so größer ist, je größer die Elektronenaffinität des Gases ist, wenn auch die genaue Feststellung der Größe des Energieverlustes, welche als objektives Maß für die Elektronenaffinität gelten könnte, noch nicht gelungen ist.

Die Grundlagen der Townsendschen Theorie sind durch diese Versuche als falsch erwiesen worden. Nach der Townsendschen Theorie sollten alle Zusammenstöße zwischen einem Elektron und einem Gasmolekül mit vollständigem Energieverlust verbunden sein, so daß ein Elektron die zur Ionisierung eines Gasmoleküls nötige Energie stets auf einem einzigen freien Wege erwerben müßte. Werden nun aber die Elektronen an den Gasmolekülen reflektiert, ohne dabei ihre Energie ganz zu verlieren, so kann ein Elektron die zur Ionisierung nötige Energie auf einer Anzahl von freien Wegen ansammeln. Verlaufen insbesondere in Gasen ohne Elektronenaffinität die Zusammenstöße ganz ohne Energieverlust, so kann in einem solchen Gase ein Elektron die Ionisierungsenergie auf einer beliebig großen Anzahl von freien Wegen ansammeln, da dann die Energie des Elektrons nur noch von der durchlaufenen Spannung abhängt. Hierdurch wird nun auch das anomale Verhalten der Edelgase, insbesondere ihre geringe Durchschlagsfestigkeit und deren Unabhängigkeit vom Druck ohne weiteres verständlich. In reinen Edelgasen muß nämlich, unabhängig vom Druck, stets dann Stoßionisation eintreten, wenn die Elektrodenspannung die Ionisierungsspannung übersteigt.

Die Folgerung, daß die Elektronen ihre Energie auf einer ganzen Reihe von freien Wegen erwerben können und daß in Edelgasen die Energie eines Elektrons unabhängig vom Druck nur von der durchlaufenen Spannung abhängt, ist nun durch weitere Versuche geprüft

und bestätigt worden[1]). Der hierbei benutzte Apparat ist in Fig. 10 dargestellt. Die Platte *a*, welche im Zentrum einen als Elektronenquelle dienenden Glühdraht trägt, läßt sich parallel zu

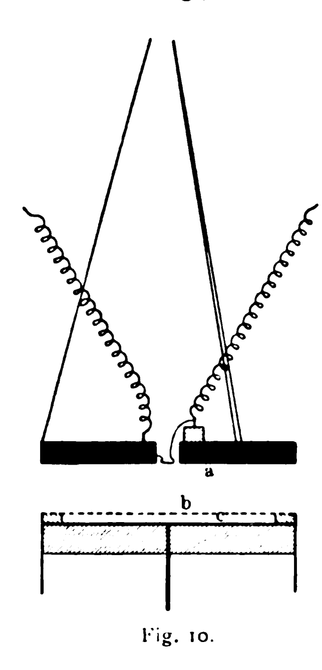


Fig. 10.

sich selbst verschieben. Ihr gegenüber ist ein aus dem Drahtnetz *b* und der mit Schutzring versehenen zum Galvanometer abgeleiteten Platte *c* bestehender Kondensator angebracht. Der Abstand *b*—*c* beträgt 2 mm. Die Platten *a* und *c* sind mit Platinfolie belegt und das Netz aus Platindraht gewirkt, so daß störende Doppel schichten vermieden wurden.

Zwischen der Platte *a* und dem Drahtnetz *b* wurden Spannungen angelegt, welche die vom Glühdraht kommenden Elektronen beschleunigten. Die Geschwindigkeitsverteilung der durch das Drahtnetz in den unteren Kondensator eintretenden Elektronen konnte dann wie früher gemessen werden, indem die Zahl der das Galvanometer erreichenden Elektronen als Funktion eines zwischen *b* und *c* geschalteten verzögernden Feldes bestimmt wurde. In der Aufnahme solcher Kurven bei verschiedenen Drucken, Abständen, beschleunigenden Spannungen bestehen die ausgeführten Messungen.

Die freien Weglängen der Elektronen in den drei hier untersuchten Gasen: Helium, Wasserstoff und Sauerstoff sind bekannt, da sie von Lenard und von uns direkt gemessen wurden. Es läßt sich daher für jeden Fall ausrechnen, welche Geschwindigkeitsverteilung der durch das Drahtnetz tretenden Elektronen man erwarten sollte. Nach Townsend müßten die Elektronen Geschwindigkeiten haben, die der Potentialdifferenz, die auf einer freien Weglänge durchlaufen wird, entsprechen, während nach unserer Vorstellung im Helium Geschwindigkeiten auftreten müssen, die angenähert unabhängig vom Druck sind, geradeso als ob die Elektronen die ganze Potentialdifferenz zwischen den Elektroden frei durchfallen hätten. Dies gilt natürlich nur, so lange die angelegte Spannung kleiner als die Ionisierungsspannung ist, da ein ionisierender Zusammenstoß zweifellos unelastisch sein muß. Im Wasserstoff, wo unsere Reflexionsversuche für einen merklichen Energieverlust beim Zusammenstoß sprechen, sollte die scheinbar frei durchlaufene Spannung schon vom Druck abhängig und kleiner als die Elektrodenspannung sein, und im Sauerstoff, der schon stark elektronegativen Charakter hat, wird dieser Einfluß noch viel stärker hervortreten.

Um von der Verzerrung der Energieverteilungskurven frei zu sein, welche die Folge von im Meßkondensator stattfindenden Zusammenstößen ist, untersuchten wir, wie die Kurven sich ändern, wenn bei gegebenem Druck und gegebener Potentialdifferenz der Weg, den die Elektronen vom Glühdraht zum Drahtnetz zurückzulegen haben, um ein Vielfaches der mittleren freien Weglänge vergrößert wurde.

Fig. 11 gibt die Energieverteilung in Helium von 1,3 mm Druck bei einer beschleunigenden Spannung von 18 Volt. Der Abstand des Glüh-

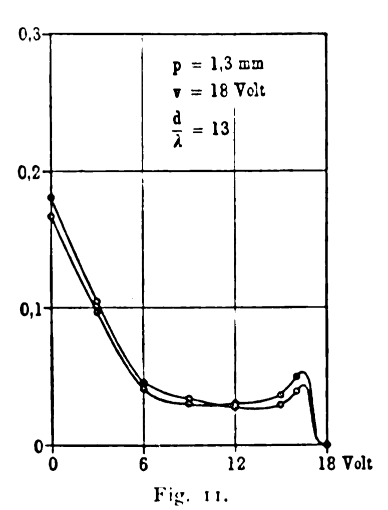


Fig. 11.

drahtes von der Platte betrug bei der einen Kurve 4 mm, bei der anderen 14 mm, so daß der Abstand bei der zweiten Kurve um das Dreizehnfache der mittleren freien Weglänge größer war. Trotzdem ergibt sich keine nennenswerte Änderung der Kurvenform. Ob der kleine

1) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 613, 1913.

vorhandene Unterschied auf einen kleinen Energieverlust schließen läßt, ist ungewiß. Wir möchten ihn eher auf den Einfluß geringer Verunreinigungen zurückführen. Jedenfalls sind die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Heliumatomen nahezu oder völlig elastisch. Dieses Gesetz kann natürlich nur gelten, solange die Energie der Elektronen kleiner ist als die Ionisierungsenergie, denn sobald diese erreicht ist, wird die Energie zur Ionisierung verbraucht und der Zusammenstoß wird völlig unelastisch. Auch dies ließ sich mit der benutzten Versuchsanordnung zeigen.

Fig. 12 gibt die Resultate einer Messung, bei der $V = 25$ Volt war, also 5 Volt größer als die Ionisierungsspannung. Man mußte er-

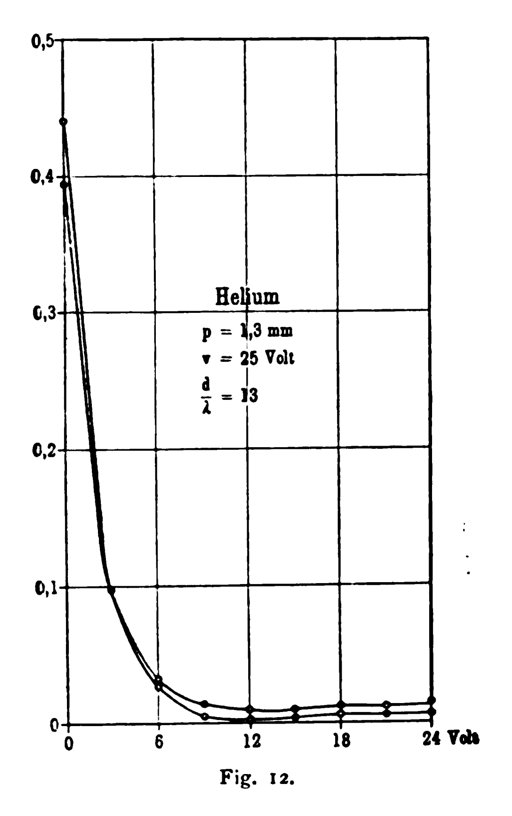


Fig. 12.

warten, daß die Elektronen, sobald sie 20 Volt durchlaufen haben, ionisieren und damit ihre Energie verlieren. Auf dem Wege zum Drahtnetz können sowohl diese Elektronen wie die sekundär durch Ionisation erzeugten noch 5 Volt durchlaufen, und in der Tat zeigen die Kurven, daß oberhalb von 5 bis 6 Volt keine Elektronen mehr vorhanden sind. Der langsame Anstieg der Kurven bei höheren Potentialen erklärt sich dadurch, daß bei den großen Gegenfeldern die erzeugten positiven Ionen zum Teil in den Meßkondensator hineingezogen wurden.

Die in Wasserstoff ausgeführten Messungen

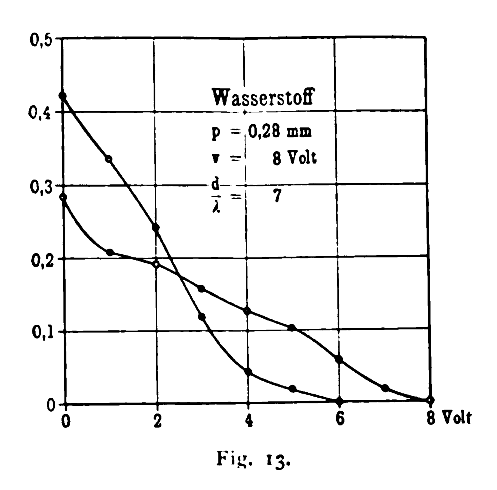


Fig. 13.

(Fig. 13) bestätigen durchaus die Erfahrungen der früheren Arbeit, daß die Elektronen bei der Reflexion an Wasserstoffmolekülen einen nicht sehr großen, aber deutlich nachweisbaren Energieverlust erleiden. Z. B. ergibt die Vergrößerung des Abstandes um das Achtfache der mittleren freien Weglänge eine Änderung der Maximalenergie um etwa 2 Volt. Leider kann man aus diesen Kurven noch immer nicht den Energieverlust für einen Zusammenstoß zahlenmäßig entnehmen. Da die ganz langsamen Elektronen beim Zusammenstoß zu Ionen umgebildet werden, gibt auch der Schwerpunkt der Kurven kein genaues Maß für den Energieverlust. Es zeigt sich jedoch, daß der Wasserstoff, der keine große Elektronenaffinität besitzt, auch keinen großen Energieverlust beim Zusammenstoß zwischen Elektron und Wasserstoffmolekül ergibt.

Bei Messungen in Sauerstoff (Fig. 14) kann man den Druck und die angelegte Spannung

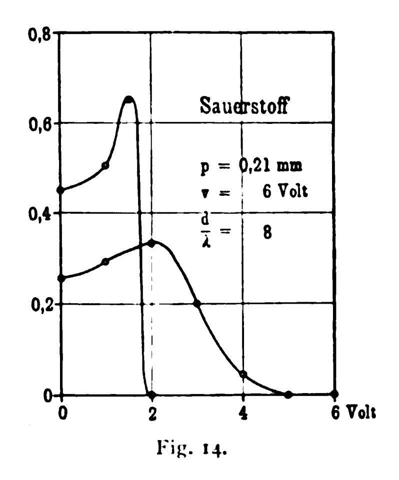


Fig. 14.

nicht mehr wesentlich variieren, da bei hohen Drucken nicht mehr zu galvanometrischen Messungen ausreichende Mengen von Elektronen



das Drahtnetz erreichen können. Sie werden zum großen Teil zu negativen Ionen umgebildet und gehen dadurch für die Messung verloren. Die Ionisierungsspannung, über die hinauszugehen keinen Zweck hat, da man sonst durch Ionisation einen zu großen Energieverlust vorgetäuscht bekommt, beträgt 9 Volt. Fig. 14 zeigt Kurven, bei denen $\frac{d}{\lambda} = 8$ ist, die also mit den entsprechenden Kurven von Fig. 13 von Wasserstoff und Fig. 11 von Helium vergleichbar sind. Es zeigt sich deutlich, daß der Energieverlust in Sauerstoff wesentlich größer ist als in Wasserstoff.

Wir wollen uns nun überlegen, wie nach diesen Erfahrungen eine Stromspannungskurve in reinen Edelgasen aussehen muß. Wir haben gesehen, daß, sobald die Elektrodenspannung die Ionisierungsspannung übersteigt, Elektronen, die von der einen Elektrode kommen, das erste Mal ionisieren können. Wir werden also beim Potential *0* einen gewissen Strom erhalten, der bald der Sättigung zustrebt, ein jäher Anstieg muß erfolgen, sobald die angelegte Spannung die Ionisationsspannung übertrifft. Ist die angelegte Spannung doppelt so groß wie die Ionisierungsspannung, so müssen wir einen weiteren Anstieg erwarten, da die Elektronen das zweite Mal zur Ionisation gelangen; ist sie dreimal so groß, dann kommt der dritte Anstieg usf. Es muß also in ganz reinen Gasen eine Treppenkurve (mit einem Stufenabstand, der der Ionisierungsspannung entspricht) ergeben. Geringe Verunreinigungen, wie sie sich in praxi nicht vermeiden lassen, bedingen eine Verwischung der Stufen und außerdem ein späteres Einsetzen der Stoßionisationen, da dann in die Serie der völlig elastischen Stöße mehr oder minder unelastische eingeschaltet werden. Berücksichtigt man dies, so werden die in Helium und Neon erhaltenen Resultate, welche durch die Kurven in Fig. 15 wiedergegeben werden, durchaus als eine Bestätigung der theoretischen Erwartung angesehen werden können[1]). Man sieht hier im Helium deutliche Knicke in der Kurve im Abstand der Ionisierungsspannung, d. h. von 20 Volt, und auch im Neon, das etwas schwerer rein zu erhalten ist, sind diese Knicke im Abstand von je 16 Volt noch deutlich sichtbar. Daß die Knicke reell sind, geht auch aus der Regelmäßigkeit hervor, mit der sie unter verschiedenen Bedingungen immer wieder auftreten.

Auf die Tatsache, daß in Gasen ohne Elektronenaffinität die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Gasmolekülen ohne meßbaren

1) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 929, 1913 oder diese Zeitschr. **14**, 1115. 1913.

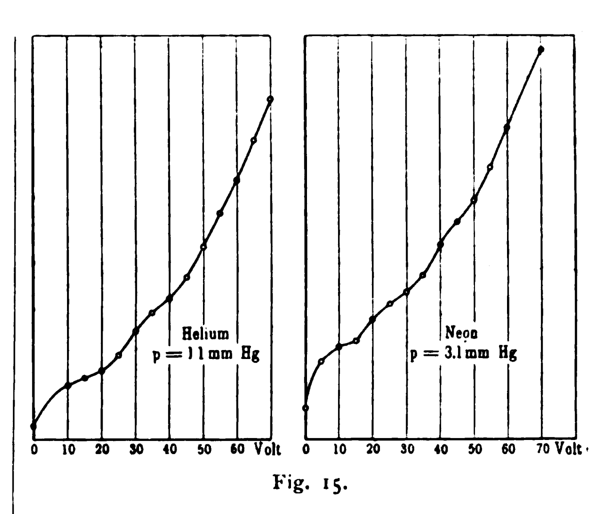


Fig. 15.

Energieverlust verlaufen, solange die von den Elektronen durchlaufene Spannung kleiner ist als die Ionisierungsspannung, während vollständig unelastische Stöße auftreten, sobald die Ionisierungsspannung überschritten ist, haben wir ein neues Verfahren zur Messung der Ionisierungsspannung aufgebaut, welches dem früher benutzten an Genauigkeit überlegen und außerdem auch auf Metalldämpfe anwendbar ist, bei welchen das alte Verfahren wegen der bei der Erwärmung auftretenden Störungen versagte[1]). Der hierzu benutzte Apparat ist in Fig. 16 dargestellt.

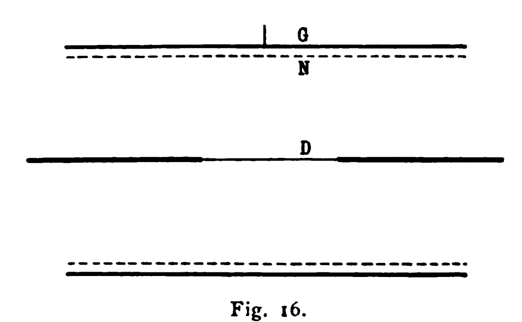


Fig. 16.

D ist ein Platindraht, dessen mittleres Stück dünner ist und durch einen elektrischen Strom zum Glühen gebracht werden kann. *N* ist ein feines Platindrahtnetz, welches den Draht *D* im Abstand von 4 cm zylindrisch umgibt, und *G* eine zylindrische Platinfolie, welche von *N* einen Abstand von 1 bis 2 mm hatte. *G* war durch ein Galvanometer mit der Erde verbunden.

Die Messungen wurden zunächst an Quecksilberdampf von etwa 1 mm Druck angestellt, und zwar wurde so verfahren, daß bei konstanter verzögernder Spannung zwischen *N* und

1) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 457, 1914.

G der am Galvanometer gemessene Strom in seiner Abhängigkeit von der zwischen *D* und *N* angelegten beschleunigenden Spannung gemessen wurde. Es ist folgender Verlauf zu erwarten: Solange die beschleunigende Spannung kleiner ist als die verzögernde, ist der Strom Null. Dann wird er ansteigen, bis die beschleunigende Spannung gleich der Ionisierungsspannung geworden ist. In diesem Augenblick werden die Elektronen in der Nähe des Drahtnetzes unelastische Stöße erleiden und dabei ionisieren. Da sie selbst und die bei der Ionisation befreiten Elektronen bis zum Durchtritt durch das Drahtnetz nur noch eine sehr geringe Spannung durchlaufen, so treten sie ohne merkliche Geschwindigkeit durch das Drahtnetz hindurch und sind nicht imstande, gegen das verzögernde Feld anzulaufen. Der Galvanometerstrom wird daher auf Null abfallen, sobald die beschleunigende Spannung größer geworden ist, als die Ionisierungsspannung. Steigert man die beschleunigende Spannung weiter, so rückt die Stelle, an der die Elektronen unelastische Stöße erleiden, vom Drahtnetz nach innen. Die nach dem unelastischen Zusammenstoß vorhandenen Elektronen durchlaufen also auf dem Wege zum Drahtnetz eine Spannung, welche gleich der Differenz der beschleunigenden Spannung und der Ionisierungsspannung ist. Sobald diese Differenz größer geworden ist, als die konstante verzögernde Spannung zwischen *N* und *G*, können wieder Elektronen gegen das verzögernde Feld anlaufen und der Galvanometerstrom steigt wieder an. Da die Zahl der Elektronen durch die Ionisation vergrößert ist, steigt er noch höher an als das erste Mal. Sobald jedoch die beschleunigende Spannung gleich der doppelten Ionisierungsspannung geworden ist, erleiden die Elektronen in der Nähe des Drahtnetzes zum zweitenmal unelastische Zusammenstöße. Da sie hierbei ihre Energie ganz verlieren, die neugebildeten Elektronen ebenfalls keine merkliche Geschwindigkeit besitzen, so können keine Elektronen mehr gegen das verzögernde Feld anlaufen. Sobald daher die beschleunigende Spannung größer wird als das Doppelte der Ionisierungsspannung, sinkt der Galvanometerstrom wieder auf Null. Da sich dieselbe Erscheinung jedesmal wiederholt, wenn die beschleunigende Spannung gleich einem ganzen Vielfachen der Ionisierungsspannung wird, so haben wir eine Kurve zu erwarten, die Maxima von wachsender Größe besitzt, deren Abstand stets gleich der Ionisierungsspannung ist. Die Gestalt der Kurven wird in Wirklichkeit noch dadurch beeinflußt, daß zwischen den Enden des als Elektronenquelle dienenden Glühdrahtes eine Spannung von 1,3 Volt bestand, sowie dadurch, daß namentlich bei starken, für die Elektronen verzögernden Feldern positive Ionen in den Raum zwischen *N* und *G* hineingelangen. Der erste dieser beiden Einflüsse wird bewirken, daß der Abfall nach dem Überschreiten eines ganzen Vielfachen der Ionisierungsspannung nicht ganz plötzlich erfolgt, sondern sich über eine Strecke von etwa 1,3 Volt erstreckt. Der zweite, daß namentlich bei größeren verzögernden Spannungen die Maxima langsamer anwachsen, als sie eigentlich müßten. Die in den Kurven der Fig. 17 bis 19 dargestellten Ergebnisse unserer Messungen zeigen, daß unsere Erwartungen sich durchaus bestätigt haben. Die Maxima sind außerordentlich scharf ausgeprägt und geben daher die Möglichkeit einer sehr genauen Messung der Ionisierungsspannung. Die Werte für den Abstand zweier benachbarter Maxima liegen sämtlich zwischen 4,8 und 5,0 Volt, so daß wir

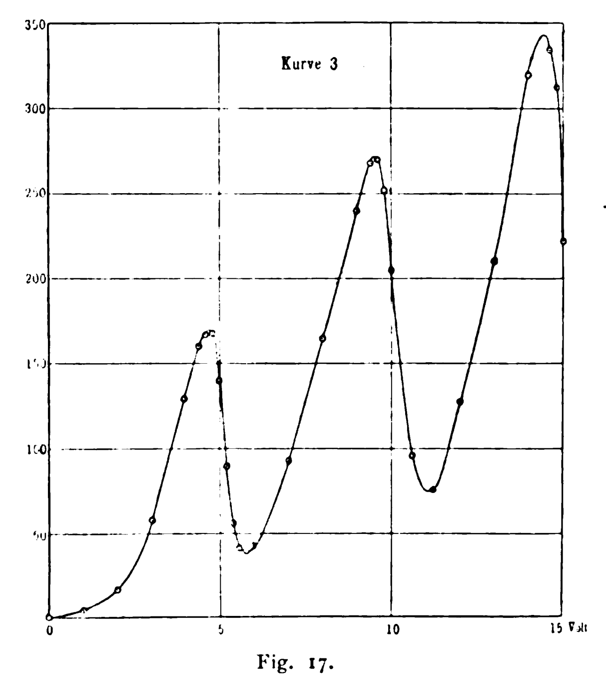


Fig. 17.

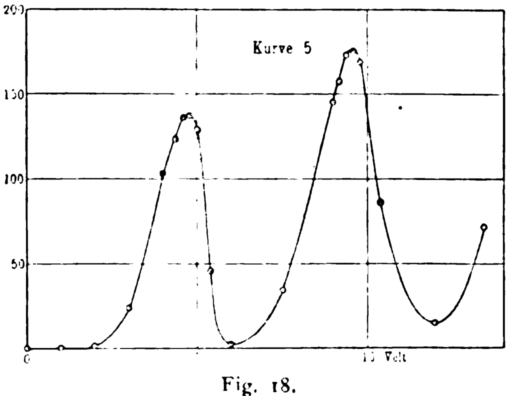


Fig. 18.

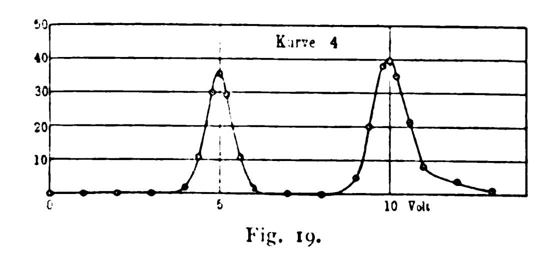


Fig. 19.

4,9 Volt als den richtigen Wert für die Ionisierungsspannung des Quecksilberdampfes ansehen können.

Um an einem Beispiel die neue Methode zur Messung der Ionisierungsspannung mit der alten zu vergleichen, haben wir auch in Helium Messungen angestellt. Hier liegen die Verhältnisse jedoch bei weitem nicht so günstig wie bei dem Quecksilberdampf, denn dieser hat eine niedrigere Ionisierungsspannung als alle als Verunreinigung in Frage kommenden Gase, während Helium im Gegensatz dazu die größte Ionisierungsspannung (20,5 Volt) hat. Hier werden daher alle Beimengungen bei kleineren Geschwindigkeiten der stoßenden Elektronen ionisiert, also völlig unelastische Stöße bedingen und daher eine Verwischung der Maxima hervorrufen. Trotzdem läßt sich aus solchen, in Helium gemessenen Kurven die Ionisierungsspannung immer noch mit beträchtlicher Genauigkeit entnehmen. Fig. 20 zeigt eine in Helium gemessene Kurve, welche für die Ionisierungsspannung den Wert von 21 Volt ergibt, in

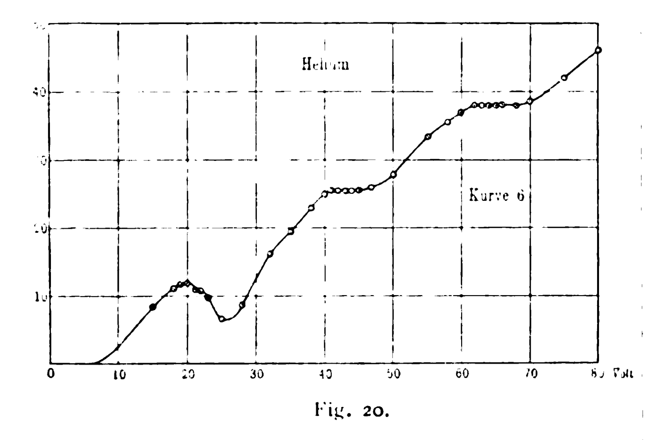


Fig. 20.

guter Übereinstimmung mit unseren früheren Messungen, als deren Ergebnis wir 20,5 Volt angegeben haben.

Da der nach der neuen Methode gemessene Wert der Ionisierungsspannung des Quecksilberdampfes als der am weitaus genauesten bekannte Wert einer Ionisierungsspannung angesehen werden kann, so ist er besonders geeignet zur Prüfung der theoretischen Betrachtungen, welche an den Begriff der Ionisierungsspannung angeknüpft worden sind, um so mehr, als wir durch die Woodschen Versuche über die Resonanzstrahlung wissen, daß in jedem Quecksilberatom ein schwingungsfähiges Elektron der Frequenz der Quecksilberdampfresonanzstrahlung ($\lambda = 253{,}6\,\mu\mu$) vorhanden ist. Wir kennen also hier sowohl die Ionisierungsspannung als auch die Frequenz des im Atom befindlichen Elektrons mit großer Genauigkeit und können daher feststellen, ob, wie zuerst von Stark ausgesprochen, tatsächlich die Ionisierungsarbeit, der kleinste auf das schwingungsfähige Elektron zu übertragene Energiebetrag, gleich dem von der Quantentheorie geforderten Wert $h\nu$ ist.

Setzen wir die Frequenz als bekannt voraus, so können wir rückwärts berechnen, welche Ionisierungsspannung man erwarten sollte, wenn man als Wert für das Elementarquantum den von Millikan bestimmten einsetzt und für h Werte zwischen den Grenzen annimmt, die nach den neuen Untersuchungen von Warburg noch zulässig sind. Es ergibt sich, daß in Übereinstimmung mit der Quantentheorie alle Werte zwischen 4,86 und 4,94 Volt sind. Unser Wert 4,9 Volt fällt also mitten hinein. Bei dieser guten Übereinstimmung lag es nun nahe anzunehmen, daß es sich hier wirklich um die Übertragung eines Energiequants an das Elektron handelt, das die Quecksilberresonanzlinie emittiert und absorbiert. Ist diese Auffassung richtig, dann muß es als wahrscheinlich gelten, daß man beim Zusammenstoß von 4,9 Volt-Strahlen mit Quecksilberatomen auch die Emission dieser Linie beobachten könnte. In der Tat ließ sich die Emision der Linie $\lambda = 253{,}6\,\mu\mu$ deutlich nachweisen. Bei Ausführung der Versuche[1]) konnten wir von der Erfahrung Gebrauch machen, daß im dichten Quecksilberdampf die Elektronen überhaupt keine größere Geschwindigkeit erreichen als 4,9 Volt, so lange die auf eine freie Weglänge kommende Potentialdifferenz klein ist gegen 4,9 Volt. Die Anordnung bestand darin, daß ein als Elektronenquelle dienender Glühdraht, dem eine andere Elektrode gegenüberstand, in ein mit Quecksilberdampf gefülltes Quarzrohr eingeschlossen wurde. Jede angelegte Spannung, die größer als 4,9 Volt ist, mußte dann das Auftreten der Lichtemission ergeben. Wir photographierten die Emission mit einem Quarzspektrographen. Die Spannung wurde zwischen den Grenzen 2 Volt und 20 Volt variiert. Jede Exposition, bei der die Spannung oberhalb 5 Volt war, ließ die Emission der Einzellinie $\lambda = 253{,}6\,\mu\mu$ deutlich erkennen.

1) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. 512. 1914.

Fig. 21 zeigt übereinandergedruckt zwei Spektren. Das obere zeigt ein gewöhnliches Quecksilberspektrum, das untere die durch die Elektronenstöße angeregte Emission der Linie 253,6 $\mu\mu$. Das ferner auf den Platten vorhandene kontinuierliche Spektrum im sichtbaren Gebiete ist auf die Lichtemission des glühenden Drahtes zurückzuführen. Die Anwendbarkeit der Quantentheorie auf die Ionisationsprozesse scheint damit wesentlich gestützt zu sein. Man kann daher umgekehrt Bestimmungen der Ionisierungspotentiale zu Präzisionsmessungen der Größe h ausbauen, wie Warburg es neulich vorgeschlagen hat. Wir halten es für durchaus möglich, die Genauigkeit der Bestimmung noch um das Zehnfache des bisher Erreichten zu übertreffen.

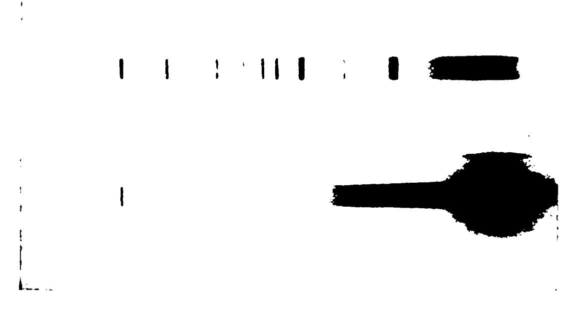


Fig. 21.

Man könnte nun vermuten, daß bei der Energieübertragung der 4,9 Volt-Strahlen an die Quecksilberatome diese überhaupt nicht ionisiert werden, sondern daß nur die Lichtemission angeregt wird. Wir glaubten diese Auffassung damals ablehnen zu dürfen, da aus dem Verhalten der Entladung im Quecksilberdampf zu schließen ist, daß der erste unelastische Stoß, den ein Elektron im Quecksilberdampf erfährt, auch ein ionisierender Stoß sein müsse. Immerhin war es wünschenswert, auch Messungen der Ionisierungsspannung nach unserem alten Verfahren vorzunehmen. Zur Ausführung der betreffenden Messungen sind wir nicht mehr gekommen; jedoch ist diese Lücke im Beweis ausgefüllt durch eine Arbeit von Newman[1]), der nach unserem alten Verfahren für die Ionisierungsspannung des Quecksilbers den Wert von 5 Volt gefunden hat. Es ist auch nicht angängig, wie es neuerdings Bohr versucht hat, mit der Annahme auszukommen, daß im Helium die 20,5 Volt-Strahlen und im Quecksilber die 4,9 Volt-Strahlen erst sekundär Ionisation hervorriefen, indem das entstehende kurzwellige Licht an den Elektroden oder Verunreinigungen im Gase einen Photoeffekt erzeugt, denn die scharfen Maxima beweisen, daß die neuen Elektronen an den Stellen entstehen, an denen der unelastische Stoß stattfindet. Es sei auch noch auf einige unterdes erschienene Fortsetzungen und Ergänzungen unserer Arbeiten hingewiesen. In einer bei Lenard ausgeführten Arbeit hat Åkeson[1]) ebenfalls quantenhafte Energieübertragung der translatorischen Energie der Elektronen an Gasmoleküle festgestellt. Zur Berechnung von Eigenfrequenzen und damit zum sicheren Nachweis der Gültigkeit des quantentheoretischen Ansatzes genügt die Genauigkeit der Untersuchung nicht. Wichtig ist jedoch, daß Åkeson, der mit Strahlen arbeitete, die eine größere Geschwindigkeit hatten als die zur Ionisation benötigte, fand, daß auch diese schnellen Strahlen im Quecksilberdampf einen Energieverlust von etwa 5 Volt erleiden. Man darf daraus den Schluß ziehen, daß von dem Resonanzelektron im Quecksilberatom weder mehr noch weniger Energie als ein Quant aufgenommen wird. Zu besprechen ist ferner eine Arbeit von McLenann und Henderson. Diese Autoren haben nachgewiesen, daß auch im Zinkdampf und im Kadmiumdampf die Emission von einzelnen Linien durch den Stoß langsamer Elektronen angeregt wird. Im Zinkdampf ist es die Linie 307,6 $\mu\mu$, im Magnesiumdampf die Linie 326,0 $\mu\mu$. Beide sind auch Resonanzlinien im Woodschen Sinne. Die Energieübertragung der stoßenden Elektronen ist von den Verfassern nicht bestimmt worden.

Unter Zugrundelegung der Quantentheorie wird für Zink die Ionisierungsspannung 3,74 und für Magnesium 3,96 Volt berechnet. Auch beim Helium scheint eine der Energie des 20,5 Volt-Strahles entsprechende Linienemission vorzuliegen. Man würde die Emission der Linie 600 erwarten. Nach einer kurzen Publikation von Lyman ist das gerade die ultraviolette Grenze der Emission des Heliums. Es scheint somit sehr wahrscheinlich, daß bei allen Ionisationsprozessen eine aus der übertragenen Energie nach der Quantentheorie zu berechnende Lichtemission stattfindet. Weitere Versuche, die besonders bei Metalldämpfen aussichtsreich erscheinen, sollen sobald als möglich ausgeführt werden. Durch diese Versuche ist natürlich nichts darüber ausgesagt, wie aus der Emission solcher Einzellinien die Emission der ganzen Spektra entsteht, ebensowenig darüber, ob die Einzellinien selbst erst bei der Wiedervereinigung oder beim Ionisationsprozeß entstehen. Wegen dieser Fragen sei auf die wichtigen Arbeiten von Gehrcke, Seeliger, Rau, Holm, Stark

1) Newman, Phil. Mag. (6) 28, 753, 1914.

1) Åkeson, Sitzber. Heidelb. Akad. math. nat. Kl. Abt. A. 1914, 21. Abh.



u. a. verwiesen, die z. T. schon vor unseren Versuchen ausgeführt sind, die jedoch trotz wichtiger Resultate, die gewonnen sind, noch nicht zu einer einheitlichen Auffassung geführt haben. Als sicher darf man es jedoch wohl annehmen, daß in der Entladungsbahn ein Gas nur dann leuchtet, wenn es ionisiert wird, und wir möchten im folgenden zum Schluß kurz zeigen, wie auf Grund dieser Annahme und der von uns gemachten Erfahrungen über die Stoßionisation es sich erklärt, daß bei elektrischer Anregung von Gasgemischen die Spektralemission einer Komponente äußerst stark überwiegen und diejenige der anderen Komponente ganz unterdrücken kann. Ein Beispiel dafür ist die bekannte Tatsache, daß die Spektra der Edelgase durch Zusatz kleiner Mengen Luft ganz unterdrückt werden, so daß man sie nur durch die bei Schwingungen auftretenden hohen Momentanpotentiale nachweisen kann. Im Gemische Helium—Argon sind Spuren Argon nachweisbar und lassen das Heliumspektrum stark zurücktreten. Im Gemische Helium—Quecksilber leuchten beide Spektra dann fast gleich intensiv, wenn auf etwa 3 mm Helium $^1/_{10000}$ mm Quecksilberdampf kommt. Ebenso treten in einer Stickstoff- oder Edelgasatmosphäre die Spektra der Alkalimetalle bei so geringen Dampfdrucken hervor, daß Gehlhoff Spektralaufnahmen dieser Dämpfe bei relativ tiefen Temperaturen in solchen Gemischen machen konnte, ohne durch die Spektra der Gasatmosphäre selbst gestört zu werden. Dabei entspricht die Entladungsform durchaus nicht dem niedrigen Drucke des Metalldampfes, sondern viel eher dem Drucke der nichtleuchtenden Gasatmosphäre. Sieht man diese und andere in der Literatur beschriebenen Fälle durch, so ergibt sich, daß in dem Gemisch immer das Gas mit der kleineren Ionisierungsspannung stark leuchtet und das Gas mit der größeren Ionisierungsspannung nicht oder nur schwach leuchtet. Daß die Stoßionisationstheorie auch quantitativ diese Erscheinung zu berechnen gestattet, mag aus einer kürzlich publizierten Arbeit[1]) hervorgehen. Wir wollen, um das Prinzip zu zeigen, nur qualitativ den Fall des Gemisches Helium—Quecksilber durchdiskutieren. Beide Atomsorten reflektieren unterhalb der Ionisierungsspannung die Elektronen völlig elastisch, so daß zwischen zwei Zusammenstößen die Geschwindigkeit der Elektronen unter Einwirkung des elektrischen Feldes auch im Gemisch der Gase dauernd wachsen kann. Das gilt aber nur bis zu dem Moment, in dem die Geschwindigkeit eines 4,9 Volt-Strahles erreicht wird; denn von diesem Augenblick an tritt bei einem Zusammenstoß mit einem Quecksilberatom Ionisation und damit ein unelastischer Stoß auf. Wird kein Quecksilberatom getroffen, dann wächst die Geschwindigkeit des Elektrons ungestört weiter, bis bei 20,5 Volt die Ionisierungsspannung des Heliums erreicht ist. Wird vor Erreichung dieser Energie ein Quecksilberatom getroffen und ionisiert, dann wird die Entladung natürlich dadurch nicht abgeschwächt, daß das Elektron anstatt von einem Heliumatom von einem Quecksilberatom abgegeben wird. Sie wird im Gegenteil verstärkt werden, da die Elektronen ja schon bei kleineren Geschwindigkeiten zur Ionisation gelangen können und daher häufiger zu ionisieren vermögen. Für die Lichtemission des Heliums dagegen, die eine Ionisation der Heliumatome und somit das Auftreten von 20,5 Volt-Strahlen zur Voraussetzung hat, wirkt der die Quecksilberatome ionisierende Zusammenstoß geradeso, als ob ein Zusammenstoß mit einem stark elektronegativen Molekül erfolgt sei; denn er schaltet in die Reihe der elastischen Zusammenstöße unelastische und hindert somit das Elektron an der Energieansammlung. Durch die Anwesenheit der Heliumatome, und zwar proportional einer Exponentialfunktion des Druckes dieses Gases wächst andererseits die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron auf seinem Wege bei der Hin- und Herreflexion ein Quecksilberatom trifft. Man kann die Wahrscheinlichkeit dafür ausrechnen, daß das Elektron auf seinem verschlungenen Wege vom 4,9 Volt-Strahl bis zum 20,5 Volt-Strahl mit einem Quecksilberatom zusammentrifft. Wir haben in der erwähnten Arbeit diese Rechnung durchgeführt und die Wahrscheinlichkeit erweist sich als so groß, daß der außerordentlich große Einfluß ganz geringer Spuren von Quecksilberdampf im Helium völlig erklärt wird. Das Gas, das die höhere Ionisierungsspannung hat, wirkt also in der Hauptsache dadurch, daß es den Weg, den das Elektron von einer Elektrode bis zur anderen zurückzulegen hat, wesentlich kompliziert und dadurch die Wahrscheinlichkeit der Zusammenstöße mit den Gasmolekülen des Gases mit der niedrigeren Ionisierungsspannung ungeheuer vergrößert. Insofern ähnelt seine Wirkung derjenigen eines starken Magnetfeldes, dessen Kraftlinien von einer Elektrode zur anderen verlaufen. Durch ein solches Magnetfeld, das die Elektronenbahnen zu Spiralen aufwickelt, werden ebenfalls, wie Strutt gezeigt hat, Entladungsbedingungen geschaffen, die viel höheren Drucken entsprechen als dem, der wirklich vorhanden ist. In gleicher Weise erklärt sich das Gehlhoffsche Resultat, daß die Alkalimetalle in einer Edelgasatmosphäre auch in geringen Verdünnungen sehr stark leuchten. Sie haben

1) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 213, 1916.

eben eine viel kleinere Ionisierungsspannung als das Gas. Wir gedenken diese Erscheinung bei der Messung der Ionisierungsspannung von Metalldämpfen zu verwerten. Benutzt man nämlich zu dieser Messung ein Gemisch des Metalldampfes mit Helium, so erreicht man damit dasselbe, als ob man bei viel höherer Temperatur und entsprechend höherem Dampfdruck des Metalls arbeitete.

Berlin, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 8. Juli 1916.)

BESPRECHUNGEN.

Schlomann-Oldenbourg, Illustr. Technische Wörterbücher. Band 12. Wassertechnik, Lufttechnik, Kältetechnik. In sechs Sprachen: Deutsch, Englisch, Französisch, Russisch, Italienisch, Spanisch. kl. 8⁰. XXIX. und 1959 S. m. 2075 Abbild. und Formeln. München und Berlin, R. Oldenbourg 1915. Geb. M. 25.—.

Wenn auch der Wortschatz der I. T. W. in erster Linie technische Gebiete umfaßt, so sind doch infolge der nahen Beziehungen zwischen Technik und Physik auch die meisten Zweige dieser letzteren Wissenschaft mit einbezogen; und da es außer diesem großzügigen Werk wohl kaum eine Sammlung der Fachausdrücke von annähernd ähnlicher Vollständigkeit und Gründlichkeit gibt, so dürfte es auch für den Physiker die ergiebigste Sammlung des Wortschatzes seiner Fachsprache sein. Das Werk umfaßt die 6 Sprachen: Deutsch, Englisch, Französisch, Russisch, Italienisch, Spanisch. Die Ausdrücke sind in dem Hauptteil jeden Bandes nicht alphabetisch, sondern systematisch nach Begriffen geordnet und soweit angängig durch schematische Skizzen oder durch Formelzeichen erläutert. Ein besonderes alphabetisches Register ermöglicht ein rasches Auffinden eines bestimmten Wortes.

Von dem vorliegenden 12. Band, der die Gebiete, Wassertechnik, Lufttechnik und Kältetechnik umfaßt, kommen für den Physiker hauptsächlich die ziemlich eingehend behandelten Abschnitte über die theoretischen Grundlagen dieser Gebiete sowie über Meßinstrumente in Betracht: Hydrostatik, Hydrodynamik, Hydraulik, Gewässerkunde (enthält viele meteorologische Begriffe), Wassermessungslehre (enthält neben vielen theoretischen Begriffen insbesondere Meßinstrumente), Wellen und Gezeiten; Mechanik der Luft (enthält u. a. auch viele Begriffe der Wärmemechanik, ferner zahlreiche Instrumente insbesondere für meteorologische Zwecke); Wärmelehre, Arten der Kälteerzeugung. Aber auch die übrigen mehr technischen Abschnitte bringen noch vieles, was besonders für den Experimentalphysiker wertvoll sein wird. Die Bearbeitung des Materials ist sowohl in technisch-physikalischer, als auch in sprachlicher Hinsicht vorzüglich, dafür bürgt schon die große Zahl hervorragender Fachleute, welche als Mitarbeiter bei der Herausgabe beteiligt sind. Bei dem vorliegenden 12. Bande war die Bearbeitung der fremden Sprachen durch den Ausbruch des Krieges gestört worden, so daß hier einige Lücken geblieben sind; doch sind auch diese so selten, daß sie kaum als störend empfunden werden. Durch die systematische Anordnung des Stoffes gewinnen die I. T. W. einen lehrbuchartigen Charakter; sie sind nicht allein ein Nachschlagewerk bei Benützung fremdsprachlicher Literatur, sondern sie unterrichten auch bis zu einem gewissen Maße über die behandelten Gebiete. So können sie z. B. von Nutzen sein, wenn man sich über Meßeinrichtungen für bestimmte Zwecke orientieren will. Auf jeden Fall gehören sie zu den hervorragendsten Werken deutschen Fleißes, und es wäre zu wünschen, daß sie möglichst weite Verbreitung finden. Betz.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Geh. Rat Prof. Dr. **F. Richarz**, Hauptmann d. L., bisher aufsichtführender Offizier am Lazarett, jetzt auch Leiter der Lehrwerkstätte für Kriegsindustrie im Physikalischen Institut der Universität Marburg.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Kolozsvar (Ungarn, Klausenburg) Dr. Rudolf Ortvay zum a.o. Professor der Mathematik ebenda, an der vlamischen Universität Gent Dr. A. van der Berghe (bisher Repetitor an der Universität Gent) zum a.o. Professor für allgemeine Chemie, Dr. J. J. Ph. Valeton aus Arnheim zum a.o. Professor der allgemeinen und der physikalischen Chemie, Dr. M. G. J. Minnaert in Gent zum Dozenten für Physik.

Berufen: Zu Dozenten an der Technischen Hochschule Warschau Kasimir Drewnowski für Theorie der Elektrotechnik, Anton Ponikowski für Vermessungslehre und J. Zawadzki für physikalische Chemie.

Vom Lehramt zurück: Der Leiter der chemischen Abteilung an der Universität von Maine in Orono Dr. Ralph H. Mc Kee (zwecks Übernahme der Leitung des Versuchslaboratoriums der Tennessee Copper Company).

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der K. Ungar. Josef-Technischen Hochschule in Budapest Dr. Alajos Schuller.

Gestorben: Der Direktor der astronomischen Nikolai-Haupt-Sternwarte in Pulkowo bei St. Petersburg Mitglied der Kais. Russ. Akademie der Wissenschaften Professor Oskar Backlund, der Privatdozent der Chemie an der Universität Marburg Dr. Friedrich Flade (im Kampfe gefallen).

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. | 1. Oktober 1916. Redaktionsschluß für No. 20 am 1. Oktober 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Frage der zeitlichen Veränderung der Oberflächenspannung.

Von Agnes Pockels.

Wenn die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit anomal, d. i. kleiner als diejenige einer frisch erzeugten Oberfläche ist, so zeigt sich dies dadurch, daß beim Herausziehen eines benetzten Körpers (Papierstreifen, Holzstab, geglühte Blechplatte) die Oberflächenschicht nach demselben hin-, beim Wiedereintauchen dagegen von ihm fortströmt. Auf normaler Oberfläche findet eine schwächere Strömung in umgekehrtem Sinne statt[1]).

Eine Abnahme der Oberflächenspannung und infolgedessen eine anomale Oberflächenströmung kann nun bei Wasser auch durch Adsorption von Dämpfen an der Flüssigkeitsoberfläche bewirkt werden, wie folgender einfacher Versuch zeigt. Ein gut gereinigtes Glas mit eben geschliffenem Rande wird, nachdem es eine Zeitlang unter der Wasserleitung übergeflossen, soweit ausgegossen, daß die Oberfläche etwa $1^1/_2$ cm unter dem Rande steht. Dieselbe ist dann als rein zu betrachten. Dann wird ein geglühter, an einem Drahte befestigter Blechstreifen vertikal in das Wasser versenkt und, nachdem die Wasseroberfläche mit Lykopodium oder Talk bestäubt ist, das Glas einige Minuten lang mit einem mit Benzol getränkten Stück Tuch und dieses noch mit einer Glasplatte fest zugedeckt. Hierbei ist darauf zu achten, daß das Wasser nicht kälter ist als das Benzol, damit sich letzteres nicht in Form von Tröpfchen auf dem Wasser niederschlägt. Das Tuch hat in der Mitte eine kleine Öffnung zum Hindurchführen des Drahtes, der unterhalb der Glasplatte horizontal umgelegt wird.

Wird nun nach Entfernung der Glasplatte der Blechstreifen mittels des Drahtes durch die Wasseroberfläche herausgezogen, so bewegt sich beim Heben der schwimmende Staub nach ihm hin, beim Senken von ihm fort. Die Oberflächenströmung ist unter gesättigtem Benzoldampf anomal, weil die an dem herausgehobenen Körper frisch gebildeten Oberflächenstücke im ersten Augenblick eine höhere Spannung haben als die gealterte Oberflächenschicht, an welcher bereits Dampf adsorbiert ist, und letztere sich daher über die neuen Teile ausbreitet, indem sie sich an das Blech anhängt. Entfernt man hingegen auch das Tuch und bläst den Benzoldampf durch einen Luftstrom fort, so geht die Strömung wieder in die normale über.

Hieraus folgt offenbar, daß die Luft auf die Oberflächenspannung des Wassers nicht etwa ähnlich wirkt wie Benzoldampf, denn sonst dürfte es an der Grenzfläche Wasser—Luft überhaupt keine normale Oberflächenströmung geben, was doch selbst bei sehr alten Oberflächen der Fall ist, wofern sie nur vor Verunreinigung geschützt werden. Würde die Spannung der Wasseroberfläche durch Gasadsorption nur um 1 Proz. erniedrigt, so würde dies schon eine deutliche Strömung nach dem herausgezogenen benetzten Körper hin zur Folge haben.

Die Luft wird also von der Wasseroberfläche anscheinend nicht merklich adsorbiert. Wenn ihre Gegenwart auf die Oberflächenspannung des Wassers überhaupt einen meßbaren Einfluß ausübt, so kann dies nur ein solcher sein, der nicht, wie die Adsorption von Gasen, mit der Zeit zunimmt, sondern bereits im Augenblick der Entstehung eines neuen Flächenstückes ebenso groß ist wie nach längerer Berührung desselben mit der Luft.

Die von Stöckle[1]) und G. Meyer[2]) an Quecksilber gefundene Verkleinerung der Oberflächenspannung durch Gasadsorption darf daher nicht ohne weiteres auch bei Wasser vorausgesetzt werden; weisen doch auch die Veränderungen

1) A. Pockels, Ann. d. Phys. 8, 854, 1902.

1) Wied. Ann. 66, 499, 1898.
2) Wied. Ann. 66, 523, 1898.

des Randwinkels von Wassertropfen mit der Zeit auf eine besonders starke Gasadsorption an der Oberfläche von Metallen im Gegensatz zu anderen Stoffen hin[1]). Die Angaben anderer Beobachter über das Verhalten der Wasseroberfläche beim Altern unter Luft sind noch widersprechend; so hat G. Meyer[2]) sogar eine Zunahme der Spannung mit der Zeit gefunden. Der Hinweis auf die Tatsache des Fehlens der anomalen Oberflächenströmung bei übrigens reinen Oberflächen dürfte daher vielleicht geeignet sein, Licht in die Frage zu bringen.

Dieselbe Tatsache möchte ich auch der Beachtung empfehlen, wo es sich um Schlußfolgerungen betreffs des Einflusses gelöster Salze auf die Oberflächenspannung des Wassers handelt.

Nach der Theorie von Gibbs müßte, gleichviel ob ein Salz an sich die Kohäsion erhöht oder vermindert, in allen Fällen die Oberflächenschicht der Lösung nach Herstellung des Gleichgewichts eine kleinere Oberflächenspannung haben, als eine frisch aus dem Innern gebildete Oberfläche. Wäre diese Verkleinerung von merklicher Größe, so müßte sie sich durch anomale Oberflächenströmung verraten. Wenn aber das gelöste Salz keine organischen Staubteilchen oder sonstigen Beimengungen enthält und die Oberfläche der Lösung ursprünglich rein war, so kann man oft noch nach 12 Stunden normale Strömung beobachten[3]).

1) A. Pockels, diese Zeitschr. **15**, 39, 1914; Quincke, Wied. Ann. **2**, 16, 1877.
2) G. Meyer, Zeitschr. f. Elektrochem. **22**, 5, 1916.
3) A. Pockels, Ann. d. Phys. **8**, 861, 1902.

(Eingegangen 22. August 1916.)

Perihelbewegung des Merkur und die allgemeine Mechanik[1]).

Von E. Wiechert.

§ 1. Vorwort.

Auf „Prinzipien“ von überraschender Kühnheit sich stützend hat A. Einstein eine Theorie der Relativität aufgebaut, „durch welche Raum und Zeit der letzten Spur objektiver Realität beraubt werden“[2]). Der „Äther“ existiert schon seit langem für A. Einstein nicht mehr. Dennoch glauben gewiß viele Physiker ebenso wie ich, zu den Vorstellungsformen von Raum und Zeit sicher auch Anzeichen von entsprechenden gegenständlichen Wirklichkeiten zu erkennen, und dennoch ist von einem Mitglied (W. Nernst) ebenderselben Akademie, welcher A. Einstein angehört, in letzter Zeit eine Theorie der Materie aufgestellt worden[1]), welche — in den Einzelheiten nicht minder kühn, wie die Theorie der Relativität — gerade in dem „Äther“ eine der Grundlagen des von uns gesehenen Weltgeschehens annimmt! Ich gedenke an den gewaltigen Streit der Meinungen, welcher sich in solchen Gegensätzen offenbart, heute nicht mit kritischen Bemerkungen zu rühren. Es scheint mir aber gegenüber dem auf allgemeinsten physikalischen Vorstellungen gegründeten Standpunkt, welcher von A. Einstein und den in gleicher Richtung schauenden Forschern eingenommen wird[2]), wichtig, festzustellen, welche Wege sich öffnen, wenn man von den Erscheinungen selbst ausgeht und sich jenen umwälzenden Vorstellungen, so eindrucksvoll sie für sich genommen auch sein mögen, nicht hingibt.

A. Einstein stellt sich die Aufgabe, die Gravitation dem allgemeinen Schema seiner Relativitätstheorie einzuordnen. Es ist so eine Theorie entstanden, die in bemerkenswerter Weise die Perihelbewegung des Merkur erklärt, während die einfache Newtonsche Theorie hier versagt. So frage ich nun, wie die Perihelbewegung des Merkur wohl erklärt werden kann, wenn von der „radikalsten Relativitätstheorie“, wie A. Einstein seine neuen Entwickelungen nennt, ganz abgesehen wird. Die folgenden Ausführungen sind zu einigen Erwägungen über die Antwort bestimmt. Es wird sich zeigen, daß es mehrere Wege gibt, welche sich dem Forscher öffnen; darunter zeichnet sich ein Weg aus, der bei großer Einfachheit so gut mit neueren Anschauungen der Physik zusammenstimmt, daß ich die Vermutung nicht zurückdrängen möchte, er weise vielleicht, wenigstens in Einzelnem, auf die Wirklichkeit hin.

§ 2. Annahme über die Trägheit der Materie.

Das negative Resultat des Michelsonschen Versuches hat zu der Annahme geführt, daß die materiellen Atome bei der Bewegung eine

1) Nach einer ausführlicheren Darstellung in den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 26. Februar u. 11. März 1916.
2) A. Einstein, „Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie“; Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturw. Klasse, Berlin 1915, S. 831—839. Das Zitat ist der ersten Seite dieser Arbeit entnommen.

1) W. Nernst, Verh. d. Deutschen Physikalischen Gesellschaft **18**, 83—116, 1916.
2) Man vergleiche vor allem: D. Hilbert, „Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)“; Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 20. November 1915.

bestimmte, für alle Materie gleiche Formveränderung erfahren: die „Lorentz-Kontraktion". Aus dem Verhalten der Elektronen im magnetischen und elektrischen Felde wurde geschlossen, daß auch die Elektronen der Lorentz-Kontraktion unterworfen sind, und daß ihre Trägheit durch ihr elektrodynamisches Verhalten in Verbindung mit dieser Kontraktion bedingt ist. Ist $\mathfrak{K}$ die auf das Elektron einwirkende Kraft, so hat man demgemäß als Bewegungsgleichung anzunehmen:

$$\mathfrak{K} = m \frac{d}{dt} \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \tag{1}$$

es ist hier m die „Ruhemasse", $\mathfrak{v}$ der Vektor der Geschwindigkeit, v die Intensität der Geschwindigkeit, also ein Skalar von der Intensität des Vektors $\mathfrak{v}$; c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit. Aus (1) folgen die bekannten Werte für die „träge Masse" längs und quer zur Richtung $\mathfrak{v}$; es ergibt sich aus (1) ferner für die „kinetische Energie" L die Formel:

$$L = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{1}{2} mv^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \cdots \right). \tag{2}$$

Wir wollen uns daran erinnern, daß die Formeln (1) und (2) keineswegs Folgerungen der Relativitätstheorie darstellen, sondern daß umgekehrt diese Formeln, welche man aus der Erfahrung erschlossen hat, zu den Grundlagen gehören, auf welche die Relativitätstheorie aufgebaut worden ist. —

Wegen des Ausfalles des Michelsonschen Versuches liegt sehr nahe, die Formeln (1) und (2) für alle Materie, also auch für die Bewegung eines Planeten um die Sonne als gültig anzunehmen. Mit dieser Möglichkeit wird weiterhin gerechnet werden.

Welches Wirkungsgesetz soll nun für die Gravitation an Stelle der Newtonschen Formel:

$$\mathfrak{K} = \varkappa \frac{Mm}{r^2} \tag{3}$$

gewählt werden, wenn auf jene etwaigen Abweichungen von der klassischen Mechanik Rücksicht genommen wird, welche durch (1) und (2) angezeigt werden? Durch Experimente wurde mit sehr weitgehender Genauigkeit festgestellt, daß bei dem Vergleich verschiedenartiger Materie Trägheit und Schwere einander proportional sind. Nun deutet die Formel (1) auf eine Abhängigkeit der Trägheit von der Bewegung hin, es muß also zunächst vermutet werden, daß auch die Schwere von der Bewegung beeinflußt werde. Aber in welcher Weise sollte das geschehen? Irdische Versuche, welche zur Antwort auf diese Frage herangezogen werden könnten, sind nicht bekannt. Zunächst könnte man meinen, daß wohl auch bei Bewegungsänderungen Schwere und Trägheit einander genau parallel gehen. Dann würde die Planetenbewegung offenbar genau so wie bei den Annahmen der klassischen Mechanik erfolgen, denn jede Änderung der Trägheit wird durch die entsprechende Änderung der Schwere wettgemacht. Eine Perihelbewegung gäbe es dann ebensowenig wie bei der klassischen Mechanik. Diese erste Annahme ist also hinfällig. Als nächste Hypothese von besonders großer Einfachheit bietet sich jedenfalls diejenige dar, welche gegenüber der klassischen Mechanik allein die Trägheit, gar nicht aber die Schwere als geändert annimmt. Dann müßte die Gleichung (3) in unveränderter Anwendung bleiben. Demgemäß wollen wir jetzt zunächst die durch (1) und (3) gekennzeichneten Hypothesen annehmen.

Es folgt aus (2) und (3) als Energiesatz die Gleichung:

$$\frac{1}{2} v^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\varkappa M}{r} + C, \tag{4}$$

wenn bei Anwendung der Formel (2) in der Reihenentwicklung neben dem Gliede, welches die klassische Mechanik allein kennt, noch das Korrektionsglied „erster Ordnung" in v^2 berücksichtigt wird. Die Sonne nehmen wir als ruhend an, was für unsere Zwecke genügt.

Die Gleichung (4) reicht zur Feststellung der Bahnbewegung nicht aus, dazu ist noch eine zweite Gleichung erforderlich. Eine solche wird in bequemer Weise durch den Flächensatz geboten; dieser ergibt sich, wenn analytisch formuliert wird, daß der Planet unter der Einwirkung einer Kraft steht, die stets nach einem und demselben, durch die Sonne gebotenen, Raumpunkt gerichtet ist. Verwertet man (1) und benutzt Polarkoordinaten r, φ, so erhält der Flächensatz folgende Form:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = f \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{5}$$

Links steht die doppelte Flächengeschwindigkeit, auf der rechten Seite ist f eine Konstante. Nach Minkowski wäre $dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ das Element der „Eigenzeit" des Planeten zu nennen; es folgt, daß der Flächensatz bei unseren Annahmen streng gilt, wenn mit der „Eigenzeit" statt mit der gewöhnlichen Zeit gerechnet wird. —

Die Energiegleichung (4) und Flächensatz (5) bestimmen die Bewegung des Planeten. Uns

kommt es hier nur darauf an, die Perihelbewegung festzustellen, das heißt, den Fortschritt des Winkels φ, der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch den kleinsten Wert des Abstandes r liegt. Um ihn festzustellen, ist es nötig, die Verkettung von r und φ zu suchen, d. h. t zu eliminieren. So entsteht die Näherungsformel:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{2}{f^2}\left(\frac{\varkappa M}{r} + C\right) \left[1 + \frac{(4-3)}{2c^2}\left(\frac{\varkappa M}{r} + C\right)\right]. \tag{6}$$

Der Unterschied gegenüber der entsprechenden Formel der klassischen Mechanik liegt im zweiten Glied der eckigen Klammer. In der Klammer (4—3) wird der erste Teil, nämlich + 4, durch die Abweichung des Satzes (9) von dem Flächensatz der klassischen Mechanik bewirkt, und der zweite Teil, nämlich — 3, durch die entsprechende Abweichung des Energiesatzes (4).

Die Integration von (6) ergibt:

$$\frac{1}{r} = X \sin\left(\varphi\left[1 - \frac{(4-3)}{2f^2}\frac{\varkappa^2 M^2}{c^2}\right] + \varphi_0\right) + \frac{1}{r_m}, \tag{7}$$

wobei X, φ_0, r_m Konstanten sind. Bezeichnet $2\pi + D\varphi$ den Fortschritt von φ zwischen zwei aufeinanderfolgenden kleinsten Werten von r, so ist nach (7):

$$D\varphi = \frac{(4-3)\,\pi\varkappa^2 M^2}{f^2 c^2}. \tag{8}$$

$D\varphi$ bedeutet das Vorrücken des Perihels in der Zeit von einem Perihel zum anderen.

Unsere Theorie, soweit sie bisher entwickelt wurde, ergibt, wie (8) lehrt, wirklich eine Bewegung des Perihels und zwar, da $D\varphi$ positiv wird, eine Bewegung im Sinne des Umlaufes des Planeten, d. h. in dem beim Merkur durch die Erfahrung angezeigten Sinn. f ist nach (5) bis auf kleine Glieder höherer Ordnung die doppelte Flächengeschwindigkeit. Wird also die Umlaufszeit mit T bezeichnet, so ist bis auf kleine Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{f}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

a bedeutet die große Halbachse, e die Exzentrizität. Wird ferner noch beachtet, daß in (8)

$$\varkappa M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

gesetzt werden darf, wie es der klassischen Mechanik gemäß ist, so geht (8) über in:

$$D\varphi = \frac{(4-3)\,4\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}. \tag{9}$$

Bedeutet $D_{100}\varphi''$ den Fortschritt des Perihels in 100 Jahren und bei Benutzung der Bogensekunde als Einheit, rechnet man a nach Kilometern und T nach Tagen, so wird:

$$D_{100}\varphi'' = \frac{(4-3)\,4\pi^3 a^2}{9\cdot 10^{20} T^3 (1-e^2)} \cdot \frac{10^{10}\cdot 365{,}2\cdot 100\cdot 206265}{(86400)^2}. \tag{10}$$

Für den Merkur ist:

$a = 57{,}8\cdot 10^6$ km, $T = 88{,}0$ Tage, $e = 0{,}206$;

so folgt denn für diesen Planeten:

$$D_{100}\varphi'' = 7'',1.$$

Aus den astronomischen Beobachtungen wird, wie A. Einstein a. a. O. mitteilt, auf

$$D_{100}\varphi'' = 45'' \pm 5'' \tag{11}$$

geschlossen. Unsere Theorie in der bisherigen Ausführung, welche in der Formel (1) die einzige neue Hypothese sieht, gibt also zwar den Sinn und auch die Größenordnung der Perihelbewegung richtig an, liefert aber den Wert selbst 6—7 mal zu klein!

§ 3. Annahme über das Gesetz der Anziehung.

Die Theorie ist also weiter zu verändern. Dieses vor Augen, soll beachtet werden, was im Anschluß an (6) über die Herkunft der beiden Teile in der Klammer (4—3) gesagt wurde. Wir erkennen, daß zwar die Änderung des Flächensatzes gegenüber der klassischen Mechanik den richtigen Sinn für die Perihelbewegung ergibt, daß aber die von uns angenommene Änderung des Energiesatzes für sich genommen eine Bewegung des Perihels nach der entgegengesetzten Seite zur Folge hat. In dem Energiesatz (4) war für die kinetische Energie gegenüber der klassischen Mechanik eine neue Annahme gemacht worden, während die potentielle Energie unverändert blieb. So liegt es nahe, jetzt das Augenmerk auch auf die potentielle Energie zu richten und durch eine veränderte Annahme über diese einen weiteren Fortschritt der Theorie zu versuchen. Nach der Newtonschen Theorie würde der Energiesatz lauten:

$$\frac{1}{2}v^2 = \varkappa\frac{M}{r} + C. \tag{12}$$

Diese Formel zeigt, daß:

$$\frac{v^2}{2} \text{ und } \frac{\varkappa M}{r}$$

einander entsprechende Größen sind; so wandeln wir denn im Hinblick auf die zu erstrebende Änderung in (4) nun auch die rechte Seite in ähnlicher Weise um, wie es beim Übergang von (12) in (4) mit der linken Seite geschehen ist. Wir setzen:

$$\frac{1}{2}v^2\left(1+\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{\varkappa M}{r}\left(1+n\frac{\varkappa M}{c^2}\frac{1}{r}\right)+C, \tag{13}$$

wobei n als ein Zahlenfaktor aufzufassen ist, der noch zur Verfügung steht, um die Theorie der Erfahrung anzupassen. Wird (4) durch (13) ersetzt, so tritt in (6) und in den folgenden Formeln $(4-3)+2n$ an Stelle der Klammer $(4-3)$. Für den Fortschritt des Perihels bei einem Umlauf ergibt sich also jetzt der Wert:

$$D\varphi=\frac{(4-3+2n)\,4\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}\,. \tag{14}$$

Diese Formel zeigt, daß unsere nun erweiterte Theorie, welche sich auf die Hypothesen (1) und (13) stützt, in der Tat imstande ist, der Erfahrung gerecht zu werden. Wird den Beobachtungen gemäß für den Merkur (11) angenommen, so folgt mittels (14): $45'' \pm 5'' = 7'',1\,(1+2n)$, also:

$$2n = 5{,}4 \pm 0{,}7. \tag{15}$$

§ 4. Bedeutung der Hypothese über die Anziehung.

Zwei Hypothesen wurden verwandt, um zu der Schlußformel (14) zu gelangen: Die erste Hypothese bezieht sich auf die Trägheit. Sie entspricht der Bewegungsgleichung (1) und wird durch den Ausfall des Michelsonschen Versuches in Verbindung mit der modernen Elektrodynamik sehr nahe gelegt. Die zweite Hypothese, die durch die rechte Seite von (13) geboten wird, bezieht sich auf die potentielle Energie. Bezeichnen wir diese mit V, so läßt sich die Hypothese darstellen durch:

$$V=-\frac{\varkappa m M}{r}\left(1+n\frac{\varkappa M}{c^2}\frac{1}{r}\right)+V_\infty\,, \tag{16}$$

wie man beim Anblick von (13) sogleich erkennen wird. V_∞ ist eine Konstante, n bedeutet eine Zahl, die nach den vorliegenden Merkurbeobachtungen in der Nähe von 2,7 liegt. Was besagt nun (16)? Für die Anziehung der beiden Massen m und M ergibt (16):

$$K=\frac{\varkappa m M}{r^2}\left(1+2n\frac{\varkappa M}{c^2}\frac{1}{r}\right). \tag{17}$$

Wir sehen, daß zu der von Newton beobachteten Anziehung noch eine andere hinzugekommen ist, welche sich umgekehrt proportional mit r^3 ändert. Bei aller Einfachheit dieser Hypothese und trotz des Erfolges, den sie uns bot, muß sie doch zunächst willkürlich erscheinen. Da ist es von Wert, daß es einen Weg gibt, der von neueren Anschauungen der Physik so direkt zu den Formeln (16) und (17) führt, daß diese erheblich an Wahrscheinlichkeit gewinnen. Ich erinnere an Wohlbekanntes. Erstens: Es ist möglich, in ganz ähnlicher Weise wie in der Elektrostatik die Wechselwirkung der Massen auch bei der Schwere durch Annahme einer Feldenergie zu erklären. Man kann dabei für diese eine Dichte

$$\varepsilon=-\frac{1}{8\pi\varkappa}g^2 \tag{18}$$

annehmen, wenn g die „Fallbeschleunigung" bedeutet. Bei dem gewöhnlichen Ausbau der Theorie wäre g gemäß dem Newtonschen Gravitationsgesetz zu berechnen. Im Falle der Elektrizität steht in der Formel, welcher (18) entspricht, rechts ein positives Vorzeichen, hier, im Falle der Schwere, muß ein negatives Vorzeichen gewählt werden, weil gleichnamige Teilchen einander anziehen, nicht aber, wie bei Elektrizität, abstoßen. Eine negative Dichte der Energie im Felde erscheint als etwas Unsinniges, sobald man sich auf den Standpunkt stellt, daß das Feld, abgesehen von der Energie unserer Formeln, „leer" ist, wie es A. Einstein voraussetzt. Eine negative Dichte der Energie ist aber ein durchaus sinnvoller Begriff, wenn man einen „Äther" annimmt, denn es erscheint dann selbstverständlich, daß der Äther auch im unerregten Zustande schon eine Fülle von Energie enthält und also Energie abgeben kann. Diesen Gedanken habe ich selbst 1894 näher ausgeführt[1]) und er spielt auch in jener im Vorwort erwähnten Theorie der physikalischen Erscheinungen eine große Rolle, welche W. Nernst neuerdings verfolgt. In unserem Falle wäre bei Benutzung des Newtonschen Gesetzes wegen des Zentralkörpers eine Energiedichte im Betrage

$$\varepsilon=-\frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M^2}{r^4} \tag{19}$$

anzunehmen. — Zweitens: Das elektrodynamische Verhalten des Elektrons führt zu der Vorstellung, daß mit elektrodynamischer Energie „Trägheit" verbunden ist. Die träge „Ruhemasse" erscheint von derselben Größenordnung wie E/c^2, wenn E die elektrodynamische Energie bei Ruhe bedeutet. So liegt es nahe, zu ver-

1) E. Wiechert, „Über die Bedeutung des Weltäthers"; Sitzungsberichte der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 35. Jahrg., 1894. Seite [4]—[11].

muten, daß im allgemeinen Energiesammlung und Trägheit in Beziehung miteinander stehen. Diese Hypothese ist ja in der neueren Theorie der Relativität weitgehend verwertet worden. Wir wollen nun eine ähnliche Vorstellung benutzen, indem wir annehmen, daß die im Schwerefeld verteilte, durch (18) angezeigte, negative Energie gerade so wirkt, als ob dort eine schwere, d. h. in den Fernwirkungen der Gravitation sich äußernde Masse vorhanden wäre. Soll nun diese Masse positiv oder negativ in Rechnung gesetzt werden? Man könnte zunächst zweifelhaft sein, aber es scheint doch dem negativen Vorzeichen der Energie weit mehr angepaßt, ein negatives Vorzeichen vorauszusetzen. Wir schreiben demgemäß für die Dichte der scheinbaren schweren Masse, welche der Gravitationsenergie des Feldes entspricht:

$$\mu = +\frac{p}{c^2}\varepsilon = -\frac{1}{8\pi\varkappa}\frac{p}{c^2}g^2, \qquad (20)$$

wobei p eine gewisse Konstante bedeutet, für welche wir ein positives Vorzeichen erwarten. Dann erhalten wir für das Feld in der Umgebung eines Zentralkörpers (M), wenn (19) benutzt wird, also nur die Fernwirkung des Zentralkörpers selbst berücksichtigt wird, was für unsere Näherungsrechnung erlaubt ist:

$$\mu = -\frac{p\varkappa}{8\pi c^2}\frac{M^2}{r^4}. \qquad (21)$$

Die hierdurch angezeigte schwere Masse wäre also in der Umgebung des Zentralkörpers anzunehmen. Für die zugehörige schwere Masse innerhalb der Kugelfläche mit dem Radius r, welche mit m' bezeichnet werden soll, ergibt sich nach (21):

$$m' = -\psi' + \frac{p\varkappa M^2}{2c^2 r} \qquad (22)$$

wobei ψ' eine Konstante von der Größenordnung $p\varkappa M^2/2c^2\bar{r}$ ist, wenn $\bar{r}$ den Radius des Zentralkörpers bedeutet. Für die Intensität g der Schwere wäre danach in der Umgebung der Sonne die folgende Näherungsformel anzusetzen:

$$g = \varkappa\frac{M - \psi' + \frac{p\varkappa M^2}{2c^2 r}}{r^2}. \qquad (23)$$

Unseren Annahmen entspricht es, m' gegenüber M als eine kleine Korrektur zu betrachten, es darf also statt (23) mit gleicher Genauigkeit auch geschrieben werden:

$$g = \varkappa\frac{M'}{r^2}\left(1 + \frac{p}{2c^2}\frac{\varkappa M'}{r}\right), \qquad (24)$$

wobei

$$M' = M - \psi' \qquad (25)$$

ist. In sehr großen Entfernungen verschwindet der Einfluß des zweiten Gliedes in der Klammer auf der rechten Seite von (24), M' bedeutet also die schwere Masse, welche der Zentralkörper nach seiner Wirksamkeit in sehr großen Entfernungen scheinbar besitzt. Die Intensität K der Kraft, unter deren Einwirkung ein Planet sich um den Zentralkörper bewegt, die scheinbare Anziehung durch den Zentralkörper also, ist gemäß (24) gegeben durch:

$$K = mg = \varkappa\frac{mM'}{r^2}\left(1 + \frac{p}{2c^2}\frac{\varkappa M'}{r}\right). \qquad (26)$$

Dies ist praktisch dieselbe Formel, welche in § 3 zur Erklärung der Perihelbewegung des Merkur angenommen wurde, denn der Unterschied zwischen (26) und der früheren Formel (17) besteht nur darin, daß M und M' vertauscht erscheinen, und kommt nicht merklich in Betracht. Der Vergleich von (17) und (26) zeigt, daß

$$p = 4n \qquad (27)$$

zu setzen ist.

Aus dem durch (11) dargestellten Beobachtungsergebnis für den Merkur folgt

$$p = 10{,}7 \pm 1{,}4. \qquad (28)$$

Für p ergibt sich also aus der Erfahrung wirklich ein positiver Wert, wie wir es aus theoretischen Gründen erwarteten.

§ 5. Schlußbemerkungen.

Das Ergebnis unserer bisherigen Untersuchungen ist folgendes:

1. Die Änderung der Trägheit infolge der Bewegung, welche den bekannten Schlüssen der neueren Elektrodynamik entspricht und durch die Formel (1) dargestellt wird, genügt zur Erklärung der Perihelbewegung des Merkur nicht.

2. Die Perihelbewegung läßt sich aber in vollem Betrage erklären, wenn man noch hinzunimmt eine Änderung der Gravitation gegenüber der klassischen Mechanik, welche der Annahme einer scheinbaren negativen schweren Masse im Gravitationsfeld entspricht, deren Dichte durch (20) angegeben wird.

3. Die beiden so gekennzeichneten Hypothesen über Trägheit und Gravitation zusammen mit dem durch (11) dargestellten Beobachtungsergebnis führen zu der Folgerung $p = 10{,}7 \pm 1{,}4$. —

An diese bisherigen Schlüsse wollen wir nun sogleich die Bemerkung knüpfen, daß die Hypothese über die Trägheit für die hier entwickelte Theorie ohne wesentliche praktische Bedeutung ist. In der Tat, wenn man sie ganz beiseite läßt, wenn man also nur die Änderung der

Gravitation gemäß der Annahme der negativen schweren Masse (20) verwertet, so folgt für die Perihelbewegung:

$$D\varphi = p\,\frac{4\pi^3 a^2}{2c^2 T^2(1-e^2)}. \tag{29}$$

Es läßt sich also dem Beobachtungsergebnis (11) auch dann Genüge leisten: man muß setzen

$$p = 12{,}7 \pm 1{,}4\,, \tag{30}$$

also einen Wert annehmen, der sich von dem früher gefundenen (28) nur wenig unterscheidet. (29) und (30) entsprechen auch der in § 2 behandelten Vorstellung, nach der ein Einfluß der Bewegung auf die Trägheit zwar vorhanden ist, aber durch einen entsprechenden Einfluß auf die Schwere wett gemacht wird.

Die Zahlwerte (28) und (30) legen die Annahme

$$p = 4\pi, \quad n = \pi \tag{31}$$

einigermaßen nahe. Wollte man sie wirklich machen, so würde sich für die Dichte μ der scheinbaren negativen schweren Masse im materiefreien Feld nach (20) ergeben:

$$\mu = -\frac{1}{2c^2\varkappa}g^2. \tag{32}$$

Als zugehörige Feldgleichungen der Schwerkraft wären für die Statik anzunehmen:

$$\mathfrak{g} = -\operatorname{grad}\Phi, \quad \operatorname{div}\mathfrak{g} = 4\pi\cdot\frac{1}{2c^2\varkappa}g^2. \tag{33}$$

$\mathfrak{g}$ bedeutet den Vektor der Fallbeschleunigung. Für die scheinbare Anziehung der Sonne ergäbe sich die Näherungsformel:

$$K = \varkappa\frac{mM'}{r^2}\left(1 + \frac{2\pi}{c^2}\frac{\varkappa M'}{r}\right). \tag{34}$$

Die durch (32), bzw. (33), dargestellte Hypothese wäre für sich allein genommen völlig ausreichend, die Perihelbewegung des Merkur zu erklären, denn sie ergibt nach (29) für den Fortschritt des Perihels in 100 Jahren:

$$D_{100}\varphi'' = 2\pi\cdot 7{,}1 = 45'' \tag{35}$$

gegenüber dem Beobachtungswert $43'' \pm 5''$. Wollte man außer der Hypothese (32) noch die durch die Elektrodynamik nahe gelegte Änderung der Trägheit voraussetzen, wie sie durch die Formel (1) angezeigt wird, und wollte man weiter annehmen, daß diese Änderung nicht durch eine Änderung der Schwerewirkung wettgemacht wird, so ergäbe sich nach (14):

$$D_{100}\varphi'' = (2\pi + 1)\cdot 7{,}1 = 52'', \tag{36}$$

was mit den Beobachtungen wohl auch noch verträglich wäre, aber etwas weniger gut zusammenstimmt. —

Für den Vergleich der hier gegebenen Theorie mit anderweitigen Untersuchungen über die Schwerkraft ist es beachtenswert, daß unsere Grundformel (17) für die Kraftwirkung der Gravitation wohl auch durch andere Annahmen verständlich gemacht werden kann, als durch die hier bevorzugte Hypothese der negativen schweren Masse im Schwerefeld. So läßt sich z. B. (17) auch schreiben in der Form:

$$\mathfrak{K} = m\left(1 - \frac{p}{2c^2}\Phi\right)\mathfrak{g}. \tag{37}$$

Hieran könnte man die Vorstellung knüpfen, daß der Antrieb $\mathfrak{K}$, den eine Masse m im Schwerefeld $\mathfrak{g}$ erfährt, nicht durch m, sondern durch

$$m\left(1 - \frac{p}{2c^2}\Phi\right)$$

bestimmt wird, daß so der Antrieb $\mathfrak{K}$ außer von $\mathfrak{g}$ und m auch vom Schwerepotential Φ an der betreffenden Stelle abhängt. Ferner könnte man ähnliche Überlegungen, wie sie hier an die schwere Masse angeschlossen wurden, statt dessen an die träge Masse anschließen, indem man für diese eine Abhängigkeit vom Schwerfeld annimmt. —

Besondere Aufmerksamkeit verlangt der Vergleich der hier gegebenen Theorie mit der von Einstein. Einstein[1]) leitet für die Planetenbewegung die Formel ab:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} + P\frac{1}{r} + Q + \alpha\frac{1}{r^3}. \tag{38}$$

Der Unterschied gegenüber der entsprechenden Formel der klassischen Mechanik wird durch das Glied α/r^3 rechts gegeben. α ist eine Konstante, welche in der Einsteinschen Theorie eine grundlegende Rolle spielt; nach unserer Bezeichnungsweise stellt sie $\varkappa M/c^2$ dar. Vergleicht man (38) mit (6), so erkennt man leicht den tiefgreifenden Unterschied der Theorien, denn in der Formel (6) wird der für die Perihelbewegung entscheidende Unterschied gegenüber der klassischen Mechanik durch ein Glied von der Form β/r^2 gegeben, wobei β eine Konstante ist. Der auf die Formel (6) folgende weitere Ausbau der Theorie ändert nur den Wert von β, nicht die Form der Gleichung. Der Unterschied der Theorien tritt besonders eindrucksvoll hervor, wenn man die Näherungsformeln vergleicht, welche in den beiden Theorien den Satz der lebendigen Kraft in sich schließen. Die Näherungsformel der vorliegenden Theorie wird durch (13) gegeben. Nach Einstein da-

1) a. a. O., S. 837.

gegen lautet die entsprechende Formel, wenn unsere Bezeichnungsweise verwertet wird:

$$\frac{1}{2}\,v^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{\varkappa M}{r}\left(1+\frac{f^2}{c^2}\frac{1}{r^2}\right)+C. \quad (39)$$

f bedeutet die doppelte Flächengeschwindigkeit, es kann daher hier für f^2/r^2 auch geschrieben werden $\mathfrak{v}^2_\varphi$, wenn $\mathfrak{v}_\varphi$ die Komponente der Geschwindigkeit des Planeten senkrecht zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bezeichnet. (39) geht dann über in:

$$\frac{1}{2}\,v^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\varkappa M}{r}\left(1+\frac{\mathfrak{v}^2_\varphi}{c^2}\right)+C. \quad (40)$$

Das hier auf der rechten Seite auftretende Glied $\mathfrak{v}^2_\varphi/c^2$ ist der in den Paragraphen 2 und 3 entwickelten Theorie fremd. In der Einsteinschen Darstellung wird also der Weg zum Ausbau der Theorie, wenn man ihn von der Erfahrung aus betrachtet, offenbar in einer anderen Richtung gesucht, als in der hier gegebenen Darstellung. Trotz dieser Verschiedenheit der Wege, führt auch die Einsteinsche Theorie zu einer guten Darstellung der Erfahrung, denn sie liefert für die Perihelbewegung die Formel:

$$D\varphi = 6\,\frac{4\pi^3 a^2}{c^2 T^2(1-e^2)}, \quad (41)$$

woraus folgt: $D_{100}\varphi'' = 6 \times 7'',1 = 43''$.

Es ist nach den Erwägungen dieses Schlußparagraphens klar, daß für den Versuch, die beobachtete Perihelbewegung des Merkur zu erklären, heute noch viele Wege offen stehen. Die Theorien, zu welchen M. Abraham[1]), G. Mie[2]) und Gunnar Nordström[3]) neuerdings geführt wurden, scheinen freilich hierzu nicht geeignet, denn sie ergeben entgegen der Erfahrung eine rückläufige Bewegung des Perihels.

1) M. Abraham, diese Zeitschr. **13**, 793—797, 1912.
2) G. Mie, Ann. d. Phys. **40**, 41, 1913.
3) Gunnar Nordström, Ann. d. Phys. **43**, 1101—1110, 1914.

(Eingegangen 24. August 1916.)

Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von Ludwig Flamm.

A. Einstein hat durch die zusammenfassende Darstellung, welche er vor einiger Zeit gab[1]), das Verständnis für seine neue Gravitationstheorie wesentlich gefördert. Klärend haben auch die allgemeinverständlichen Darstellungen gewirkt, wie sie M. Born[1]) und E. Freundlich[2]) gaben. Besonders lehrreich sind aber die exakten Lösungen für Gravitationsfelder von Kugelsymmetrie, welche K. Schwarzschild[3]) fand und diskutierte. Daran möchte der Verfasser in den vorliegenden Zeilen noch weitere Folgerungen knüpfen. Vor allem sollen die merkwürdigen Eigenschaften des Gravitationsfeldes recht anschaulich gemacht werden. Auf diese Weise dürften die physikalischen Voraussetzungen der allgemeinen Relativitätstheorie vielleicht noch besser vor Augen treten. Auch die Behandlung der Lichtbewegung im Gravitationsfelde läßt sich exakter als bisher ausführen. Eine strenge numerische Berechnung der auf das Gravitationsfeld der Sonne bezüglichen Konstanten mag vielleicht gleichfalls erwünscht sein.

§ 1. Es empfiehlt sich zunächst den von Schwarzschild später behandelten Fall, das Gravitationsfeld im Innern einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit, der Betrachtung zu unterziehen. Das Vorhandensein des Gravitationsfeldes kommt dadurch zum Ausdruck, daß das Minkowskische Linienelement sich nicht mehr auf die spezielle Gestalt

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

durch passende Koordinatenwahl reduzieren läßt. Es lautet vielmehr jetzt im einfachsten Falle

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2 dt^2 -$$
$$- \frac{3}{\varkappa\varrho_0}\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\vartheta^2 + \sin^2\chi \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right),$$

indem die Koordinaten bereits in besonders geschickter Weise gewählt worden sind. Es ist χ eine vom Zentrum der Flüssigkeitskugel in radialer Richtung wachsende Koordinate, die an der Begrenzungsfläche den Wert χ_a erreicht, ϑ und φ sind die gewöhnlichen Kugelkoordinaten. Die Konstante ϱ_0 bedeutet die Dichte der Flüssigkeitskugel und $\varkappa$ die Gravitationskonstante der Einsteinschen Theorie, welche den Wert

$$\varkappa = \frac{8\pi k^2}{c^2}$$

hat, wobei k^2 die gewöhnliche Gravitationskonstante

$$k^2 = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}$$

und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Es ist praktisch, für das Linienelement zu schreiben

1) Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916. Gesondert erschienen bei Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1916.

1) Diese Zeitschr. **17**, 51, 1916.
2) Naturwissenschaften **4**, 363 und 386, 1916. Gesondert erschienen bei Julius Springer, Berlin 1916.
3) Berliner Sitzungsberichte 1916, S. 189 und 424.

$$ds^2 = d\tau^2 - d\sigma^2, \qquad (1)$$

es also in einen zeitlichen Teil

$$d\tau = \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\,dt$$

und den räumlichen Teil

$$d\sigma^2 = R_0^2\,(d\chi^2 + \sin^2\chi\,d\vartheta^2 + \sin^2\chi\sin^2\vartheta\,d\varphi^2)$$

zu zerlegen. Dabei wurde die neue Konstante

$$R_0 = \sqrt{\frac{3}{\varkappa\varrho_0}}$$

eingeführt. Wie Schwarzschild bemerkt, stellt der obige Ausdruck für $d\sigma^2$ nichts anderes als das Linienelement im sphärischen Raum vom Krümmungsradius R_0 dar; eine derartige Geometrie muß also im Innern der Flüssigkeitskugel herrschen.

Um die Verhältnisse zu übersehen, genügt es wegen der Kugelsymmetrie, die Geometrie zu betrachten, welche in irgendeinem ebenen Schnitt durch das Zentrum, also für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, vorhanden ist. Das Linienelement lautet in diesem Falle

$$d\sigma_e^2 = R_0^2\,(d\chi^2 + \sin^2\chi\,d\varphi^2). \qquad (2)$$

Man sieht, daß dies dieselben Maßverhältnisse sind wie auf einer Kugelfläche vom Radius R_0. Man denke sich dieselbe nach Fig. 1 durch

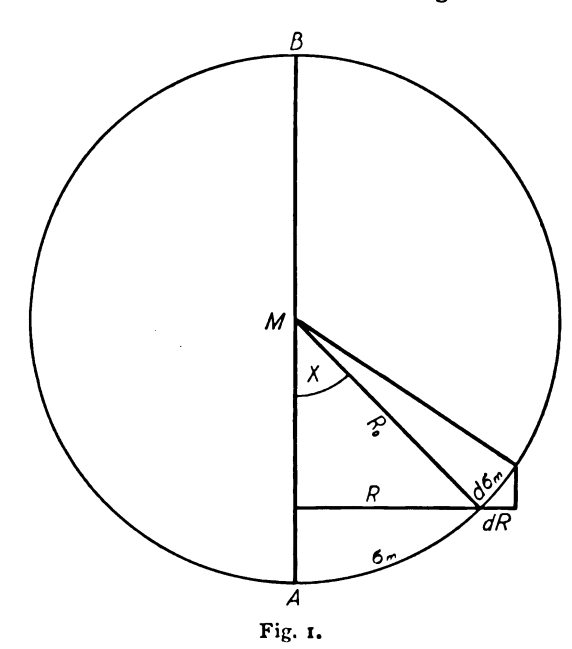


Fig. 1.

Rotation des Kreises um den vertikalen Durchmesser AB erzeugt. Das meridionale Bogenelement ist dann

$$d\sigma_m = R_0\,d\chi,$$

wenn R_0 der Radius des Meridiankreises ist, das Bogenelement auf den Parallelkreisen

$$d\sigma_n = R\cdot d\varphi,$$

wenn φ den Drehungswinkel und

$$R = R_0\sin\chi$$

den Abstand von der Rotationsachse bezeichnet. Das Linienelement auf dieser Kugelfläche ist also gleichfalls durch die Formel (2) gegeben.

Ein auffälliger Unterschied der Geometrie auf der Kugelfläche gegenüber der euklidischen Geometrie besteht beispielsweise darin, daß die Umfänge konzentrischer Kreise

$$U = 2\pi R$$

nicht proportional dem Radius σ_m anwachsen, sondern aus diesem vielmehr durch die komplizierte Formel

$$U = 2\pi R_0 \sin\frac{\sigma_m}{R_0}$$

erhalten werden. Der Umfang erreicht somit ein Maximum für

$$\sigma_m = \frac{\pi}{2} R_0,$$

um weiterhin wieder abzunehmen und für

$$\sigma_m = \pi R_0$$

ganz auf Null zusammenzuschrumpfen. Es ist

$$dU = 2\pi d\sigma_m\cdot\cos\chi, \qquad (3)$$

somit

$$dU \leqq 2\pi d\sigma_m,$$

während in der euklidischen Geometrie nur das Gleichheitszeichen gilt. Genau die gleichen Beziehungen müssen innerhalb der Flüssigkeitskugel in jeder zentralen Schnittebene für Umfang und Radius der Kreise gelten.

Zum besseren Verständnis des Folgenden soll noch eine kleine Umformung vorgenommen werden. Wegen

$$\frac{dU}{2\pi} = dR$$

läßt sich die Gleichung (3) auch in der Form schreiben

$$dR = d\sigma_m\cdot\cos\chi$$

und sich in dieser Gestalt auch direkt aus Fig. 1 ablesen, da χ auch gleichzeitig den Winkel zwischen dem Bogenelement und der Horizontalen darstellt. Man kann somit der Formel (2) auch die Gestalt geben

$$d\sigma_e^2 = \frac{dR^2}{\cos^2\chi} + R^2 d\varphi^2. \qquad (2')$$

Es ist dies aber dann ganz allgemein der Ausdruck für das Linienelement auf einer Rotationsfläche, wobei χ den Winkel bedeutet, den die Tangente der Meridiankurve, die ganz beliebig sein kann, jeweils mit der Äquatorebene einschließt.

§ 2. Nun können wir auch den von Schwarzschild zuerst behandelten Fall, das

Gravitationsfeld eines Massenpunktes, einer anologen Betrachtung unterziehen. Das Linienelement in seiner einfachsten Form ist von gleichem Bau wie oben und lautet

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Eine Größe tritt ganz neu auf in diesem Ausdruck, die Konstante α, und hat den Wert

$$\alpha = \frac{2k^2 M_0}{c^2},$$

worin M_0 die Zentralmasse bedeutet, wie sie sich aus astronomischen Messungen ergeben würde. Man wird das Linienelement wieder nach Formel (1) zerlegen.

Der räumliche Anteil des Linienelementes ist auch hier nichteuklidischer Natur. Die Kugelsymmetrie läßt es wieder genügend erscheinen, sich auf die Betrachtung der Maßverhältnisse in einer beliebigen zentralen Schnittebene, also auf $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, zu beschränken. Man erhält jetzt

$$d\sigma_e^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} + R^2 d\varphi^2. \quad (4)$$

Auch dieses Linienelement ist von der Gestalt (2'), weil man

$$\cos^2\chi = 1 - \frac{\alpha}{R}$$

setzen kann, und ist also gleichfalls identisch mit dem Linienelement auf einer Rotationsfläche. Bezeichnet man mit z die Koordinate in der Richtung der Rotationsachse, so ergibt sich die Gleichung der Meridiankurve aus

$$\frac{dz}{dR} = \operatorname{tg}\chi = \sqrt{\frac{\alpha}{R - \alpha}}$$

zu

$$z^2 = 4\alpha(R - \alpha).$$

Dadurch ist eine Parabel vom Parameter

$$p = 2\alpha$$

gegeben, deren Gleichung auf Achse und Leitlinie als Koordinatenkreuz bezogen ist, wie man es in Fig. 2 sieht. Der Ausdruck (4) ist somit identisch mit dem Linienelement auf jener Fläche, welche durch Rotation dieser Parabel um die Leitlinie ZZ' erzeugt wird.

Der meridionale Hauptkrümmungsradius dieser Rotationsfläche ist

$$\varrho_m = \frac{d\sigma_m}{d\chi} = -\frac{2R}{\sin\chi}.$$

Der Hauptkrümmungsradius senkrecht dazu ist durch die Strecke MP in der Fig. 2 gegeben und hat den Wert

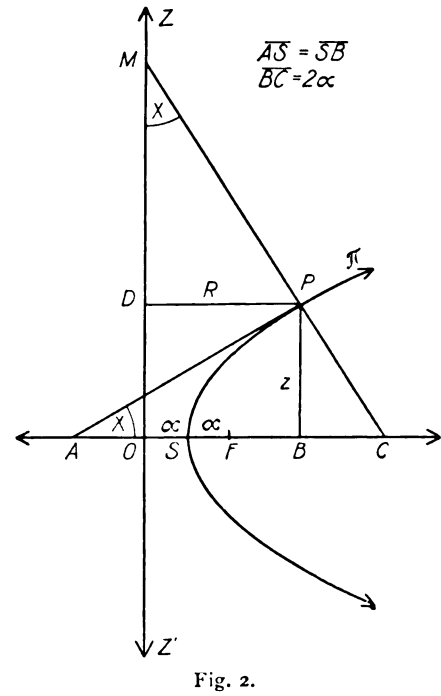


Fig. 2.

$$\varrho_n = \frac{R}{\sin\chi}.$$

Man findet also für das Gaußsche Krümmungsmaß dieses Rotationsparaboloides

$$K = \frac{1}{\varrho_m \varrho_n} = -\frac{\alpha}{2R^3}.$$

Für die im vorigen Paragraphen betrachtete Kugelfläche dagegen ist das Gaußsche Krümmungsmaß

$$K = \frac{1}{R_0^2},$$

also positiv und konstant. Für das hier vorliegende Rotationsparaboloid ist das Krümmungsmaß negativ und variabel; es nimmt dem absoluten Betrage nach ab mit wachsendem R. Und gerade aus diesem Grunde ist die Geometrie auf jener Fläche noch weit verwickelter. Auf der Kugel war die Abhängigkeit des Kreisumfanges vom Radius zwar nicht mehr so einfach als in der euklidischen Geometrie, aber einheitlich auf der ganzen Fläche. Bei dem jetzt vorliegenden Rotationsparaboloid ist sie außerdem noch abhängig von der Lage der Kreise auf der Fläche. Genau so beschaffen sind also die geometrischen Verhältnisse in irgendeiner Schnittebene durch das Massenzentrum.

§ 3. Der Massenpunkt selbst, welcher das Gravitationsfeld erzeugt, ist am Scheitel S der Meridianparabel zu suchen. Die Rotationsfläche des einen Parabelastes $S\pi$, wie in Fig. 3 zu sehen ist, bildet bereits die ganze zentrale Schnitt-

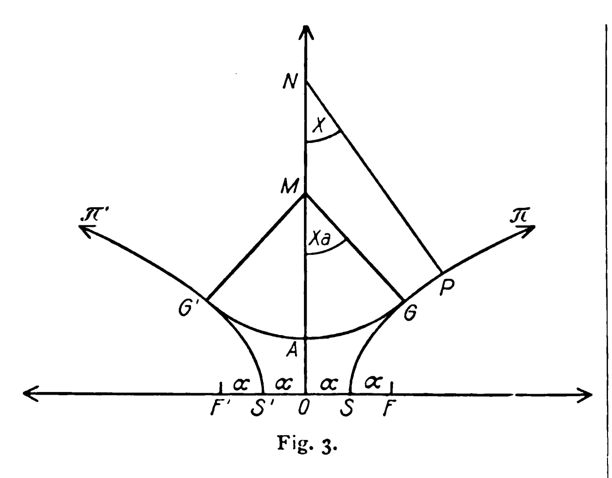


Fig. 3.

ebene eindeutig ab, und zwar unter Erhaltung der Maßverhältnisse. Die Merkwürdigkeit, daß der Massenpunkt einen endlichen Umfang besitzt, einen Äquator von der Länge $2\pi\alpha$, wie Schwarzschild bereits betont hat, kommt durch die Zeichnung deutlich zum Ausdruck.

Auch für den Außenraum der Flüssigkeitskugel, wie sie im ersten Paragraphen betrachtet wurde, ist das Linienelement das gleiche wie bei Vorhandensein eines zentralen Massenpunktes. Der Zusammenhang zwischen dem Linienelement im Innern der Flüssigkeitskugel und im Außenraum ist durch Grenzbedingungen gegeben, die einfach darin bestehen, daß an der Grenzfläche die Koeffizienten der beiderseitigen Linienelemente nebst ihren ersten Ableitungen den gleichen Wert haben.

Für unsere Darstellung der Maßverhältnisse in einer zentralen Schnittebene folgt daraus, daß die Kugel, welche die Geometrie im Innern der Flüssigkeit darstellt, das Rotationsparaboloid, welches für den Außenraum gilt, berühren muß. In Fig. 3 ist dies durch den Kreisbogen GAG' angedeutet, welcher die beiden Schnittparabeln berührt. Die Rotationsfläche der zusammengesetzten Kurve $AG\pi$ bildet jetzt die ganze zentrale Schnittebene unter Erhaltung der Maßverhältnisse eindeutig ab. Der Winkel χ, welcher auf dem Kugelsegment bis zum maximalen Betrage χ_a an der Grenzfläche anwächst, nimmt auf dem anschließenden Teil des Rotationsparaboloides allmählich wieder auf Null ab. Das Ganze könnte als eine Art Trichterfläche bezeichnet werden.

§ 4. Es erleiden somit die Dimensionen der Elementarmaßstäbe, die durch $d\sigma$ repräsentiert werden, im Gravitationsfeld derartige Einflüsse, daß mit ihnen gemessen, man nennt dies die „natürliche Raummessung", im allgemeinen keine euklidische Geometrie herauskommt. Ganz Analoges gilt von der Zeitmessung durch elementare Uhren, der sogenannten „natürlichen Zeitmessung", welche durch $d\tau$ repräsentiert ist. Es ist im allgemeinen nicht mehr wie in der Minkowskischen Welt $d\tau$ mit dt einfach identifizierbar, sondern vielmehr der Zusammenhang ein verwickelter. Die Lichtgeschwindigkeit ist aber wie in der Minkowskischen Welt durch die Gleichung

$$d^2 s = 0$$

gegeben. Man findet daraus

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 1;$$

die natürlich gemessene Lichtgeschwindigkeit ist somit eine Konstante, und zwar pflegen die Maßeinheiten von vornherein so gewählt zu werden, daß diese Konstante den Wert 1 hat. In diesem Sinne gilt also auch in der allgemeinen Relativitätstheorie der Satz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Es ist von Wichtigkeit, die Bedeutung des eben abgeleiteten Satzes näher ins Auge zu fassen. In den Koordinaten ausgedrückt, welche als passend gewählte Parameter bloß den Formeln des Gravitationsfeldes zugrunde gelegt sind, ist die Lichtgeschwindigkeit keineswegs konstant, ja sie besitzt nach verschiedenen Richtungen sogar am gleichen Orte ungleiche Werte. Aber mit materiellen Maßstäben und Uhren gemessen erscheint die Lichtausbreitung auch im Gravitationsfelde homogen und isotrop. Wählt man als Elementaruhr das die rote Kadmiumlinie aussendende Molekül und setzt deren Schwingungsdauer als Zeiteinheit fest, so erkennt man ohne weiteres, daß sich wegen jener Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die metrische Längeneinheit an allen Orten und zu allen Zeiten mit der gleichen Zahl von Wellenlängen der roten Kadmiumlinie decken muß. Legt man als Elementarmaßstab noch die Gitterdistanz des Steinsalzkristalls fest, so kommt man in Hinblick auf die Konstanz der „natürlich gemessenen" Lichtgeschwindigkeit auch hier zum gleichen Schluß. Der allgemeinen Relativitätstheorie liegt also die fundamentale Voraussetzung zugrunde, daß zum Beispiel das Verhältnis der Wellenlänge der roten Kadmiumlinie zur Gitterkonstante des Steinsalzkristalls eine absolute Konstante ist. Sie muß auch in beliebigem Gravitationsfelde vollkommen unabhängig sein vom Ort, von der Orientierung und dem Zeitpunkt.

Erleiden also die elementaren Maßstäbe und Uhren Beeinflussungen durch das Gravitationsfeld, so muß die Lichtausbreitung genau die gleiche Beeinflussung erfahren, so daß beide miteinander verglichen, keinen Unterschied aufweisen. Das gleiche muß auch für alle andern

physikalischen Erscheinungen gelten. Daher kommt es wohl, daß man die Punktbewegung zum Beispiel durch die einfache Variationsgleichung

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0 \tag{5}$$

beschreiben kann, trotzdem der Ausdruck bloß auf die Maßverhältnisse bezügliche Größen enthält. Der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Punktbewegung geht eben ganz parallel der Veränderung, welche die elementaren Maßstäbe und Uhren zeigen; relativ zueinander ist das Verhalten der Erscheinungen ganz das gleiche geblieben. So kann man etwa dem allgemeinen Relativitätsprinzip eine anschaulichere Formulierung geben.

§ 5. Die Lichtfortpflanzung muß, da sie der Bedingung

$$d^2 s = 0$$

genügt, als Spezialfall in den Gleichungen (5) für die allgemeine Punktbewegung enthalten sein. Man braucht in der Tat nur in den von Schwarzschild[1]) hergeleiteten intermediären Integralen für die Punktbewegung die eine Konstante h gleich Null zu setzen, um der obigen Bedingung zu genügen. Im Gravitationsfeld einer Zentralmasse lauten mithin die Gleichungen für die Lichtbewegung:

$$\left.\begin{aligned} \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1-\frac{\alpha}{R}}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 &= 0 \\ R^2\frac{d\varphi}{ds} &= \Delta \\ \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\frac{dt}{ds} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die zweite Gleichung stellt den Flächensatz dar und, da die Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen gleich 1 ist, hat die Konstante Δ eine sehr anschauliche Bedeutung. Sie ist nichts anderes als die Länge des Perpendikels vom Zentrum auf den Lichtstrahl, wenn er aus dem Unendlichen kommend seine Richtung nicht ändern würde; sie ist sozusagen die Distanz Δ, um welche der Lichtstrahl im Unendlichen am Zentrum vorbeizielt.

Die aus dem Gleichungssystem (6) abgeleitete Gleichung der Bahnkurve lautet nach Einführung von

$$\frac{1}{R} = x$$

ganz analog wie bei Schwarzschild

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} - x^2 + \alpha x^3$$

und stellt somit die Gleichung eines Lichtstrahls im vorliegenden Gravitationsfelde dar. Es folgt

$$d\varphi = \frac{\Delta \cdot dx}{\sqrt{1 - \Delta^2 (x^2 - \alpha x^3)}}$$

und führt also gleichfalls auf ein elliptisches Integral wie die Planetenbewegung. Bei Einführung der neuen Variabeln

$$\mu = \Delta \cdot x \sqrt{1 - \alpha x}$$

ist bis auf Größen zweiter Ordnung in α

$$\Delta \cdot x = \mu\left(1 + \frac{\alpha}{2\Delta}\mu\right)$$

und man erhält

$$d\varphi = \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{\alpha}{\Delta}\frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\,.$$

Bezeichnet man mit φ_a den Winkel, den der Radiusvektor beschreibt, wenn ein Lichtstrahlelement aus dem Unendlichen bis zu seiner größten Annäherung an die Zentralmasse herankommt, was für

$$\frac{dx}{d\varphi} = 0$$

der Fall ist, so hat man

$$\varphi_a = \left(\arcsin \mu - \frac{\alpha}{\Delta}\sqrt{1-\mu^2}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\Delta},$$

da μ indessen von 0 bis genau zum Werte 1 ansteigt. Beim weiteren Forteilen des Lichtstrahlelements vom Perihel bis wieder ins Unendliche, bestreicht der Radiusvektor den Winkel φ_b, für den man gleichfalls findet

$$\varphi_b = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\Delta}.$$

Bei geradlinigem Verlauf des Lichtstrahls hätte der Radiusvektor im ganzen den Winkel π überstrichen. Der Lichtstrahl erleidet mithin im Gravitationsfeld die Ablenkung

$$\varepsilon = \varphi_a + \varphi_b - \pi = \frac{2\alpha}{\Delta}, \tag{7}$$

was mit der von Einstein hierfür gerechneten Formel[1]) übereinstimmt. Die hier gegebene Ableitung ist aber vollkommen identisch mit der Berechnung der Perihelbewegung der Planeten[2]). Der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Lichtstrahlen hat mithin die gleiche Ursache. Man kann somit die Ablenkung der Lichtstrahlen auch als eine Perihelbewegung auffassen.

Es möge noch der Wert der Koordinate R berechnet werden, welche dem Lichtstrahlelement im Perihel zukommt. Man erhält ihn aus Gleichungssystem (6) für

$$\frac{dR}{ds} = 0,$$

1) l. c. S. 195, Gleichungen (15), (16) u. (17).

1) Ann. d. Phys. 49, 822, 1916.

2) A. Einstein, Berliner Sitzungsberichte 1915, S. 831.

und zwar findet man die Beziehung

$$R^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)\Delta^2 = 0.$$

Das liefert bis auf Größen zweiter Ordnung in α schließlich

$$R = \Delta - \frac{\alpha}{2}. \qquad (8)$$

Man könnte mithin in Gleichung (7) bei gleicher Genauigkeit der Endformel auch die Größe R im Nenner statt Δ einführen.

§ 6. Die auf das Gravitationsfeld der Sonne bezüglichen numerischen Rechnungen sind zwar von Einstein und Schwarzschild fast alle schon mehr oder minder angenähert durchgeführt worden. Im folgenden möchte der Verfasser eine einheitliche und exakte Neuberechnung der in Betracht kommenden Konstanten geben. Die verwendeten astronomischen Größen wurden dabei der Konstantentafel am Schlusse der Theoretischen Astronomie von W. Klinkerfues[1]) entnommen. So wurde vor allem mit einer Äquatorialhorizontalparallaxe der Sonne

$$\pi = 8{,}80''$$

und einer Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2{,}9986 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$$

gerechnet, wie sie auf der Pariser Astronomen-Konferenz festgelegt wurden. Für den Äquatorialradius der Erde ist der Besselsche Wert verwendet worden.

Man erhält als Produkt aus Gravitationskonstante und Sonnenmasse

$$k^2 M_0 = 1{,}324 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}.$$

Daraus findet man für die wichtige Größe α den Wert

$$\alpha = 2{,}945 \cdot 10^5 \text{ cm},$$

der von Schwarzschild bloß rund mit 3 km angegeben worden war. Man sieht leicht ein, daß der aus dem scheinbaren Sonnenradius in bisher üblicher Weise berechnete wahre Sonnenradius wegen der Krümmung der Lichtstrahlen in Wirklichkeit jene im vorigen Paragraphen mit Δ bezeichnete Größe darstellt, die wir mit Δ_a bezeichnen wollen, wenn sie speziell auf einen die Sonnenoberfläche tangierenden Lichtstrahl Bezug hat. Aus dem scheinbaren Sonnenhalbmesser nach Auwers erhält man

$$\Delta_a = 6{,}9545 \cdot 10^{10} \text{ cm}$$

und den zugehörigen Wert von R_a für den Sonnenhalbmesser müßte man nach Gleichung (8) bestimmen. Wie sich zeigt, kann man aber bei dem bisherigen Stande der astronomischen Meßgenauigkeit die Größen R_a und Δ_a noch ruhig miteinander identifizieren. Für die Gesamtablenkung eines am Sonnenrande vorbeigehenden Lichtstrahls erhält man aus den obigen Zahlen $\varepsilon_a = 1{,}75''$ in guter Übereinstimmung mit der Berechnung von Einstein.

Zum Schlusse seien noch die Konstanten angegeben, die man erhält, wenn man die Sonne als Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit betrachtet. Die Relation

$$\sin^2 \chi_a = \frac{\alpha}{R_a}$$

läßt den Winkel χ_a an der Sonnenoberfläche als kleine Größe erkennen, zu deren Berechnung die Formel

$$\chi_a = \sqrt{\frac{\alpha}{R_a}}$$

genügt. Das liefert

$$\chi_a = 7'\,4{,}5'';$$

es ist diese Trichterfläche also recht eben, welche die Geometrie in einer zentralen Schnittebene des Sonnensystems abbildet. Für den Krümmungsradius des sphärischen Raumes im Innern der Sonne

$$R_0 = \frac{R_a}{\sin \chi_a}$$

genügt auch die vereinfachte Berechnung

$$R_0 = R_a \sqrt{\frac{R_a}{\alpha}}.$$

Man erhält durch numerische Rechnung, daß der Krümmungsradius R_0 des Innenraums 486 mal größer ist als der Radius R_a der Sonne. Oder in Zentimeter berechnet ergibt sich

$$R_0 = 3{,}38 \cdot 10^{13} \text{ cm},$$

was eine Distanz darstellen würde, welche von der Sonne bis zur Zone der Planetoiden reicht.

Zusammenfassung.

Im Innern einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit herrscht für jede Durchmesserebene dieselbe Geometrie wie auf einer Kugelfläche (§ 1). Um ein Massenzentrum herum herrscht in jeder zentralen Schnittebene dieselbe Geometrie wie auf einer Fläche, die durch Rotation einer Parabel um ihre Leitlinie erzeugt wird (§ 2). Die Kugelschale, welche für die Flüssigkeitskugel jede zentrale Schnittebene unter Erhaltung der Maßverhältnisse abbildet, muß das für den Außenraum das gleiche leistende Segment des Rotationsparaboloides angrenzend berühren (§ 3). Auch für die allgemeine Relativitätstheorie bildet das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, und zwar der „natürlich gemessenen", eine fundamentale Voraussetzung (§ 4). Die Ablenkung der Lichtstrahlen beim Vorbeigehen an der Zentralmasse läßt sich auch als Perihelbewegung wie bei den Planeten deuten (§ 5). Die Abweichungen von der eukli-

1) 2. Auflage von H. Buchholz, Braunschweig 1899, S. 927.

dischen Geometrie sind für das Sonnensystem äußerst gering (§ 6).

Physikalisches Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Eingegangen 3. September 1916.)

Zwei kleine Mitteilungen zu den Vorlesungen über Spektralanalyse.

Von F. Emich.

1. Zur Sichtbarmachung der Protuberanzen.

Bringt man eine Sodaperle, die an einem recht dünnen Platindraht hängt, in den (vorderen) Rand einer Kerzenflamme oder einer kleinen leuchtenden Gasflamme, wie sie mittels eines Bunsenbrenners bei ganz oder fast geschlossenen Luftöffnungen und aufgesetztem Schirm leicht zu erhalten ist, so wird die Gelbfärbung durch das Natrium aus mäßiger Entfernung kaum oder nicht mehr wahrgenommen. Betrachtet man eine solche Flamme aber mittels eines Prismas, so hebt sich die Natriumfärbung mehr oder weniger kräftig von der (weniger hellen) Spektralumgebung ab. Wichtig ist, daß sich die Perle an der richtigen Stelle befinde, die man durch Probieren zu suchen hat. Ein Flintglasprisma von 60° genügt zwar, weit besser aber ist ein Prismensatz z. B. aus einem Browningschen Taschenspektroskop oder ein geradsichtiges Prisma, wie es zu Projektionszwecken in den Handel kommt. Die Flamme sei am Experimentiertisch, das Prisma läßt man unter der Hörerschaft herumgehen. Natürlich kann auch eine fixe Aufstellung gemacht und dabei ein Fernrohr zugeschaltet werden. Das normale Auge gewinnt aber dabei nicht viel. Stellt man zwei Prismen auf, so kann die Wirkung der größeren Dispersion anschaulich gemacht werden, indem man einmal durch das eine Prisma und einmal durch beide Prismen blicken läßt, die z. B. so gelagert sind, daß das eine das andere (in lotrechter Richtung) zur Hälfte überdeckt.

Am lehrreichsten und bequemsten ist wohl ein (Ivessches) Gitter; man übersieht dabei sozusagen mit einem Blick die Wirkung der verschiedenen Dispersion in den Spektren verschiedener Ordnung.

Natürlich sind noch weitere Abänderungen möglich, die der Phantasie des einzelnen überlassen bleiben mögen; nur eine will ich erwähnen. Sie besteht darin, daß man einen Leuchtgasstrom in bekannter Weise, d. h. dadurch mit Kochsalzstäubchen schwängert, daß man ihn durch den Gasraum einer Waschflasche leitet, die Zink, Kochsalz und stark verdünnte Schwefelsäure enthält. Das aus einer Spitze lotrecht ausströmende Gas soll eine 2—3 dm hohe Flamme bilden; sie zeigt das Phänomen gleichfalls sehr hübsch[1]).

2. Glüherscheinungen an stark absorbierenden Gasen.

Weiter sei darauf aufmerksam gemacht, daß das bekannte Glühen[2]), das z. B. Brom- und Joddampf bei Rotglut zeigen, in gefahrloser Weise mittels Röhrchen aus durchsichtigem Quarzglas[3]) vorgeführt werden kann. Die Röhrchen haben etwa 3 mm äußeren Durchmesser, $^1/_2$ mm Wandstärke und 3 cm Länge. Sie sind mit einigen Zentigrammen Jod, bzw. Brom beschickt. Die Herstellung geschieht in der Weise, daß man das Röhrchen AB von etwa 12 cm Länge an der Stelle C im Knallgasgebläse zusammen-

A C B

fallen läßt, dann das Halogen in den Teil BC einfüllt, die Luft durch Erhitzen vertreibt und schließlich bei B (das man schon vorher zu einer Spitze ausgezogen) und bei A zuschmilzt. AC dient als Stiel zum Anfassen, BC ist das eigentliche Versuchsröhrchen. Beim Versuch wird es unter leichter Bewegung mit der (vorsichtshalber mit einem starken Lederhandschuh geschützten) Hand in eine Spiritus- oder Bunsenflamme gehalten, die man zwischen zwei starken Glasscheiben brennen läßt. Die eine ist gegen die Zuhörer, die andere gegen den Vortragenden aufgestellt. Obwohl die Röhrchen das Erhitzen bis zum Gelbglühen vertragen und obwohl eine Explosion unter den angegebenen Maßregeln keinen Schaden anrichtet, kann man vorsichtshalber eventuell nur bis zu kräftigem Rotglühen des Inhalts erhitzen. Man versäume nicht, vorher oder später auch einen Teil des Rohres zwischen A und C zu erhitzen, damit der Zuhörer wahrnimmt, daß das Quarzglas allein bei der fraglichen Temperatur nicht nennenswert Licht aussendet. Noch sei daran erinnert, daß Quarzgefäße vor dem Erhitzen gut gereinigt werden sollen, da sie z. B. infolge des Anfassens mit dem Finger Bestandteile aufnehmen, die für sich ein, wenn auch schwaches Glühphänomen erzeugen können.

1) Ich bin mir bewußt, daß diese Versuche zu den „Selbstverständlichkeiten" gehören, und vielleicht sind sie schon von manchem Lehrer gezeigt worden, wie ich sie seit Jahren zeige. Ich hätte die kleine Mitteilung auch nicht veröffentlicht, wenn mir nicht von sehr maßgebender Seite dazu geraten worden wäre.

2) H. Kayser, Spektroskopie II, 158.

3) Bezugsquelle W. C. Heraeus, Hanau.

Graz, Techn. Hochschule, Laboratorium für allgemeine Chemie, August 1916.

(Eingegangen 16. August 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Zur Frage nach dem Ursprunge der Niederschlagselektrizität.

Von H. Geitel.

Die Erforschung der Quellen der Niederschlagselektrizität ist trotz mancher in den letzten Jahren erzielten Fortschritte — sowohl in der Beschaffung von Beobachtungsergebnissen wie auch in der experimentellen Untersuchung des elektrischen Verhaltens des Wassers bei solchen Vorgängen, wie sie während der Bildung und des Herabfallens der Niederschläge als wahrscheinlich anzunehmen sind — noch nicht in dem Grade abgeschlossen, daß man von einem in jeder Weise befriedigenden Einblicke in das Wesen dieser Erscheinung sprechen dürfte.

Andrerseits darf für den Gegenstand ein erhebliches Allgemeininteresse vorausgesetzt werden; bilden ja doch die Äußerungen der Gewitterelektrizität einen der eindrucksvollsten und für viele Gebiete der Technik einflußreichsten Vorgänge der Physik unserer Erde. Eine kurze Darstellung der jetzigen Lage des Forschungsgebiets, die ich auf Wunsch der Schriftleitung dieser Zeitschrift im folgenden zu geben versuche, ist daher vielleicht nicht unwillkommen.

Unter atmosphärischen Niederschlägen werden wir im folgenden das Wasser in all den verschiedenen Gestalten verstehen, unter denen es aus der Verdichtung seines Dampfes in dem freien Luftraume hervorgeht, von den Nebeltröpfchen der Wolke an bis zu den fallenden Regentropfen, Graupeln, Hagelkörnern und Schneeflocken.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß alle diese Körper mit elektrischen Ladungen behaftet vorkommen können, und dadurch ist die Aufgabe gegeben, die Ursache dieser Erscheinung aufzusuchen.

Da auch bei Abwesenheit von Wolken und Niederschlägen die Lufthülle der Erde zugleich der Sitz eines elektrischen Feldes ist, dessen Niveauflächen der Erdoberfläche parallel laufen, indem die letztere mit freier negativer Elektrizität belegt ist, die Niederschläge also während ihrer Bildung im allgemeinen elektrischen Kräften ausgesetzt sind, so empfiehlt es sich, zunächst festzustellen, ob schon hierdurch allein freie Ladungen auf den Niederschlagsteilchen entstehen können.

Es ist dies möglich, wenn wir neben dem elektrischen Felde in der Atmosphäre noch die ständige Ionisierung der Luft heranziehen.

Die Tatsache des Zusammenbestehens des elektrischen Feldes in der Luft mit einer gewissen Leitfähigkeit der letzteren bildet bekanntlich die Hauptschwierigkeit der Lehre von der Luftelektrizität[1]). Beide Umstände bedingen das Vorhandensein eines elektrischen Vertikalstromes in der Atmosphäre, der in der Nähe der Erdoberfläche im Mittel $2 \cdot 10^{-16}$ Amp. cm^{-2} beträgt und durch welchen positive Ionen nach unten, negative nach oben getrieben werden.

Schon in etwa 10 Minuten müßte unter den tatsächlich vorhandenen Bedingungen die Dichtigkeit der negativen Elektrizität am Erdboden auf den 10. Teil sinken und entsprechend die Stärke des Erdfeldes abnehmen, wenn nicht durch eine — noch nicht befriedigend aufgeklärte — elektromotorische Kraft die Ladung der Erdoberfläche im Mittel unverändert bewahrt würde.

Der auf diese noch unbekannte Art dauernd unterhaltene elektrische Vertikalstrom wird nun durch das Auftreten von Wolken in der Atmosphäre gestört. Die Leitfähigkeit der Luft nimmt infolge der Verkleinerung der Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen im Nebel ab, es treten Stauungen der Ionen auf, die zur Bildung von Raumladungen unter gleichzeitiger Änderung des Erdfeldes führen[2]). Für die Beobachtung am günstigsten ist der Fall, daß durch nächtliche Ausstrahlung bei windstillem klaren Wetter sich eine Wolkenschicht unmittelbar auf der Erde, sog. Bodennebel bildet. Die Verdichtung des Wassers erfolgt hier wesentlich an Staubteilchen, die nicht notwendig eine elektrische Eigenladung zu tragen brauchen; der Nebel ist im Augenblicke seiner Entstehung elektrisch neutral.

Die Aufwärtsbewegung negativer Ionen von der Erdoberfläche aus wird durch den Nebel gelähmt, ebenso, innerhalb des Nebels selbst, die Abwärtsbewegung der positiven. Erst oberhalb des Nebels vermögen die Luftionen den Triebkräften des Erdfeldes zu folgen. Die obere Grenzschicht des Nebels wird ein Stauungsgebiet der positiven Ionen werden, während die unmittelbar darüber gelagerte noch nebelfreie Luft an negativen verarmt. Es bildet sich ein

1) Aufschluß über diese Fragen geben die Lehrbücher über atmosphärische Elektrizität: A. Gockel, Die Luftelektrizität, Leipzig 1908; W. Mache und E. von Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität, Braunschweig 1909; K. Kähler, Sammlung Göschen, 1913.

2) J. Elster u. H. Geitel, Meteorol. Zeitschr. 17, 230, 1900.

Kondensator aus, dessen Dielektrikum von der Nebelschicht, dessen Belegungen von der Erdoberfläche und der oberen Nebelgrenze gebildet werden. Die Feldstärke innerhalb des Nebels muß demnach anwachsen, ihr Endwert hängt ab von der Dicke der Nebelschicht und von dem Reste an Leitfähigkeit, den die mit Nebel erfüllte Luft bewahrt, oberhalb des Nebels ist das Erdfeld kleiner als das normale.

Hohe Beträge des elektrischen Feldes der Erde (der „Luftelektrizität") im Bodennebel sind nun in der Tat eine allgemein verbreitete Erscheinung. Es bliebe noch zu prüfen übrig, ob ihnen besonders geringe Feldkräfte oberhalb der Nebelschicht entsprechen; die Ausführung dieser Beobachtungen wäre am einfachsten vom Ballon aus zu bewerkstelligen. — Die Ionenstauung im Nebel läßt sich übrigens leicht in kleinem Maßstabe durch den Versuch nachweisen[3]).

In eine flache Metallschale, die auf isolierender Unterlage ruht, von mehr als 50 cm Durchmesser, wird ein Strom von Kohlendioxyd geleitet, das nach Passieren zweier Flaschen, von denen die eine etwas konzentrierte Salzsäure, die andere Ammoniakwasser enthält, sich mit einem dichten Salmiaknebel beladen hat. In ruhiger Luft bildet es eine weiße, die Schale bis zum Rande erfüllende Schicht. Wird nun die Schale durch Anschluß an eine Säule etwa negativ geladen, während die Luft oberhalb der künstlichen Nebelschicht durch Radiumstrahlen oder eine Flamme ionisiert wird, so lädt sich der Salmiaknebel positiv auf. Man zeigt dies, indem man die Schale, nach Abschaltung der ladenden Batterie mit einem Elektrometer verbindet und den Salmiaknebel hinausbläst. Das Elektrometer zeigt freie negative Elektrizität an, die durch die positive des Nebels gebunden war. In entsprechender Weise fällt der Versuch bei umgekehrtem Vorzeichen der Ladung der Schale aus.

Handelt es sich nicht um Bodennebel, sondern um eine in der freien Atmosphäre in größerer Höhe über der Erdoberfläche befindliche Wolkenschicht, so wird ebenfalls durch Ionenstauung im elektrischen Felde der Erde die obere Grenzschicht der Wolke sich positiv, die untere dagegen negativ aufladen. Hierdurch wird ein besonderes starkes Kraftfeld in der Wolke selbst hervorgerufen werden. Es wäre von Interesse, die Störungen des Erdfeldes in der Nähe von Wolken und in ihrem Inneren durch planmäßige Beobachtungen vom Ballon aus zu verfolgen. Die bis jetzt vorliegenden Erfahrungen zeigen das Vorhandensein solcher Störungen an, die wahrscheinlich der genannten Ursache zuzuschreiben sind[4]). Unmittelbar für die zu erwartende Stauung der Ionen sprechen die Ballonbeobachtungen von H. Bongards[5]), der an der unteren Grenze der Wolke die positive polare Leitfähigkeit der Luft, an der oberen die negative überwiegend fand, entsprechend der vermehrten Dichte der negativen, bzw. der positiven Ionen.

Das Wesentliche der vorigen Ausführungen liegt darin, daß sie grundsätzlich die Entstehung von Wolkenladungen allein durch das elektrische Feld der Erde als möglich erkennen lassen. Niederschlagsteilchen, die aus derartig elektrisierten Nebeln herabfallen, werden je nach der Lage der Schicht, der sie entstammen, positive oder negative Ladungen zur Erde führen, während die zurückgebliebenen Elektrizitätsmengen schwächend oder verstärkend auf das Erdfeld wirken müßten.

Die geringe Wanderungsgeschwindigkeit der Luftionen, die im Erdfelde mittlerer Intensität von der Ordnung eines Zentimeters in der Sekunde ist, macht die genannte Elektrizitätsbewegung wenig ergiebig und läßt die daraus entspringenden Ladungen der Wolken wohl nur in ruhender Luft merklich werden. Keineswegs reichen die auf diese Weise bewegten Elektrizitätsmengen aus, um die elektrischen Vorgänge während einer Böe oder eines Gewitters verständlich zu machen.

Einen Versuch, auch in diesem Falle mit Feldkräften allein, aber unter Zuhilfenahme von Zusammenstößen zwischen den Niederschlagsteilchen auszukommen, werden wir am Schlusse noch zu besprechen haben.

Wir wenden uns jetzt zu gewissen Vorgängen mechanischer Art, die von elektrischen begleitet sind und die an fallenden Wassertropfen vorkommen können. Sie sind gerade in der letzten Zeit zur Erklärung der Niederschlagselektrizität herangezogen worden. Die Kenntnis der ganzen Erscheinungsgruppe verdankt man im wesentlichen den Arbeiten von P. Lenard und seinen Schülern.

Ein Wassertropfen in freier Luft nimmt zunächst, wie jeder fallende Körper, eine beschleunigte Bewegung an, die aber nach dem Zurücklegen einer je nach der Größe des Tropfens verschiedenen Wegstrecke infolge des Luftwiderstandes in eine gleichförmige übergeht. Hierbei plattet sich der Tropfen, sobald

3) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. 7, 370, 1906.

4) F. Linke, Luftel. Messungen bei 12 Ballonfahrten. Abh. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 3, 5, 1904.

5) H. Bongards, Ber. über die Tätigkeit des K. Preuß. Aeronaut. Observatoriums bei Lindenberg im Jahre 1913. S. 253, 1914.



er eine gewisse Größe überschreitet, ab, während er seinen größten Querschnitt senkrecht zur Fallrichtung einstellt. Die an dem Tropfen vorbeigleitende Luft ruft in ihm Strömungen hervor, es entsteht ein Wirbelring, indem am Rande des Tropfens das Wasser aufwärts, in der Mitte abwärts fließt. Die Erscheinung hängt offenbar nur von der gegenseitigen Bewegung des Tropfens und der Luft ab, sie läßt sich daher in ihrem ganzen Verlaufe nach Lenard[6]) bequem verfolgen, indem man Tropfen in einen möglichst wirbelfreien, senkrecht aufsteigenden Luftstrom von großem Querschnitt und gleichförmiger, in gewissen Grenzen regelbarer Geschwindigkeit einführt. Man stellt die letztere so ein, daß die Tropfen in unveränderlicher Höhe schwebend erhalten bleiben. Es läßt sich dieser Zustand eine für die Beobachtung genügend lange Zeit festhalten. Allmählich wandern allerdings die Tropfen gegen den Außenrand des Luftstroms hin, bis sie von diesem nicht mehr erfaßt werden und seitlich hinausgeworfen zu Boden sinken. In diesem Augenblicke kann man sie auf Löschpapier auffangen und ihre Größe bestimmen.

Mittels dieses Verfahrens findet man für die verschiedenen Tropfengrößen diejenige Geschwindigkeit des Luftstromes, die sie gerade trägt, die also mit der gleichförmigen Fallgeschwindigkeit derselben Tropfen in ruhender Luft übereinstimmt. Überschreitet nun ein Tropfen eine gewisse Größe (etwa 0,13 g, entsprechend einem Kugelradius von 3,18 mm), so gibt es keine noch so große ihn tragende Luftgeschwindigkeit mehr; die innere Wirbelbewegung löst ihn in einen Ring kleinerer Tropfen auf, die nun von dem Luftstrome nach oben geführt werden.

Die dem Grenzgewicht von 0,13 g zugehörige Geschwindigkeit des Luftstroms beträgt etwa $8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$.

Hiernach gibt es (in Übereinstimmung mit der Erfahrung) überhaupt keine Regentropfen, deren Gewicht 0,13 g und deren Geschwindigkeit gegen die umgebende Luft 8 m wesentlich übersteigt. Bildet sich, etwa durch Zusammenfließen mehrerer fallender Tropfen, eine größere Wasseransammlung heraus, so zerfällt sie von selbst in kleinere von beständiger Größe.

Nun ist mit dem Zerspritzen reinen Wassers im allgemeinen eine Elektrizitätsentwicklung verknüpft, deren Bedingungen vor allem ebenfalls von Lenard[7,8,9]) erforscht sind.

Der Gedanke, diese elektrischen Begleiterscheinungen der Wasserzerteilung in eine innere Verbindung mit der Niederschlagselektrizität zu bringen, ist von vornherein recht einleuchtend und drängt sich jedem auf, der die überraschend großen elektrischen Spannungen beobachtet hat, die die Wolke von Wasserstaub am Fuße eines Falles auch bei kleinen Wasserläufen im Gebirge zeigt. Diese sog. Wasserfallelektrizität ist eine längst bekannte Erscheinung, der Name wird jetzt allgemein zur Bezeichnung der Gruppe elektrischer Vorgänge angewandt, die beim Zerspritzen, Zerstäuben des Wassers und beim Durchperlen von Luft durch Wasser auftreten können. (Von C. Christiansen ist der Name „Balloelektrizität" vorgeschlagen.)

Bevor man indessen an eine Zurückführung der Niederschlagselektrizität auf diese Ursache denken konnte, war es notwendig, den den genannten Sonderfällen gemeinsamen Vorgang aufzufinden, der die Elektrizitätsentwicklung verursacht.

Die ursprüngliche und noch heute fast allgemein angenommene Anschauung ist die, daß eine Elektrizitätsentwicklung stets dann eintritt, wenn die freie Oberfläche, in der Wasser und Luft aneinandergrenzen, eine plötzliche Verkleinerung erfährt. Bei Berührung von Wasser und Luft soll sich nämlich eine elektrische Doppelschicht bilden, deren positive Belegung in der Wasserfläche, deren negative in der berührenden Luft liegt. Beim schnellen Zusammenziehen der Wasseroberfläche, wie es bei allen Formveränderungen schwebender Tropfen infolge der Kohäsionskräfte erfolgt, würde ein Teil der berührenden Luftschicht abgestreift und nähme dabei seine negative Ladung mit, während die entsprechende positive im Wasser bliebe. Tatsächlich kommen bei jeder Zerreißung des Wassers plötzliche und starke Oberflächenverminderungen vor, da die entstehenden Wasserteilchen ursprünglich nicht kugelförmig sind, sondern Bruchstücke von Flüssigkeitsmembranen und Fäden darstellen, die in sehr kurzer Zeit unter Zusammenziehung der freien Oberflächen in Kugeln übergehen.

Nun ist aber kürzlich von Lenard[10]) gezeigt, daß diese Auffassung von der Natur der Wasserfallelektrizität einer schärferen Prüfung nicht standhält.

Zunächst war die vorausgesetzte elektrische Doppelschicht zwischen Wasser und Luft durch andere Wirkungen als diejenige, zu deren Erklärung man sie eingeführt hat, nicht nachweisbar.

Man sollte erwarten, wenn eine solche Dop-

6) P. Lenard, Meteorol. Zeitschr. **21**, 249, 1904.
7) P. Lenard, Wied. Ann. **46**, 584, 1892.
8) P. Lenard, Sitzungsber. der Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-Phys. Klasse. Abt. A, 28. Abhandlung, 1914.
9) P. Lenard, Ann. d. Phys. **47**, 463, 1915.

10) l. c. 8 und 9.



pelschicht vorhanden wäre, daß die Oberflächenspannung des Wassers im Vakuum von der in Luft merklich verschieden sein müßte, da die letztere durch die hinzukommenden elektrischen Kräfte (sobald wenigstens der Potentialsprung mehr als 0,1 Volt betrüge) vermindert würde.

Durch den Versuch ließ sich indessen eine Abnahme der Oberflächenspannung in Luft gegen die im Vakuum nicht erkennen, ebensowenig wie die Wasserfallelektrizität in Luft von derjenigen erheblich abwich, die in Kohlendioxyd, Sauerstoff, Stickstoff, Methan, Wasserstoff beobachtet wurde. Wenn ein Teil jener Doppelschicht im Gase lag, so wäre ein starker Einfluß des Gases, insbesondere auch seiner Dielektrizitätskonstanten vorauszusehen gewesen. Ferner lag die Wahrscheinlichkeit vor, daß man bei großer Relativgeschwindigkeit zwischen Wasser und Luft die negative Luftbelegung der Doppelschicht abreißen könnte, d. h. daß eine Reibungselektrizität zwischen Wasser und Luft nachweisbar sein würde. Aber selbst bei großen Geschwindigkeiten (20 m) wurden keine Anzeichen davon gefunden, wie ja anscheinend überhaupt keine Elektrizitätsentwicklung beim Strömen von Gasen an kalten unbeleuchteten Körpern beobachtet wird.

Die von G. Quincke entdeckte elektrische Fortführung von Luftblasen in Wasser beweist zwar das Vorhandensein einer elektrischen Doppelschicht an der inneren Oberfläche der Blasen, nötigt aber nicht zu dem Schlusse, daß die eine Belegung in der Luft liegt, vielmehr können beide in der Wasseroberfläche liegen.

Andrerseits erwies sich das bloße Zusammenfließen von Tropfen und die Zerteilung des Wassers allein als elektrisch unwirksam, so lange man verhütete, daß dabei kleinste Wassertropfen aus der Oberfläche herausgerissen wurden. Daher ist auch das ruhige Abtropfen von Wasser so gut wie ohne elektrische Nebenwirkung, während beim Zerblasen von Strahlen und Tropfen kräftige Wasserfallelektrizität auftritt. Die letztere ist dabei an die Bildung allerfeinsten Wasserstaubes gebunden, dieser selbst, nicht die Luft, ist negativ elektrisch, die gröberen Tropfen tragen die entsprechende positive Ladung.

Nach Lenard gibt es daher allerdings eine elektrische Doppelschicht an der freien Oberfläche des Wassers, nur liegen beide Belegungen im Wasser, die negative nach außen; die Dicke der Schicht ist von der Ordnung der Wirkungssphäre der Molekularkräfte. Nur solche Wassertröpfchen, deren Substanz überwiegend aus der äußersten Grenzschicht stammt, können negative Ladungen mitnehmen.

Diese Auffassung von der Beschaffenheit der freien Wasseroberfläche erscheint bei Lenard im inneren Zusammenhange mit der elektrischen Natur der Molekularkräfte überhaupt, und er vermag auf dieser Grundlage eine Reihe anderer elektrischer Eigenschaften des Wassers und wässeriger Lösungen zu erklären, wie z. B. das Fehlen jeder Fortführung elektrischer Ladungen beim Verdampfen des Wassers und die Umkehrung des Vorzeichens der Wasserfallelektrizität bei Gegenwart von gelösten Elektrolyten.

Es war notwendig, das Wesen der Wasserfallelektrizität nach dem neuesten Stande der Forschung zu kennzeichnen, bevor die auf diese Erscheinung von G. C. Simpson[11, 12, 13]) gegründete Theorie des Gewitters besprochen wird.

Der dieser Auffassung zugrunde liegende Gedankengang, der, soweit er die rein mechanischen Vorgänge bei der Regenbildung betrifft, schon von Lenard[14]) ausgesprochen wurde, ist im wesentlichen der folgende.

Die Verdichtung des Wasserdampfs in den Gewittern findet vornehmlich in dem aufsteigenden Luftstrome durch adiabatische Entspannung statt. Während die feinsten Nebeltröpfchen von dem Luftstrom mit nahe derselben Geschwindigkeit mitgerissen werden, verlangsamt sich ihre Aufwärtsbewegung in dem Maße, wie sie durch Anlagerung von Kondensationswasser oder Zusammenfließen mit anderen an Gewicht zunehmen. Die Tropfen bleiben so lange beständig, bis der Geschwindigkeitsunterschied gegen den aufsteigenden Luftstrom auf etwa 8 m angewachsen, ihr Gewicht auf 0,13 g gestiegen ist. Bei weiterer Vergrößerung der Tropfen tritt plötzlicher Zerfall in einen Kranz von kleineren Tröpfchen ein, die nun ihrerseits langsamer fallen, bis durch erneute Vergrößerung und Annäherung an das Grenzgewicht von neuem Zerreißung erfolgt. Der Vorgang wiederholt sich in dieser Weise unausgesetzt, ohne daß das Wasser den Erdboden erreicht, wenn angenommen werden darf, daß senkrechte Geschwindigkeiten von mindestens 8 m in der Sekunde in dem aufsteigenden Luftstrome tatsächlich vorkommen. Für kleinere Geschwindigkeiten würde ein Tropfenzerfall zwar auch eintreten, aber die Orte, an denen die aufeinanderfolgenden Zerreißungen stattfinden, würden immer tiefer rücken; bei erreichter kritischer Geschwindigkeit von 8 m müßten die

11) G. C. Simpson, Philos. Trans. Ser. A, **209**, 379, 1909.
12) G. C. Simpson, diese Zeitschr. **14**, 1057, 1913.
13) G. C. Simpson, Phil. Mag. (6) **30**, 1, 1915.
14) l. c. 6.

Tropfen im Moment des Zerfalls gerade noch schweben, bei größerer Geschwindigkeit würden sie dauernd im Aufsteigen begriffen bleiben. Im ersten Falle wird ein und dieselbe Wassermenge nur wenige Male zerblasen, während im zweiten und dritten die Zerreißung beliebig oft wiederholt wird. Nach Simpson belädt sich die aufsteigende Luft dabei mit negativer Elektrizität, während das Wasser die zugehörige positive Ladung annimmt. Es findet eine Elektrizitätsscheidung statt, durch welche die höheren Teile der Wolke, in denen die aufsteigende Bewegung und die Kondensation schon erlahmt ist, negativ, die unteren aus größeren Tropfen bestehenden Schichten positiv geladen werden. Aufsteigende Luftströme von der Größenordnung von 8 m in der Sekunde kommen in Gewitterwolken ohne Zweifel vor. Daß sie nicht dauernd beliebige Tropfenmassen schwebend erhalten können, liegt auf der Hand, da eben durch den Druck der Tropfen die Geschwindigkeit vermindert wird, und so wird man erwarten müssen, daß der einem Gewitter entströmende Platzregen vorwiegend positiv geladen ist, während die aus den höchsten Teilen der Gewitterwolke entfallenden kleineren Tröpfchen die durch Ionenadsorption aufgenommene negative Ladung der Luft zu Boden führen.

Man sieht, diese Gewittertheorie stellt in der Tat eine Gedankendichtung dar, die ein anschauliches Bild von mechanischen und elektrischen Vorgängen gibt, die zur Entstehung der Niederschlagselektrizität führen können. Auch quantitativ scheint sie zu genügen, wenn man von den experimentell bestimmbaren Elektrizitätsmengen ausgeht, die beim Zerblasen eines Tropfens Wasser geschieden werden und den entsprechenden Betrag für die Wassermassen einsetzt, die tatsächlich in einem Gewitterregen niederfallen.

Bei Aufstellung seiner Theorie ging Simpson von der damals anscheinend gut begründeten Annahme aus, daß bei der Wasserfallelektrizität die negative Ladung an der Luft, die positive an dem Wasser hafte. In der Widerlegung dieser Auffassung durch Lenards Untersuchungen liegt daher eine Schwäche der Theorie. Bei Versuchen im Laboratorium mit Luftströmen verhältnismäßig kleinen Querschnitts, die gegen fallende Wassertropfen gerichtet werden, treten ohne Zweifel Wirbelbewegungen auf, die kleine Tröpfchen aus der Oberfläche größerer abreißen können. Hierdurch ist erst die von Lenard gefundene Bedingung für das Eintreten der Wasserfallwirkung erfüllt, und in der Tat geben ja derartige Versuche kräftige Elektrizitätsentwicklung an.

Es ist nun keineswegs mit gleicher Sicherheit anzunehmen, daß in aufsteigenden atmosphärischen Strömungen, deren Querschnitt nach Quadratkilometern zählt, derselbe Erfolg eintreten wird. Lenard glaubt daher eine Elektrizitätsentwicklung durch den Tropfenzerfall in den Wolken nur bei tumultuarischer Aufwärtsbewegung der Luft annehmen zu dürfen. Aber auch hier ist es schwer vorstellbar, daß die Luftbewegung in so kleinen Raumelementen tumultuarisch, d. h. nach Stärke und Richtung wechselnd, abläuft, daß sie an verschiedenen Stellen desselben Tropfens in ungleichförmiger Weise angriffe, denn nur so könnte man sich das Abreißen kleinster Teile der molekularen Oberflächenschicht bewirkt denken. Jedenfalls sind die quantitativen Bestimmungen Simpsons nicht mehr maßgebend, da die entwickelten Elektritätsmengen nicht allein davon abhängen, daß Wassertropfen zerreißen, sondern der Hauptsache nach von der Art, wie die Zerreißung erfolgt.

Wie dem aber sein mag, man hat zuzugestehen, daß in der nach den neuesten Ergebnissen Lenards schärfer gefaßten Simpsonschen Theorie ein im wesentlichen in sich widerspruchsfreies Bild eines möglichen elektromotorischen Vorganges in den Wolken gegeben wird.

Wir hätten nun zu untersuchen, wie dieses Bild mit den beobachteten Tatsachen übereinstimmt, als solche haben wir Größe und Vorzeichen der Niederschlagselektrizität und des gleichzeitig bestimmten elektrischen Feldes der Erde anzusehen.

Regentropfen, Schneeflocken, Graupeln und Hagelkörner zeigen sämtlich in der Nähe der Erdoberfläche (nur dort sind solche Beobachtungen bis jetzt gemacht) eine gewisse elektrische Ladung, die positiv oder negativ, daher im seltenen Sonderfalle auch Null sein kann.

Es liegt schon ein ziemlich reiches Material an Beobachtungen vor von den Orten Wolfenbüttel (Beobachter J. Elster und H. Geitel[15, 16, 17]) Göttingen (H. Gerdien[18])), Wien (E. Weiss[19])), Graz (H. Benndorf[20])), Portorico (K. W. F. Kohlrausch[21])), Puy en Velay (A. Baldit[22 23])), Simlah (G. C. Simpson[24])), Potsdam (K. Kähler[25]) und F. Schin-

15) J. Elster u. H. Geitel, Meteorol. Zeitschr. **5**, 95, 1888.
16) J. Elster u. H. Geitel, Wien. Ber. **99**, 421, 1890.
17) J. Elster u. H. Geitel, Terrestr. Magn. **4**, 15, 1899.
18) H. Gerdien, diese Zeitschr. **4**, 837, 1903.
19) E. Weiss, Wien. Ber. **115**, 1299, 1906.
20) H. Benndorf, Wien. Ber. **119**, 89, 1910 u. Sitzungsber. der Münchner Akad. Jahrgang 1912, S. 402.
21) K. W. F. Kohlrausch, Wien. Ber. **118**, 25, 1909.
22) A. Baldit, Le Radium **8**, 153, 1911.
23) A. Baldit, Le Radium **9**, März-Heft 1912.
24) G. C. Simpson, l. c. 11, 12, 13.
25) K. Kähler, diese Zeitschr. **9**, 258, 1908.



delhauer[26])), Buenos Aires (G. Berndt[27])), Dublin (McClelland und Nolan[28])), Kiel (F. Herath[29])).

Sieht man von den in Wolfenbüttel, Potsdam, Göttingen erzielten Ergebnissen ab, so zeigen die andern Stationen im ganzen ein Überwiegen der positiv geladenen Regenfälle sowohl nach Häufigkeit wie Stärke der Ladung an, das an einigen Orten, wie Simlah, Puy en Velay, Buenos-Aires, Kiel sehr ausgeprägt ist. Starke Regenfälle (Platzregen) sind in der Regel positiv geladen. Für Wasser in fester Form ergeben sich, soweit Beobachtungen vorliegen, etwa gleiche Elektrizitätsmengen beiderlei Zeichens. Rechnet man die Ergebnisse aller genannten Stationen als gleichwertig hinsichtlich der Ausschließung von Fehlerquellen, so käme insgesamt ein Überschuß positiv geladener Regenfälle heraus. (Wir wollen, der unparteiischen Wertung des Beobachtungsmaterials wegen, diese Art von Durchschnittsrechnung zulassen, obgleich bekanntlich gerade die Bestimmung der Regenelektrizität im höchsten Grade der Fälschung durch abspritzende Tropfen ausgesetzt ist, die beim Zerspritzen mit der Erde in leitender Berührung standen und nicht völlig gegen das bei Regenfällen häufig sehr starke elektrische Feld der Erde geschützt waren. Bei Schnee-, Graupel- und Hagelfällen ist diese Fehlerquelle weit weniger zu fürchten, da das Zerspritzen fortfällt.) Schwache Regen- und Schneefälle sind nach den vorliegenden Messungen, auf gleiche Wassermengen bezogen, viel weniger elektrisch, als solche die in Form von Platzregen und dichtem Schneegestöber während eines Gewitters oder einer Böe niedergehen; bei den ersteren entspricht die zu Boden geführte Elektrizitätsmenge einem Strome von der Ordnung 10^{-15} Amp. cm^{-2}, bei letzterem kann die Stromstärke auf 10^{-12} Amp. steigen. Das Erdfeld ist während eines Landregens in der Regel umgekehrt wie bei heiterem Himmel gerichtet, das Potentialgefälle über der Erdoberfläche also negativ.

Bei Böen und den eigentlichen, von Blitzentladungen begleiteten Gewittern ist neben der höheren Durchschnittsladung der Niederschläge der häufige Wechsel in der Größe und Richtung des Erdfeldes bemerkenswert. Diese Sprünge treten, wie von vornherein zu erwarten ist, besonders regelmäßig in Verbindung mit Blitzentladungen auf und entziehen sich bei lebhafter Gewittertätigkeit durch ihre Häufigkeit und Größe selbst einer nur angenäherten Messung. Ein Teil der Erscheinung ist einfache Folge der Influenz des bei der Entladung zusammenbrechenden Erdfeldes auf den als Potentialausgleicher verwandten Kollektor.

Ein durchgreifender Unterschied im elektrischen Verhalten einer Böe und eines Gewitters ist nicht erkennbar, es muß als ein unwesentlicher Umstand betrachtet werden, wenn bei der ersteren die Spannungsdifferenz zwischen den Wolken oder gegen die Erde nicht immer bis zum Entladungspotential steigt. Solche blitzlosen Böen, bei denen die Störung des Erdfeldes durch Entladungen wegfällt, zeigen in vielen Fällen eine gewisse Regelmäßigkeit in dem Wechsel des Erdfeldes wie auch im Vorzeichen der Niederschlagselektrizität, die an dieser Stelle wiederum der Aufmerksamkeit der Beobachter empfohlen sei.

Schneefälle, besonders solche, in denen großflockiger Schnee mit Graupeln abwechselt, führen elektrische Ladungen von mindestens derselben Größe wie Gewitterregen mit sich. Auch hier kommen beide Vorzeichen in öfterem Wechsel vor, das Erdfeld ist wie bei Gewittern in weiten Grenzen schwankend, die Zeichenwechsel erfolgen im allgemeinen langsamer als bei jenen, wohl infolge der Seltenheit von Entladungen.

Schließlich sei noch einer Erscheinung gedacht, die zwar nicht regelmäßig auftritt, aber zuweilen in merkwürdig konstanter Weise während eines und desselben Niederschlagsfalles andauert[30,31,32]), nämlich des Zusammentreffens positiver Niederschlagselektrizität mit negativer Richtung des Erdfeldes und umgekehrt. Stellt man den Gang des Erdfeldes zugleich mit dem der zu Boden geführten Elektrizitätsmengen graphisch dar, so erhält man Kurven, die als Spiegelbilder in bezug auf die Zeitachse aufgefaßt werden können, zuweilen mit einer kleinen Phasenverschiebung von einigen Minuten. Da bei negativer Richtung des Erdfeldes die Erdoberfläche positiv, bei positiver negativ geladen ist, so führen in diesem Falle die Niederschläge dem Erdboden gleichnamige Ladungen zu, sie wirken feldverstärkend.

Beschränken wir uns zunächst auf die eigentlichen Gewitterregen, so stimmt das Überwiegen positiver Ladungen in den starken Regengüssen wohl mit einer „wasserfallelektrischen" Theorie des Gewitters überein, die ja

26) F. Schindelhauer, Veröffentlichungen des K. Preuß. Meteorol. Instituts, Nr. 263, 1913.
27) G. Berndt, diese Zeitschr. 13, 151, 1912.
28) Mc Clelland u. Nolan, Proc. Roy. Irish Akad. 29, 81, 1912 und 30, 61, 1912. (Zitat nach Simpson, Abhandlung hat Ref. nicht vorgelegen.)
29) F. Herath, diese Zeitschr. 15, 155, 1914.

30) J. Elster u. H. Geitel, l. c. 17.
31) E. Weiss, l. c. 19.
32) H. Gerdien, l. c. 18.

für den großtropfigen Regen ausschließlich positive Eigenelektrizität fordert. Daß auch negativer Regen vorkommt, läßt sich nach der älteren Anschauung vom Wesen der Wasserfallelektrizität, wie bemerkt, durch Adsorption der negativen Ionen der Luft an fallenden Tropfen erklären. Nach Lenards schärferer Feststellung muß die negative Elektrizität von vornherein an den allerfeinsten Tröpfchen haften, die während des Zerfalles der größeren Tropfen aus ihrer Oberfläche herausgerissen werden.

Schwierigkeiten für die Theorie treten indessen, wie schon Simpson[33]) selbst bemerkt, gegenüber dem Landregen ein, in dem die Tropfen überhaupt nicht die zum Zerfall nötige Größe und Relativgeschwindigkeit gegen die Luft erreichen. Hier soll ein Zerspritzen durch Zusammenstoß großer und kleiner Tropfen oder bei plötzlichem Wechsel der Windrichtung und Stärke die Elektrizitätsentwicklung verursachen. Es ist schwer zu verstehen, wie bei diesen Vorgängen Wasserteilchen aus der molekularen Oberflächenschicht der Tropfen herausgeschleudert werden können, worin doch eben nach Lenard die Vorbedingung für das Auftreten der Wasserfallelektrizität liegt.

Für das negative Zeichen des Potentialgefälles im Erdfelde während eines Landregenfalles würde man übrigens ohne weiteres die am Erdboden selbst entwickelte Wasserfallelektrizität verantwortlich machen können[34]). Es wäre zweckmäßig, durch Ballonbeobachtungen festzustellen, wie hoch die das Feld umkehrende negativ geladene Schicht in solchen Fällen in die Atmosphäre hinaufreicht; ist sie durch das Zerspritzen der Tropfen am Erdboden erzeugt, so kann ihre Höhe nur gering sein.

Weitere Schwierigkeiten ergeben sich gegenüber der Elektrizität des Schnees und der festen Niederschlagsprodukte überhaupt. Es bedarf keinerlei Erläuterung, daß eine auf die Wasserfallwirkung aufgebaute Theorie ihrer Natur nach nicht zur Erklärung dieser Gruppe von Erscheinungen geeignet ist, mindestens sind neue Voraussetzungen dazu erforderlich. Nach Simpson sollen bei den Zusammenstößen der festen Niederschlagsteilchen diese selbst positiv, die herausgeschleuderte Luft negativ elektrisch werden, wobei auf die Versuche von Rudge[35]) über Elektrizitätsentwicklung in aufgewirbeltem Staube verschiedener Beschaffenheit hingewiesen wird. Lenard denkt an oberflächliche Verpulverung der in der Luft schwebenden Niederschlagsteilchen unter dem Einflusse tumultuarischer Luftströme oder an die schon von Sohncke[36]) zur Erklärung der Gewitterelektrizität herangezogene Reibungselektrizität zwischen Wasserstaub und Eiskörnern, bei der nach Lenard wiederum die Zerreißung der elektrischen Doppelschicht auf den Wassertröpfchen die eigentliche Ursache der Elektrizitätsscheidung sein würde.

Man sieht, das einheitliche Bild, durch das sich die Simpsonsche Auffassung empfahl, wird durch die Hereinbeziehung der festen Niederschläge entstellt und wenn es auch unbillig ist für eine Naturerscheinung, wie die Niederschlagselektrizität grundsätzlich eine einzige Ursache zu fordern, so empfindet man es doch als eine drückende Zumutung, bei einem Wintergewitter mit Schneefall an andersgeartete elektrische Vorgänge denken zu müssen als bei sommerlichem von Blitz und Donner begleiteten Platzregen. Dazu kommt, daß feste und flüssige Niederschläge bei ein und demselben Gewitter abwechseln können, ja, daß ihr Auftreten anscheinend nur von der Höhe abhängt, in der man sie entnimmt. Jeder, der im Hochgebirge im Sommer ein Gewitter erlebt hat, weiß, daß oberhalb einer gewissen Höhenstufe nur Schnee, Hagel und Graupeln fallen und daß gerade in diesem Bereiche der Wolken die Elektrizitätsentwicklung sehr lebhaft ist. Nach den Aufzeichnungen über Elmsfeuer auf dem Sonnblick ist dabei das Erdfeld ebenso wechselnd wie im Flachlande[37]). Das einzige in diesen Höhen vorhandene flüssige Wasser ist das der in übererkaltetem Zustande befindlichen Nebeltröpfchen der Wolke.

Es liegt bei unbefangener Betrachtung der Sachlage eigentlich näher, die Elektrizitätsentwicklung im Gewitter, wie es schon Sohncke tat, von vornherein in denjenigen Höhenstufen zu suchen, die das Wasser in fester Form (abgesehen von den Nebeltröpfchen) enthalten. Hierbei würde allerdings die Frage nach der Ursache der Elektrizitätserregung vor der Hand wieder offen bleiben. Man steht daher auf meteorologischer Seite aufs neue der ebensowenig bestätigten wie widerlegten Auffassung von Sohncke gegenüber, nach der das Vorhandensein von Eis oder Schnee unter den Verdichtungsprodukten des Wasserdampfes in den Wolken eine notwendige Vorbedingung für das Gewitter ist, während für den Physiker die Untersuchung der bei Berührung von Wasser

33) G. C. Simpson, l. c. 13.
34) P. Lenard, l. c. 6.
35) Douglas Rudge, Phil. Mag. (6) **25**, 481, 1913.

36) L. Sohncke, Der Ursprung der Gewitterelektrizität und der gewöhnlichen Elektrizität der Atmosphäre. Jena 1885.
37) J. Elster u. H. Geitel, Wien. Ber. **101**, IIa, 1485, 1892, und **104**, IIa, 42, 1895.

und Eis oder Eis gegen Eis verschiedener Struktur auftretenden elektromotorischen Kräfte erneutes Interesse gewinnt[38]).

Bei vorsichtiger Beurteilung von Theorie und Beobachtungsergebnissen werden wir demnach zu folgenden zusammenfassenden Sätzen gelangen.

Elektrische Aufladungen, sowohl positive wie negative, können an Nebeln und Wolken durch Ionenadsorption unter Mitwirkung des Erdfeldes entstehen. Das Erdfeld wird durch diese Ladungen gestört, Niederschläge aus solchen Wolkenschichten können selbst positiv oder negativ elektrisch sein. Die Simpsonsche Theorie der Gewitterelektrizität, die sich auf die Elektrizitätserregung beim Zerblasen von Wassertropfen gründet, bedarf noch der weiteren Annahme, daß dieser Vorgang an fallenden Regentropfen in elektrisch wirksamer Weise erfolgt, d. h. daß feinster Wasserstaub aus der äußersten Oberflächenschicht der Tropfen abgerissen wird. Es ist vielleicht möglich, daß die hierzu erforderliche stürmische Luftbewegung in den Gewitterwolken vorkommt, als sehr zweifelhaft muß dies bei den ruhigen Landregen bezeichnet werden.

Die Schwierigkeit, die der Erklärung der elektrischen Ladungen fester Niederschläge durch eine auf die Wasserfallwirkung gegründete Theorie gegenübersteht, ist von grundsätzlicher Bedeutung. Da man deshalb genötigt wäre, eine besondere Quelle für die Eigenelektrizität der ausschließlich in Gestalt von Eis fallenden Niederschläge anzunehmen und das regelmäßige Vorkommen von Eis in den Gewitterwolken mindestens nicht unwahrscheinlich ist, so erscheint es fraglich, ob man einer auf das Verhalten flüssigen Wassers aufgebauten Theorie des Gewitters überhaupt noch bedarf.

Daß im übrigen durch die Wasserfallwirkung des Regens Störungen des Erdfeldes in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche eintreten können, ist ohne weiteres ersichtlich.

Es möge nun noch in Kürze zweier in den letzten Jahren viel genannter Theorien der Niederschlagselektrizität gedacht werden: der Wilson-Gerdienschen[39]), die auf der Ausfällung der Luftionen durch kondensierenden Wasserdampf begründet ist und der vom Schreiber dieses Berichts im Verein mit J. Elster aufgestellten Influenztheorie.

Die erstere schien das Rätsel der Niederschlagselektrizität in besonders glücklicher Weise zu lösen, da sie mit ihm zugleich die eingangs erwähnte Hauptschwierigkeit der allgemeinen Lehre von der Luftelektrizität zu überwinden versprach.

Ihre Grundlage bilden die bekannten Versuche von C. T. R. Wilson[40]) über die verschiedene Wirksamkeit der negativen und positiven Ionen als Ansatzkerne für die Nebelbildung in mit Wasserdampf übersättigter Luft. Läßt man Luft, die mit flüssigem Wasser in Berührung steht, sich plötzlich entspannen, so tritt bekanntlich Nebelbildung auf. In gewöhnlicher, der freien Atmosphäre entnommener Luft sind es die Staubteilchen, an denen vorzugsweise die Kondensation der Wassertröpfchen erfolgt. Durch eine Reihe hintereinander vorgenommener abwechselnder Entspannungen und Verdichtungen einer abgeschlossenen Luftmenge läßt sich der Staub völlig entfernen, indem er mit den sinkenden Tröpfchen zu Boden geführt wird. Ionisiert man die so vom Staube befreite Luft, etwa durch Röntgenstrahlen, so bringt eine Entspannung im Verhältnis von 1,25 : 1 aufs neue eine kräftige Nebelbildung hervor, indem die Ionen als Ansatzkerne für die Kondensation des Wasserdampfes wirken. Durch ein besonderes Hilfsmittel, nämlich durch Teilung der Nebelkammer mittelst einer geerdeten metallischen Scheidewand, in deren unmittelbarer Nähe und parallel zu welcher beiderseits ein schmales Bündel von Röntgenstrahlen einfällt und durch Erregung eines elektrischen Feldes in jeder Abteilung, so daß die beiden Seiten der Scheidewand sich entgegengesetzt aufladen, erreicht man, daß die eine Hälfte nur freie negative, die andere nur positive in Wanderung begriffene Ionen enthält. Läßt man nun gleichzeitig in beiden Abteilungen die Luft sich entspannen, so findet man, daß in der negativen die Nebelbildung bei dem Entspannungsverhältnis 1,25 : 1 einsetzt, während in der positiven ein höherer Übersättigungsgrad, entsprechend dem Verhältnis 1,38 : 1 dazu erforderlich ist. Man schließt hieraus, daß bei adiabatischer Entspannung staubfreier Luft die negativen Ionen bei einer geringeren Übersättigung von dem Wasser belegt werden als die positiven.

Nun ist durch radioaktive Vorgänge bekanntlich die atmosphärische Luft in gewissem Grade ionisiert.

In einem aufsteigenden Luftstrome wird, sobald der Taupunkt erreicht ist, zunächst der Staub die Ansatzkerne der Wolkenbildung liefern. Darf man annehmen, daß durch die

38) Hier käme besonders in Frage der von A. Coehn gefundene Zusammenhang der Berührungselektrizität bei Dielektriken mit der Dielektrizitätskonstante.

39) H. Gerdien, diese Zeitschr. **6**, 647, 1905.

40) C. T. R. Wilson, Phil. Trans. **193**, 289, 1899.

fallenden Niederschläge der Staub allmählich zu Boden getragen wird, so könnte eine nochmalige Kondensation bei weiterem Ansteigen der Luft an den Ionen eintreten, und zwar zunächst ausschließlich an den negativen. Gesetzt, auch diese wären durch den Niederschlag ausgefällt, so kämen bei fortgesetztem Aufsteigen der Luft auch die positiven Ionen an die Reihe.

Im allgemeinen wäre demnach ein Vorwiegen negativer Ladungen auf den Niederschlägen zu erwarten. In Regen- und Niederschlagsgebieten überhaupt würde demnach der Erde insgesamt ein größerer Betrag an negativer als an positiver Elektrizität zugeführt, und so eröffnete sich die viel versprechende Aussicht, außer der Eigenelektrizität der Niederschläge auch noch die ständige Zufuhr an negativer Ladung zur Erde zu erklären, deren man ja für die Aufrechterhaltung des Erdfeldes notwendig bedarf.

Die Theorie hat indessen die daran geknüpften Erwartungen nicht erfüllt. In einer eingehenden Kritik zeigte G. C. Simpson[41]), daß die tatsächlich vorhandene Ionisierungsstärke der atmosphärischen Luft auch bei günstigster Annahme nicht ausreicht, um durch den vorausgesetzten Vorgang der Ionenscheidung den Elektrizitätsverbrauch eines normalen Gewitters zu decken. Ob zudem in der Atmosphäre die zur Ausfällung der Ionen notwendigen Übersättigungsgrade vorkommen können, ist zweifelhaft und möge dahingestellt bleiben. Am schwerwiegendsten erscheint der Einwand, daß eine Elektrizitätsscheidung in ionisierter Luft durch kondensierenden Wasserdampf überhaupt noch nicht durch den Versuch nachgewiesen ist. Bei der Methode von Wilson war die Trennung der Ionen vor der Entspannung der Luft durch ein elektrisches Feld bewerkstelligt. Wenn nun diese Versuche auch zu dem Schlusse berechtigen, daß in Luft, die gleichviel Ionen beiderlei Zeichens enthält, die negativen vor den positiven von dem kondensierenden Wasserdampfe belegt werden, so wäre eine räumliche Scheidung der freien Elektrizitätsmengen dadurch noch keineswegs gewährleistet. Vielmehr würden die positiven Ionen zu den negativ geladenen Nebeltröpfchen heranwandern und ihre Ladung neutralisieren, da die geringe Fallbewegung der Nebelteilchen nicht hinreicht, sie schnell genug aus dem Bereiche der positiven Ionen zu entfernen.

Schließlich darf nicht außer acht gelassen werden, daß die Theorie mit der Beobachtung im Widerspruch stehen würde, wenn man als gesicherte Tatsache das Überwiegen positiver Ladungen auf den Niederschlägen annimmt.

Im Gegensatz zu allen den besprochenen Auffassungen von der Natur der Niederschlagselektrizität bedeutet die Influenztheorie den Verzicht auf die Annahme irgendwelcher besonderer, zwischen Wasser, Eis, Schnee und Luft tätiger elektromotorischer Vorgänge. Sie betrachtet das Wasser nur als Leiter der Elektrizität und sieht in den Niederschlagsteilchen, die einander im Fallen überholen, sich berühren und trennen, die Grundbestandteile einer Influenzmaschine, die ein bereits vorhandenes elektrisches Feld zu stetig anwachsenden Beträgen steigert.

An der Fassung der Theorie[42, 43]) mußte im Laufe der Zeit (30 Jahre), wie wohl zu entschuldigen sein dürfte, manches, und zwar nicht nur Nebensächliches geändert werden. Den Grundgedanken möchten wir aber auch heute noch zur Beachtung empfehlen.

In einem elektrischen Felde, dessen Kraftlinien in der Richtung der Senkrechten verlaufen, befinde sich ein leitender Körper. Wir denken beispielsweise etwa an das normale Kraftfeld der Erde und einen fallenden Wassertropfen. Der letztere wird sich elektrisch polarisieren, die nach unten gewandte Fläche bedeckt sich mit positiver, die obere mit negativer Elektrizität. Auf seinem Wege durch die Luft treffe der Tropfen mit einem kleineren zusammen, dessen Fallgeschwindigkeit daher geringer ist. Wenn dieser letztere an der unteren Fläche des ersteren abprallt, so nimmt er negative Ladung mit, die mit ihm durch den aufsteigenden Luftstrom nach oben geführt wird. Man sieht, die Begegnung der beiden Niederschlagsteilchen in der angenommenen Weise wirkt feldverstärkend, die freien Elektrizitätsmengen werden entgegengesetzt den Feldkräften verlagert. Auf die Natur der Teilchen kommt es dabei nicht an, nur müssen beide ein gewisses Maß von elektrischer Leitfähigkeit haben. Die Möglichkeit liegt dann vor, daß sich ein schon vorhandenes elektrisches Feld durch den Niederschlagsfall allmählich verstärkt, bis Entladungen auftreten.

Nimmt man Wassertropfen als die bei dem Vorgange beteiligten Leiter an, so steht man vor der von uns schon anfangs erkannten und neuerdings von Herrn G. C. Simpson[44]) wieder hervorgehobenen Schwierigkeit, wie ein elek-

41) G. C. Simpson, Phil. Mag. (6) **17**, 619, 1909.

42) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **25**, 116 u. 121, 1885.

43) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. **14**, 1287, 1913.

44) G. C. Simpson, l. c. 13.

trisch wirksamer Kontakt der beiden ohne Zusammenfließen zu denken sei. Wir haben seinerzeit gezeigt[45]), daß Wassertröpfchen aus der Wolke eines Zerstäubers von einer freien Wasseroberfläche zum Teil zurückgeworfen werden und dabei elektrische Ladungen von dieser mitnehmen.

Herr Simpson zweifelt die Beweiskraft dieses alten Versuches an, indem er darauf hinweist, daß nach neueren Untersuchungen von A. S. Eve[46]) bei der Zerstäubung von Wasser Elektrizitätsträger beiderlei Vorzeichens in der Luft entständen. Daher könne die Übertragung der elektrischen Ladungen möglichenfalls nicht durch das abprallende Wasser, sondern durch jene elektrisierten Teilchen erfolgt sein.

Es ist einzuräumen, daß es notwendig sein wird, jenen Versuch unter Berücksichtigung dieser Fehlerquelle zu wiederholen, zumal die Versuche von Eve in Widerspruch zu den Ergebnissen anderer Physiker[47]) stehen, die allein negative Elektrizitätsträger bei der Zerstäubung reinen Wassers fanden.

Das Wesentliche der Influenztheorie der Niederschlagselektrizität wird indessen durch diesen Einwand nicht getroffen, da auch die Begegnung von Eisteilchen (Graupeln und Schneekristallen) in einem elektrischen Felde in entsprechender Weise wirksam sein muß, wenn man den sich berührenden Körpern ein ausreichendes Leitvermögen zuschreiben darf. Das Abprallen des kleinern Körpers an der Unterseite des größern erscheint hier von vornherein viel gesicherter, als bei der Begegnung von Wassertropfen. Untersuchungen über den Grad der Leitfähigkeit von Eis in der Nähe des Schmelzpunkts wären allerdings noch erforderlich, bei tiefen Temperaturen ist bekanntlich das Eis ein Nichtleiter.

Herr Simpson[48]) bemerkt ferner, daß die behauptete Influenzwirkung nur zu einer Verstärkung eines einmal vorhandenen elektrischen Feldes führen könne, Umkehrungen der Feldrichtung seien der Natur der Sache nach ausgeschlossen.

Bei horizontaler Schichtung der Wolke, d. h. bei gleicher Phase der in ihr ablaufenden Prozesse für alle in denselben Horizontalebenen befindlichen Punkte müßte allerdings eine dauernde Zunahme der Feldstärke erfolgen, Umkehrungen der Feldrichtung — sofern Entladungen ausgeschlossen werden — könnten nicht eintreten. Nun beruht aber eine von vielen Meteorologen angenommene Sondereigenschaft der Böen und der Gewitter gerade in dem Auftreten von Luftwirbeln mit horizontaler Achse[49]). Es ist doch wohl vorstellbar, daß die Umlagerung der elektrisierten Massen auch eine Umkehrung der Feldrichtung nach sich zieht.

Die Influenztheorie des Gewitters kann ihrer Natur nach nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erheben, da sie ja das Vorhandensein eines elektrischen Feldes zur Voraussetzung hat. Hierin liegt eine Schwäche, der eine gewisse Stärke darin gegenübersteht, daß sie im wesentlichen nicht die physikalischen, sondern die geometrischen Eigenschaften der Niederschlagsteilchen benutzt, also rein qualitativ betrachtet eine gewisse Wirkung in ihrem Sinne mit Sicherheit behaupten darf. Ein weiterer Mangel liegt ohne Zweifel in ihrer bis jetzt nicht überwindbar gewesenen Unzugänglichkeit gegenüber dem Versuche, womit das Fehlen jeder quantitativen Abschätzbarkeit zusammenhängt. Die Herstellung von Modellen, die im Sinne des Grundgedankens wirken müßten, wäre ja nicht schwierig, doch bliebe ihre Übertragbarkeit auf die wirklichen Vorgänge im Gewitter mehr als zweifelhaft.

Eine Erscheinung, die zugunsten der Influenztheorie spricht, ist das oben erwähnte öfters und anhaltend vorkommende Zusammentreffen positiver Ladungen des Niederschlages mit negativer Richtung des Erdfeldes und umgekehrt.

Wenn nicht Fehler in der Beobachtungsmethode vorliegen, so würde, wie schon oben bemerkt, hierbei das Erdfeld durch den Niederschlagsfall verstärkt und es liegt nahe zu schließen, daß gerade in solchen Fällen das Spiel der gedachten Influenzmaschine in ungestörter Weise vom Erdboden aus wahrnehmbar wird.

Jedenfalls scheint es nicht rätlich, eine an sich zulässige Betrachtungsweise aufzugeben, bevor sich ihre Unfruchtbarkeit erwiesen hat, oder ein vollwertiger Ersatz in einer alle wesentlichen Erscheinungen des Gebiets umfassenden Theorie gefunden ist.

45) J. Elster u. H. Geitel, l. c. 42.
46) A. S. Eve, Phil. Mag. (6) **14**, 382, 1907.
47) K. Kähler, Ann. der Phys. **12**, 1119, 1903; A. Coehn u. H. Mozer, Ann. d. Phys. **43**, 1048, 1914.
48) G. C. Simpson, l. c. 13.
49) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig 1906, S. 519.

(Eingegangen 22. August 1916.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. Ivar Cederberg zum Dozenten für allgemeine und physikalische Chemie an der Hochschule Stockholm, der ständige Mitarbeiter am kaiserlichen Gesundheitsamte in Berlin Dr. Jodokus Fiche zum Leiter der chemischen Abteilung an der Akademie Posen.

Berufen: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Greifswald Dr. Gustav Mie in gleicher Eigenschaft an die Universität Halle, der Privatdozent an der Universität Kiel Dr. Alexander Wilkens zum Professor der Astronomie und Leiter der Sternwarte an der Universität Breslau (vgl. hierzu die Notiz auf S. 216).

Verliehen: Dem Privatdozenten der Physik an der Universität Wien Dr. Karl Przibram der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Meteorologie an der Universität Christiania Dr. Henrik Mohn, der Präsident der Königl. Spanischen Akademie der exakten, physikalischen und Naturwissenschaften Dr. José Echégaray (Mathematiker und Ingenieur), der ord. Professor der mathematischen Physik an der Universität Bordeaux Pierre Duhem.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1916/17*).

Technische Hochschule Aachen.

Stark: Experimentalphysik I: Mechanik, Elektrodynamik, 4; Physikalisches Praktikum: a) Praktische Übungen aus allen Teilen der Physik, für Anfänger, 4 oder 6, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen (Dissertationen), tägl., c) Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 2. — **Seitz:** Mechanische Wärmetheorie, 2; Theoretische Physik: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 2; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kursus: Mechanik, Elektrizität, Magnetismus, 2. — **Steubing:** Photographie, 1, Übungen, 2. — **Schreber:** Technische Thermodynamik, 2. — **Grotrian:** Physikalische Grundlage der Elektrotechnik, 5; Theoretische Elektrotechnik, 3. — **Rasch:** Elektrische Bahnen, 1; Einleitung in die Elektrotechnik, 2; Konstruktionslehre der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 2. — **Finzi:** Elektrische Zentralanlagen und Leitungen, 2. — **Hamacher:** Praktische Telegraphie und Telephonie, 2. —

Bredt: Organische Experimentalchemie II, 3; Organisches Praktikum (mit Lipp). — **Classen:** Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisches Praktikum (mit Fischer, Scheen, Schleicher, Laas, Demeure, Rolling und Wolf); Elektroanalytisches und Elektrochemisches Praktikum. — **Rau:** Chemische Technologie I (Allgemeine Feuerungskunde), 2, III, 2; Entwerfen von chemischen Apparaten und Fabrikanlagen, Übungen, 4; Chemisch-technisches Praktikum (mit Lambris und Salmang). — **Ruer:** Physikalische Chemie I, 3; Übungen in physikalischer Chemie, für Hüttenleute, 3, für Chemiker, 1 Vormittag, für Fortgeschrittene; Allgemeines hüttenmännisches Praktikum, 3. — **Schumacher:** Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2. — **Lambris:** Untersuchung von Brennstoffen, 2. —

Blumenthal: Höhere Mathematik I, 6 und 4, Übungen, 2. — **Hamel:** Höhere Mathematik II, 3, Übungen, 1; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Lineare Integralgleichungen, 2 *g*. — **v. Kármán:** Mechanik I, 5, Übungen, 1, II, 3, Übungen, 1; Flugtechnische Aerodynamik, 2 *g*. — **Kötter:** Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der graphischen Statik, 1. — **Gast:** Praktische Geometrie I, 3; Geodätisches Praktikum I, 2; Geodätische Ausarbeitungen, Übungen, 4; Eisenbahntrassieren, 2; Höhere Geodäsie, 2. — **Wilski:** Übungen im Markscheiden und Feldmessen (mit Wandhoff und Nysten), 1/2 Tag; Abriß der Markscheide- und Feldmeßkunde, 2; Ausgleichungsrechnung, 2, Übungen, 1; Geophysik, 1; Trigonometrische Übungen, 1. — **Wandhoff:** Markscheiden und Feldmessen I, 4; Markscheiderische Zeichen- und Rechenübungen, 2. —

*) Die Vorlesungsverzeichnisse für Wien (Universität und Technische Hochschule), sowie für Brünn und Prag (Technische Hochschule) waren bis zum Schluß der Nummer noch nicht eingegangen und folgen in einem Nachtrage.

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik II: Optik, Wärme und Elektrizität, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Veillon:** Versuche mit Hertzschen Wellen, 2. — **Matthies:** Einleitung in die theoretische Physik, 5, Übungen, 1 *g*. — **Zickendraht:** Elektromedizinische Apparate in elementarer Darstellung mit Demonstrationen, 2; Einführung in die Spektroskopie, 2. —

Rupe: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Vollpraktikum für organische Chemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Fichter und Bernoulli), 1 *g*. — **Fichter:** Elektrochemie, 2; Maßanalyse und Gasanalye, 1; Analytisches Halbpraktikum für Anfänger, 9, für Mediziner: Übungen in der qualitativen Analyse; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Kreis:** Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. — **Bernoulli:** Die optischen Methoden des Chemikers, 1, Übungen und Demonstrationen, 2; Metallurgie, mit spezieller Berücksichtigung physikalisch-chemischer Probleme, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, für Anfänger, 4; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum: Übungen und Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. —

Hecke: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen: Proseminar, 1; Funktionentheorie komplexer Variabler, 4; Mathematisches Seminar (mit Spieß), 1; Seminar über moderne Theorien der Physik (mit Matthies), 2. — **Spieß:** Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 3; Variationsrechnung, 2, Übungen, 1 *g*; Geschichte der Mathematik, 1. — **Flatt:** Pädagogisches Seminar, math.-naturwissenschaftliche Abteilung I, 3; Projektive Geometrie, 2. — **Knapp:** Praktische Astronomie und Instrumentenkunde, 2; Populäre Astronomie II: Astrophysik, 1; Erdbeben, 1; Astronomische Übungen auf der Sternwarte, für Anfänger, 2, für Vorgerücktere, 3. —

Universität Berlin.

Rubens: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5, Mathematische Ergänzung, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 1 1/2 *g*; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium, für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck:** Elektrizität und Magnetismus, 4, Übungen, 1 *g*. — **Wehnelt:** Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 *g*; Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3. — **Einstein:** Relativitätstheorie, 2. — **Hellmann:** Allgemeine Klimatologie, 2; Meteorologisches Praktikum, 2. — **Warburg:** Über Wechselströme und elektromagnetische Wellen, 2. — **Schmidt:** Gezeiten und Meeresströmungen, 2; Ausgleichungsmethoden, 1 *g*. — **Neesen:** Elektrische Schwingungen, drahtlose Telegraphie, 2. — **Blasius:** Übungen im Anschluß an

das Praktikum, 1 *g.* — **E. Meyer**: Moderne Maschinentechnik, 2; Technische Exkursionen, 14tägig, nachmittags *g.* — **Born**: Kinetische Theorie der festen Körper, 3; Kapillarität, 1 *g.* — **Weinstein**: Mechanik, 4; Physik der Atome, 2; Deutschland auf dem Gebiete der exakten Naturwissenschaften, 1 *g.* — **Martens**: Anleitung zu physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Krigar-Menzel**: Mechanik der Massenpunkte und starren Körper, 4. — **Leß**: Praktische Witterungskunde, 2. — **Byk**: Mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 2. — **Henning**: Theorie der elektrischen Wellen nebst Anwendung auf drahtlose Telegraphie, 2. — **Reichenheim**: Korpuskulare Strahlung, 1 *g.* — **Reiche**: Theorie der Beugung, 2. — **Scheffer**: Angewandte wissenschaftliche Photographie, 1; Grundlagen der Mikroskopie und Mikrophotographie, 1 *g.* —

Fischer: Anorganische Experimentalchemie, 5; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium (mit Gabriel, Traube, Leuchs, Stähler, Schoeller und Schrauth), tägl., Kursus für Mediziner und Zahnärzte (mit Schrauth und Schoeller), 6. — **Nernst**: Physikalische Chemie, 4; Physiko-chemisches Kolloquium, 1 *g*; Praktische Übungen und Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium: a) anorganisch-chemisches Praktikum (mit Marckwald), tägl., b) Physiko-chemische Übungen, 7, c) Physiko-chemische Arbeiten, tägl. — **Beckmann**: Chemische Untersuchungen im Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, tägl. — **Wichelhaus**: Technologie, ausgewählte Kapitel: Organische Stoffe, 2 *g*; Anleitung im Institut (mit Großmann), tägl.; Übungen im Institut (mit Großmann), tägl. — **Thoms**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, mit Experimenten, 4; Toxikologische Chemie, mit Experimenten, 1½; Sterilisation der Arzneimittel, mit Experimenten, 1; Praktische Übungen in der chemischen Analyse, in der chemischen Prüfung und Wertbestimmung von Arzneimitteln, in der Nahrungsmittelchemie, tägl. — **Traube**: Qualitative chemische Analyse, 1½. — **Stock**: Kolloquium über anorganisch-chemische Tagesfragen, 1; Chemische Untersuchungen im Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, tägl. — **Biedermann**: Teerfarbstoffe, 2. — **Fock**: Einleitung in die Physik und Chemie, 1; Kristallstruktur und Kristallphysik, 1. — **Rosenheim**: Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Meyer), tägl.; Übungen in der Experimentalchemie (besonders für Lehrer und Lehrerinnen) (mit Meyer), 8; Praktische Übungen in der Gas- und Maßanalyse, 4. — **v. Buchka**: Geschichte der Chemie, 2; Chemie der Nahrungsmittel, Genußmittel und Gebrauchsgegenstände, 4. — **Jacobson**: Heterozyklische Verbindungen, ausgewählte Kapitel, 1 *g.* — **Emmerling**: Chemische und mikroskopische Wasseranalyse, 1. — **Spiegel**: Organische Chemie, 3. — **Neuberg**: Arbeiten auf dem Gebiete der Biochemie, tägl.; Organisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Sachs**: Chemie der Farbstoffe, 1. — **Koppel**: Das chemische Gleichgewicht, 1 *g.* — **Meisenheimer**: Anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisch- und organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Großmann**: Besprechung chemisch-technischer und wirtschaftlicher Tagesfragen: Kriegsprobleme, für Chemiker, Nationalökonomen und Juristen, mit Exkursionen, 1½. — **Houben**: Arbeitsmethoden der organischen und unorganischen Chemie I, 1. — **Leuchs**: Einführung in die organische Chemie I: Aliphatische Verbindungen, 1 *g.* — **Pringsheim**: Einführung in die Physiologische Chemie, 1½. — **Anselmino**: Arzneibuch, 1. — **Lenz**: Einführung in die chemische Untersuchung von Blut, Harn, Kot, Magensaft usw., 2. — **Schrauth**: Chemie und Technologie der Fette und Öle, 1. — **Schoeller**: Die chemischen Grundlagen der Ehrlichschen Chemotherapie, 1 *g.* —

Schwarz: Differentialrechnung, 4, Übungen, 14tägig, 2 *g*; Theorie der analytischen Funktionen II, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den Minimalflächen, 2 *g*; Mathematisches Seminar (mit Frobenius und Schottky), 2 *g.* — **Foerster**: Geschichte der Astronomie, 2 *g*; Grundlehren der Zeit- und Ortsbestimmung, 1 *g*; Die meteorischen und elektrischen Einwirkungen aus dem Himmelsraume, 1 *g.* — **Helmert**: Die Geodätische Linie in der Erdmessung, 1 *g.* — **Frobenius**: Algebra, 4. — **Schottky**: Theorie der Flächen zweiter Ordnung, 4; Elementare Analysis, 2. — **Struve**: Sphärische Astronomie, 3; Übungen im Beobachten, in Neubabelsberg, *g.* — **Cohn**: Himmelsmechanik I, 4; Übungen im Seminar für wissenschaftliches Rechnen, 2 *g.* — **Rothe**: Analytische Geometrie, 4. — **Knopp**: Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung, insbesondere Gammafunktion, Fouriersche Reihen, mehrfache Integrale, 4; Funktionentheorie I, 4; Mathematische Übungen für mittlere Semester (mit Schur), 14 tägig, 2 *g.* — **Schur**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 *g*; Mengenlehre, 2; Lineare Differentialgleichungen, 2. — **Guthnick**: Photometrie der Gestirne, 2. — **Marcuse**: Geographische Ortsbestimmung, mit Übungen, 1½; Einführung in die mathematische Geographie und Erdphysik, mit Lichtbildern, 1½; Allgemeine Himmelskunde, mit Lichtbildern und gelegentlichen Fernrohrbeobachtungen, 1½. — **Witt**: Störungsprobleme, 2; Astronomische Instrumente, 2; Astronomische Übungen, 6. — **Schweydar**: Figur der Erde, 2; Das Innere der Erde, 1. —

Technische Hochschule Berlin.

Kurlbaum: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Elektrizität, 4; Physikalische Übungen, 4. — **Krigar-Menzel**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Theorie der Wärme: Thermodynamik, 2. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente, 4; Physikalische Übungen für Chemiker, 2. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik II, 2; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Elektrizitätslehre, 2; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, 1. — **Berndt**: Radioaktivität, 1. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen I, 2; Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente, 2. — **Gehlhoff**: Physikalische Grundlagen der Beleuchtungstechnik, 2. — **Kaßner**: Wetterkunde für Techniker, mit Beispielen aus der Praxis, 1. — **Kock**: Hochspannungserscheinungen und Messungen, 2; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik, 3. — **Möller**: Neuere Theorie des Magnetismus, 2. — **Petzoldt**: Raum, Zeit, Bewegung, Äther, 1 *g.* — **Zehnder**: Angewandte Physik, 2. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. — **Orlich**: Theoretische Elektrotechnik II, 2, Übungen, 1, III, 2; Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, II und III, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **Wedding**: Grundlagen der Elektrotechnik, 4, Übungen, 1; Elektromaschinenbau I und II (abgekürzte Vorlesung), 2; Beleuchtungstechnisches Laboratorium für Fortgeschrittene, tägl.; Elektrotechnik für Chemiker, 1; Elektrotechnik im Bergbau, 2, Übungen, 1. — **Franke**: Elektrische Fernmeldetechnik einschließlich drahtlose Telegraphie I: Grundlagen, 4, III: Anlagen, 2; Entwerfen von Instrumenten und Apparaten der Meß- und Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Laboratorium für Fernmeldetechnik, 6, für Fortgeschrittene, tägl. — **Kloß**: Elektromaschinenbau II, 4, Übungen, 1; Entwerfen elektrischer Maschinen, 8; Elektrotechnisches Versuchsfeld, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **v. Parseval**: Motorluftschiffe, 2; Flugzeuge, 2; Übungen im Bau von Luftfahrzeugen, 2. — **W. Reichel**: Elektrische Kraftanlagen und Bahnen I, 2, III, 2; Entwerfen elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 2. — **Becker**: Flugmotoren und Luftschiffmotoren, 2. — **Benischke**: Allgemeine Wechselstromtechnik, 4; Spezielle Wechselstromtechnik für Hochspannungsanlagen, 1. — **Breslauer**: Berechnung und Prüfung elektrischer Maschinen nach den in der Praxis herrschenden Gepflogenheiten, 2. — **Faßbender**: Elektrische Messungen und Meßmethoden in Hochfrequenzkreisen und ihre praktische

Anwendung in der drahtlosen Telegraphie, 2, Demonstrationen, 14 tägig, 2. — **Gerstmeyer**: Kommutator-Motoren für Wechselstrom und Drehstrom, 1. — **Kurrein**: Die Herstellung und Prüfung der Meßmaschinen und Meßwerkzeuge, 1 *g*. — **Rüdenberg**: Elektrische Schaltvorgänge und Wanderwellen, 2. — **Wagner**: Schutz elektrischer Anlagen gegen Überspannungen, 2. — **Zehme**: Elektrische Haupteisenbahnen und Zwischenstadtbahnen, 2. — **Krell**: Schiffselektrotechnik, 2. — **Dietzius**: Luftschiffbau und Luftschiffahrt, 1. — **Schaffran**: Untersuchungen mit Luft- und Wasserpropellern, 1. —

Hofmann: Experimentalchemie, 4; Praktische Arbeiten im anorganischen Laboratorium, tägl.; Ausgewählte Kapitel aus der Chemie (mit Wirth), 2. — **v. Buchka**: Chemie der Nahrungsmittel mit Berücksichtigung der Nahrungsmittel-Analyse und Bakteriologie, 4; Chemisch-technische Analyse, 2. — **Dolezalek**: Physikalische Chemie einschließlich theoretische Elektrochemie, 4; Kleines physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, 2 halbe Tage; Praktische Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Institut, tägl. — **Holde**: Untersuchung von Fetten, Ölen, Wachsen und Seifen, 2. — **Miethe**: Spektralanalyse, mit Übungen, 2; Allgemeine Photographie: Apparatenkunde, Übersicht über die gebräuchlichen photographischen Prozesse, 2; Einführung in die photographische Optik, 1; Astronomische Photographie mit Übungen am photographischen Refraktor (300 mm), 1, Übungen, 3; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium, speziell für Photochemiker, tägl.; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen, 16; Spektrographisches und spektralanalytisches Praktikum für Fortgeschrittenere, 1. — **Pschorr**: Organische Chemie I: Die offenen Kohlenstoff-Ketten, 4; Praktische Arbeiten im organischen Laboratorium, tägl. — **Reisenegger**: Chemische Technologie I: Technologie der Wärme und des Wassers, Technologie der anorganischen Verbindungen (Chemische Großindustrie), Apparatenkunde (mit Exkursionen), 4; Praktische Arbeiten im technisch-chemischen Institut, tägl. — **Traube**: Einleitung in die physikalische Chemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Chemie der Kolloide, 1. — **Arndt**: Die elektrochemische Industrie, 2. — **Börnstein**: Die Brennmaterialien, ihre Bearbeitung und Verwendung, 2. — **Bucherer**: Einführung in die Praxis des Patentwesens, 1. — **Byk**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 2. — **Endell**: Ausgewählte Kapitel der Mineralchemie, 1. — **v. Girsewald**: Über die Zusammensetzung und die Wertbestimmung der Brennstoffe, 1. — **Grüttner**: Stereochemie anorganischer Verbindungen I, 1. — **Herrmann**: Radioaktive Prozesse, 1. — **Just**: Chemische Reaktionskinetik, 1. — **Lehmann**: Die Farbenphotographie, 1. — **Liebermann**: Theorien der organischen Chemie, 1. — **Loewenherz**: Erläuternde Vorträge zu den Führungen durch das Chemische Museum: Anorganischer Teil, 1 *g*; Die Produkte der chemischen Industrie, ausgewählte Kapitel im Anschluß an die Sammlungen des Chemischen Museums: Anorganischer Teil, 1 *g*. — **Schaarschmidt**: Ausgewählte Kapitel aus der Teerfarbenchemie, 2. — **Scheibler**: Über heterozyklische Verbindungen, 1. — **Seegert**: Ausgewählte Kapitel aus der Spektralanalyse, 1. — **Simonis**: Repetitorium der organischen Chemie, 2. — **Treadwell**: Ausgewählte technisch-chemische Prüfungsmethoden, 1. — **Ullmann**: Technik der künstlichen Farbstoffe, 1. — **Voswinckel**: Einführung in die organische Chemie, 2. — **Wirth**: Analytische Chemie, 1. — **Wolffenstein**: Die Chemie der Alkaloide, 2. —

Dziobek: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Haentzschel**: Elemente der Differential- und Integralrechnung und der analytischen Geometrie, 4, Übungen, 2 *g*. — **Jolles**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 2. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie, 2. — **Lampe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen, 2. — **Rothe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Vektoranalysis mit Anwendungen, 2. — **Scheffers**: Darstellende Geometrie I, 5, Übungen, 5. — **Wallenberg**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Funktionentheorie I, 2; Potentialtheorie, 2. — **Schuberg**: Elemente der darstellenden Geometrie, 1, Übungen, 3; Maschinenelemente mit Übungen im Maschinenzeichnen, für Chemiker, 1, Übungen, 3; Allgemeine Maschinenlehre mit Übungen in Maschinenzeichnen, für Chemiker, 2, Übungen, 3; Die technischen Einrichtungen chemischer Fabriken II, 1, Übungen, 3. — **Böhmer**: Einführung in die Lebensversicherungswissenschaft, 2. — **Jacobsthal**: Ergänzungskursus für Mathematik, 2. — **Lichtenstein**: Fouriersche Reihen und Integrale nebst Anwendungen, 2. — **Pirani**: Elemente der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens, 1. — **Haußmann**: Niedere Geodäsie, 4; Geodätisches Praktikum I, 2; Planzeichnen, zugleich Bearbeitung der Aufnahmen, 2; Höhere Geodäsie, 2. — **Reißner**: Mechanik und graphische Statik I, 4, Übungen, 2, II, 6, Übungen, 4. — **Wolff**: Niedere Geodäsie im Abriß, 2. — **W. Hartmann**: Kinematische Geometrie und theoretische Kinematik, 2; Maschinengetriebe: Anwendungen der Kinematik, 2. — **E. Meyer**: Mechanik I, 4, Übungen, 2, II, 4, Übungen und Festigkeits-Laboratorium, 2; Aeromechanik und Mechanik der Flugzeuge, 2. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme, 6; Theoretische Optik, 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Physikalisches Praktikum, 4, für Lehramtskandidaten, 4; Praktikum für wissenschaftliche Photographie, für Vorgerückte, 2. — **Gruner**: Elektromagnetische Lichttheorie, 3; Einleitung in die theoretische Physik, 1; Molekuläre Wärmetheorie, 2; Seminar für theoretische Physik, nach Verabredung. — **Blattner**: Theorie der Wechselströme, 1. — **Luterbacher**: Dynamik der festen Körper, 2. —

Kohlschütter: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum, 6, für Mediziner, 8; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Ephraim**: Einführung in die Elektrochemie, 2; Repetitorium der anorganischen Chemie, für Chemiker, 2; Elektrochemisches Praktikum, 4. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner und Lehramtskandidaten, 1. — **Tambor**: Organische Chemie II, 5; Repetitorium der organischen Chemie I, 1; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Frl. Woker**: Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, ganz- oder halbtägig; Übungen im Nachweis und in der Bestimmung von Fermentin, 2; Kurs für die Untersuchung von Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Milch, Magensaft, 4; Fermentin und Fermentmodelle, 1; Physikalisch-chemische Biologie, 2; Die Katalysatoren der Technik II, 1. — **Abelin**: Chemie der Fette und Lipoide, 1. — **Schaffer**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Chemische Technologie der Lebensmittelgewerbe, nach Verabredung. —

Graf: Kugelfunktionen I, mit Repetitorium, 3; Besselsche Funktionen I, mit Repetitorium, 3; Integralrechnung, mit Repetitorium (eventl.: Differential- und Integralrechnung), 3; Funktionentheorie I, 2; Differentialgleichungen II, 2; Renten- und Versicherungsrechnung II, 2; Mathematisches Seminar (mit Huber), $1^1/_2$. — **Huber**: Sphärische Astronomie I, 2; Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 3; Theorie und Anwendung der elliptischen Integrale, 2; Theorie und Anwendung der Determinanten, 1; Mathematisches Seminar (geometrische Richtung) (mit Graf), 1. — **Ott**: Algebraische Analysis II, 2; Sphärische Trigonometrie, mit Anwendungen, 2; Integralrechnung, 2; Analytische Geometrie II, 2; Darstellende Geometrie, Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyeder, 2; Mathematische Übungen, 1; Mathematische Übungen und Repetitorium, 1. — **Benteli**: Darstellende

Geometrie: Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyeder, 2, Übungen und Repetitorium, 2; Praktische Geometrie I, 1. — **Mauderli**: Wissenschaftliches Rechnen II, 1, Übungen, nach Verabredung; Astronomische Phänomenologie, 2. — **Crelier**: Zentralprojektion, 2; Geometrie der Bewegung I, 2. — **Berliner**: Elemente der Zahlentheorie, 2. — **Moser**: Mathematische Grundlagen der Witwen- und Waisenkassen, 1—2; Ausgewählte Kapitel der Versicherungslehre, 2; Das Makehamsche Gesetz und die Zahl *e*, 1; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1—2. — **Bohren**: Politische Arithmetik, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. —

Universität Bonn.

Kayser: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Laboratorium für Anfänger (mit Eversheim), 8, für Vorgeschrittene, tägl. — **Pflüger**: Theorie der Elektrizität, 5. — **Bucherer**: Neuere Elektrizitätslehre, 1. — **Eversheim**: Angewandte Elektrizitätslehre mit Übungen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik (technische Vorlesung), 1 *g*. —

Anschütz: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 6; Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Chemie, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene, sowie für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Benrath, Frerichs und Kippenberger), tägl., für Mediziner (mit Benrath), tägl. außer Sonnabend. — **Rimbach**: Physikalische Chemie I: Atom- und Molekulartheorie, Eigenschaften der Stoffe, Verwandtschaftslehre, 3; Grundzüge der chemischen Thermodynamik, für Vorgeschrittene, 1 *g*; Chemisches Rechenseminar (mit Wintgen): Unterstufe: Stöchiometrische und chemisch-analytische Aufgaben, Oberstufe: Physikalisch-chemische Aufgaben, 14tägig, 2 *g*; Übungen in den wichtigsten physikalisch-chemischen Meßmethoden, 3. — **Wintgen**: Kolloidchemie, 2. — **Benrath**: Spezielle anorganische Chemie I, 1; Qualitative Analyse, 2; Übungen in der Gasanalyse, 3; Experimentierübungen für Lehramtskandidaten (mit Wintgen), 1. — **Frerichs**: Pharmazeutische Chemie I (anorganisch), 3, III: Zyklische Verbindungen, 1 *g*; Arzneimittelprüfung, 1. — **Gewecke**: Einführung in die Chemie, für Mediziner, 2; Repetitorium der anorganischen analytischen Chemie, 2. — **Mannheim**: Sterilisieren von Arzneimitteln, 1; Wasser- und Harnanalyse, 1; Einführung in das chemische Praktikum, für Pharmazeuten, 1. — **Kippenberger**: Chemische Technologie, anorganischer Teil, mit Exkursionen, 2; Einführung in die chemische Großtechnik I: Anorganisch-chemische Betriebe, mit Exkursionen, 1; Besprechung nahrungsmittelchemischer Gutachten, 1 *g*. — **Laar**: Graphische Verfahren, mit Besichtigungen, 1; Übungen in ausgewählten photographischen Verfahren, tägl. —

Study: Einleitung in die Algebra und Determinantentheorie, 2; Mechanik, 4; Mathematisches Seminar: Oberstufe: Vortragsübungen, 14tägig, 2 *g*. — **London**: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4, Übungen, 1 *g*; Darstellende Geometrie II, mit Zeichenübungen, 2. — **Hahn**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1 *g*; Theorie der reellen Funktionen, 4; Mathematisches Seminar: Mittelstufe: Behandlung einfacher Aufgaben, 14tägig, 2 *g*. — **Küstner**: Theorie der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 3; Topographie des Sonnensystems, 1 *g*; Praktische Übungen im astronomischen Beobachten, nach Verabredung. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Dießelhorst: Experimentalphysik: Elektrizität und Magnetismus, 4; Theorie des Elektromagnetismus, 3, Übungen, 1; Physikalisches Praktikum I u. II, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Weber**: Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik, 2. — **Bergwitz**: Atmosphärische Elektrizität, 1; Radioaktivität, 1. — **Witte**: Analytische Mechanik: Mechanik eines materiellen Punktes, 2. — **Micheler**: Einführung in die Photographie, 1; Die Photographie in natürlichen Farben, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, nach Übereinkunft, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. — **Peukert**: Grundzüge der Elektrotechnik, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Elektrotechnische Übungen, 2; Elektrotechnisches Praktikum, 6; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, für Fortgeschrittene, 9. — **N. N.**: Elektromaschinenbau, 4, Konstruktionsübungen, 4, Praktische Übungen, 2; Elektrische Kraftbetriebe, 2, Übungen, 2. —

Meyer: Unorganische Experimentalchemie, 5; Chemie der organischen Farbstoffe, 3; Arbeiten im chemischen Laboratorium, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Freundlich), nach Verabredung, *g*. — **Biehringer**: Analytische Chemie, 2; Grundzüge der Chemie, 3. — **Freundlich**: Physikalische Chemie, 2; Metallurgie, 2; Chemie der Metalle, 1; Arbeiten im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie, tägl. — **Reinke**: Chemische Technologie II_1, 6; Chemisch-technische Analyse I, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe, tägl.; Chemische Technologie in den deutschen Kolonien mit Berücksichtigung der tropischen und kolonialen Landwirtschaft, 1; Seminaristische Übungen auf dem Gebiete der chemischen Technologie II, monatlich 2 *g*. — **Beckurts**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Gerichtliche Chemie, 1 (im Anschluß: **Nehring**: Der naturwissenschaftliche Sachverständige in der Kriminalistik); Grundzüge der Maßanalyse, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für pharmazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie und in der Nahrungsmitteluntersuchungsstelle, tägl. — **Troeger**: Analytische Chemie, 2; Chemie der Benzolderivate, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde**: Organische Stoffe mit physiologischer Wirkung (Arzneimittelsynthese), 1. —

Fricke: Analytische Geometrie und Algebra, 4; Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 2, II, 2. — **Timerding**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 6; Algebraische Analysis, 2; Synthetische Geometrie, 2. — **N. N.**: Statik starrer und elastisch-fester Körper, 4, Übungen, 2. — **Schlink**: Technische Mechanik II: Dynamik, 3, Übungen und Repetitionen, 2; Die Grundlagen des Fliegens und die verschiedenen Arten von Flugzeugen, 1; Graphische Statik, 2, Übungen, 2; Eisenhochbauten, ihre Berechnung und Konstruktion, 2, Übungen, 4; Statik der Baukonstruktionen I, 3, Übungen, 4. — **Näbauer**: Grundzüge der Geodäsie, 2, Übungen, 2; Geodäsie II, 3, Übungen, 1; Höhere Geodäsie, 2; Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2; Planzeichnen, 4. —

Universität Breslau.

Lummer: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schaefer, Waetzmann und Ladenburg), 6, für Geübtere (mit Pringsheim und Schaefer), tägl., für Mediziner, 3, für Pharmazeuten, 3. — **Pringsheim**: Theorie der Wärme, 4; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 14tägig, 2 *g*. — **Schaefer**: Mechanik der Kontinua: Elastizität und Hydrodynamik, 4. — **Riesenfeld**: Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1 *g*. —

Biltz: Unorganische Experimentalchemie, 6; Chemische Referatenstunde für Vorgeschrittene, 14 tägig (mit Meyer und Königs), 1½ *g*; Chemisches Praktikum in der unorganischen Abteilung, tägl. außer Sonnabend, in der organischen Abteilung, ganztägig, für Mediziner (mit Meyer), 4, für Landwirte, 4. — **Herz**: Elektrochemie und Photochemie, 2; Grundlagen der Maßanalyse, 1; Anwendungen der Maßanalyse, mit besonderer Berücksichtigung des Deutschen Arzneibuches, 1; Besprechungen zur qualitativen Analyse, 1 *g*. — **Meyer**: Chemie des

Krieges, nach Verabredung *g*. — **Gadamer**: Organische Experimentalchemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, 6; Prüfung der Arzneimittel, 1 *g*; Praktisch-chemische Übungen, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, der forensischen Chemie und Nahrungsmittelchemie, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, 6. — **Ehrlich**: Landwirtschaftlich-chemische Technologie I: Zucker, Stärke, usw., mit Exkursionen, 2; Einführung in die Chemie für Landwirte, anorganischer Teil, 2; Chemisch-technisches Kolloquium, 1 *g*; Chemische, biochemische und technische Arbeiten im landwirtschaftlich-technologischen Institut, für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Praktische Übungen und Untersuchungen, auf dem Gebiete der Zucker- und Gärungschemie und -technik, 4. —

Sturm: Analytische Geometrie der Ebene, 3; Differentialgeometrie, 2. — **Kneser**: Integralrechnung, 4; Relativitätstheorie, 4; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **Schmidt**: Algebra, 4; Zahlentheorie II, 2; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 *g*. — **Steinitz**: Elliptische Funktionen, 4. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **Hilpert**: Elektrotechnik I, 4; Elektromaschinenbau I und II, 2; Übungen im Elektromaschinen- und Apparatebau, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 4, III, 8; Kolloquium im Elektrotechnischen Institut, 14 tägig, *g*. — **Euler**: Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrische Kraftanlagen I, 2; Übungen im Bau elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Große-Leege**: Fernsprechtechnik, 2. —

Ruff: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 5; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14tägig, 2 *g*. — **Neumann**: Anorganisch-chemische Technologie, 4; Chemisch- und elektrochemisch-technisches Praktikum, tägl. — **Semmler**: Organische Technologie, 3; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Eucken**: Physikalische Chemie I und II, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Übungen in physikalischer Chemie und Elektrochemie, 4. — **Nauß**: Technische Gasanalyse, 1. —

Dehn: Höhere Mathematik III, 2, Übungen, 2; Höhere Mathematik für Chemiker und Hüttenleute, 3, Übungen, 1. — **Hessenberg**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4; Kinematik, nach Verabredung. — **Mann**: Mechanik: Graphische Statik I, 3, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 2; Eisenhochbau, einschließlich Eisenbetonbau I, 2, Übungen, 3; Statik der Baukonstruktionen I, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2. — **Steinitz**: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 3; Potentialtheorie, 2. — **von dem Borne**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Luftschiffahrt, 2. — **Schnee**: Ausgewählte Kapitel der Analysis, nach Verabredung. —

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik I, 5; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Theoretische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen I, für Anfänger, II, für Fortgeschrittene, je 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Försterling**: Elektrodynamik, 3. — **Föttinger**: Einführung in die Physik der technischen Strömungserscheinungen, 2. — **Horn**: Schwingungserscheinungen auf Schiffen, 2. — **N. N.**: Praktische Meteorologie und Luftfahrt, 2. — **Roeßler**: Elektrotechnik II, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 6, für Schiffsmaschinenbauer, 8, III, 8, IV, für Fortgeschrittene, tägl. außer Sonnabend; Projektierung elektrischer Anlagen, 2, Übungen, 4; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 2, Übungen, 4. — **Grix**: Elektrische Hausinstallationen und Beleuchtungstechnik, 1; Elektrische Bahnen, 2, Übungen, 4; Schwachstromtechnik, einschließlich Hochfrequenztechnik, 2. — **Roth**: Elektromaschinenbau, 1, Übungen, 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2; Apparate- und Schalttafelbau, 2, Übungen, 4. —

v. Wartenberg: Anorganische Experimentalchemie, 4; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium, tägl. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie I, 4; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, tägl.; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, tägl. — **N. N.**: Physikalische Chemie I und II, 2; Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3; Übungen zur Mathematik, 1; Chemisches Kolloquium, 2; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Jellinek**: Analytische Chemie II, 2. — **Claasz**: Chemie und Technologie organischer Farbstoffe, 2. — **Glimm**: Spezielle Technologie der Gärungsgewerbe, 2; Chemie und Technologie der Nahrungs- und Genußmittel, 4; Praktikum für Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel sowie Gärungsphysiologie, tägl.; Kurse für Gärungsgewerbe, nach Verabredung. —

v. Mangoldt: Höhere Mathematik I, mit Übungen, 6. — **Lorenz**: Dynamik starrer Körper, 2, Übungen, 2; Festigkeitslehre und Hydraulik, 4, Übungen, 3. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 5. — **Sommer**: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 1. — **v. Brunn**: Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2. — **Grammel**: Aerodynamik, 2. — **Eggert**: Geodäsie I, 2, II, 2; Planzeichnen, 2; Geodätisches Praktikum I, 2, II, 2. —

Technische Hochschule Darmstadt.

Schering: Experimentalphysik: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Geometrische Optik, Wellenlehre des Lichtes, Akustik, 5; Physikalisches Praktikum (mit Zeißig) I: Allgemeine Physik II: Angewandte Physik, 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeißig), nach Verabredung; Mechanische Wärmetheorie, 2; Physikalisches Kolloquium (mit Zeißig), 1 *g*. — **Zeißig**: Experimentalphysik: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, Optik, 4; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde, 1 *g*; Seismometrie und Anwendungen, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, 1. — **Limmer**:*) Photographische Übungen A, 3, B, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Photographie, 2; Die Herstellung von Lichtbildern und Vergrößerungen, 2; Photographisches Kolloquium, 1 *g*; Grundlagen der Kinematographie, 1, mit Übungen, nach Verabredung. — **Wirtz**: Allgemeine Elektrotechnik I: Elemente der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde II, 2; Übungen im elektrotechnischen Laboratorium (mit Sengel), 4 Tage; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittenere (mit Sengel und Petersen), nach Verabredung; Elektrische Wellen: Hochfrequenztechnik, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, für Fortgeschrittenere, nach Verabredung. — **Petersen**: Allgemeine Elektrotechnik II: Gleich- und Wechselstromtechnik, 4, Übungen, 2; Übungen im Hochspannungslaboratorium, 2; Grundzüge der Hochspannungstechnik, 1. — **Sengel**: Konstruktion elektrischer Maschinen und Apparate, 3, Übungen, 3; Elektrische Licht- und Kraftanlagen, 2, Übungen, 2; Elektrische Bahnen, 2. — **Goldschmidt**: Elektrischer Antrieb von Werkzeug-, Bergwerks- und Hüttenmaschinen, 2. — **Eberhardt**:*) Luftschiffahrt, 2; Flugtechnik, 2; Luftschrauben, 2, Übungen, 6. — **Linke**: Aeronautische Meteorologie, 2. — **Schleiermacher**: Aerodynamik in Beziehung zur Luftfahrt, 2 *g*; Rechenapparate

und wissenschaftliches Rechnen, 2 *g*; Elliptische Funktionen, 2 *g*. —

Wöhler: Anorganische Experimentalchemie (Grundzüge der Chemie), 4; Theoretische Chemie I, 2; Kolloquium über chemische Tagesfragen (mit Martin), 1; Chemisches Praktikum für anorganische und physikalische Chemie (mit Heyl, Martin und Schaeffer), tägl. außer Sonnabend. — **Finger**: Organische Experimentalchemie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Chemie der Alkaloide, 2; Praktikum im Laboratorium für organische Chemie (mit Friedlaender), tägl. außer Sonnabend. — **Martin**:*) Analytische Chemie II, 2; Physikalisch-chemisches Seminar, 2 *g*; Einführung zu den Übungen zur theoretischen Chemie, 2. — **Heuser**: Organische Experimentalchemie, einschließlich Zellulosechemie und Teerfarbenchemie, 4; Organisch-chemisches Praktikum, nach Verabredung; Papier-Färberei-Praktikum, 4. — **Friedlaender**: Zwischenprodukte der Teerfabrikation, 1 *g*. — **Heyl**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 2; Bakteriologie und Sterilisationstechnik (mit Schaeffer), Übungen, 2. — **Dieffenbach**: Elektrochemie, 2; Chemische Technologie, 4; Chemisches, chemisch-technisches und elektrochemisches Praktikum (mit Moldenhauer und Sander), tägl. außer Sonnabend. — **Moldenhauer**:*) Gasanalytische Methoden, mit Übungen, 2; Theorien elektrochemischer Prozesse, 2; Elektrochemische Übungen, 4. — **Vaubel**: Theoretische Chemie I: Stereochemie, 1, Übungen, 3; Die physikalischen und chemischen Methoden der quantitativen Bestimmung organischer Verbindungen, 1; Chemie der Fette und Öle und daran anschließend Firnisse und Lacke, 1 *g*. — **Sonne**: Chemische Technologie der Explosivstoffe, 2. — **Weller**: Untersuchen von Nahrungsmitteln, Genußmitteln und Gebrauchsgegenständen, 8, Übungen, 1. —

Graefe: Technische Mechanik, 3, Übungen, 2; Höhere Mathematik, 3, Übungen, 2; Geschichte der Mathematik, 1. — **Horn**: Höhere Mathematik I, einschließlich Elemente der höheren Algebra, 6, Übungen, 4, II, 2, Übungen, 1. — **Dingeldey**: Höhere Mathematik I, einschließlich Elemente der höheren Algebra, 5, Übungen, 4; Einführung in die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. — **Wiener**:*) Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6, II, 2; Neuere mathematische Lehren zur Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben: Strecken- und Punktrechnung, 2—3; Arbeiten im mathematischen Institut (mit Sulzmann), 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Projektive Geometrie der Ebene in synthetischer und analytischer Behandlung, 2. — **Hohenner**: Geodäsie, 4; Höhere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen I, 4; Geodätische Ausarbeitungen, 2; Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2; Praktische Geometrie, 2. — **Assistenten**: Planzeichnen, 4. — **Henneberg**: Mechanik II, 6, Übungen (mit Graefe), 2 und 3; Hydrodynamik, 1. —

*) Zum Heeresdienst einberufen; soweit erforderlich werden Vertretungen eingerichtet werden.

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Kolloquium, Referate über neue Arbeiten (mit Helm und Toepler), 14 tägig, 2 *g*. — **Toepler**: Theoretische Physik IV: Optik, 4; Dioptrik für Vermessungsingenieure, 2. — **Luther**: Photographisches Praktikum, für Anfänger und Vorgeschrittene, 4 und 8; Selbständige Arbeiten im wissenschaftlich-photographischen Institute, 2 und 4, ferner ganz- und halbtägig. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik II, 2; Theorie des Wechselstromes II, 4; Elektrotechnische Übungen für Geübtere, 8; Elektrotechnisches Praktikum für Maschinen-, Elektro-, Betriebs-, Fabrikingenieure und Chemiker, 4; Größere elektrotechnische Spezialarbeiten, 20; Theorie der Leitungen II, mit seminaristischen Übungen, 2; Praktikum für Schwachstromtechnik, insbesondere drahtlose Telegraphie I und II, 14 tägig, 3; Selbständige Arbeiten im Institut für Schwachstromtechnik, 10 oder 20. — **Kübler**: Elektromaschinenbau II, 2, IV, 2, Übungen, 4 oder 8; Heizer- und Maschinistenkursus für Studierende, nach Verabredung. — **Möllering**: Eisenbahnsignalwesen, 2; Telegraphie und Telephonie: Wissenschaftliche Grundlagen, mit Demonstrationen, 2. —

F. Foerster: Brennstoffe, Theorie der Feuerungen, 2; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, Gewichts-, Maß- und Gasanalyse, Präparate, tägl. außer Sonnabend; Elektrochemie, ihre Theorie und technische Anwendung, 2; Physikalische (theoretische) Chemie, 3; Praktikum für Elektrochemie, 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **N. N.**: Organische Chemie, 5; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Farbenchemie (mit v. Walther), 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), tägl. außer Sonnabend. — **König**: Chemie der Textilindustrie: Gewinnung der Spinnfasern und ihre Veredlung durch Bleicherei, Färberei, Zeugdruck und Appretur, 2. — **v. Walther**: Chemie der heterozyklischen Verbindungen, 2; Chemie des Steinkohlenteers: Die Rohmaterialien und Zwischenprodukte für die Industrie der organischen Farbstoffe, 2. — **Dietz**: Chemische Technologie der Tonwaren, 1. —

Krause: Höhere Mathematik IV, 3, Seminaristische Übungen (mit Naetsch), 14 tägig, 2; Höhere Algebra, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Seminaristische Übungen, für Physiker (mit Naetsch), 1 *g*. — **Helm**: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 2, für Hochbau- und Chemische Abteilung, 2; Ergänzungen und Übungen zur analytischen Mechanik, 2. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie II, 3, Übungen, 4, Perspektive, 1; Theorie der geometrischen Verwandtschaften, 2; Nichteuklidische Geometrie, 1; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1 *g*. — **Naetsch**: Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades, 3; Elementare Algebra und Analysis, 2; Einleitung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung und des Pfaffschen Problems, 2. — **Pattenhausen**: Geodäsie I, 2, Übungen, 2, II, 3 und 2, Übungen, 2, Seminaristische Übungen, 2; Einführung in die Kenntnisse des Fixsternhimmels, mit Beobachtungen im Observatorium, 1; Geodätische Ausarbeitungen, 2; Graphische Ausarbeitungen, 2; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Katastervermessung, 2; Planzeichnen I, 2. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (Chemiker, Mediziner usw.), 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: Theoretische Physik, 4 (ev. Würschmidt), Übungen, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Würschmidt und Hauser), 1 *g*. — **Würschmidt**: Geschichte der Physik, 2; Vektorenrechnung mit Anwendungen, 2; Klimatologie, 2. — **Hauser**: Maschinenkunde, für Chemiker und Physiker, 1. —

O. Fischer: Anorganische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Henrich): a) Analytisch-chemische Übungen, b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch**: Pharmazeutische Chemie, Organischer Teil, 3; Grundlagen der Nahrungsmittelchemie, für Chemiker und Pharmazeuten, 2; Chemisches Praktikum: a) Vollpraktikum, tägl., b) Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Nahrungsmittelchemisches Praktikum: a) Vollpraktikum, b) Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Henrich**: Analytische Chemie der Metalle und Gewichtsanalyse (Experimentalvorlesung zur Ergänzung

des analytisch-chemischen Praktikums), 3; Ausgewählte Kapitel aus der Chemie, besonders Benzolderivate, 2. — **Jordis**: Physikalische Chemie I, 2; Chemisches Seminar, 2; Elektrochemisches Praktikum, 2 und 4. —

Noether: Analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung II, 4; Elliptische Funktionen, 3; Seminarübungen, nach Verabredung, *g*. — **E. Fischer**: Elemente der höheren Algebra, 4; Elemente der Zahlentheorie, 2; im Seminar: Übungen zur Einführung in die Analysis, für Kriegsteilnehmer, *g*. — **Hartwig**: Allgemeine Astronomie, 2; Systematische Vorführung der Einrichtungen der Sternwarte zu Bamberg, nach Verabredung, *g*; Astronomisches Praktikum auf der Sternwarte, tägl. *g*. — **Baldus**: Elementarmathematik, 2; Höhere Geometrie, 4; Politische Arithmetik für Juristen, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung für Versicherungsmathematiker, 2, Übungen. —

Universität Frankfurt a. M.

Wachsmuth: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Allgemeine Strahlung, 1; Physikalisches Kolloquium (mit v. Laue), 14tägig, 2; Physikalische Übungen, für Anfänger, 6, für Mediziner, 4, für Fortgeschrittene, tägl.; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **v. Laue**: Thermodynamik, 4; Quantentheorie, 1. — **Linke**: Theoretische Meteorologie, 2; Meteorologisch-geophysikalische Übungen, 2; Sonnenstrahlung, 1. — **Seddig**: Übungen in der optischen Projektion und Anstellung von Vorlesungsversuchen, 14tägig, 2; Wissenschaftliche Photographie, 14 tägig, 2; Photographisches Praktikum, 8. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom, 2; Elektrische Meßkunde, 1; Wechselstrom-Transformatoren, 1; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14tägig, 2; Kleines elektrotechnisches Praktikum I, 3, II, 3; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig; Gasmotorenpraktikum, nach Verabredung. —

Freund: Organische Experimentalchemie, mit einer Einleitung in die Grundlehren der anorganischen Chemie, 5; Kolloquium über neue chemische Literatur, 14tägig, $1\frac{1}{2}$; Großes chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: a) organische Abteilung, ganztägig, b) anorganische Abteilung (mit Ebler), ganz- oder halbtägig; Kleines chemisches Praktikum für Anfänger: Darstellung chemischer Präparate, Einführung in die qualitative und quantitative Analyse, Nahrungsmittelanalyse (mit Ebler), für Angehörige der Wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), 2 halbe Tage. — **Lorenz**: Physikalische Chemie, 4; Chemische Atomistik, 1; Kolloquium über neuere Arbeiten aus dem Gebiet der physikalischen Chemie, 14tägig, 2; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie, halbtägig 4 Wochen; Übungen im physikalisch-chemischen Laboratorium, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalisch-chemischen Laboratorium, ganztägig. — **Becker**: Angewandte Chemie und Bakteriologie in Industrie, Handel und Gewerbe, Chemisch-technische Warenkunde, Chemie und Industrie der Ersatzstoffe, mit Exkursionen I, 2, II, 2; Chemisches Praktikum: Übungen in der Untersuchung und Beurteilung von Handelswaren (Chemisch-technische Analyse), 5. — **Mayer**: Einführung in die anorganische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Zwischenprodukte der Teerfabrikation: Chemie der Benzolderivate, 2; Färberei und Zeugdruck, 1; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Speyer**: Synthetische Methoden der organischen Chemie II, 2. — **Tillmans**: Die Chemie der menschlichen Genußmittel, 2; Praktische Übungen in der Untersuchung von Nahrungsmitteln, Wasser und Abwasser, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, halbtägig. —

Schoenflies: Höhere Geometrie (Fortsetzung der analytischen Geometrie), 4; Über die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften II, 2; Mathematisches Seminar (mit Bieberbach und Szász): Vorträge der Teilnehmer über die Verteilung der Primzahlen, 2. — **Bieberbach**: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Ausgewählte Kapitel der höheren Funktionentheorie, 2. — **Hellinger**: Zahlentheorie, 4; Grundlagen der Geometrie, 2; Mathematisches Seminar: Übungen über Probleme der reellen Analysis, 2. — **Brill** (ev.): Stellarastronomie, 2. — **Szász**: Differential- und Integralrechnung II: Integralrechnung, 4, Übungen, 1. —

Universität Freiburg i. Br.

Himstedt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten, 1 Nachmittag, für Naturwissenschaftler, 2 Nachmittage, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik mit Übungen: Optik, 2, Repetitorium, 2; Relativitätstheorie, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Technisch-physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler: Übungen in der Anfertigung physikalischer Apparate und in der Vorführung von Demonstrationen, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. —

Gattermann: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Riesenfeld, Fromm, Meigen, Skita, Heß und Schwarz): a) für Chemiker, ganztägig, b) für Nichtchemiker, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Übungen im Experimentieren und Vortragen für künftige Lehrer der Chemie (mit Riesenfeld, Heß und Schwarz), II, organisch, 2 *g*. — **Kiliani**: Organische Experimentalchemie, 5; Arbeiten und Übungen im chemischen Laboratorium, med. Abteilung, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Autenrieth und Knoop), 6. — **Meyer**: Elektrochemie mit Demonstrationen, 2; Photographie mit praktischen Übungen und Demonstrationen, 2; Mechanische Wärmetheorie, 2; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Riesenfeld**: Anorganische Technologie, mit Exkursionen, 2; Elektrochemisches Praktikum, 3; Anorganisch-technologisches Praktikum, 2. — **Fromm**: Organische Experimentalchemie, 5; Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 3; Übungen im Bestimmen von Mineralien auf chemischem Wege, 2. — **Skita**: Spezielle Kapitel und Methoden der organischen Chemie (als Ergänzung des Hauptkollegs für Vorgeschrittenere), 2; Seminar der organischen Chemie, 1. — **Autenrieth**: Pharmazeutische Chemie I: Anorganische Chemie, 2; Darstellung und Wertbestimmung offizineller Präparate, 1. — **Knoop**: Physiologische Chemie, 2; Arbeiten und Übungen im physiologisch-chemischen Institut: Einleitung in das chemische Praktikum für Mediziner, 1. — **Heß**: Ausgewählte Kapitel der Geschichte der Chemie, 1 *g*. — **Madelung**: Moderne Theorien der organischen Chemie, 1. — **Schwarz**: Theorie der quantitativen Analyse, 1. —

Stickelberger: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1; Theorie der Differentialgleichungen, 4, Seminarübungen, 1. — **Heffter**: Differentialgeometrie, 4; Seminar, 2 *g*. — **Loewy**: Analytische Geometrie des Raumes, 4, Übungen, 1. — **Bolza**: Einführung in die Gruppentheorie, 3. — **Seith**: Darstellende Geometrie, 2, Übungen, 2 *g*. — **Ansel**: Populäre Astronomie, 2; Himmelsmechanik I, 2. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Vorgeschrittene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 2. — **Fromme**: Elektromagnetische Theorie des Lichtes, 2; Theoretisch-physikalische Übungen, 1. — **Aßmann**: Meteorologie, 1. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 3; Elektrizitätsleitung in Gasen, Kathoden, Röntgenstrahlen und Verwandtes aus dem Gebiete der Radioaktivität, 2. — **Uller**: Einführung in die

drahtlose Telegraphie, 1. — **Peppler**: Physik der Atmosphäre, 2. — **Jentzsch**: Beugungstheorie der optischen Instrumente, 1; Ballistik, 1. —

Elbs: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, tägl., für Landwirte, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Veterinärmediziner (mit Brand), 5; Pharmazeutisch-chemische und nahrungsmittelchemische Uebungen (mit Feist), tägl. — **Schaum**: Anorganische Chemie, 5; Einführung in die allgemeine Chemie, 2; Neuere physikalisch-chemische Anschauungen, 1 *g*; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Brand**: Chemische Technologie I: Technologie der anorganischen Stoffe, mit Exkursionen, 2. — **Feist**: Pharmazeutisch-chemische Präparate, organischer Teil, 3; Ausmittelung der Gifte: Chemische Toxikologie, 2. — **v. Liebig**: Grundanschauungen der Chemie in ihrer geschichtlichen Entwicklung, 1 *g*. — **Thomae**: Kolloidchemie und Ultramikroskopie, 1. —

Engel: Analytische Geometrie, 4, Übungen, 1; Elliptische Funktionen, 4; Mathematisches Seminar: Funktionentheorie, 2. — **Schlesinger**: Integralrechnung, 4, Übungen, 1; Zahlentheorie, 2; Anfangsgründe der Variationsrechnung, 2; Mathematisches Seminar: Differentialgeometrie, 1. — **Graßmann**: Projektive Geometrie der Ebene in analytischer Behandlung, 5, Seminar, 14tägig, 1; Konforme Abbildungen (mit Übungen, namentlich über Kartenprojektion), 3. —

Universität Göttingen.

Debye: Experimentalphysik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse von Physik- und Mathematik-Studierenden, 4; Ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium (mit Voigt), 2 *g*; im Mathematisch-physikalischen Seminar: Vorträge über Struktur der Materie (mit Hilbert), 2 *g*; Praktische Übungen im physikalischen Institut (mit Pohl, Simon und Rausch v. Traubenberg), 4 (außerdem: Übungen in physikalisch-technischer Handfertigkeit in der Göttinger Fachschule für Feinmechanik, 4). — **Voigt**: Elektronentheorie und Relativitätshypothese, 4; Spektroskopie, 2 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, nach Verabredung. — **Wiechert**: Vermessungswesen, theoretischer Teil: Geodäsie, Markscheidekunst, Nautik, Aeronautik, Rechnungsmethoden, 4; Ebbe und Flut und verwandte Erscheinungen, 1 *g*; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung; Thermodynamik, 4. — **Simon**: Physik und Technik der Röntgenstrahlen, 2; Die Strahlungsgesetze und die Beleuchtungstechnik, 1 *g*; Einführung in die Elektrotechnik, mit Demonstrationen, für Hörer aller Fakultäten, insbes. Juristen, 2; Anleitung zu Forschungsarbeiten auf dem Gebiete der angewandten Elektrizität, tägl.; Elektrotechnisches Praktikum, 3. — **Pohl**: Experimentalphysik mit besonderer Berücksichtigung der Naturwissenschaftler und Mediziner, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Rausch v. Traubenberg**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3. —

Windaus: Allgemeine Chemie I: Organische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Seminar für Lehramtskandidaten, 1 *g*; Chemische Übungen im Laboratorium (mit Borsche und Sielisch), Voll- und Halbpraktikum, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 6. — **Tammann**: Physikalische Chemie II, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4 Wochen ganztägig; Physikalisch-chemische Arbeiten, ganz- und halbtägig; Kolloquium, 1 *g*. — **Coehn**: Moderne Theorien der Chemie, 1; Photographisches Praktikum: a) für Anfänger, b) für Fortgeschrittene, 3; Photochemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Zsigmondy**: Anorganische Kolloide II, 1 *g*; Reversible Kolloide, 1; Praktikum der anorganischen und der Kolloidchemie, ganz- und halbtägig. — **Mannich**: Nahrungsmittelchemie, 1½; Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Die Chemie der neueren Arzneimittel, 1 *g*; Praktische Übungen in pharmazeutischer, toxikologischer und Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend. — **Borsche**: Einführung in die analytische Chemie, 3; Chemische Technologie organischer Verbindungen I, 2; Organisch-chemisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 1. — **Kötz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 2; Chemisches Konversatorium, 1; Vorträge über Fragen der anorganischen Chemie im Kolloquium, 1 *g*; Studienreise zur Kenntnis der chemischen Großindustrie, *g*. — **Sielisch**: Chemie der Benzolderivate, 2; Einführung in die Chemie für Mediziner, im Anschluß an das chemische Praktikum, 2. — **Vogel**: Metallographie, 1, Praktikum, 3. —

Hilbert: Mengenlehre, 4; Invariantentheorie (mit Frl. Nöther), 2 *g*. — **Klein**: im mathematisch-physikalischen Seminar: Vorträge über ausgewählte Teile der neueren Mathematik, 2 *g*. — **Runge**: Graphische Methoden mit Übungen, 6; im mathematisch-physikalischen Seminar: Über Fragen der reinen und angewandten Mathematik (mit Prandtl), 2 *g*. — **Prandtl**: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Mechanik einschl. Aerodynamik, tägl. — **Landau**: Elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen, 4; Mathematische Übungen für höhere Semester: Galoissche Theorie, 2 *g*. — **Hartmann**: Photometrie der Gestirne, 1; Leitung astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten, 12; Astronomisches Seminar, 2 *g*. — **Carathéodory**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 2 *g*; Analytische Mechanik, 4; Mathematische Übungen für mittlere Semester (mit Bernstein), 2. — **Ambronn**: Theorie und Behandlung der astronomischen Instrumente, 2; Ebene und sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 1; Astronomische Übungen für Anfänger, 6; Leitung selbständiger astronomischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. — **Bernstein**: Methode der kleinsten Quadrate, 1; Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik, 3; Versicherungsrechnung mit schriftlichen Übungen, 2; Vorträge über ausgewählte Gegenstände der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2 *g*. —

Universität Graz.

Radakovic: Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. — **Streintz**: Die optischen Instrumente, 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. —

Scholl: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen, auch für Lehramtskandidaten, für Anfänger (mit Skrabal), tägl. außer Sonnabend, für Vorgeschrittene, tägl., für Mediziner, 4. — **Kremann**: Physikalische Chemie III, 2; Physikalisch-chemische Arbeits- und Meßmethoden, 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. — **Skrabal**: Pharmazeutische Chemie, 4; Praktikum aus anorganischer und analytischer Chemie für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend. — **v. Hemmelmayr**: Chemische Technologie der Metalle: Metallgewinnung, mit Exkursionen, 2; Experimentierübungen (Chemische Schulversuche), für Lehramtskandidaten, 2. —

v. Dantscher: Analytische und projektivische Geometrie des Raumes, 5; Mathematisches Seminar I, 2 *g*. — **v. Daublebsky**: Algebra, 3; Zahlentheorie, 2; Mathematisches Seminar II, 2 *g*. — **Streißler**: Darstellende Geometrie, 3. — **Waßmuth**: Über neuere Fragen der statistischen Mechanik, 1 *g*. — **Hillebrand**: Theorie der Figur der Himmelskörper, mit besonderer Berücksichtigung des kosmogonischen Problems, 3; Über den Bau des Fixsternsystems, 1; Interpolationsrechnung und numerische Integration, 1. —

Universität Greifswald.

Mie: Experimentalphysik II: Elektrizitätslehre, Optik, 5; Elastizitätslehre und Hydrodynamik, 4; Physikalische Übungen, für Naturwissenschaftler, 6, Erläuterungen, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten,

2; Leitung selbständiger physikalischer Untersuchungen, tägl. —

Dimroth: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum: a) anorganische Abteilung, b) organische Abteilung (mit Posner), c) für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Scholtz), tägl. außer Sonnabend, d) für Mediziner, 4, Erläuterungen, 1/2 *g*. — **Scholtz**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Ausmittelung der Gifte, 1; Pharmazeutisches Kolloquium, 1 *g*. — **Posner**: Synthetische Methoden der organischen Chemie, 2; Besprechungen neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie, 1 *g*. —

Hausdorff: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1 *g*; Elliptische Funktionen, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. —

Universität Halle.

Schmidt: Experimentalphysik, 4; Theorie des Magnetismus und der Elektrizität, 4; Physikalisches Laboratorium: a) Übungspraktikum, 6, b) Selbständige Arbeiten von Geübten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Wigand**: Über Elektronen und Ionen, 1; Physikalisches Handfertigkeits-Praktikum, 3. — **Thiem**: Kursus der praktischen Photographie, 2. —

Erdmann: Praktische Übungen im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner, 4. — **Schneidewind**: Agrikulturchemie I: Die Ernährung der landwirtschaftlichen Kulturpflanzen, Bodenkunde und Düngerlehre, 4; Technologie der Kohlehydrate: Spiritusfabrikation, 1, Zuckerfabrikation, 1 *g*; Exkursionen und Demonstrationen, nach Verabredung. — **Schulze**: Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Tubandt), tägl. außer Sonnabend, für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend; Besprechung der Arzneimittelprüfungen, 1. — **Baumert**: Gerichtliche Chemie, 2; Praktische Übungen im Laboratorium für Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Gerichtlich-chemisches Praktikum, 3; Einführung in die gerichtlich-chemische Analyse, 1 *g*. — **Tubandt**: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 4; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 4.—

Wangerin: Differentialgleichungen, 3; Analytische Geometrie des Raumes, 3; Schwierigere Kapitel der Potentialtheorie, 1 *g*; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*. — **Gutzmer**: Variationsrechnung, 4; Einführung in die Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven, 2; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 *g*. — **Eberhard**: Integralrechnung, 4, Übungen, 1 *g*. — **Buchholz**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler: Methode der kleinsten Quadrate, 1; Störungstheorie, 2. — **Bernstein**: Maschinentheorien, 1. — **Pfeiffer**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 4 *g*.—

Technische Hochschule Hannover.

Precht: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik (mit Leithäuser), 4. — **Leithäuser**: Grundzüge der Physik, 3; Praktische Physik, 2; Photographie, 4. — **Kohlrausch**: Grundzüge der Elektrotechnik, 3; Theoretische Elektrotechnik, 4; Elektrotechnisches Laboratorium (mit Beckmann u. Brückmann) I, 8, II, 16, III für Maschineningenieure, 8; Elektrotechnisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Heim**: Elektrische Anlagen I: Einzelanlagen (mit Helsing), 3, Übungen, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen und Transformatoren (mit Helsing), 2, Übungen, 2; Telegraphie und Telephonie, 2; Elektrische Bahnen, Elektrotechnischer Teil, 2; Elektrische Kraftübertragung, 2. — **Beckmann**: Praktische Elektrotechnik für Anfänger II, 1; Elektrotechnische Meßkunde I_2, 2; Elektrische Apparate, 1 *g*. — **Brückmann**: Einphasen-Kollektormotoren, 1 *g*; Elektrotechnisches Seminar, 1. —

Seubert: Anorganische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium der anorganischen Chemie (mit Eschweiler, Seybold und Sauermilch), tägl. außer Sonnabend. — **Eschweiler**: Analytische Chemie, 3. — **Behrend**: Organische Chemie, 3; Arbeiten im Laboratorium der organischen Chemie (mit Ingebrigtsen und Nottbohm), tägl. außer Sonnabend. — **Ost**: Grundzüge der chemischen Technologie, 2; Allgemeine chemische Technologie, 4, Übungen im Skizzieren, 2; Arbeiten im Laboratorium der technischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Bodenstein**: Physikalische Chemie, 3; Elektrochemische Übungen (mit Braune), 4; Arbeiten im elektrochemischen Institut (mit Braune), tägl.; Übungen in der Elektroanalyse (mit Braune), 7. — **Jänecke**: Unsere Kalilager, mit Vorführung von Modellen, 1; Die physikalische Chemie der heterogenen Gleichgewichte: Phasenlehre, 1. — **Laves**: Grundzüge der Nahrungsmittelchemie, 2. —

Kiepert: Höhere Mathematik I (mit Prange), 6, Übungen, 2, Repetition, 1, III, 2; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Zahlentheorie, 3. — **Müller**: Höhere Mathematik II A (mit Prange), 6, Übungen, 2; Theoretische Mechanik I, 3; Mathematisches Seminar (mit Rodenberg und Salkowski), 2 *g*. — **Salkowski**: Grundzüge der höheren Mathematik, 3, Übung, 1; Praktische Mathematik, 2, Übungen, 2; Geometrie der Bewegung, 3. — **Rodenberg**: Darstellende Geometrie (mit Richter und Morin), 3, Übungen, 6, II, 3, Übungen, 6. — **Petzold**: Algebraische Analysis und Trigonometrie, 3. — **Oertel**: Geodäsie I: Praktische Geometrie (mit Petzold), 4, Übungen, 2, II: Ingenieur-Geodäsie, 2, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 2. — **Pröll**: Mechanik I: Grundzüge der Mechanik, 3, Übung, 1, II: Dynamik und Hydrodynamik, 4, Übung, 1, III: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik der Baukonstruktionen, 3, Übung, 1; Aeromechanik in ihrer Anwendung auf Motorluftschiffe und Flugzeuge, 1. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker), 6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theoretische Mechanik der starren und deformierbaren Körper, 4; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 *g*; Theorie des Elektrons, 1. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Curtius: Experimentalchemie II: Organische Verbindungen, 4, Metalle, 2; Chemisches Praktikum für Anfänger und Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Jannasch, Trautz und Müller), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Lehramtskandidaten, halbtägig. — **Jannasch**: Gewichtsanalyse, 2; Chemische Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 1; Gasanalytisches Praktikum (mit Müller), 4; Analytisches Praktikum zur Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 5. — **Knoevenagel**: Chemie der Benzolderivate; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe. — **Trautz**: Physikalische Chemie: Elektrochemie, Thermochemie, Molekulartheorie, chemische Gleichgewichte, 3; Physikalisch-chemische Besprechung anorganisch- und organisch-chemischer Arbeiten, 2; Theorie der elektromotorischen Kräfte chemischer Ketten, 2; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4–6 Wochen. — **Krafft**: Geschichte der Chemie, 2—3; Anorganische Chemie, 4; Praktisch-chemische Übungen und Arbeiten im Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Anfängerpraktikum, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum, 4 Wochen. — **Stollé**: Pharmazeutische Chemie II, organisch; Qualitative Analyse. — **Mohr**: Stereochemie, 1. — **Muckermann**: Analytische Methoden offizineller Arzneimittel; Wasser- und Harnanalyse. — **Müller**: Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1; Praktische Übungen, 2. —

Stäckel: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1; Algebraische Kurven und Flächen, 3; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2. — **Wolf**: Einige Kapitel aus den Elementen der Astronomie, 2 *g*. — **Perron**: Differential- und Integralrechnung, 4; Funktionen einer reellen Veränderlichen, 3; Mathematisches Unterseminar, 1. — **Koenigsberger**: Prinzipien der Mechanik, 3; Elliptische Funktionen, 2. — **Koehler**: Analytische Geometrie des Raumes, 3. — **N. N.**: Synthetische Geometrie, 3. —

Universität Innsbruck.

v. Schweidler: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Tumlirz**: Theoretische Optik, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g*. — **v. Lerch**: Physik für Pharmazeuten, 5. — **Hammerl**: Elektrotechnik I: Gleichstrom (Über elektrostatische und elektromagnetische Maße und Messungen, Elektrolyse, Akkumulatoren und Dynamomaschinen), 2 *g*. —

Brunner: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten, halbtägig, ev.: für Mediziner, 6. — **Hopfgartner**: Über Lösungen, 2; Thermochemie II, 1; Anleitung zur Benutzung der chemischen Literatur, 1. — **Zehenter**: Einführung in die chemische Technologie mit besonderer Berücksichtigung der Technologie der Brennstoffe und des Wassers, sowie der Schwefelsäure- und der Soda-Industrie, 2 *g*. —

Gmeiner: Analytische Geometrie der Ebene, 5; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Zindler**: Anwendung der Differentialrechnung und der Integralrechnung auf Geometrie und Bewegungslehre, mit Übungen, 6; Mathematisches Seminar für Anfänger: Einführung in die Differentialrechnung an der Hand eines Textes, 1. — **Menger**: Darstellende Geometrie I, 2 *g*, Zeichnungen, 1 *g*. —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum: a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3; Physikalisches Kolloquium; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Auerbach, Straubel und Pauli), tägl. — **Auerbach**: Experimentalphysik II: Elektrik, Magnetik, Optik, 4; Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper, 4; Die Physik seit hundert Jahren, zugleich als Repetitorium der Tatsachen, Gesetze und Theorien, $1^1/_2$; Physikalisches Praktikum (mit Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3. — **Straubel**: Geometrische Optik, 1. — **Ambronn**: Einleitung in die Theorie des Mikroskops, 2; Mikrophotographie und Projektion, 1; Übungen in der Handhabung des Mikroskops und seiner Nebenapparate, 2. — **Pauli**: Experimentalphysik IV: Elektrizität, Magnetismus, Optik, für Fortgeschrittene (als Ergänzung zu Experimentalphysik II), 2. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie, 4; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Wolff): a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpraktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpraktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu chemischen Spezialuntersuchungen (mit Schneider), 40. — **Wolff**: Analytische Chemie, 2; Elektrolyse und elektrolytisches Praktikum, 2. — **Immendorff**: Agrikulturchemie I: Pflanzenernährungslehre, 3, II: Tierernährungslehre, 2; Grundzüge der organischen Chemie für Landwirte, 1; Chemisches Praktikum für Landwirte: a) großes, tägl., b) kleines, 7; Agrikulturchemisches Seminar für Fortgeschrittene, 14tägig, 2 *g*. — **Vongerichten**: Chemische Technologie, anorganischer Teil, 2; Färberei- und Druckereikursus, 4; Technisch-chemisches Praktikum, halb- und ganztägig. — **Matthes**: Pharmazeutische Chemie I: Anorganische Chemie, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Untersuchung und Darstellung chemisch-pharmazeutischer Präparate, Ausmittelung der Gifte, tägl. außer Sonnabend; Praktische und theoretische Übungen aus dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, tägl. — **Schneider**: Chemie der Kohlenhydrate und Eiweißstoffe, 2. —

Haußner: Algebra, 4; Analytische Geometrie des Raumes, 5, Proseminar, 2 *g*; Elementare Reihentheorie, 4, Seminar: Algebra und Reihentheorie, 1 *g*. — **Koebe**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Proseminarübungen, *g*; Einleitung in die Funktionentheorie, 2; Analytische Mechanik, 4; Seminarübungen im Rahmen der Vorlesungen, *g*. — **Frege**: Grundlagen der Arithmetik, 4; Begriffsschrift, 1 *g*. — **Knopf**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3; Interpolationsrechnung und mechanische Quadratur, 1. — **Winkelmann**: Darstellende Geometrie I, mit Übungen, 6; Technische Mechanik II: Festigkeitslehre, mit Übungen, 4. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Lehmann: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik, 2 *g*; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Verabredung. — **N. N.**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2. — **Schachenmeier**: Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Richter**: Elektromaschinenbau I: Grundlagen, Gleichstrommaschinen, Transformatoren, 5; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, 6, für Vorgeschrittene, einschließlich Hochspannungs-, Hochfrequenzmessungen und drahtloser Telegraphie (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Schleiermacher**: Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 3; Theoretische Elektrizitätslehre, 3; Elektrotechnisches Laboratorium I, 6. — **Schwaiger**: Elektromotorische Betriebe, einschließlich Bahnen, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Nichtstationäre elektrische Vorgänge und Hochspannungstechnik: Übungen, 1; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Teichmüller**: Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie: Leitungen, 2, Übungen, 2; Energieversorgung des Landes, 1; Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Verabredung. — **Hausrath**: Drahtlose Telegraphie, 2; Schwachstromtechnik, 2; Besichtigung von Schwachstromanlagen, nach Verabredung. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, mit Vorträgen über die Theorie der photographischen Vorgänge, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. — **Schultheiß**: Meteorologie: Klimatologie, 1. —

Engler: Anorganische Experimentalchemie, 4; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Spezielle Kapitel der allgemeinen Chemie, 1; Chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Bredig**: Physikalische Chemie I, 2; Überblick über die theoretische und technische Elektrochemie, 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektrochemischer Einführungskurs, mit einleitenden Vorträgen. — **Bunte**: Chemische Technologie I, 2, II, 2; Metallurgie, 1; Brennstoffe und industrielle Feuerungen, 1; Übungen in der technischen Analyse (mit Eitner), für Chemiker, 4, für Maschineningenieure, 3, für Vorgerücktere, tägl.; Gaschemische Übungen, 2; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Technologische Exkursionen, nach Verabredung. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Besprechung neuerer Arbeiten auf dem Gebiete der organischen

Chemie, 1. — **Askenasy**: Prozesse der elektrochemischen Großindustrie II und Bau und Betrieb der Akkumulatoren, 2. — **Dieckhoff**: Organische pharmazeutische Chemie, 2; Gerichtliche Chemie, 2. — **Eitner**: Methoden der technischen Analyse, 2; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1, Übungen (mit Bunte), 3; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I und II, 1, Übungen, 4. — **Koenig**: Analytische Chemie II: Physikalisch-chemische Grundlagen der Analyse, 2. — **Reis**: Photochemie I: Strahlungslehre, 2. — **Rupp**: Chemische und mikroskopische Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln sowie Gebrauchsgegenständen, 2. — **Steinkopf**: Methoden der organischen Chemie, 1; Chemie der heterozyklischen Verbindungen I und II, 1. — **Terres**: Chemie der Gase, 2. — **Ubbelohde**: Industrie der Fette und Harze, 2; Über Patentwesen, 1. — **N. N.**: Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe I, 2, Übungen (mit Lindner), 2. —

Disteli: Darstellende Geometrie I und II, 4, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 2. — **N. N.**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Heun**: Mechanik I und II, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 *g*. — **Krazer**: Höhere Mathematik II, 3; Funktionentheorie, 2. — **Haupt**: Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2; Arithmetik und Algebra, 2, Übungen, 1; Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 1. — **Noether**: Elemente der Mechanik, 3, Übungen, 1; Elastizitätstheorie, 2. — **N. N.**: Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes I und II, 2, Übungen, 1. — **Haid**: Praktische Geometrie, 3; Höhere Geodäsie, 3; Geodätisches Praktikum I, 2, III, 3; Methode der kleinsten Quadrate, 2. — **Bürgin**: Katastervermessung II, Feldbereinigung, 2, Übungen, 4; Repetitorium der praktischen Geometrie, 2; Plan- und Terrainzeichnen, 4 und 2; Ausarbeitung der großen geodätischen Exkursion, 2. — **Stutz**: Organisation der Katastervermessung, 2, Übungen, 1. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger: a) Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) Mediziner und Pharmazeuten, 4, für Fortgeschrittene, tägl.; Repetitorium der Physik für Kriegsteilnehmer, 2 *g*. — **Weber**: Einleitung in die theoretische Physik: Mechanik und Optik, 4; Physikalische Maßeinheiten, 1 *g*; Theorie physikalischer Messungsapparate verbunden mit Übungen, 1; Ausgewählte physikalische Untersuchungen und Messungen, tägl. außer Sonnabend. — **Schmidt**: Repetitorium der physikalischen Meßmethoden mit praktischen Übungen, für Kriegsteilnehmer, 2. —

Diels: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum: a) Anorganische Abteilung (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, b) Organische Abteilung, tägl. — **Rügheimer**: Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Berend**: Repetitorium der organischen Chemie, für Mediziner, 3/4. — **Feist**: Chemische Technologie, anorganische Betriebe, 1; Stereochemie, 1; Organische Experimentalchemie, für Zahnärzte, 2. — **Mumm**: Chemie der Metalle, 3. — **Stoehr**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1. — **Preuner**: Einführung in die physikalische Chemie, 2. — **Horrmann**: Über Alkaloide und deren Ermittlung bei Vergiftungsfällen, 1. —

Pochhammer: Einleitung in die höhere Algebra, 3; Differentialgeometrie, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Harzer**: Theorie der Bahnbestimmungen, 3, Übungen, 1 *g*. — **Jung**: Analytische Geometrie des Raumes, 4; Partielle Differentialgleichungen, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 1 *g*. — **Kobold**: Theorie der Finsternisse, 2, Übungen, 14 tägig, 2 *g*. — **Toeplitz**: Differential- und Integralrechnung II, 4; Übungen für frühe Semester, 1 *g*, für mittlere Semester, 4. — **Neuendorff**: Darstellende Geometrie I, mit Zeichenübungen, 5; Übungen und Vorträge aus der angewandten Mathematik, 1 *g*. —

Universität Königsberg.

Kaufmann: Experimentalphysik II: Optik, Magnetismus, Elektrizität, 5, Ergänzungen, 1 *g*; Physikalische Übungen, für Mathematiker und Physiker, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Volkmann**: Theorie des Lichtes, 4, im Seminar: Ergänzungen und Erläuterungen, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Technik und Physik der Röntgenstrahlen, 1. —

Klinger: Organische Chemie, 4; Chemisches Praktikum (mit Blochmann und Eisenlohr), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 2 Nachmittage; Besprechung ausgewählter Kapitel der Chemie (mit Blochmann, Eisenlohr und Sonn), 1 *g*. — **Rupp**: Pharmazeutische Chemie, 3; Übungen im pharmazeutisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-wissenschaftliches Kolloquium, 1 *g*. — **Blochmann**: Chemische Technologie der Metalle, 2; Maßanalyse: Titriermethoden, 1 *g*. — **Eisenlohr**: Die physikalischen Eigenschaften der chemischen Körper, 1; Die Entwicklung der organischen Chemie, 1 *g*. —

Meyer: Analytische Geometrie II, mit Übungen, 4; Analytische Mechanik, 4; Mathematisches Seminar: Übungen zu Mechanik, *g*; Mathematische Gesellschaft, *g*. — **Battermann**: Sphärische Astronomie, 1½; Wissenschaftliches Rechnen, besonders Interpolation und numerische Integration, 14 tägig, 1 *g*. — **Boehm**: Differential- und Integralrechnung II, mit Übungen, 4, Ergänzungen und Anwendungen, 1 *g*; Elliptische Funktionen und ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, 3; Mathematisches Seminar, 1 *g*. — **Kaluza**: Versicherungsmathematik und Übungen, 2; Einführung in die Relativitätstheorie, 1; Repetitorium der Elementarmathematik, mit Übungen, 3. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl und Füchtbauer), tägl.; Physikalisches Praktikum (mit Scholl und Füchtbauer), 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Thermodynamik, 4; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl. — **Bjerknes**: Dynamik elastischer Körper und reibender Flüssigkeiten, 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut (mit Wenger), tägl.; Geophysikalisches Kolloquium (mit Wenger), 2 *g*. — **v. Oettingen**: Das duale Harmoniesystem und die reine Stimmung, 2 *g*. — **Fischer**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften: Differential- und Integralrechnung, mit Übungen, für Mediziner und Naturwissenschaftler, insbesondere Chemiker, 3; Über die Wirkung der Muskeln, 1. — **Scholl**: Allgemeine Experimentalphysik, für Zahnärzte, 4. — **Marx**: Elektrische Wellen und drahtlose Telegraphie, 2. — **Haas**: Allgemeine Bewegungslehre als Einführung in die theoretische Physik, 3; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Fortgeschrittene, nach Verabredung, *g*. — **Lilienfeld**: Erzeugung und Anwendung tiefer Temperaturen, 1 *g*. — **Wenger**: Atmosphärische Zirkulationen, 2. —

Hantzsch: Organische Experimentalchemie, 5; Analytisch- und präparativ-chemisches Praktikum (mit Schaefer), tägl.; Organisch-chemisches Praktikum (mit Reddelien), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6, für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc**: Physikalische Chemie I, 4; Chemisches Praktikum für Anfänger: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemisches Praktikum: Photochemisches (mit Weigert), elektrochemisches und kolloid-

chemisches (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auch für Mediziner, auf Wunsch: Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Böttger), 4 oder 8. — **Paal**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, analytisch, anorganisch und organisch (mit Sieverts, Deußen, Scheiber und Waentig), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen und Waentig), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologisches Praktikum (mit Deußen und Scheiber), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Sieverts und Waentig), 6, für Vorgerücktere (mit Heller, Deußen, Sieverts, Scheiber und Waentig), tägl.; Chemisch-technisches Praktikum (mit Heller), tägl. — **Stobbe**: Spezielle organische Chemie: Die heterozyklischen Verbindungen, mit besonderer Berücksichtigung der Alkaloide und der künstlichen Heilmittel, 1; Spezielle organische Chemie: Mehrkernige aromatische Verbindungen (Gruppe des Diphenyls, der Polyphenylmethane, des Naphthalins, Anthrazens usw.), 1. — **Wagner**: Experimentelle Einführung in die Chemie auf physikalischer Grundlage, 1, Ergänzung, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Lehrer: Schulversuche, Analyse und Präparate, tägl.; Didaktische Besprechungen: Elektrochemie, 1 *g*. — **Rassow**: Chemische Technologie, organische Betriebe: Zucker, Stärke, Gärungsgewerbe, Fette und Seifen, 2; Technologische Exkursionen, nach Verabredung *g*; Der Zellstoff und seine Anwendung zur Herstellung von Papier, Zelluloid, Kunstseide, Schießbaumwolle, 1 *g*; Chemisch-technologisches Praktikum, ganz- oder halbtägig. — **Weigert**: Moderne Chemie, 1; Photochemische und photographische Arbeitsmethoden, mit praktischen Übungen, 4. — **Schall**: Ausgewählte Kapitel der elektrochemischen Technik, nebst einer Einleitung: Über elektrolytische Darstellung chemischer Präparate, 1; Elektrolyse im wasserfreien Lösungsmittel, 1 *g*. — **Böttger**: Wissenschaftliche Grundlagen der analytischen Chemie: Übersicht über das Gesamtgebiet der qualitativen und quantitativen Analyse, 2. — **Heller**: Praxis des Farbenchemikers, 1. — **Sieverts**: Einführung in die Metallographie, mit Übungen, 3. — **Deußen**: Die wichtigsten Untersuchungsmethoden des deutschen Arzneibuchs, 1; Übungen im Sterilisieren, für Pharmazeuten, nach Verabredung. — **Schaefer**: Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie, mit Demonstrationen, 2. —

Hölder: Einführung in die Theorie der algebraischen Gleichungen, 2; Mechanik, 5, Übungen, 1 *g*. — **Bruns**: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung, 1; Praktische Analysis, mit Übungen, 1; Praktische Arbeiten in der Sternwarte, nach Verabredung, *g*. — **Rohn**: Differentialgeometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Projektive Geometrie, 2. — **Herglotz**: Analytische Geometrie des Raumes, 4; Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, 2. — **Blaschke**: Differential- und Integralrechnung, mit Übungen, 6; Ausgewählte Gegenstände der höheren Geometrie, 2. —

Universität Marburg.

Richarz: Experimentalphysik II: Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5; Übersicht über die Physik, als Wiederholung für Kriegsteilnehmer in höheren Semestern, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*; Physikalisches Praktikum (mit Feußner und Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **Feußner**: Theoretische Physik: Wärme, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **Schulze**: Elektronentheorie, 2; Übersicht über die theoretische Physik als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 *g*. — **Take**: Drahtlose Telegraphie und Telephonie mit Experimenten und Demonstrationen auf der Radiostation, 2; Repetitorium der Experimentalphysik mit elementar-mathematischen Übungen I, 1. — **Wegener**: Optische Erscheinungen der Atmosphäre, 1. —

v. Auwers: Organische Experimentalchemie, für Chemiker und Mediziner, 5; Chemisches Praktikum (mit Fries), tägl. außer Sonnabend, für Vorgerückte, tägl.; Chemische Übungen für Mediziner (mit Strecker), ganz- oder halbtägig; Praktisch-chemischer Kursus für Mediziner (mit Strecker), 1/2, Theoretische Einführung, mit Demonstrationen: Praktikum, 3 1/2; Chemisches Seminar, im Anschluß an die wissenschaftlichen Arbeiten im Institut, 14tägig, 2 *g*. — **Keller**: Organische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie und Medizin, 6; Nahrungsmittelchemie II: Einzelbesprechung wichtiger Nahrungs- und Genußmittel, 2; Übungen über Keimfreimachung von Arznei- und Verbandmitteln, 2; Besprechungen und Übungen über Prüfung von Arzneimitteln, 1 *g*. — **Strecker**: Qualitative Analyse, 2; Konstitution anorganischer Verbindungen, 1; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2. — **Fries**: Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie, 3; Chemie der Terpene, 1; Chemisches Kolloquium, 2 *g*; Chemisches Repetitorium für Mediziner: Anorganische Chemie, 1. — **N.N.**: Kolloidchemie, 1; Chemische Technologie, mit Demonstrationen und Exkursionen, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Schmidt**: Praktische Übungen in der analytischen und forensischen Chemie, sowie in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel und selbständige Arbeiten (mit Keller), tägl., im Anschluß: Qualitative Analyse. — **Thiel**: Physikalische Chemie II, 3; Theoretische Übungen über ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1 *g*; Physikalisch-chemisches Praktikum, 6; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Photochemisches und photographisches Praktikum, für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Stuchtey), 2 *g*. —

Hensel: Analytische Geometrie des Raumes, 3; Über die Axiome der Geometrie, 1; Höhere Funktionentheorie, 3; Mathematisches Seminar: Übungen über ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, 1 *g*. — **v. Dalwigk**: Integralrechnung, 4; Darstellende Geometrie II, mit Übungen, 2. — **Neumann**: Variationsrechnung, 4; Theorie der Kurven und Flächen, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Mechanik, 4, Seminarübungen, 2 *g*; Quantentheorie, für Vorgeschrittenere, 1 *g*; Neuere experimentelle und theoretische Fortschritte in der Atomistik und Elektronik (populär, ohne mathematische Entwickelungen), 1. — **Graetz**: Experimentalphysik I: Einleitung, Wärme, Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung *g*. — **Koch**: Photographie als Hilfsmittel der physikalischen Forschung, mit Demonstrationen, 1. — **Wagner**: Über die Methoden zur Bestimmung der Molekülдimensionen, 1. — **Donle**: Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichtes, 2. — **Schmauß**: Allgemeine Meteorologie und Klimatologie, 4. —

Willstätter: Unorganische Experimentalchemie, 5; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium (Unorganische Abteilungen (mit Prandtl und Vanino), tägl. außer Sonnabend, Organische Abteilung (mit Wieland und Dieckmann), tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittenere Mediziner (mit Wieland), halb- oder ganztägig. — **Paul**: Organische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 1 1/2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde: Anorganische Präparate, 2 1/4; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich physikalisch-chemischer, elektrochemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, mit serologisch-chemischen Übungen, im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend; Übungen für praktische Apotheker, nach Verabredung. — **Prandtl**: Spezielle unorganische

Experimentalchemie II: 4. bis 8. Gruppe des periodischen Systems, 3; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **Wieland:** Spezielle organische Chemie I: Fettreihe, 3. — **Dieckmann**: Chemie der Alkaloide, 1 *g*. — **Pummerer:** Anorganisch-chemische Technologie, ohne Schwermetalle, mit Exkursionen, 2. — **Meyer**: Elektrochemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum, 4. — **Kalb**: Kolloquium über organische Chemie, 1. —

Lindemann: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Differential- und Integralrechnung II, 5; Anwendung der Funktionentheorie auf die Differentialgleichungen, 2; Übungen und Vorträge im Mathematischen Seminar, $1^1/_2$ *g*. — **v. Seeliger**: Kapitel aus der theoretischen Astronomie, 4; Astronomisches Kolloquium, nach Verabredung *g*. — **Voß**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 2 *g*; Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, 4. — **Pringsheim:** Höhere Algebra, 4. — **Brunn**: Elemente der höheren Mathematik und der darstellenden Geometrie, mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der Forstkandidaten, 3. — **Hartogs**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 3. — **Großmann**: Sphärische Astronomie, 3. — **Böhm**: Elemente der Versicherungsrechnung, 2; Theorie der Differentialgleichungen, 4; Seminar für Statistik und Versicherungswissenschaft (mit v. Mayr und Zahn). — **Dingler**: Elementarmathematik, mit geschichtlichen und pädagogischen Hinweisen, 4; Einführung in die mathematische Behandlung von Beobachtungsdaten, 2. — **Rosenthal:** Synthetische Geometrie I, 4, Übungen, 1; Seminar: Übungen über ausgewählte Fragen der höheren Mathematik, 2. —

Technische Hochschule München.

Zenneck: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik, 6; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12—30. — **Fischer**: Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 3; Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts I: Mechanik, Akustik, Wärme, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik, 8—30; Elemente der theoretischen Physik: Mechanik, Elastizität und Wärmelehre, 4; Interferenz- und Beugungserscheinungen, experimentell und theoretisch behandelt, 1. — **Knoblauch**: Anwendungen der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Erscheinungen, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Verabredung. — **Emden**: Methoden und Ergebnisse der Erforschung des Erdinnern, 2; Meteorologie und Klimatologie, 2. — **Dieckmann:** Ausgewählte Kapitel der Telegraphen- und Fernsprechtechnik, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik, nach Verabredung. — **von und zu Aufseß**: Populäre Astrophysik I, 2. — **Schröter**: Mechanische Wärmetheorie, 2, Übungen, 1. — **Urban**: Unterrichtskurse in praktischer Photographie, 1, Praktische Übungen, 3. — **Heinke**: Einführung in die Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik und Photometrie, 8, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **N. N.**: Schwachstromtechnik: Telegraphie, Telephonie und drahtlose Telegraphie, 2. — **Ossanna:** Elektrotechnisches Praktikum II: Messungen an Maschinen, Umformern und Transformatoren, 8 und 2; Theorie und Konstruktion der elektrischen Maschinen I: Gleichstrommaschinen und Umformer, 3, II: Synchrongeneratoren und Synchronmotoren, 3; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen, 4. — **Kadrnozka**: Elektrische Anlagen I: Verwertung elektrischer Arbeit: a) Elektrische Kraftbetriebe, 2, b) Elektrische Bahnen, 3, II: Erzeugung und Verteilung elektrischer Arbeit, 2, Übungen: Entwerfen elektrischer Anlagen, 4. —

Manchot: Unorganische Experimentalchemie einschließlich der Grundzüge der physikalischen Chemie, 6; Unorganisches und analytisch-chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere, 10, 20 oder 30; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im unorganischen Laboratorium, nach Verabredung. — **Lipp**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der organischen Chemie, 30. — **Albert**: Chemische Technologie der Fette und Öle, 1; Die Herstellung neuerer Arzneimittel, 1. — **Rohde**: Die Hauptgruppen der heterozyklischen Verbindungen unter Berücksichtigung der wichtigsten zugehörigen Alkaloide, 3. — **Hofer**: Analytische Chemie der Metalle und Metalloide nebst Gewichts- und Maßanalyse II, 2; Theoretische Elektrochemie, 2; Praktikum im elektrochemischen Laboratorium, 10, 20 oder 30. — **Schultz**: Chemische Technologie II, 3; Praktikum im chemisch-technischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Chemie, nach Verabredung; Chemisch-technische Übungen: Chemisch-technische Analyse, Färberei, 4. — **Jacob**: Chemisch-technische Prüfungsmethoden, 1. — **Braß**: Textilfaserstoffe und ihre Veredlung, 1. — **Lintner**: Chemische Technologie des Wassers und der Kohlehydrate, 3; Gärungschemisches Praktikum nebst Übungen in der Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, bis 30; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im gärungs-chemischen Laboratorium, bis 30. —

v. Dyck: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 3; Funktionentheorie nach Riemann, 5; Mathematisches Seminar (Kolloquium) (mit Finsterwalder, Faber und Liebmann), 2. — **Faber**: Höhere Mathematik III, 5, Übungen, 2; Theorie und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. — **Doehlemann**: Grundzüge der höheren Mathematik I, 4; Darstellende Geometrie I, mit Schattenkonstruktionslehre, 5, Übungen, 6; Synthetische (neuere) Geometrie, 4, Übungen: Kegelschnitte, 1. — **Liebmann**: Ebene und sphärische Trigonometrie, 3, Übungen, 1; Elementare Mathematik, für Fortgeschrittene, 3; Integralgleichungen, 2. — **Finsterwalder**: Differentialgeometrie, mit Vektoren, 3; Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4. — **Lagally**: Algebraische Kurven, 4. — **Burmester**: Täuschungsarten und Kinematographie, mit Demonstrationen, 1. — **Schmidt**: Vermessungskunde I, 4, Praktikum I, 2 und 4; Landesvermessung, 4; Katastertechnik mit besonderer Berücksichtigung der Entwicklungsgeschichte und derzeitigen Gestaltung des bayerischen Katasters I, 3, Praktikum III: Meßübungen, 4, Rechenübungen, 4; Kartierungsübungen, 4. — **Bischoff**: Graphisches und mechanisches Rechnen: Rechenschieber, Rechenmaschinen, Planimeter usw., 1; Ausgleichungsmethoden der Bayer. Katasterverwaltung, 1. — **Schlötzer**: Anleitung zur rechnerischen Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2. — **Föppl**: Technische Mechanik einschließlich der Elemente der graphischen Statik und der analytischen Mechanik II: Graphische Statik, 3, Übungen, 2, III: Festigkeitslehre, 4. —

Universität Münster.

Schmidt: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 und 6, für Fortgeschrittene (mit Konen), tägl.; Physikalisches Seminar, 14tägig (mit Konen), 2 *g*. — **Konen**: Theorie der Wärme, 4, Übungen, 1 *g*; Physikalische Mechanik, 2. —

Schenck: Organische Experimentalchemie, 3; Die Lehre von den chemischen Gleichgewichten, 2; Chemisches Praktikum (mit Ley), ganz- und halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Chemische Übungen für Mediziner (mit Kaßner und Ley), 4; Chemisches Kolloquium (mit Ley), nach Verabredung. — **Salkowski**: Über die Alkaloide, 2 *g*. — **Kaßner**: Anorganische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Medizin und Pharmazie, 4; Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, mit besonderer Berücksichtigung der Elektrochemie, 1; Kolloquium über pharmazeutische Präparate und die Gegenstände des deutschen Arzneibuchs, 1; Pharmazeutisch-

chemische, maßanalytische und toxikologische Übungen im Laboratorium, Darstellung chemischer Präparate, für Vorgerücktere: Anleitung zur Bearbeitung wissenschaftlicher oder technischer Aufgaben, tägl. außer Sonnabend; Maßanalyse, 1 *g*. — **Ley**: Physikalische Chemie I, 3. — **Ott**: Chemie der heterozyklischen Verbindungen, 1; Synthetische Methoden der organischen Chemie, 1. — **Bömer**: Analyse der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Chemie und Technologie der Gärungsgewerbe, 1 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Chemie, für Fortgeschrittene (mit König), tägl. —

Killing: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1 *g*; Determinanten und niedere Algebra, 2; Übungen des mathematischen Unterseminars, 2 *g*. — **v. Lilienthal**: Differentialgeometrie, 4; Analytische Geometrie II, 4; Übungen des mathematischen Oberseminars, 2 *g*. — **Schewior**: Methoden der darstellenden Geometrie, 3, Übungen, 2 *g*; Theorie der Beobachtungsfehler und Ausgleichungsrechnung, 2, Übungen, 1 *g*; Grundlagen der Landesaufnahme mit Einschluß der Arbeiten in den Kolonien, 1. — **Plaßmann**: Die Fixsterne, 2 *g*; Interpolationsrechnung, 1; Sphärische Trigonometrie und sphärische Astronomie, 2; Übungen im Beobachten und Rechnen, nach Verabredung *g*. —

Universität Prag.

Lampa: Experimentalphysik I, 5, Physikalisches Praktikum I, 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, für Vorgeschrittene, tägl. *g*; Ernst Mach, 1 *g*. — **Frank**: Analytische Mechanik, 3; Theorie der Elektrizität, 2; Seminar für theoretische Physik: Untere Abteilung: Theorie der Luftschiffahrt, 1 *g*, Obere Abteilung: Theorie der Gravitation, 2 *g*. —

Meyer: Anorganische Chemie, für Philosophen, Mediziner und Pharmazeuten, 5; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, für Vorgeschrittene, tägl. *g*; Übungen in der Ausführung von Vorlesungsexperimenten, für Lehramtskandidaten, 2. — **Rothmund**: Physikalische Chemie I, 4, Mathematische Ergänzungen, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Wagner**: Einführung in die Kolloidchemie, 1. — **Kirpal**: Pharmazeutische Chemie, 4. — **Hönigschmid**: Analytische Chemie, 3. — **Herzog**: Ausgewählte Kapitel der Biochemie, nach Verabredung. — **Sigmund**: Biochemie der Alkaloide und Glukoside, 1. — **Fortner**: Chemie der Nahrungsmittel mit praktischen Übungen in der Untersuchung, 3. —

Pick: Differentialgleichungen, 3; Quadratische Differentialformen, 2; Mathematisches Seminar: Übungen, 2 *g*. — **Kowalewski**: Theorie der analytischen Funktionen, 4, Ergänzungen: Mengenlehre, reelle Funktionen usw., 1; Übungen, 1. — **Funk**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, insbesondere für Chemiker und Naturhistoriker, 3; Ausgewählte Kapitel aus der Geschichte der Mathematik, 2. — **Scheller**: Grundzüge der Astrophysik II, 2. — **Spitaler**: Allgemeine Meteorologie, 4, Praktikum, 1. —

Technische Hochschule Prag.

Tuma: Experimentalphysik: Metrologie, Fundamentalsätze der Mechanik, Mechanik physikalischer Körper, Hydrostatik und Hydrodynamik; Aerostatik und Aerodynamik, Wellenlehre, Akustik, Optik, Wärmelehre, Molekulartheorie, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Physikalisches Praktikum, 6. — **N. N.**: Allgemeine Elektrotechnik, 3; Ausgewählte Kapitel der Wechselstrom-Elektrotechnik, 2. —

Hönigschmid: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie, anorganisch-qualitativ, 2; Übungen im anorganisch-chemischen und analytischen Laboratorium I und II, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Geübtere, tägl. außer Sonnabend. — **Wenzel**: Organische Chemie: Spezielle Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Analytische Methoden der organischen Chemie, 1; Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl. — **Storch**: Chemie der Metalle und technischen Metallgewinnung: II. und III. Gruppe des periodischen Systems, 2; Die wissenschaftlichen Grundlagen der Maßanalyse, 1; Physikalische Chemie I: Chemische Statik und Dynamik, 2, IV: Elektrochemie, 3; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum, zugleich Physikalische Methoden der Untersuchung von Nahrungsmitteln, 1, Übungen, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, 15. — **Ditz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe I: Chemische Großindustrie, 6; Übungen im anorganisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Georgievics**: Chemische Technologie organischer Stoffe I, 5; Übungen im organisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Gintl**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, 3; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, Übungen, 8; Methoden der quantitativen Mineralanalye, 2; Praktische Metallographie, 2, Übungen, 1 Nachmittag. — **Außerwinkler**: Photographie, 1, Übungen, 4, Photographisches Laboratorium, 4. — **Herzog**: Agrikulturchemie, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Vorgeschrittene, tägl. — **Siegmund**: Biochemie der Alkaloide, Glukoside und Gerbstoffe, 1; Ausgewählte Kapitel der Chemie für Kulturingenieure, 2. —

Carda: Mathematik I, 6, Übungen, 2; Elemente der höheren Mathematik, 6, Übungen, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung, Funktionen einer komplexen Variabeln, 2. — **N. N.**: Mathematik II, 6, Übungen, 2, für Handelslehrkandidaten, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Rosmanith**: Versicherungsmathematik I, 4, IIa, 2, IIb, 2; Politische Arithmetik, 2. — **Mack**: Darstellende Geometrie, 4, Konstruktive Übungen, 6, Übungen für Vorgeschrittene, 6; Geometrie der Lage, 3. — **Grünwald**: Ausgewählte Abschnitte aus der Bewegungslehre starrer Körper, 2. — **Pöschl**: Allgemeine Mechanik, 3, Übungen, 1, Graphische Übungen, 2; Besondere Probleme aus dem Gesamtgebiete der Mechanik, 2. — **Geßner**: Enzyklopädie der Mechanik, 3. — **Haerpfer**: Elemente der niederen Geodäsie, 3, Übungen, 2; Theorie der Kartenprojektionen, 1. — **Adamczik**: Niedere Geodäsie, 4½, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 3, Übungen, 2; Geodätisches Rechnen I, 2, II, 2. —

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Optik, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen: a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Weber**: Einführung in die theoretische Physik, 3, Übungen, 1; Elektrizität und Magnetismus, 2. —

Pfeiffer: Spezielle Kapitel aus der anorganischen Chemie, 2; Kolloidchemie, 1. — **Stoermer**: Organische Chemie, 5; Übungen in der organischen Abteilung: a) Großes chemisches Praktikum, tägl., b) Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Gerichtlich-toxikologische Chemie, 2; Übungen für Mediziner, 4. — **Honcamp**: Agrikulturchemie II: Tierernährung, 2; Agrikulturchemisches Praktikum, tägl. — **Kümmell**: Chemische Verwandtschaftslehre: Chemische Statik und Kinetik, Thermochemie, Photochemie, 3. —

Staude: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Algebra, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Universität Straßburg.

Braun: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, 13, Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Cohn**: Theorie des Lichtes, 3; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 1; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Rohmann**: Technische Anwendungen der Elektrizität (experimentell), 2. — **Hecker**: Ausgewählte Kapitel aus der Physik des Erdkörpers, 1. —

Thiele: Allgemeine Experimentalchemie, anorganischer Teil, 5; Kolloquium über allgemeine Chemie für Anfänger, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene (mit Wedekind und Straus), tägl. außer Sonnabend. — **Rose**: Chemische Technologie der Metalloide, 3; Die Untersuchung und Reinigung des Wassers, 1 *g*. — **Wedekind**: Analytische Chemie I, 3; Physikochemisches Praktikum, 4. — **Straus**: Organische Reaktionen in ihrem Zusammenhang, 4. — **Kreutz**: Zuckerindustrie und Bierbrauerei, 1. — **Ruggli**: Synthesen der organischen Chemie II, 1. — **Weitz**: Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1. —

Schur: Projektive Geometrie, 4; Vektoranalysis, 1; Übungen des mathematischen Seminars, 1 1/2. — **Wellstein**: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. — **Epstein**: Funktionentheorie, 3. — **Speiser**: Differential- und Integralrechnung, 4. — **Bauschinger**: Bahnbestimmung der Himmelskörper, 4; Übungen in der Sternwarte, nach Verabredung. — **Wirtz**: Geschichte der griechischen Astronomie, 1. —

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik, 4; Theoretische Physik (als Einleitung: Mathematische Ergänzung zur Experimentalphysik), 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu physikalisch-wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Handfertigkeitspraktikum in Physik, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, 1. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen, 2, Übungen, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente, 1; Dynamobau I, a) Seminar, 1, b) Übungen (mit Brandegger), 6, II, 2; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen (mit Brandegger), 8; Elektrische Kraftwerke und Antriebe, 2; Projektieren elektrischer Anlagen (mit Brandegger), 4; Übungen in elektrotechnischen Konstruktionen und Anlagen für Maschineningenieure (mit Brandegger), 4. — **Emde**: Grundlagen der Elektrotechnik; Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, 2, Übungen, 1; Wechselstromtechnik I, 2, Übungen, 8, II, 2, Übungen, 4. — **Herrmann**: Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, Übungen, 8, II, 1, Übungen, 4; Schwachstromtechnik I, 2, Übungen, 4; Übungen in drahtloser Telegraphie, 4; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. —

Gutbier: Anorganische Experimentalchemie, 4; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie (mit Schmidt), tägl. außer Sonnabend. — **Küster**: Technische Chemie II: Organisch-chemische Großindustrie, 2; Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 2; Chemie der Nahrungsmittel, Genußmittel und Gebrauchsgegenstände, 2; Übungen im Laboratorium für organische Chemie, organisch-chemische Technologie und Pharmazie, tägl. außer Sonnabend. — **Grube**: Elektrochemie, 3; Übungen im Laboratorium für Physikalische und Elektrochemie (mit Krauß), tägl. außer Sonnabend. — **Kauffmann**: Radioaktivität und Elektronik, 1; Farbenchemie, 2. — **Schmidt**: Analytische Chemie, 2; Einführung in die Stöchiometrie, 1; Chemisches Seminar, 2. — **Bauer**: Stereochemie, 1; Die chemische Untersuchung des Harns, mit Übungen, 2; Spezielle organische Chemie, 2. —

Haller: Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 2. — **Stübler**: Niedere Analysis, 4; Elemente der Differential- und Integralrechnung, 3, Übungen, 1. — **Kutta**: Höhere Mathematik II, 5, Übungen, 3, IV, 1, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2. — **Wölffing**: Funktionentheorie, 3; Variationsrechnung, 1 *g*. — **Mehmke**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen (mit Stübler), 4; Graphisches Rechnen, 1, Übungen (mit Stübler), 2; Analytische Mechanik, 3, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1. — **Kommerell**: Grundlagen der Geometrie, 2. — **Roth**: Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde, Übungen, 4. — **Kriemler**: Technische Mechanik, 6, Übungen, 2; Graphische Dynamik, Übungen 1. — **Heer**: Plan- und Geländezeichnen, 4; Geodätische Übungen, 4. — **v. Hammer**: Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2; Praktische Geometrie I: Vermessungskunde, 3, Übungen, 4 u. 2; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2; Direkte Zeit- und geographische Ortsbestimmung, 2. —

Universität Tübingen.

Paschen: Experimentalphysik: Akustik, Wärme Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, halbtägig; Selbständige wissenschaftliche Untersuchungen, ganztägig. — **Rosenberg**: Populäre Astronomie, 2 *g*. —

Wislicenus: Allgemeine Chemie I: Anorganische Chemie, 5, Ergänzungen, 1; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Anfänger und Fortgeschrittene, tägl.: Voll- und Halbpraktikum, Abgekürztes Praktikum für Mathematiker und Forststudierende, 12: a) Analytisch-chemisches Praktikum (mit Bülow und Weinland), b) Chemisch-pharmazeutisches Praktikum (mit Weinland), c) Organisch-präparative Arbeiten (mit Kliegl), d) Physikalisch-chemische Übungen (mit Magnus), e) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Untersuchungen (mit Bülow, Weinland, Kliegl, Magnus, auf dem Gebiete der physikalischen Chemie). — **Thierfelder**: Organische Chemie für Mediziner, 4; Praktisch-chemische Übungen für Anfänger I: Qualitative Analyse, 6, II: Quantitative Analyse und physiologisch-chemische Übungen, 6; Physiologisch-chemische Arbeiten für Geübtere, tägl. — **Bülow**: Analytische Chemie I, mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Arbeiten im Chemischen Laboratorium, 3; Aromatische Chemie, 3. — **Weinland**: Chemie der Arzneistoffe I: anorganischer Teil, 2; Maßanalyse, 1; Chemie der Nahrungsmittel, 1; Nachweis von Giften für gerichtliche Zwecke, 1. — **Kliegl**: Salpetersäure und Sprengstoffe, 1. — **Magnus**: Präparative Elektrochemie, 1. — **Brigl**: Chemie der Blut- und Pflanzenfarbstoffe, 1. — **Krais**: Die Großhandelswaren, 2. —

v. Brill: Einführung in die höhere Mathematik, 4; Mechanik nicht starrer Systeme, 3; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Maurer**: Niedere Analysis, 4; Elliptische Funktionen, 2; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **König**: Höhere Analysis I, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 2. — **Happel**: Prinzipien und Differentialgleichungen der Mechanik, 2. —

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrostatik, 5; Praktische Übungen, 4 und 8; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen für Pharmazeuten, Mediziner und Zahnärzte, 4. —

Buchner: Experimentalchemie I: Unorganische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Emmert), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Emmert), 6; Vollpraktikum für präparative Arbeiten, tägl.; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen (mit Emmert und v. Halban), tägl.; Kolloquium (mit Emmert und v. Halban), 14tägig, 1 1/2 *g*. — **Heiduschka**: Chemische Technologie II, 4; Pharmazeutische Präparatenkunde I: Anorganische und galenische Präparate, 3; Nahrungsmittelchemie II, mit Exkursionen, 2; Gerichtliche Chemie I: Toxikologische

Chemie, 2; Harnanalyse, 1; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen in allen Richtungen der angewandten Chemie, einschließlich technisch-chemischer, gerichtlich-chemischer und nahrungsmittelchemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Pauly**: Benzolchemie, 2; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Emmert**: Analytische Chemie (Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums), 3. —

Rost: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 4, Übungen, 1 *g*; Raumkurven und krumme Oberflächen: Differentialgeometrie, 4, Übungen, 1 *g*. — **v. Weber**: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 4 *g*. — **Hilb**: Determinanten, 4. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5, Mathematische Ergänzungen, 1 *g*; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Vorgerücktere, tägl. außer Sonnabend; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Greinacher**: Kathoden-, Röntgen-, Anoden- und Kanalstrahlen, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Mediziner, 1/2 Tag. — **Ratnowsky**: Allgemeine Thermodynamik, 3, Übungen, 1; Statische Mechanik und Quantentheorie, 2. — **Wolfke**: Das Relativitätsprinzip, 2; Über den inneren Bau der Atome, 1. —

Werner: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisch-analytisches Praktikum für Chemiker, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl.; Chemisches Halbpraktikum für Naturwissenschaftler, halbtägig. — **Abeljanz**: Qualitative chemische Analyse, 2; Anleitung zu chemischen Arbeiten, für Mediziner, 1; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 1; Chemisches Kolloquium, 1 *g*; Chemisches Praktikum für Mediziner und Veterinäre, sowie für Naturwissenschaftler, 3 Tage, für Sek.-Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4 oder 8. — **N. N.**: Aromatische Chemie I, 3; Stereochemie, 2; Theorie der Lösungen, 1. — **Reichinstein**: Chemische Kinetik, 1; Photochemie, 1. — **Dubsky**: Valenzlehre, 1. — **Lifschitz**: Konstitutionsbestimmung auf physikalisch-chemischem Wege, 2; Molekulare Umlagerungen, 1. —

Fueter: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 4; Differentialgleichungen, 4; Mathematisches Seminar, 2 *g*. — **Brandenberger**: Analytische Geometrie, mit Übungen, I, 4. — **Bützberger**: Darstellende Geometrie, mit Übungen, I, 4. — **Bernays**: Potentialtheorie, 3; Differentialgleichungen: Elementare Lösungsmethoden in Übungen, 3. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, 3, Übungen, 2; Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2. —

Technische Hochschule Zürich.

Weiß: Physik, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4 und 8; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen Institut, 8, 12, 24. — **Schweitzer**: Physik I, 3, Repetitorium, 1; Optik, 2; Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 1. — **Wolfke**: Das Relativitätsprinzip, 2; Über den inneren Bau der Atome, 1. — **Piccard**: Physikalische Meßmethoden, 1 *g*. — **de Quervain**: Einführung in die Wetterkunde und Prognose, 1. — **Barbieri**: Photographie I, 2 *g*; Photographisches Praktikum, 2; Militärphotographische Übungen, 14tägig, 3. — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik II, 4, Repetitorium, 1, III, 4, Repetitorium, 1, IV, 1; Elektrotechnisches Laboratorium Ia, 8, IIb, 4, 8 und 11; Elektrotechnische Konstruktionsübungen: Wechselstrom, 6. — **Tobler**: Elektrische Signalapparate für Eisenbahnen, 2; Schwachstromtechnik I, 1. — **Farny**: Elektrische Maschinen I: Gleichstrom, 3 *g*, Repetitorium, 1; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 1 *g*. — **Korda**: Angewandte drahtlose Telegraphie und Hochfrequenzmaschinen, 1; Die Elektrizität im Kriege, 1. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen I, 3, Übungen, 3. —

Winterstein: Anorganische Chemie, 4, Repetitorium, 1; Chemie der Alkaloide und ihre Wirkungen, 2; Agrikulturchemisches Praktikum, 3, 16, für Vorgerücktere, tägl.; Anleitung zu den Übungen, 1; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Treadwell**: Analytische Chemie I, 2, Repetitorium, 1; Gasanalyse, mit Übungen, 1; Chemie, 2, Repetitorium, 1; Analytisches Praktikum, 20, 16 und 10, für Vorgerücktere, tägl.; Chemisches Praktikum: Diplomarbeiten, 24. — **Baur**: Physikalische Chemie II, 2, Repetitorium, 1; Allgemeine Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4, für Elektrochemiker, 8; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium für Vorgerücktere, tägl. — **Bosshard**: Anorganische chemische Technologie I: Wasser, Salze, Säuren, 4, Repetitorium, 1; Chemische Technologie der Wärme und der Brennstoffe, 2, Repetitorium, 1; Metallurgie, 2, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16, 24, für Vorgerücktere, tägl. — **Cérésole**: Organische Technologie I: Bleicherei, Färberei, Farbstoffe, 4, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Laboratorium für Vorgerücktere, tägl.; Farbenchemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Constam**: Untersuchung und Bewertung der Brennstoffe, 1. — **Eder**: Pharmazeutische Chemie I, 3 *g*; Synthetische Arzneimittel, 1. — **Hartwich**: Pharmakognosie I, 2; Pharmazeutische Chemie I, 3; Lebensmittelanalyse, mit Übungen, 4; Technische Mikroskopierübungen I: Fasern und Stärke, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, 12; Mikroskopische Untersuchung pharmazeutischer Drogen, 3; Pharmakognostische Übungen für Vorgerücktere, tägl. — Frl. **Hezner**: Chemische Petrographie der Sedimente, 1. — **Ott**: Die Leuchtgasindustrie, 1 *g*. – **Staudinger**: Anorganische Chemie, 6, Repetitorium, 1; Organische Chemie: Spezieller Teil I, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10, 16 und tägl. —

Hurwitz: Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar (mit Großmann), 2. — **Großmann**: Darstellende Geometrie, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 4; Projektive Geometrie, 4. — **Amberg**: Mathematik der Pensionsversicherungen, 2 *g*. — **Baeschlin**: Vermessungskunde II, 4, Repetitorium, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Vermessungskunde, 3, Übungen, 2, Repetitorium, 1; Geodätisches Praktikum, 2; Höhere Geodäsie, 3, Repetitorium, 1; Diplomarbeiten. — **Beyel**: Rechenschieber mit Übungen, 1; Darstellende Geometrie, 2; Projektive Geometrie, 1. — **Brandenberger**: Einführung in den mathematischen Unterricht I, 2 *g*. — **Burger**: Graphische Vervielfältigung, 2 *g*. — **Franel**: Höhere Mathematik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 1. — **Hirsch**: Höhere Mathematik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2, III, 3, Übungen, 1. — **Keller**: Mathematik, 4 *g*: Affinität und Kollineation, 2. — **Kienast**: Potentialtheorie, 3. — **Kollros**: Darstellende Geometrie, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 4. — **Kraft**: Die Grundkräfte der Welt, Geschichtliche Entwicklung ihrer Erkennung, 1; Kinetik veränderlicher Systeme mittelst der geometrischen Analysis, 3; Geometrische Analysis, 3; Vektoranalysis: Elemente, 1. — **Meißner**: Mechanik II, 4, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Technische Elastizitätstheorie, 2. — **Polya**: Analytische Zahlentheorie, 2 *g*. — **Rudio**: Höhere Mathematik, 5, Übungen, 2. — **Weyl**: Analytische Geometrie, 2, Übungen, 1; Mathematische Theorie des elektromagnetischen Feldes, 4. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, 3, Übungen, 2; Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. | 15. Oktober 1916. Redaktionsschluß für No. 21 am 14. Oktober 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zum Ursprung der γ-Strahlenspektren und Röntgenstrahlenserien.

Von Richard Swinne.

1. Nach der Entdeckung der charakteristischen Röntgenstrahlen durch Barkla hat Rutherford auch die γ-Strahlen als solche in den Radioelementen erregte harte Fluoreszenzstrahlungen aufzufassen gesucht. Die von ihm und Richardson ausgeführte genaue Untersuchung der γ-Strahlenabsorption in einem Element von geringem Atomgewicht, wie Aluminium, ergab in der Tat mehrere, durch ihre Härte stark unterscheidbare Gruppen von γ-Strahlen, von welchen einige zweifellos den zu erwartenden charakteristischen Röntgenstrahlungen der betreffenden Elemente entsprachen. Die im Anschluß an die Lauesche Entdeckung ermöglichte Röntgenspektrometrie gestattete Rutherford und Andrade[1]) die γ-Strahlenspektren von *RaB* und *RaC* auszumessen und die Übereinstimmung der Hauptlinien des weichen γ-Strahlenspektrums von *RaB* mit denjenigen des *L*-Serienspektrums von Blei (im Sinne der Isotopentheorie) festzustellen.

Nun erlaubt die von Bohr entwickelte Quantentheorie der Spektralserien[2]) zusammen mit den Rutherfordschen Vorstellungen vom Atombau die Bildung von γ-Strahlenspektren genauer zu betrachten und läßt außer den Fluoreszenzröntgenspektren noch andere Linien erwarten, wenngleich deren genaue Berechnung am Mangel genügender Exaktheit der vorliegenden Theorie scheitert.

Wir nehmen somit einen sehr kleinen positiven Atomkern an, dessen Ladung, nach van den Broek[1]), der Nummer des Elements im periodischen System gleichgesetzt wird; die den Kern neutralisierenden Elektronen beschreiben um ihn (in bestimmten Anordnungen) geschlossene Bahnen (in Ringen nach Bohr). Die im periodischen System benachbarten Elemente unterscheiden sich nicht allein durch ihre Kernladung, sondern auch durch die Größe der Bahnachsen der Elektronenanordnungen. Dagegen möge die Art der Anordnung der Elektronen — von den peripherischen abgesehen — innerhalb des periodischen Systems erhalten bleiben: hierfür spricht der gleichmäßige Übergang von Element zu Element bei den bereits in weiten Grenzen untersuchten *K*- und *L*-Serien (und der jüngst entdeckten *M*-Serie[2])).

Wird nun ein α- oder ein β-Teilchen aus dem Atomkern bei einer radioaktiven Umwandlung ausgeschleudert, so wird dieses den Kern verlassende geladene Teilchen beim Durchfliegen der den Kern umgebenden Elektronenanordnungen aus ihnen Elektronen abtrennen, in Abhängigkeit von der Eigengeschwindigkeit des Teilchens und der Loslösungsarbeit der Elektronen der betreffenden Anordnungen. Entsprechend der von Bohr übernommenen Lenardschen Vorstellung von der Lichterzeugung bei Phosphoren[3]) bedeutet so eine Elektronenabtrennung die Erregung zur Lichtemission der betreffenden Anordnung; die Lichtemission aber erfolgt erst bei der Rückkehr eines Elektrons auf den leeren Platz des betreffenden Systems. Kossel[4]) entnimmt dies Elektron einem der mehr nach außen gelegenen Elektronensysteme, während Sommerfeld[5]) durch Quantelung der

1) E. Rutherford und E. N. da C. Andrade, Phil. Mag. (6) **27**, 854, **28**, 269, 1914.
2) Vgl. E. Riecke, diese Zeitschr. **16**, 222, 1915.

1) A. van den Broek, diese Zeitschr. **14**, 32, 1913.
2) Vgl. W. Kossel, Ann. d. Phys. (4) **49**, 237, 1916.
3) P. Lenard, Ann. d. Phys. (4) **31**, 671 ff., 1910.
4) W. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 953, 1914.
5) A. Sommerfeld, Münchn. Ber., Math.-nat. Kl., 425, 459, 1915.

Elektronenbahnen noch verschiedene Zustände dieser Anordnungen heranzieht. Findet nun der Ersatz der leeren Plätze der inneren Elektronensysteme des zerfallenden Atoms noch vor dem sprungweisen Übergang der Bahnachsen dieser Anordnungen von der für das ursprüngliche Element charakteristischen Größe zu derjenigen des neu entstehenden Elements statt oder erst nach dieser Neuordnung der Elektronen des Atoms, wodurch ja die Atomumwandlung beendet erscheint? Erfolgt diese Elektronenneuordnung erst später, so stimmen die bei der Ausfüllung der leeren Plätze der Elektronensysteme ausgesandten Spektrallinien mit den für das ursprüngliche Element zu erwartenden nicht genau überein. Vielmehr hätten im Falle einer β-Strahlenumwandlung die Wellenlängen kürzer auszufallen, da hier der Kern eine größere Ladung im Vergleich mit der ursprünglichen trägt; im Fall einer α-Strahlenumwandlung aber länger. Die sprungweise Veränderung der Bahnachsen hätte bei den β-Umwandlungen eine entsprechende Energieausstrahlung zur Folge, welche unten angenähert berechnet werden wird. Da aber dieser Sprung im Fall von α-Umwandlungen Arbeit kostet, so wäre bei diesen Radioelementen eine Absorptionsfähigkeit für die betreffenden Wellenlängen zu erwarten; auch könnte in diesem α-Strahlen-Fall der Sprung weniger leicht als bei den β-Umwandlungen erfolgen. Findet aber der Ersatz der leeren Elektronenplätze erst nach bereits erfolgtem Sprung der maßgebenden Elektronensysteme statt, so gehören die emittierten Linien genau dem neuentstandenen Element an. Weitere Verwicklungen wären dadurch möglich, daß mehr als ein Elektron aus einem Elektronensystem beim Hindurchfliegen des aus dem Atomkern herausgeschleuderten Teilchens entfernt wird. Hierdurch nimmt der Kern eine höhere positive Ladung an[1]), und entsprechend werden auch die Emissionsfrequenzen verändert — erhöht bzw. vermindert in Abhängigkeit davon, ob die Elektronenrückkehr nach dieser bzw. aus dieser Elektronenanordnung erfolgt. Findet gleichzeitig die Ausfüllung zweier leerer Plätze einer Anordnung statt, und ist dieser Vorgang mit der Aussendung eines einzigen Lichtquants verbunden, so treten neue Frequenzen auf, welche etwa das Doppelte der normalen betragen. Dieses wäre am ehesten bei solchen radioaktiven Umwandlungen zu erwarten, bei welchen die Elektronensysteme von Teilchen sehr hoher Geschwindigkeit durchsetzt werden.

Somit hätte man speziell bei β-Strahlern Röntgenspektralserien zu erwarten, welche — durch den sprungweisen Übergang vom Zustand des ursprünglich vorhandenen Elements zu demjenigen des neu entstandenen bedingt — künstlich nie erzeugt werden könnten; auch wäre mit den für das neu gebildete Element charakteristischen Spektren zu rechnen. Bei der Prüfung der γ-Strahlen ist aber auch zu beachten, ob das gegebene Radioelement rein zur Untersuchung gelangt oder zusammen mit anderen, speziell mit seinen Zerfallsprodukten, da ja in diesen die normalen Röntgenserien erregt werden könnten. Nun weist in der Tat das von Rutherford und Andrade ausgemessene Spektrum der weichen γ-Strahlen von RaB (im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten) nicht allein in seinen Hauptlinien und manchen anderen[1]) volle Übereinstimmung mit den entsprechenden Linien von Blei auf, sondern zeigt außerdem, wenn auch schwächer, alle wichtigeren Linien von Wismut, des Isotopen von RaC_1, des Umwandlungsprodukts von RaB. Vgl. nebenstehende Tabelle I; die L-Serienlinien sind der erwähnten Frimanschen Arbeit entlehnt. Ob auch die Linien von Polonium, des Isotopen von RaC', des äußerst kurzlebigen Zerfallsprodukts von RaC_1 — wenn auch abgeschwächt — im genannten γ-Strahlenspektrum vorkommen, ist zweifelhaft, da seine stärkeren Linien in der Nähe anderer von Pb bzw. Bi liegen; immerhin ergibt sich seine stärkste Linie zu $1{,}109 \times 10^{-8}$ cm, folglich in der Nähe von 1,100, einer feinen RaB-Linie, und seine l-Linie — durch Extrapolation — zu $1{,}280 \times 10^{-8}$ cm, somit nicht weit von 1,286, einer anderen feinen RaB-Linie. Während ursprünglich von Rutherford und Richardson[2]) bei RaC keine weichere γ-Strahlung nachgewiesen werden konnte, erwähnt Rutherford[3]) ganz kurz, daß nach Richardson auch RaC etwas γ-Strahlen aussendet, welche gleich stark von Blei absorbiert werden, wie die weichen γ-Strahlen von RaB; doch scheint es sich hier eher um härtere Strahlen als die der L-Serie zu handeln — immerhin ist somit die Herkunft der Bi-Linien im RaB-Spektrum noch nicht klargestellt.

2. Die Theorie von Bohr und auch ihre von Sommerfeld vorgenommene Weiterentwicklung verwendet einen Quantenansatz, wonach die ausgestrahlte Schwingungszahl ν durch den Energieunterschied des Übergangs aus der ursprünglichen in die spätere Bahn des Elektrons gemessen wird:

1) Vgl. W. Kossel, a. a. O. S. 960, Anm. 2.

1) E. Friman, Diss. Lund 1916, S. 45; auch Lunds Universitets Årsskrift N. F. Avd. 2, Bd. 12, Nr. 9.

2) E. Rutherford u. H. Richardson, Phil. Mag. (6) 25, 722, 1913.

3) E. Rutherford, Phil. Mag. (6) 28, 314, 1914.

Tabelle I.

Radium *B* weiches γ-Strahlenspektrum		Blei *L*-Serienspektrum		Wismut *L*-Serienspektrum	
Wellenlänge	Stärke	Wellenlänge	Stärke	Wellenlänge	Stärke
—		—		$0{,}762 \times 10^{-8}$ cm	0
				0,790	2
$0{,}793 \times 10^{-8}$ cm	*m*	$0{,}792 \times 10^{-8}$ cm	0	0,794	1
				0,810	3
0,809	*m*	—			
—		0,816	1	—	
—		0,820	1	—	
0,838	*m*	0,842	3	—	
0,853	*m*	—		—	
0,917	*f*	—		0,923	2
—		—		0,937	2
				0,950	8
0,953	*m*	0,952	2	0,954	6
—		0,968	2		
				0,977	2
0,983	*s*	0,983	9		
—		—		0,992	2
1,006	*m*	1,008	2	—	
1,029	*m*	1,023	2	—	
1,055	*f*			1,059	1
1,074	*f*	—		—	
		1,091	0	—	
1,100	*f*				
1,141	*m*	—		1,144	10
				1,153	3
1,175	*s*	1,175	10	—	
		1,186	3	—	
1,196	*m*				
1,219	*f*	—		—	
1,266	*f*	—		—	
1,286	*f*	—		—	
1,315	*f*	—		1,317	
1,349	*m*	1,348		—	
1,365	*m*	—		—	

$$h\nu = W_1 - W_2 \qquad (1)$$

(h das Plancksche Wirkungsquantum).

Sommerfeld rechnet nicht allein mit kreisförmigen, sondern auch mit elliptischen Elektronenbahnen, wobei aber die Exzentrizität dieser Bahnen gequantelt wird, d. h. auf ausgezeichnete einzelne Werte beschränkt wird. Die kreisförmige Bahn gilt als die wahrscheinlichste und der Übergang eines Elektrons aus einer Bahn von größerer Exzentrizität zu so einer von geringerer oder wenigstens gleicher Exzentrizität scheint allein zulässig zu sein. Daher gehen die stärksten Linien auf Übergänge zwischen wenig exzentrischen, insbesondere kreisförmigen Bahnen zurück, während die übrigen Übergänge die schwächeren Trabanten liefern. Für ellipsenförmige Bahnen ergibt sich die Energie eines Elektrons auf Grund der von Sommerfeld[1]) benutzten Voraussetzungen, jedoch ohne die von ihm verwandte, verkürzende Reihenentwicklung, zu

$$W = m_0 c^2 \left[\frac{n' + n\gamma}{(n'^2 + 2nn'\gamma + n^2)^{1/2}} - 1 \right]; \qquad (2)^{1)}$$

wobei

$$\gamma = \left[1 - \frac{4\alpha}{n^2} (E/e)^2 \right]^{1/2}, \qquad (3)$$

n und n' sind die Sommerfeldschen Quantenzahlen, deren Summe die für das betreffende Elektronensystem mögliche Anzahl von Elektronenbahnen angibt (z. B. $n + n' = 2$ allein 2 Bahnen, die kreisförmige und eine ellipsenförmige). Im Falle einer Kreisbahn erhält man einfach

$$W_{n'=0} = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$
$$= m_0 c^2 \left\{ \left[1 - \frac{4\alpha}{n^2} (E/e)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \qquad (4)$$

oder, entwickelt, angenähert

$$W_{n'=0} = -\frac{Nh}{n^2} (E/e)^2$$
$$\left\{ 1 + \frac{\alpha}{n^2} (E/e)^2 + 2 \frac{\alpha^2}{n^4} (E/e)^4 + 5 \frac{\alpha^3}{n^6} (E/e)^6 \right. \qquad (4a)$$
$$\left. + 14 \frac{\alpha^4}{n^8} (E/e)^8 + \cdots \right\}.$$

1) a. a. O. S. 464, 499.

1) Anm. bei der Korrektur. Diese Gleichung stimmt mit Gl. (17) bei P. Debye, Gött. Nachr., Mathem.-phys. Kl., 24. Juni 1916 überein.

Auch die Formel (2) kann durch einen ähnlichen Ausdruck ersetzt werden

$$W = -\frac{Nh}{(n'+n)^2}(E/e)^2 f, \qquad (5)$$

wo f eine Funktion von n, n', α und (E/e) ist, welche in zweiter Annäherung gleich

$$\left\{1 + \frac{\alpha}{(n+n')^2}(E/e)^2\left(1 + 4\frac{n'}{n}\right)\right\}$$

kommt. Hierbei bedeuten c die Lichtgeschwindigkeit, m_0 und e die Ruhemasse bzw. die Ladung des Elektrons, E die auf das betrachtete Elektron wirkende elektrische Ladung des Kernes und der übrigen Elektronen. Die Rydbergsche Konstante N ist gleich $\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^3}$ und $\alpha = \left(\frac{\pi e^2}{hc}\right)^2$.

Die genaue Prüfung der Sommerfeldschen Theorie der mehrfachen Spektrallinien leidet unter der noch nicht genügend starken Kenntnis des Wertes gewisser, in die Formeln eingehender allgemeiner Konstanten, insbesondere von e und h. Schließt man aus obigen Gleichungen für N (in cm^{-1} gemessen) und α das Wirkungsquantum h aus, so erhält man

$$\alpha = \left[\frac{\pi(e/m_0)eN}{2c^2}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Während $e/m_0 = 5{,}31 \times 10^{17}$ (Schaefer[1])), $N = 1{,}097 \times 10^5$ (Bohr[2])) und $c = 3{,}000 \times 10^{10}$ genügend genau bekannt sind, schwanken die für e gefundenen Werte noch zwischen 4,65 und $4{,}85 \times 10^{-10}$; nach Millikan[3]) beträgt $e = 4{,}774 \times 10^{-10}$. Somit kann α zwischen 1,32 und $1{,}34 \times 10^{-5}$ liegen, und die Schwingungsdifferenz der Balmerschen Serie $\Delta\nu_H = \frac{4\alpha N}{2^4}$ könnte 0,361 bis 0,369 betragen (0,365 bei dem Millikanschen e-Werte). Demnach wäre der Wert von Fabry und Buisson für $\Delta\nu_H$ (H_α) gleich 0,307 um 20 Proz. gegenüber dem theoretischen zu niedrig. Nach der Sommerfeldschen Theorie der H_α-Linie wäre dies sehr wohl möglich, da ja die Schwingungsdifferenz, gerechnet von der Mitte der zwei stärksten linken Linien bis zur Mitte der zwei stärksten rechten[4]), eine Erhöhung um 25 Proz. verlangt, um den theoretischen Wert von $\Delta\nu_H$ zu erhalten (eine Erhöhung um 11 Proz., falls man von der Hauptlinie links bis zur Hauptlinie rechts mißt[5])).

1) C. Schaefer, diese Zeitschr. **14**, 1118, 1913.
2) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **27**, 512, 1914.
3) R. A. Millikan, diese Zeitschr. **14**, 810, 1913.
4) Vgl. Fig. 1, S. 480 bei A. Sommerfeld, a. a. O.
5) Auch die Wellenlängen der Röntgenspektrometrie hängen vom Wert für e ab (und zwar von $e^{1/3}$), da diese Größe die Loschmidtsche Zahl bestimmt.

Der $\alpha = 1{,}33 \times 10^{-5}$ entsprechende Wert von h beträgt $6{,}53 \times 10^{-22}$ erg. sek.

Durch Einführung der W-Werte aus (5) in (1) erhält man

$$\nu = N\left[(E_1/e)^2\frac{f_1}{(n_1+n_1')^2} - (E_2/e)^2\frac{f_2}{(n_2+n_2')^2}\right]. \qquad (6)$$

Dadurch, daß Kossel das den leeren Platz in der gegebenen Elektronenanordnung ausfüllende Elektron einer der weiter vom Kern entfernten Anordnungen entnimmt, verknüpft er die verschiedenen Röntgenspektralserien miteinander. Zur gleichen Verknüpfung gelangt auch Wagner, indem er die Erregungsfrequenzen der einzelnen Serien mit den Emissionsfrequenzen der stärksten Linien dieser und der weicheren Serien vergleicht, ohne dabei das Bohrsche Atommodell heranzuziehen[1]). Setzen wir die Summe $(n+n')$ für das positive (erste) Glied des Frequenzausdrucks (vgl. Gleichung 6) der K-Serie nach Sommerfeld[2]) gleich 1, also einer und nur einer Kreisbahn entsprechend, so schreiben wir dies nach Kossel dem innersten, den Atomkern umgebenden Elektronensystem zu. Setzen wir $(n+n')$ für das positive Glied des Frequenzausdrucks der L-Serie gleich 2, so bezieht sich dies nach Kossel auf die zweite, vom Kern aus gerechnete Elektronenanordnung, im Falle der M-Serie gleich 3, so würde dies für die dritte Elektronenanordnung gelten; im Falle der hypothetischen N-Serie gleich 4, d. h. für die vierte Anordnung usw. Die α_1-Linie der K-Serie entspricht dann dem Übertritt von II (2,0) zu I (1,0), die α_2-Linie der gleichen Serie von II (1,1) zu I (1,0); die β_1-Linie von III (3,0) zu I (1,0), begleitet von noch nicht abgetrennten, nach Rot hin liegenden Trabanten III (2,1) bzw. III (1,2) zu I (1,0); die β_2-Linie[3]) entspricht IV (4,0) → I (1,0) und wird von nach Rot hin zu erwartenden, schwer abtrennbaren Trabanten begleitet. (Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die entsprechenden Quantenzahlen n und n'.) Die große Anzahl der verschiedenen zur L-Serie gehörenden Linien scheint auch von der Sommerfeldschen Theorie in ihrer bisherigen Gestalt nicht bewältigt zu werden. Immerhin können die stärkeren Linien im Sinne dieser Theorie eingeordnet werden; die von Wagner[4]) angeführte Zuordnung wird durch das gesamte

1) E. Wagner, Münchn. Ber., Math.-nat. Kl. 1914, S. 329; Ann. d. Phys. (4) **46**, 868, 1915.
2) a. a. O. S. 490ff.
3) Diese Bezeichnung wenden die in Lund ausgeführten Arbeiten an; Wagner u. a. bezeichnen sie als γ-Linie, was zweifellos durch die Sommerfeldsche Theorie gerechtfertigt erscheint.
4) E. Wagner, Münchn. Ber., Math.-nat. Kl. 1916. S. 37.

Tabelle II.

L-Serie				
Element	$\nu_{\beta_1}+\nu_{\beta_2}$	$\nu_{\alpha_2}+\nu_{\gamma_1}$	$\nu_{\beta_4}+\nu_{\beta_5}$	$\nu_{\alpha_1}+\nu_{\gamma_1}$
U	2,712 $\times 10^8$	2,711 $\times 10^8$	2,718	2,724
Th	2,560	2,561	2,560	2,573
Bi	2,101	2,101	2,107	2,108
Pb	2,035	2,030	2,042	2,039
Tl	1,982	1,980	1,986	1,987
Hg	1,913	1,915	—	1,922
Au	1,864	1,864	1,873	1,871
Pt	1,801	1,799	1,809	1,806
Ir	1,750	1,747	1,758	1,752
Os	1,695	1,696	—	1,701
W	1,586	1,590	—	1,595
Ta	1,535	1,534	—	1,538
Cp	1,435	1,432	—	1,436
Ad	1,386	1,383	1,390	1,387
Er	1,291	1,289	—	1,292
Ho	1,246	1,246	—	1,249
Dy	1,201	1,202	—	1,205
Tb	1,158	1,157	1,163	1:160
Gd	1,115	1,113	—	1,116
Eu	1,074	1,071	—	1,073
Sa	1,031	1,032	—	1,034
Nd	0,953	0,954	—	0,956
Pr	0,915	0,915	—	0,917
Ce	0,876	0,876	0,878	0,878
La	0,840	0,840	—	0,840
Ba	0,805	0,804	—	0,805
Cs	0,770	0,770	—	0,771
I	0,704	0,704	—	0,705
Te	0,672	0,673	—	0,674
Sb	0,641	0,641	—	0,642
Sn	0,611	0,611	—	0,612
In	0,582	0,581	—	0,582
Cd	0,552	0,553	—	0,554
Ag	0,525	0,525	—	0,526
Pd	0,497	0,497	—	0,497

Material der umfassenden Frimanschen Arbeit gestützt, da die Summe der Schwingungszahlen der Linien β_1 und β_2 genau derjenigen von α_2 und γ_1 gleich ist. Vgl. Tab. II. Somit entspräche

$$\alpha_1 — \text{III } (3,0);\ \text{II } (2,0)$$
$$\alpha_2 — \text{III } (2,1);\ \text{II } (2,0)$$
$$\beta_1 — \text{III } (2,1);\ \text{II } (1,1)$$
$$\beta_2 — \text{IV } (4,0);\ \text{II } (2,0)$$
$$\gamma_1 — \text{IV } (3,1);\ \text{II } (1,1);$$

die eben angeführte Beziehung wäre durch die in die Versuchsfehler fallende Abweichung des Energiewertes für IV (3,1) von IV (4,0) bedingt. Für β_2 wären noch zwei nicht abgetrennte Trabanten IV (3,1) und (2,2) zu erwarten; für γ_1 auch noch zwei: IV (2,2) und (1,3); die Linie β_4 entspräche dem Übergang von III (1,2) zu II (1,1). Weniger genau kann die Summe der Schwingungszahlen von β_4 und β_5 derjenigen von α_1 und γ_1 gleichgesetzt werden (vgl. Tab. II). Diese Beziehung veranlaßt die Linie β_5 als dem Übergang von V (5,0) zu II (2,0) entsprechend aufzufassen (γ_3 entspräche dann V (4,1) $\rightarrow$ II [1,1]); hieraus folgt auch die angenäherte Gleichheit der Linien V (5,0); III (3,0) und IV (2,2); III (1,2) in der *M*-Serie (wohl die ε-Linie bei Siegbahn[1])). In der *M*-Serie entspräche die α-Linie dem Übergang von IV (4,0) zu III (3,0), begleitet von dem bereits bemerkten Trabanten α' (nach Rot hin): IV (3,1); III (3,0); die β-Linie ginge auf IV (3,1); III (2,1) zurück, doch ist ihr Begleiter IV (2,2); III (1,2) noch nicht festgestellt worden.

3. Während hier die Sommerfeldsche Theorie der mehrfachen Spektralserienlinien eine schöne Anwendung findet, versagt die Kosselsche Verknüpfung der einzelnen Serien miteinander, wenngleich sie angenähert gilt. So ist zwar die dem Linienpaar (2,0; 1,1) entsprechende Schwingungsdifferenz $\alpha_1 - \alpha_2$ der *K*-Serie innerhalb der Versuchsfehler der analogen Schwingungsdifferenz $\beta_1 - \alpha_2$ der *L*-Serie gleich. Das gleiche gilt angenähert für die dem Linienpaar (3,0; 2,1) entsprechenden Schwingungsdifferenzen $\alpha_1 - \alpha_2$ der *L*-Serie und $\beta - \alpha'$ der *M*-Serie (übrigens ist dieser auch die Differenz $\delta_2 - \gamma_2$ gleich). Berechnet man aber mit Hilfe von

1) M. Siegbahn, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 278, 1916.

Gleichung (2) aus diesen Schwingungsdifferenzen $\Delta\nu$ die zugehörigen (E/e)-Werte (und damit auch deren Abweichungen Δ von der Kernladung Z des betreffenden Atoms) und setzt diese Werte in die mit Gl. (2) verknüpften Gl. (1) oder in Gl. (6) ein, so treten Schwierigkeiten auf[1]).

Für das Duplett (2,0; 1,1) der L-Serie beträgt Δ_{II} durchschnittlich etwa 3,6 innerhalb des ganzen Bereiches von $Z = 41$ (Nb) bis $Z = 92$ (U), vorausgesetzt, daß die genaue Gleichung (2) zur Berechnung benutzt wird; die von Sommerfeld[2]) mitgeteilte Annäherung genügt bei den höheren Z-Werten nicht mehr und ergibt stetig abnehmende Δ_{II}-Werte bis 1,6 bei Uran. Die betreffenden Daten reichen in der K-Serie von $Z = 19$ (K) bis $Z = 60$ (Nd)[3]) und stimmen mit Obigem Δ_{II} innerhalb der hier mehr ins Gewicht fallenden Versuchsfehler überein (wenngleich innerhalb des noch am genauesten ausgemessenen Gebiets von $Z = 19$ (K) bis $Z = 32$ (Ge) Δ_{II} im Durchschnitt gleich 3,0 gefunden wird). Für das Duplett (3,0; 2,1) berechnet sich der entsprechende Δ_{III}-Wert zu i. M. 14 innerhalb der L-Serie; innerhalb der M-Serie stört die noch nicht gelungene Ausmessung des Abstandes von α' von α, so daß die Verwendung von α die Δ_{III}-Werte zu klein ausfallen läßt, doch weichen sie nicht viel von obigen, der L-Serie entlehnten Δ_{III}-Werten ab. Setzt man nun diese so gewonnenen (E/e)-Werte in Gleichung (6) ein, so ergibt sich folgendes. Die Benutzung von $(Z - 3{,}6)$ anstatt von (E/e) im ersten positiven Glied der α_1-Linie der L-Serie ergibt für (E/e) des zweiten negativen Gliedes des Frequenzausdrucks an Stelle von etwa $(Z - 14)$ den ungefähr dreifachen Z-Wert! Verwendet man $(Z - 3{,}6)$ im negativen Term des Frequenzausdrucks der α_1-Linie der K-Serie zur Berechnung des (E/e)-Wertes des positiven Termes, so folgt hierfür i. D. $(Z - 1{,}6)$. Doch erweist sich so ein Wert für das positive Glied zur Berechnung der β_1- und β_2-Linien dieser Serie als unbrauchbar, da dann E/e im zweiten negativen Gliede den Wert von Z erreicht oder auch überschreitet, anstatt diesen mindestens um 14 zu unterschreiten.

Daß die Kosselschen Additionssätze nicht genau gelten, zeigt sich auch darin, daß die Schwingungsdifferenz der Linien $\beta_1 - \alpha_1$ der K-Serie nicht der Schwingungszahl der α_1-Linie der L-Serie gleich ist, vielmehr geringer ausfällt. Vielleicht gleicht sie eher der Schwingungszahl der l-Linie, sie könnte aber auch zwischen diesen zwei Werten liegen; erst die genaue Ausmessung der K-Serienlinien der seltenen Erden und von Elementen mit noch größerem Z könnte dies entscheiden. Dagegen scheint die Schwingungsdifferenz der Linien $\beta_2 - \alpha_1$ der K-Serie der Schwingungszahl von β_2 der L-Serie gleich zu kommen, soweit aus den wenigen ausgeglichenen Werten der β_2-Linie der K-Serie geschlossen werden kann. Auch die Schwingungsdifferenz $\beta_2 - \alpha_1$ der L-Serie fällt kleiner als die Schwingungszahl der α-Linie der M-Serie aus; man hätte eine Schwingungszahl, welche zwischen den Werten von α_1 und l der L-Serie liegt, zum beobachteten α_1-Wert der M-Serie hinzuzufügen, um ν_{β_2} der L-Serie zu erhalten.

Die aus den Schwingungsdifferenzen der Paare nach Sommerfeld ermittelten (E/e)-Werte der positiven ersten Terme des Frequenzausdrucks (6) stimmen auch nicht mit den direkt erhaltenen, auf der Messung der Erregungsfrequenz oder Grenzfrequenz der Serie beruhenden Werten. Die Erregungsfrequenzen ergeben sich entweder aus der geringsten, zur Erzeugung der charakteristischen Strahlung gerade noch erforderlichen Energie primärer Elektronen oder aus der größten, zur Hervorrufung dieser Strahlung gerade noch genügenden Wellenlänge. Die älteren Messungen der Mindestgeschwindigkeiten von Whiddington[1]) scheinen nicht genügend genau zu sein, sie ergeben dabei geringe negative Werte für die betreffenden $\Delta = Z - (E/e)$ der K-Serie; dagegen berechnet sich aus dem jüngst von Webster[2]) genau ermittelten Mindestpotential der K-Serie bei Rhodium Δ_I gleich 4,0. Hiermit steht in schöner Übereinstimmung der Mittelwert der Δ_I-Werte, welche aus den von Wagner[3]) gemessenen Wellenlängen der Grenze der selektiven Absorption folgen; nämlich i. D. 3,9 für 14 Elemente von Fe bis Nd reichend (K-Serie), doch scheint Δ_I mit fallender Atomnummer eine Verminderung zu erleiden. In der L-Serie sind bisher allein 2 Elemente von Wagner untersucht worden — Δ_{II} ergibt sich hier, bei Pt und Au, gleich i. D. 20, während aus der Schwingungsdifferenz des Paares (2,0; 1,1) Δ_{II} gleich 3,6 erhalten wurde!

4. Diese mangelhafte Kenntnis der (E/e)-Werte der einzelnen Terme der Frequenzausdrücke hindert eine genaue Berechnung der Frequenzen durchzuführen, welche beim Sprung der einzelnen Elektronenanordnungen des zerfallenden Radioelements von der für das ur-

1) α wurde gleich $1{,}33 \times 10^{-5}$ gesetzt.
2) a. a. O. S. 410 u. S. 499.
3) Nach den in Lund ausgeführten Untersuchungen: S. Malmer, Diss. Lund 1915; M. Siegbahn und E. Friman, Ann. d. Phys. (4) **49**, 611, 1916; M. Siegbahn und W. Stenström, diese Zeitschr. **17**, 48, 318, 1916.

1) R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. **85**, 323, 1911.
2) D. L. Webster, Proc. Nat. Ac. U. S. A. **2**, 93, 1916.
3) a. a. O. S. 33 u. 37.

sprüngliche Element charakteristischen Größe der Bahnachsen zu derjenigen des neu entstandenen ausgesandt werden. In Analogie mit Gleichung (6) kann man schreiben

$$\nu_s = q \frac{N}{(n+n')^2} \{(E'/e)^2 f' - (E/e)^2 f\}; \qquad (7)$$

q bedeutet hier die Anzahl der Elektronen in der überspringenden Anordnung; die gestrichelten Werte von (E/e) und f beziehen sich auf das neu entstehende, die ungestrichelten auf das ursprüngliche Atom. Da $(n+n')$ in beiden Gliedern des Frequenzausdrucks gleich ist, bedingt der Wert dieser Summe auch die Anzahl der Linien, da nach Sommerfeld gewisse Quantenzahlenkombinationen nicht möglich sind; es kommen vielmehr hier allein vor (1,0); (2,0) und (1,1); (3,0), (2,1) und (1,2) usw., d. h. n und n' fallen in beiden Termen gleich aus.

In (7) wurde vorausgesetzt, daß ein einziges Lichtquant bei so einem Sprung emittiert wird; daher geht auch die Elektronenanzahl q in diese Gleichung ein. Bei Elektronenringen gestattet der Unterschied der wirkenden Ladung E gegenüber der positiven Kernladung Ze Schlüsse in bezug auf q zu ziehen[1]). Die oben dargelegten Schwierigkeiten hinsichtlich der E/e-Werte der einzelnen Elektronenanordnungen gestatten jedoch nicht diesen Weg zu beschreiten, daher sind andere Gesichtspunkte heranzuziehen. Die Periodizität der Eigenschaften der Elemente beim Übergang von Horizontale zu Horizontale im periodischen System legt eine Zunahme der Zahl der erhalten bleibenden, inneren Elektronensysteme um Eins nahe (bei der Erreichung der Vertikalen der Edelgase). Für die peripherischen Elektronen ergeben valenzchemische Gesichtspunkte nach Kossel[2]) eine der positiven Valenz des betreffenden Elements gleiche Elektronenanzahl. Betrachten wir die Edelgasreihe, ohne uns, wie Kossel, auf die drei ersten Glieder zu beschränken, so weist Helium zwei Elektronen auf, Neon eine Anordnung mit 2 und eine mit 8 Elektronen, Argon $2+8+8$, Krypton $2+8+8+18$, Xenon $2+8+8+18+18$ und Niton (Radiumemanation) $2+8+8+18+18+32$ Elektronen auf. Dabei gelten die Edelgase dank ihrer völligen chemischen Trägheit, wie das Kossel in seiner oben erwähnten Arbeit über Molekelnbildung hervorhebt, als Gebilde, deren äußerster Ring seine geschlossene Gestalt unverändert beibehält. Auch dienen diese Elemente den benachbarten mit ihren erhalten bleibenden Elektronensystemen als Vorbild, indem diese bei der Bildung von heteropolaren Verbindungen Anordnungen von gleicher Verteilungsart und Anzahl der Elektronen entstehen lassen, wie sie die Edelgase aufweisen. Besteht diese Vorstellung zu Recht, so unterscheiden sich die durch Betätigung der ganzen positiven Valenz entstandenen Verbindungen von den freien Atomen und den durch Betätigung der negativen Valenz gebildeten Verbindungen des gleichen Elements durch den Verlust der Valenzelektronen. Folglich könnten Röntgenlinien, welche durch den Übertritt eines der Valenzelektronen in eine der inneren Elektronenanordnungen gebildet werden, im ersteren Fall überhaupt nicht entstehen; höchstens sekundär infolge der Bestrahlung, falls diese eine Reduktion bewirkt. In der Tat haben Siegbahn u. Stenström[1]) beim als Chlorid untersuchten Na nur die α_1-Linie beobachten können, während die β-Linie, welche durch Übertritt eines Elektrons der III. Anordnung, somit in der Reihe von Na bis Cl eines Valenzelektrons in die I. entsteht, gar nicht beobachtet wurde, was mit dem Kosselschen Bilde übereinstimmt, da das heteropolar verbundene Na sein einziges Valenzelektron an das Cl abgegeben hat, somit gar keine III. Anordnung besitzt. Bei den im metallischen Zustande untersuchten, somit als einatomige Molekeln die Valenzelektronen enthaltenden Elementen Mg, Al und Si wurde auch die β_1-Linie festgestellt; es wäre nun sehr wünschenswert, diese Elemente als entsprechende Verbindungen zu untersuchen, sie hätten dann im Sinne der Kosselschen Vorstellung keine β_1-Linie aufzuweisen. Die elektronegativen Elemente dieser Horizontalen, P, S und Cl, weisen zwar sowohl als freies Atom, als heteropolar verbunden die III. Elektronenanordnung auf, wenn auch in diesen zwei Fällen eine verschiedene Elektronenzahl in dieser III. Anordnung; dementsprechend müßte die Elektronenabtrennungsarbeit aus dieser peripherischen Anordnung etwas verschieden für diese zwei Fälle ausfallen, und folglich auch die beim Übertritt eines peripherischen Elektrons in eine der inneren Elektronensysteme ausgesandte Röntgenlinie. Meßbar wäre dieser Unterschied wohl sicher bei mehr als 10^{-7} cm betragenden Wellenlängen; doch haben die genannten Forscher bereits bei P und S eine Trabantin der β_1-Linie beobachtet (5,029 bzw. $5{,}853 \times 10^{-8}$ cm), welche bei abnehmender Atomnummer auch eine größere Abweichung von der Hauptlinie aufweist. Die von Ti bis Mg gemessenen neuen Linien α_3 und α_4 könnten wohl weniger in diesem Sinne gedeutet werden, als vielmehr durch den Verlust von mehr als einem Elektron

1) Vgl. N. Bohr, Phil. Mag. (6) **26**, 20, 21, 482, 1913; G. N. Watson, ib. **31**, 111, 1916.

2) W. Kossel, Ann. d. Phys. (4) **49**, 229, 1916.

1) M. Siegbahn u. W. Stenström, diese Zeitschr. **17**, 319, 1916.



der inneren Anordnungen erklärt werden, wodurch ja die Werte der entsprechenden (E/e) hier prozentuell stärker beeinflußt werden.

Nimmt man somit nach Kossel für die innerste Elektronenanordnung allein zwei Elektronen an, so beträgt Δ_I nur 0,25, während oben bedeutend größere Werte gefolgert wurden. Die von der Elektronenanzahl q stark abhängende Sprungfrequenz ν_s (vgl. Gleichung 7) wird durch diese Ungewißheit stark beeinflußt. Ist für die innerste Anordnung $q = 2$ und $(n + n') = 1$ und für die zweite, 8 bzw. 2, so fallen die betreffenden Wellenlängen für RaB $(Z = 82)$ in den Bereich von 2,5 bis $2{,}9 \times 10^{-8}$ cm, je nach der Wahl der Δ-Werte; für die höheren Elektronenanordnungen folgen bedeutend größere Wellenlängen. Bei RaB sind nun nicht untergebrachte Röntgenlinien allein zwischen 0,85 und $1{,}29 \times 10^{-8}$ cm (vgl. Tab. I), sowie zwischen 1,7 und $2{,}1 \times 10^{-8}$ cm[1]) bekannt; sollten einzelne von ihnen auf die erörterte Neuordnung der innersten Elektronensysteme zurückgehen, so müßte mindestens $q_I > 2$, und somit $\Delta_I > 0{,}25$, was mit den früheren Berechnungen übereinstimmen würde. Auf jeden Fall könnten sich unter den ganz weichen γ-Strahlen Linien finden, welche auf die diskutierten Sprünge der mittleren Elektronenanordnungen zurückgehen.

Die α_1-Linien der K-Serie der verschiedenen Elemente können gut durch den Frequenzausdruck (6) dargestellt werden, falls $(E_1/e) = Z - 1{,}6$ und $(E_2/e) = Z - 3{,}6$ gesetzt werden; die anderen Linien können dann bei bekannten γ-Serienlinien mit Hilfe der Kosselschen Additionssätze wenigstens angenähert erhalten werden. Berechnet man auf diese Weise die künstlich noch nicht erzeugten K-Serienlinien für Pb und Bi, so zeigt sich gute Übereinstimmung für die α-Linien mit der Doppellinie A bei 1,59 und $1{,}69 \times 10^{-9}$ cm der harten γ-Strahlen von RaB und RaC[2]), da die Extrapolation 1,63 bzw. $1{,}59 \times 10^{-9}$ für die α_1-Linien und 1,68 bzw. $1{,}64 \times 10^{-9}$ für die α_2-Linien ergibt; die berechneten β-Linien liegen auch in der Nähe der beobachteten γ-Strahlenlinie $1{,}37 \times 10^{-9}$ cm.

Immerhin bleibt eine Reihe harter γ-Strahlenlinien nach, über deren Ursprung fürs erste nichts Sicheres ausgesagt werden kann; ob eine Umwandlung aus β-Strahlen vorliegt, möge dahingestellt bleiben.

1) Vgl E. Rutherford u. E. N. da C. Andrade, l. c., **27**, 859.
2) E. Rutherford u. E. N. da C. Andrade, l. c. **28**, 269.

Z. Zt. Bad Rappenau (Baden), den 22. August 1916.

(Eingegangen 27. August 1916.)

Über die Abhängigkeit der Sekundärstrahlungs-Emissionskoeffizienten von der Wellenlänge der erregenden Röntgenstrahlen.

Von R. Glocker.

In verschiedenen Arbeiten haben Barkla und Sadler die grundlegenden Tatsachen über den Emissionsvorgang der für jedes Element charakteristischen Sekundärstrahlung festgestellt. Da aber zur Zeit der Versuche die Wellenlänge als exaktes Maß der Härte noch unbekannt war, so besitzen die von ihnen aus den Versuchsergebnissen gezogenen Schlüsse nur qualitativen Charakter. Die charakteristische Sekundärstrahlung eines Elementes wird nur von solchen Röntgenstrahlen erregt, deren Absorptionskoeffizient (in Aluminium gemessen) kleiner ist als der der betreffenden Sekundärstrahlen; bei Anregung durch homogene Primärstrahlen verschiedener Härte nimmt die Intensität der erregten Sekundärstrahlung um so mehr ab, je härter die Primärstrahlung wird.

Eine quantitative Behandlung des Vorgangs unter Benützung der nunmehr bekannten Zahlenwerte der Wellenlängen wird sich mit folgenden 3 Punkten befassen müssen:

1. Verhältnis der Härtegrade der Sekundärstrahlung und der weichsten eben noch deren Erregung verursachenden Primärstrahlung (Stokesscher Sprung).
2. Abhängigkeit der Sekundärstrahlungsemission eines einzelnen Elementes vom Härtegrad der erregenden Strahlung.
3. Vergleich der Größe der maximalen Sekundärstrahlungsemission verschiedener Elemente.

1. Der erste Punkt hat durch die Spektraluntersuchungeu von Wagner[1]) bereits seine Erledigung gefunden; ist λ_0 die Wellenlänge der Sekundärstrahlung eines Elementes, so kann dieselbe von solchen Primärstrahlungen angeregt werden, deren Wellenlänge λ der Bedingung genügen

$$\lambda \leqq c \cdot \lambda_0 .$$

Die Konstante c hat für alle Sekundärstrahlungen der K-Serie nahezu den gleichen Wert 1,14, wenn für λ_0 die Wellenlänge der α-Linie eingesetzt wird; der genaue Wert von c beträgt für die Elementengruppe Fe bis Cu 1,11 und steigt mit wachsender Atomzahl auf 1,18 (I bis Er).

2. Über das Emissionsvermögen der Elemente für charakteristische Sekundärstrahlung der K-Serie gibt es Meßreihen von Sadler[2]),

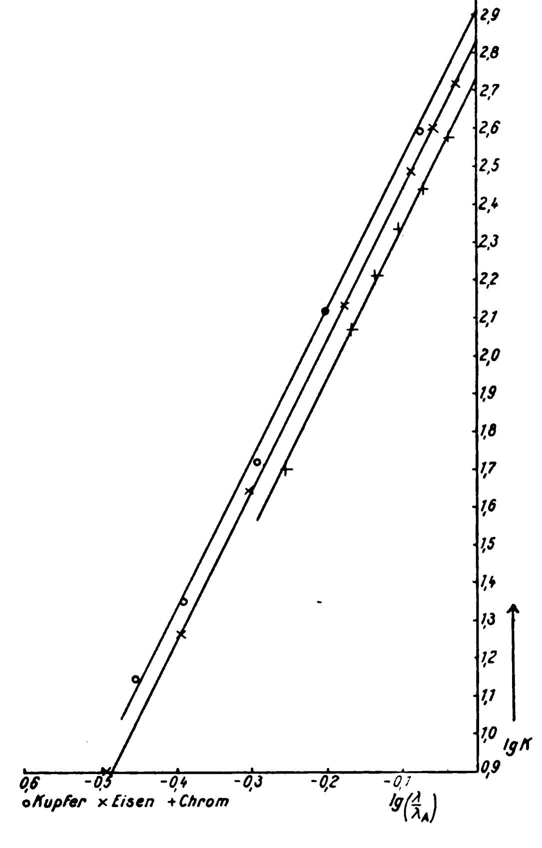
1) Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915; Bayr. Akad.-Ber. S. 31, 1916.
2) Phil. Mag. **18**, 126, 1909; **22**, 454, 1911.



welche für die Elemente *Cr, Fe, Co, Ni, Cu* Zahlenwerte des Emissionskoeffizienten K enthalten; K ist definiert durch die Gleichung

$$dI = K \cdot J \cdot dx,$$

wobei dI denjenigen Teil der Primärintensität I angibt, welcher beim Durchgang der Primärstrahlung durch die Schichtdicke dx des betreffenden Elementes in Sekundärstrahlungsintensität verwandelt wird. Die angegebenen Zahlenwerte von K sind bereits korrigiert in



bezug auf den Absorptionsverlust, welchen die zum Meßinstrument gelangenden Sekundärstrahlen innerhalb der strahlenden Schicht erleiden; K ist somit ein Maß für die gesamte entstehende Sekundärstrahlung, während die Versuchswerte Whiddingtons[1]) nur die aus der Oberfläche des Elementes austretende Sekundärintensität angeben.

Als erregende Primärstrahlungen wurden von Sadler die Eigenstrahlungen der Elemente *Fe* bis *Sn* benützt. Nachdem nunmehr deren Wellenlängen λ genau bestimmt worden sind, ist es möglich auf graphischem Wege eine einfache Beziehung zwischen K und λ festzustellen: Trägt man in ein rechtwinkliges Koordinatensystem als Ordinaten die Logarithmen der Emissionskoeffizienten K eines Elementes, z. B. *Fe* (Tabelle I) ein, während als Abszisse die Größe $\lg\left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)$ dient — λ ist die mittlere Wellenlänge des α-Dubletts[1]), λ_A die der Absorptionsbandkante von *Fe* — so ergibt sich die Beziehung

$$\lg K = b \lg\left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right) + a \qquad (1)$$

wobei b mit großer Genauigkeit $= 4{,}0$ ist (siehe Figur).

Tabelle I.

Eisen $\lambda_A = 1{,}759 \cdot 10^{-8}$ cm.

Erregende Primärstrahlung			Emissionskoeffizient	
Eigenstrahlung von	Wellenlänge $\lambda \cdot 10^8$	$\lg \lambda/\lambda_A$	K	$\lg K$
Ni	1,655	— 0,026	526	2,721
Cu	1,54	— 0,057	403	2,605
Zn	1,435	— 0,088	307	2,487
As	1,17	— 0,176	137	2,137
Se[2])	1,11	— 0,201	96,0	1,982
Sr	0,874	— 0,304	43,9	1,643
Mo	0,71	— 0,393	18,3	1,263
Ag	0,565	— 0,494	7,95	0,900
Sn	0,49	— 0,557	4,74	0,676

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Elemente *Cr* und *Cu* an (Tabelle II und III), so lassen sich durch die Versuchspunkte zwanglos gerade Linien ziehen, welche zu der *Fe*-Linie parallel sind. Bei *Co* und *Ni*, deren Linien mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit in die Figur nicht eingezeichnet sind, wird dieses Resultat bestätigt: Der Koeffizient b hat überall den Wert 4.

Tabelle II.

Chrom $\lambda_A = 2{,}097 \cdot 10^{-8}$ cm.

Eigenstrahlung von	$\lambda \cdot 10^8$	$\lg (\lambda/\lambda_A)$	K	$\lg K$
Fe	1,93	— 0,036	378	2,577
Co	1,78	— 0,070	275	2,439
Ni	1,655	— 0,103	216	2,335
Cu	1,54	— 0,134	162	2,210
Zn	1,435	— 0,165	117,5	2,070
As	1,17	— 0,253	50,5	1,703
Se	1,11	— 0,278	36,0	1,556

1) Proc. Roy. Soc. **85**, 323, 1911. (Diese Arbeit kommt hier nicht weiter in Betracht, da als Härtemaß für die Primärstrahlung die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen diente.)

1) Eine Berücksichtigung der Tatsache, daß in den erregenden Strahlungen jeweils noch die um etwa 10 Proz. kürzeren Wellenlängen des β-Dubletts vertreten sind, führt zu kaum merklichen Änderungen der Figur (λ wurde hierbei berechnet aus den Wellenlängen beider Dubletts unter Berücksichtigung des Intensitätsgewichtes); auch die Verhältnisse der Konstanten A in Tab. IV erleiden hierdurch keine Änderung.

2) Die der *Se*-Strahlung entsprechenden Versuchspunkte sind in die Figur nicht eingezeichnet, da sie bei allen 5 Elementen ziemlich rechts von der betr. Geraden liegen; Verunreinigung des benützten Selenpräparates?

Tabelle III.

Kupfer $\lambda_A = 1{,}386 \cdot 10^{-8}$ cm.

Eigenstrahlung von	$\lambda \cdot 10^8$	$\lg(\lambda/\lambda_A)$	K	$\lg K$
As	1,17	— 0,073	390	2,591
Se	1,11	— 0,098	267	2,427
Sr	0,874	— 0,200	131	2,117
Mo	0,71	— 0,290	52	1,716
Ag	0,565	— 0,390	22,4	1,350
Sn	0,49	— 0,453	14,0	1,146

Das Abhängigkeitsgesetz[1]) der Emissionskoeffizienten K von der erregenden Wellenlänge λ lautet somit für die Elementengruppe *Cr* bis *Cu*

$$K = A\left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)^4, \quad (2)$$

wobei A eine für das betreffende Element charakteristische Konstante ist; A stellt offenbar den maximalen Wert K_A dar, den der Emissionskoeffizient jedes Elementes überhaupt annehmen kann, nämlich dann, wenn die anregende Wellenlänge λ genau gleich der der Absorptionsbandkante λ_A ist. Die Gleichung (2) läßt sich somit in folgender einfacher Form schreiben:

$$\frac{K}{K_A} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)^4. \quad (3)$$

Die Analogie mit der von Kossel[2]) und Siegbahn[3]) gefundenen Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten, bei welcher der Exponent nahezu im ganzen Gebiet der K-Serie den universellen Wert 2,7 aufweist, berechtigt zu der Annahme, daß die Gültigkeit der Emissionsgleichung (3) nicht auf die Elementengruppe Chrom bis Kupfer beschränkt ist; weiteres experimentelles Material zur Prüfung derselben, besonders im Gebiet der kurzen Wellenlängen, ist leider nicht vorhanden.

3. Um die Größe der maximalen Sekundärstrahlungsemission K_A bei verschiedenen Elementen miteinander vergleichen zu können, müssen die Koeffizienten A (Gl. 2) in Beziehung gesetzt werden zu sonstigen für das betreffende Element charakteristischen Konstanten. Ist Z die Ordnungszahl des Elementes im natürlichen System und ϱ seine Dichte[1]), so sind, wie Tabelle IV zeigt, die Konstantenverhältnisse je zweier Elemente direkt gleich dem Verhältnis der Produkte $\varrho \cdot Z$. Die erste Spalte der Tabelle IV enthält die graphisch gefundenen Werte $\frac{A_1}{A_2}$; in einer genauen Zeichnung wurde hierzu jeweils der Abstand zweier Geraden in Richtung der Ordinaten gemessen, welcher gleich $\lg\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ ist. (Gl. 1 und 2).

Tabelle IV.

	$\frac{A_1}{A_2}$ (empirisch)	$\frac{\varrho_1 Z_1}{\varrho_2 Z_2}$	Unterschied in Proz.
$\frac{Fe}{Cr}$	1,275	1,27	+ 1/2 Proz.
$\frac{Ni}{Cr}$	1,50	1,53	— 2 Proz.
$\frac{Co^*}{Cr}$	1,55	1,48	+ 4 1/2 Proz.
$\frac{Cu^*}{Cr}$	1,55	1,60	— 3 Proz.
$\frac{Cu}{Fe}$	1,22	1,26	— 3 Proz.

*) Die *Co*-Linie fällt in der Zeichnung mit der *Cu*-Linie zusammen.

Für die Berechnung der Konstanten A darf also mit ausreichender Genauigkeit angesetzt werden.

$$A = \text{const.}\ \varrho \cdot Z, \quad (4)$$

wobei const. einen für alle 5 Elemente gemeinsamen Zahlenfaktor bedeutet; aus den graphisch ermittelten Absolutwerten der Konstanten A ergibt sich für const. der Wert 3,3. Somit folgt aus Gl. (2) und (4) für den auf die Masseneinheit bezogenen Emissionskoeffizienten

$$\frac{K}{\varrho} = 3{,}3 \cdot Z \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)^4 \quad (5)$$

und

$$K_A = 3{,}3 \cdot \varrho \cdot Z. \quad (6)$$

Während aus Analogiegründen, wie schon oben hervorgehoben wurde, der Abhängigkeit von der 4. Potenz der Wellenlänge ein umfassender Gültigkeitsbereich zugesprochen werden darf, muß aus Mangel an experimentellen Daten die Frage offen bleiben, ob die Gleichung (4) auch für Elemente außerhalb der Gruppe Chrom bis Kupfer eine brauchbare Darstellung des Koeffizienten der Wellenlängenabhängigkeit zu liefern vermag.

München-Stuttgart im August 1916.

(Eingegangen 24. August 1916.)

1) Aus der von Sadler (Phil. Mag. **18**, 127, 1909) aufgestellten linearen Gleichung $K = c_1\mu + c_2$ (μ Absorptionskoeffizient der Primärstrahlung in Aluminium) einerseits und aus der Kossel-Siegbahnschen Beziehung $\frac{\mu}{\varrho} = A \cdot \lambda^{2,9}$ andererseits würde folgen $K = c_3\lambda^{2,9} + c_2$ an Stelle der obigen Gleichung (2). Eine auf Grund weiterer Messungen, besonders im Gebiet der kurzen Wellenlängen, in einer späteren Arbeit (Phil. Mag. **22**, 456, 1911) gegebene Figur nebst Tabelle zeigt jedoch die Unhaltbarkeit der linearen Beziehung; dieselbe ist, wie man sich auf graphischem Wege leicht überzeugen kann, zu ersetzen durch die Gleichung $\lg K = B \lg \mu + \text{const}$, wobei B ungefähr gleich 1 1/3 ist; hieraus ergibt sich dann für die Wellenlängenabhängigkeit die Beziehung $K = \text{const.}\ \lambda^{2,9 \cdot B}$, welche mit der auf direktem Wege ermittelten Gleichung (2) gut übereinstimmt.

2) Verh. d. Phys. Ges. **20**, 903, 1914.

3) Diese Zeitschr. **15**, 754, 1914.

1) Landolt-Börnstein 1912.

Zur Theorie des Zeeman-Effekts der Wasserstofflinien, mit einem Anhang über den Stark-Effekt.

Von A. Sommerfeld.

§ 1. Einleitung.

In einer Annalen-Arbeit[1]), welche die Ergebnisse zweier in der Münchner Akademie veröffentlichter Aufsätze zusammenfaßt und erweitert, habe ich die Keplerschen Ellipsen, die ein Elektron um einen Wasserstoffkern herum beschreibt, nicht nur ihrer Größe und Gestalt, sondern auch ihrer räumlichen Lage nach „gequantelt". Um durch Quantenbedingungen gewisse Lagen der Bahnebene im Raume auszuzeichnen, ist allerdings erforderlich, daß durch irgendwelche physikalische Umstände eine Bezugsrichtung oder Bezugsebene im Raume gegeben ist, gegen welche die Lage der Bahnebene orientiert werden kann. A. a. O. habe ich mich beschränkt auf ein „magnetisches Feld von der Stärke Null", welches durch seine Ebene senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien eine solche Bezugsebene definiert, ohne im übrigen die Bewegung des Elektrons zu beeinflussen. Macht man diese Ebene zur Äquatorebene $\vartheta = \pi/2$ eines räumlichen Polarkoordinatensystems r, ϑ, φ und unterwirft diese Koordinaten dem Quantenansatz

$$\int p_\varphi d\varphi = n_1 h, \quad \int p_\vartheta d\vartheta = n_2 h, \quad \int p_r dr = n' h,$$

unter p_φ, p_ϑ, p_r die zu den Koordinaten φ, ϑ, r gehörigen Impulse verstanden, wobei die Integrale über denjenigen Wertebereich der betr. Koordinate zu erstrecken sind, der zur Darstellung aller Phasenpunkte des Systems erforderlich ist, so ergibt sich das folgende bemerkenswerte Resultat: Während Größe und Gestalt der Ellipse dieselben bleiben wie ohne Magnetfeld, wird die Lage im Raum ganzzahlig beschränkt durch die Bedingung

$$\cos\alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2}. \qquad (1)$$

Dabei bedeutet α den Winkel der Bahnebene gegen die Äquatorebene des Koordinatensystems. Die Energie der Bewegung lautet ebenso wie bei Abwesenheit des (als verschwindend angenommenen) Magnetfeldes:

$$W = -\frac{Nh}{(n+n')^2}, \quad n = n_1 + n_2. \qquad (2)$$

Das radiale Quantum n' bestimmt mittels der Exzentrizität die Gestalt der Ellipse; das azimutale Quantum n bestimmt die Größe der Ellipse durch Vermittelung der für die Bahnebene berechneten Flächenkonstanten p. Dieses azimutale Quantum n zerlegt sich in die beiden zu den Koordinaten φ und ϑ gehörigen Quanten n_1 und n_2. Das Quantum n_1 steht zu der Flächenkonstanten p_φ für die Äquatorebene in derselben Beziehung, wie das Quantum n zu der Flächenkonstanten p für die Bahnebene:

$$2\pi p = nh; \quad 2\pi p_\varphi = n_1 h. \qquad (3)$$

Da $p_\varphi = p\cos\alpha$, folgt durch Division der beiden Gl. (3) unmittelbar die Bestimmungsgleichung (1) für cos α. Gl. (1) zeigt:

Für $n = 1$ gibt es nur zwei Lagen der Bahnebene, entweder senkrecht zur Äquatorebene ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$) oder parallel dazu ($n_1 = 1$, $n_2 = 0$).

Für $n = 2$ gibt es vier Lagen, die senkrechte ($n_1 = 0$, $n_2 = 2$), die parallele ($n_1 = 2$, $n_2 = 0$) oder die beiden unter 60° geneigten Lagen ($n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $\cos\alpha = 1/2$, $\alpha = \pm\pi/3$).

Allgemein beträgt bei beliebigem n die Anzahl der quantenhaft ausgezeichneten Lagen $2n$; unter ihnen ist stets die senkrechte und parallele Lage enthalten (vgl. Fig. 1).

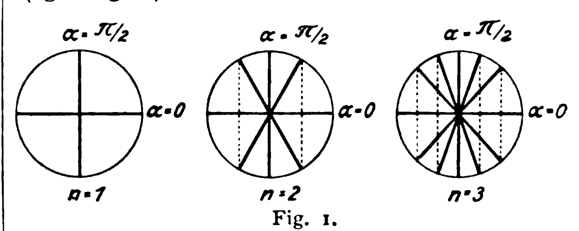


Fig. 1.

Wie ich a. a. O. bemerkt habe, versteht man auf Grund dieses Richtungseffekts nicht nur die qualitative Möglichkeit der scharfen Polarisation der Zeeman-Komponenten, sondern man gelangt auch zu gewissen quantitativen Analogien mit dem normalen Zeemaneffekt, allerdings nicht zu einer vollen Identität. Ich möchte dies im folgenden näher ausführen, da, wie ich höre, Beobachtungen über den Zeemaneffekt bei den Wasserstofflinien vorbereitet werden. Meine Ergebnisse decken sich, wie ich jetzt bei der Korrektur feststellen kann, mit Resultaten, die P. Debye inzwischen in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat (vgl. auch unten Seite 507).

Bei den obigen Angaben war stillschweigend von dem Einfluß der Relativität abgesehen, welche, wie ich früher gezeigt habe, eine Feinstruktur der Wasserstofflinien bewirkt, insbesondere das bekannte Wasserstoff-Dublett erklärt. Da bei einfachen Linien der normale Zeemaneffekt, bei mehrfachen Linien aber zunächst die komplizierten Zeemaneffekte auftreten, die erst bei hinreichend starken

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 1, 1916.

Magnetfeldern mittels des Paschen-Back-Effekts in das normale Lorentzsche Triplett übergehen, so versprach die relativistische Behandlung des Zeemaneffekts der Wasserstofflinien besonders interessante Resultate. Ich werde daher im folgenden das Problem des Zeemaneffektes auch mit Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit behandeln. Der Erfolg ist allerdings nicht der erwartete: es ergibt sich nämlich auch hier nur das normale Lorentzsche Triplett, und auch dieses nur in demselben Sinne (nämlich unter Absehung von gewissen überzähligen Komponenten), wie vom Standpunkte der gewöhnlichen Mechanik.

Ich beantworte bei dieser Gelegenheit zugleich eine Frage, die P. Epstein[1]) kürzlich gestellt hat, die Frage nach der kanonischen Form der relativistischen Bewegungsgleichungen mit Magnetfeld. Stellt man sich nämlich auf den Standpunkt, den Schwarzschild und Epstein bei der Behandlung des Starkeffekts mit so großem Erfolge durchgeführt haben, so hat man die Quantenansätze an die Hamilton-Jacobische Form der Bewegungsgleichungen anzuschließen. Die von Jacobi eingeführte Wirkungsfunktion ist nichts anderes als die Summe der von mir benutzten, aber mit unbestimmter oberer Grenze geschriebenen Phasenintegralen, genommen über alle Freiheitsgrade; die Periodizitätsmoduln der Jacobischen Wirkungsfunktion werden auf diese Weise direkt Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums. Wegen dieses naturgemäßen und engen Zusammenhangs zwischen Quantentheorie und Hamilton-Jacobischer Mechanik wird man wünschen, auch die Differentialgleichungen des Zeemaneffekts in kanonischer Form zu schreiben. Man gelangt dazu einfach, wenn man statt der gewöhnlichen Zeit die relativistische Eigenzeit einführt.

Auch vom Standpunkte der analytischen Einfachheit empfiehlt sich dieser Weg. Es ist nicht nötig, die Bewegungsgleichungen vollständig auszuintegrieren; man kann vielmehr schon bei den ersten Integralgleichungen Halt machen, da diese bereits die uns interessierende Energiekonstante W liefern. Sodann aber ergibt sich eine bemerkenswerte Vereinfachung, wenn man die Periodizitätsmoduln der Wirkungsfunktion — unsere Quantenzahlen — nach der Methode der komplexen Integration ausrechnet. Da stets die Grenzen der Integration durch die Verzweigungspunkte des Integranden gegeben werden, so handelt es sich bei unseren Phasenintegralen notwendig um „vollständige" Integrale auf geschlossenem Wege, die durch Deformation des Integrationsweges vereinfacht und in den wichtigsten Fällen nach der Residuenmethode direkt ausgewertet werden können.

In einem Anhang wende ich die hier entwickelten Methoden auf den Starkeffekt an, indem ich erstens die Berechnung durch komplexe Integration vereinfache und zweitens die kanonische Form der Bewegungsgleichungen mit Rücksicht auf die relativistische Massenveränderlichkeit entwickle, ohne dieselben übrigens zu integrieren. Auf das Interesse, welches die relativistische Behandlung des Starkeffekts bieten würde, hat bereits P. Epstein[1]) hingewiesen.

1) P. Epstein, Ann. d. Phys. 51, 198, 1916.

§ 2. Zeemaneffekt ohne Relativität.

Es ist seit langem bekannt, daß ein Elektron unter dem gleichzeitigen Einfluß einer Coulombschen Kraft und eines homogenen Magnetfeldes eine Keplerellipse beschreibt, die um die Richtung der magnetischen Kraftlinien eine Präzession ausführt, sofern man die Quadrate der magnetischen Feldstärke vernachlässigen darf. Wir beweisen dieses Ergebnis, welches uns auch als Grundlage für die relativistische Behandlung dienen wird, in Kürze folgendermaßen[2]).

Die Bewegungsgleichungen lauten, wenn man die Richtung des homogenen Magnetfeldes zur z-Achse macht und den Kern als unbeweglich (Masse ∞) ansieht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= -\frac{e^2}{r^3}x - \frac{e}{c}H\dot{y}, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= -\frac{e^2}{r^3}y + \frac{e}{c}H\dot{x}, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= -\frac{e^2}{r^3}z. \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Neben den rechtwinkligen Koordinaten benutzen wir das schon in der Einleitung genannte Polarkoordinatensytem r, ϑ, φ, indem wir setzen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\vartheta. \quad (2)$$

Das zur Koordinate φ gehörige Impulsmoment p_φ ist

$$p_\varphi = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}. \quad (3)$$

Dasselbe ist nicht konstant; vielmehr folgt aus (1)

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{m f}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{m f}{2}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta). \quad (4)$$

1) Ann. d. Phys. 50, 500 und 507, 1916.
2) In Übereinstimmung mit P. Epstein, Ann. d. Phys. 51, 198, 1916.

Hierbei ist die für den Zeemaneffekt charakteristische Abkürzung eingeführt:

$$f = \frac{e}{m}\frac{H}{c}. \tag{5}$$

Schreiben wir für (4)

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2 \sin^2 \vartheta (\dot\varphi - \frac{f}{2})\right) = 0, \tag{6}$$

so liegt es nahe, einen Hilfswinkel χ einzuführen durch

$$\dot\chi = \dot\varphi - \frac{f}{2}, \varphi = \chi + \frac{f}{2} t. \tag{7}$$

Die Integration von (6) liefert dann

$$mr^2 \sin^2 \vartheta \dot\chi = p_\chi, \tag{8}$$

wo p_χ eine Konstante ist.

Wir zeigen, daß auch die ursprünglichen Bewegungsgleichungen vereinfacht werden, wenn wir ein System $\xi\eta\zeta$ einführen, welches gegen das System xyz mit der Winkelgeschwindigkeit $f/2$ um die z-Achse gedreht wird, indem wir setzen:

$$\xi = r \sin \vartheta \cos \chi, \eta = r \sin \vartheta \sin \chi, \zeta = r \cos \vartheta. \tag{9}$$

Wegen (2) und (7) ergibt sich

$$x = \xi \cos \frac{f}{2} t - \eta \sin \frac{f}{2} t$$

$$y = \xi \sin \frac{f}{2} t + \eta \cos \frac{f}{2} t$$

$$z = \zeta.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \dot x + fy &= (\dot\xi + \frac{f}{2}\eta) \cos \frac{f}{2} t - (\dot\eta - \frac{f}{2}\xi) \sin \frac{f}{2} t \\ \dot y - fx &= (\dot\xi + \frac{f}{2}\eta) \sin \frac{f}{2} t + (\dot\eta - \frac{f}{2}\xi) \cos \frac{f}{2} t \end{aligned}\right|$$

und (10)

$$\frac{d}{dt}(\dot x + fy) = (\ddot\xi + \frac{f^2}{4}\xi) \cos \frac{f}{2} t - (\ddot\eta + \frac{f^2}{4}\eta) \sin \frac{f}{2} t,$$

$$\frac{d}{dt}(\dot y + fx) = (\ddot\xi + \frac{f^2}{4}\xi) \sin \frac{f}{2} t + (\ddot\eta + \frac{f^2}{4}\eta) \cos \frac{f}{2} t. \tag{10a}$$

Die Gl. (1) gehen daher über in

$$\left.\begin{aligned} \ddot\xi &= -\frac{e^2\xi}{mr^3} - \frac{f^2}{4}\xi, \\ \ddot\eta &= -\frac{e^2\eta}{mr^3} - \frac{f^2}{4}\eta, \\ \ddot\zeta &= -\frac{e^2\zeta}{mr^3}. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

Dies sind im $\xi\eta\zeta$-System die Bewegungsgleichungen eines Elektrons unter dem Einfluß des Potentials:

$$V = -\frac{e^2}{r} + \frac{mf^2}{8}(\xi^2 + \eta^2). \tag{11a}$$

Vernachlässigt man aber Glieder mit f^2, so hat man genau die Bewegungsgleichungen ohne Magnetfeld und die Keplersche Ellipse; ihre Bahnebene liegt im $\xi\eta\zeta$-System fest, beschreibt aber im xyz-System wegen (7) eine gleichförmige Präzession um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $f/2$.

Die Vernachlässigung der Glieder mit f^2 läßt sich numerisch rechtfertigen; denn es ist für den $n$ten Bohrschen Kreis

$$\frac{e^2}{mr^3} = \frac{(2\pi)^6 m^2 e^8}{h^6 n^6} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{33}}{n^6},$$

dagegen für ein Magnetfeld $H = 10000$ Gauß

$$\frac{f^2}{4} = 7{,}8 \cdot 10^{21}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von (11) überwiegt also das zweite auch bei höheren Werten von n um einen Faktor 10^{10}.

Durch unsere Reduktion auf das $\xi\eta\zeta$-System sind nun genau diejenigen Verhältnisse geschaffen, von denen in der Einleitung die Rede war: ein Magnetfeld von verschwindender Stärke und eine physikalisch ausgezeichnete Äquator-Ebene $\zeta = 0$. In diesem System gelten daher die dort angegebenen Resultate: Die Bahnebene ist gegen die Äquatorebene um einen Winkel α geneigt, welcher nur die durch (1) § 1 ganzzahlig bestimmten Werte annehmen darf. Die Flächenkonstante für die Äquatorebene (die wir jetzt sinngemäß nicht p_φ sondern p_χ nennen werden) ist durch (3) § 1 bestimmt:

$$2\pi p_\chi = n_1 h, \tag{12}$$

die Energie im $\xi\eta\zeta$-System (die wir entsprechend mit W_χ bezeichnen) durch (2) § 1:

$$W_\chi = \frac{Nh}{(n + n')^2}.$$

Wegen des Beweises dieser Resultate sei auf die eingangs zitierte Annalenarbeit verwiesen; übrigens enthalten die späteren relativistischen Rechnungen den vorliegenden Fall als Spezialfall.

Wir fragen nun nach der Energie der Bewegung im xyz-System. Sie ist

$$W = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \dot\varphi^2) - \frac{e^2}{r}.$$

Benutzen wir die Beziehung (7) und vernachlässigen das Glied mit f^2, so entsteht

$$W = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot\chi^2) - \frac{e^2}{r} + m r^2 \sin^2 \vartheta \dot\chi \frac{f}{2}.$$

Die beiden ersten Terme rechts sind identisch mit W_χ, der Faktor von $\frac{f}{2}$ im dritten Term ist

nach (8) gleich p_χ. Benutzen wir für p_χ Gl. (12), so entsteht

$$W = W_\chi + \frac{f}{4\pi} n_1 h,\ \Delta W = W - W_0 = \frac{f}{4\pi} n_1 h.$$

W_χ ist identisch mit der Energie W_0, die unsere Bahn ohne Magnetfeld besitzen würde;

$$\Delta W = W - W_\chi = W - W_0 \qquad (13)$$

stellt also diejenige Energie dar, die in der magnetischen Präzession der Bahn steckt. Nach dem Bohrschen Frequenzansatz ist die Schwingungszahl der Spektrallinie gegeben durch

$$h\nu = W_m - W_n.$$

W_m bedeutet die Energie der Anfangsbahn, welche durch die Quantenzahlen $m = m_1 + m_2$ und m' bestimmt ist, W_n die Energie der Endbahn, die zu den Quantenzahlen $n = n_1 + n_2$ und n' gehört. Die Änderung der Schwingungszahl durch das Magnetfeld beträgt also

$$\Delta\nu = \frac{\Delta W_m - \Delta W_n}{h} = \frac{f}{4\pi}(m_1 - n_1). \qquad (14)$$

Die normale Lorentzsche Verschiebung (Abstand der s-Komponenten im Lorentzschen Triplett von der p-Komponente) ist in unseren Bezeichnungen

$$\Delta\nu_{\text{norm}} = \frac{f}{4\pi}.$$

Es ergibt sich also:

$$\Delta\nu = \Delta\nu_{\text{norm}} \cdot Z,\ Z = m_1 - n_1 = \text{ganze Zahl}. \qquad (15)$$

§ 3. Diskussion des Resultats.

Unser Resultat (15) fällt mit dem Ergebnis der klassischen Theorie nicht zusammen, aber dicht daneben. Unser $\Delta\nu$ ist, allgemein gesprochen, ein ganzes Vielfaches Z des normalen Lorentzschen $\Delta\nu$.

Naturgemäß bilden bei Bohrscher Auffassung die Polarisationen der Komponenten im Zeeman- und Starkeffekt eine besondere Schwierigkeit. Indessen zeigt unser Resultat auch in dieser Hinsicht eine Analogie mit der Wirklichkeit. Beim Starkeffekt hat Epstein die folgende merkwürdige Regel durchweg bestätigt gefunden: Es findet parallele (senkrechte) Polarisation der Starkkomponente statt, wenn die azimutale Quantenzahl beim Übergange um eine gerade (ungerade) Anzahl von Einheiten springt. Bei Epstein bezieht sich die azimutale Quantenzahl auf einen Winkel, der in der Ebene senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien gezählt wird; ihr entspricht bei uns (in gewissem Sinne) die Quantenzahl n_1 bzw. m_1. Übertragen wir also die Epsteinsche Regel auf unseren Fall, so haben wir zu erwarten: Bei geradem Z, insbesondere für $Z = 0$, haben wir parallele, bei ungeradem Z, insbesondere für $Z = 1$, senkrechte Polarisation, wie es sein soll.

Nach der von mir früher aufgestellten Regel der „Quantenungleichungen", nach der bei dem positiven Charakter der Quantenzahlen diese nur (oder vorzugsweise) von größeren zu kleineren Werten übergehen, würde $m_1 > n_1$, also Z eine positive ganze Zahl (einschl. der Null) sein. Dies scheint dem rechts und links symmetrischen Verhalten der Zeeman-Aufspaltung zu widersprechen. Indessen erhält man offenbar die Komponenten auf der negativen Seite, wenn man den Sinn von H, also das Vorzeichen von f umkehrt. Umkehrung des Umlaufsinnes in der Keplerellipse ist aber gleichbedeutend mit Umkehrung von H. Da der Umlaufsinn bei uns unbestimmt bleibt, ist also auch unser Resultat rechts und links symmetrisch.

Hiernach ergibt sich das Bild der Fig. 2, ein normales Lorentzsches Triplett mit

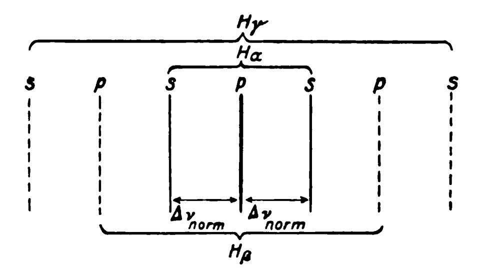


Fig. 2.

einer Anzahl äußerer, abwechselnd parallel und senkrecht polarisierter überzähliger Komponenten vom gegenseitigen Abstande $\Delta\nu_{\text{norm}}$.

Wir wollen die Zahl dieser überzähligen Komponenten im einzelnen bestimmen. Bei H_α

$$\frac{\nu}{N} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$$

ist $m + m' = 3$, $n + n' = 2$. Der Fall n bzw. m gleich Null ist auszuschließen, da derselbe einer ausgearteten Ellipse von der Exzentrizität 1 entsprechen würde, die das Elektron durch den Kern hindurch führen würde. Es sind also die folgenden Fälle möglich, wenn man nur Übergänge von abnehmenden Quantenzahlen in allen drei Zahlenpaaren $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m' n'$ betrachtet:

$m' = 0$	$m_2 = 3$	$m_1 = 0$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 0$	$m_2 = 2$	$m_1 = 1$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 1$
$m' = 0$	$m_2 = 2$	$m_1 = 1$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 0$
$m' = 0$	$m_2 = 1$	$m_1 = 2$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 1$
$m' = 0$	$m_2 = 1$	$m_1 = 2$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 0$
$m' = 0$	$m_2 = 0$	$m_1 = 3$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 1$
$m' = 1$	$m_2 = 2$	$m_1 = 0$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 2$	$m_1 = 0$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 1$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 1$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 1$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 1$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 0$	$m_1 = 2$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 1$
$m' = 1$	$m_2 = 0$	$m_1 = 2$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 0$
$m' = 2$	$m_2 = 1$	$m_1 = 0$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 2$	$m_2 = 1$	$m_1 = 0$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 2$	$m_2 = 0$	$m_1 = 1$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 0$

Hier treten also noch keine überzähligen Komponenten auf; Z ist wegen unserer „Quantenungleichungen" auf die Werte 0 und 1 eingeschränkt.

Wohl aber wird bei H_β neben $Z = 0$ und 1 auch der Wert $Z = 2$ möglich, so daß wir eine überzählige Komponente haben, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$m' = 0$	$m_2 = 0$	$m_1 = 4$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 2$
$m' = 0$	$m_2 = 1$	$m_1 = 3$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 2$
$m' = 1$	$m_2 = 0$	$m_1 = 3$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 2$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 2$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 2$

Bei H_γ tritt mit $Z = 3$ eine zweite überzählige Komponente hinzu usf. Allgemein haben wir mit $n + n' = N$, $m + m' = M > N$ als Höchstwert von Z

$$Z = M - N,$$

also $M - N - 1$ überzählige Komponenten.

Es ist interessant zu bemerken, daß eine ältere Theorie von Ritz[1]) überzählige Komponenten derselben Lage ergeben hat. Daß diese Komponenten real und bisher nur wegen geringer Intensität nicht bemerkt wären, ist recht unwahrscheinlich.

Wenn somit das Ergebnis auch keineswegs befriedigend ist, so überrascht doch die Leistungsfähigkeit der Quantentheorie im Verein mit dem Bohrschen Modelle auch in diesem Falle. Diese Leistungsfähigkeit übertrifft sogar die Erwartungen, die Herr Bohr selbst hinsichtlich des Zeemaneffekts geäußert hat. Er meinte: die elektrische Zerlegung der Spektrallinien werde durch eine Änderung der Elektronenbahnen und ihrer Energie bewirkt, die magnetische Zerlegung dagegen durch eine magnetische Beeinflussung des Übergangs von der Anfangs- in die Endbahn, die zu einer Abänderung des Frequenzansatzes führe. Wir sahen dagegen: Unter wörtlicher Beibehaltung dieses Ansatzes ergibt sich eine Energieänderung der Elektronenbahnen, die der Hauptsache nach auf das Lorentzsche Triplett führt, ohne Einführung irgendwelcher neuer Annahmen.

1) W. Ritz, Gesammelte Werke, Paris 1911, pag. 120, Ann. d. Phys. 25, 660, 1908.

§ 4. Zeemaneffekt mit Relativität; die Bewegungsgleichungen.

Die Differentialgleichungen behalten die Form (1) § 2 bei; die rechten Seiten bleiben völlig ungeändert, auf der linken Seite ist unter m zu verstehen

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\dot\tau},$$

wo m_0 die Ruhemasse und τ die Eigenzeit bedeuten

$$\tau = \int \sqrt{1-\beta^2}\, dt, \quad \dot\tau = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0}{m}. \tag{1}$$

Bei Benutzung der Polarkoordinaten r, ϑ, φ wird das Impulsmoment für die φ-Koordinate:

$$p_\varphi = m r^2 \sin^2\vartheta\, \dot\varphi = m_0 r^2 \sin^2\vartheta \frac{\dot\varphi}{\dot\tau}$$
$$= m_0 r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{2}$$

Die Stärke des Magnetfeldes ist jetzt zu messen durch das Produkt

$$f = \frac{e}{m_0} \frac{H}{c}. \tag{3}$$

Daraufhin folgt aus den Bewegungsgleichungen durch die übliche Rechnung an Stelle von Gl. (4) § 2:

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{m_0 f}{2} \frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{m_0 f}{2} \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \vartheta)$$

oder wegen (2) und (1)

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 \sin^2 \vartheta \left(\dot\varphi - \frac{m_0}{m}\frac{f}{2}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left((m r^2 \sin^2 \vartheta \left(\dot\varphi - \frac{f}{2}\dot\tau\right)\right) = 0. \tag{4}$$

Ein Hilfswinkel χ ist jetzt offenbar folgendermaßen zu definieren:

$$\dot\chi = \dot\varphi - \frac{f}{2}\dot\tau, \quad \varphi = \chi + \frac{f}{2}\tau. \tag{5}$$

Nach Einführung desselben schreibt sich der Flächensatz (4) einfach so:

$$\frac{dp_\chi}{dt} = 0, \quad p_\chi = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot\chi$$
$$= m_0 r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\dot\chi}{\dot\tau} = m_0 r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\chi}{d\tau}. \tag{6}$$

Während p_φ unter dem Einfluß des Magnetfeldes variabel ist, wird wieder das auf den Hilfswinkel χ bezogene Impulsmoment p_χ konstant. Dabei unterscheiden sich φ und χ nicht wie früher um den Betrag $\frac{f}{2}t$, der proportional mit der Zeit wächst, sondern um den Betrag $\frac{f}{2}\tau$, der proportional der Eigenzeit anwächst. Dementsprechend ist jetzt ein $\xi\eta\zeta$-System einzuführen, welches gegen das xyz-System um die z-Achse gleichförmig in der Eigenzeit τ, aber ungleichförmig in der Zeit t gedreht wird.

Wir schreiben die Gl. (1) § 2 zunächst so:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m\dot x + m_0 f y) = \frac{d}{dt}(m(\dot x + f\dot\tau y)) = -\frac{e^2}{r^3}x, \\
&\frac{d}{dt}(m\dot y - m_0 f x) = \frac{d}{dt}(m(\dot y - f\dot\tau x)) = -\frac{e^2}{r^3}y, \\
&\frac{d}{dt}(m\dot z) = -\frac{e^2}{r^3}z.
\end{aligned}\right| \tag{7}$$

Aus

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$
$$\xi = r\sin\vartheta\cos\chi, \quad \eta = r\sin\vartheta\sin\chi, \quad \zeta = r\cos\vartheta$$

ergibt sich wegen (5)

$$\left.\begin{aligned}
x &= \xi\cos\frac{f}{2}\tau - \eta\sin\frac{f}{2}\tau, \\
y &= \xi\sin\frac{f}{2}\tau + \eta\cos\frac{f}{2}\tau, \\
z &= \zeta,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ferner

$$\begin{aligned}
\dot x + f\dot\tau y &= \left(\dot\xi + \frac{f}{2}\dot\tau\eta\right)\cos\frac{f}{2}\tau - \left(\dot\eta - \frac{f}{2}\dot\tau\xi\right)\sin\frac{f}{2}\tau, \\
\dot y - f\dot\tau x &= \left(\dot\xi + \frac{f}{2}\dot\tau\eta\right)\sin\frac{f}{2}\tau + \left(\dot\eta - \frac{f}{2}\dot\tau\xi\right)\cos\frac{f}{2}\tau,
\end{aligned}$$

endlich mit Rücksicht auf die Beziehung

$$m\dot\tau = m_0, \text{ Gl. (1)}$$

$$\frac{d}{dt}(m(\dot x + f\dot\tau y)) = \left(\frac{d}{dt}(m\dot\xi) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\xi\right)\cos\frac{f}{2}\tau - \left(\frac{d}{dt}(m\dot\eta) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta\right)\sin\frac{f}{2}\tau$$

$$\frac{d}{dt}(m(\dot y - f\dot\tau y)) = \left(\frac{d}{dt}(m\dot\xi) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta\right)\sin\frac{f}{2}\tau + \left(\frac{d}{dt}(m\dot\eta) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta\right)\cos\frac{f}{2}\tau.$$

Für das $\xi\eta\zeta$-System folgt daher aus (7) und (8)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m\dot\xi) &= -\frac{e^2}{r^3}\xi - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\xi, \\
\frac{d}{dt}(m\dot\eta) &= -\frac{e^2}{r^3}\eta - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta, \\
\frac{d}{dt}(m\dot\zeta) &= -\frac{e^2}{r^3}\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Vernachlässigt man wie in § 2 Glieder mit f^2, so hat man wieder genau die Bewegungsgleichungen ohne Magnetfeld, also eine Keplersche Ellipse, deren Bahnebene im $\xi\eta\zeta$-System festliegt, im xyz-System aber eine Präzession um die z-Achse ausführt, u. zw. eine in der Zeit t ungleichförmige, in der Eigenzeit τ gleichförmige Präzession.

Will man aber die Glieder mit f^2 zunächst beibehalten, so lassen sich die auf den rechten Seiten von (9) stehenden Kräfte nicht mehr wie früher aus einem Potential ableiten und die Bewegungsgleichungen haben dementsprechend nicht die kanonische Form. Um hierzu zu gelangen, muß man zweierlei tun: Man muß einerseits die Eigenzeit τ als unabhängige Variable einführen, andererseits Gebrauch machen von dem Satze der lebendigen Kraft.

Dividiert man die Gl. (9) rechts und links mit $\dot\tau$, so erhält man zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\frac{e^2}{r^3}\frac{\xi}{\dot\tau} - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\xi \\
m_0\frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -\frac{e^2}{r^3}\frac{\eta}{\dot\tau} - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\eta \\
m_0\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= -\frac{e^2}{r^3}\frac{\zeta}{\dot\tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Man beachte dabei, daß τ nicht die Eigenzeit im $\xi\eta\zeta$-System, sondern diejenige im xyz-System ist. Daß man die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes durch Einführung seiner Eigenzeit vereinfacht, ist seit Minkowski wohl bekannt. Mit der hier gewonnenen Vereinfachung hat es dagegen eine andere Bewandtnis, da es sich hier sozusagen um eine „fremde Eigenzeit" handelt.

Der Zusammenhang zwischen der Eigenzeit im xyz-System τ und der Eigenzeit im $\xi\eta\zeta$-System — wir wollen sie etwa T nennen — folgt aus der Gl. (8) durch Differentiation. Es ist nämlich

$$\dot{x} = (\dot{\xi} - \frac{f}{2}\dot{\tau}\eta)\cos\frac{f}{2}\tau - (\dot{\eta} + \frac{f}{2}\dot{\tau}\xi)\sin\frac{f}{2}\tau,$$

$$\dot{y} = (\dot{\xi} - \frac{f}{2}\dot{\tau}\eta)\sin\frac{f}{2}\tau + (\dot{\eta} + \frac{f}{2}\dot{\tau}\xi)\cos\frac{f}{2}\tau,$$

daher

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 &= (\dot{\xi}-\frac{f}{2}\dot{\tau}\eta)^2+(\dot{\eta}+\frac{f}{2}\dot{\tau}\xi)^2+\dot{\zeta}^2=\\ \dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2 &+ f\dot{\tau}(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})+\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\dot{\tau}^2.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Nun gilt aber

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=c^2(1-\dot{\tau}^2), \dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=c^2(1-\dot{T}^2),$$
$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\zeta}=\frac{p_\chi}{m}=\frac{p_\chi\dot{\tau}}{m_0}. \quad (12)$$

Also

$$c^2(1-\dot{\tau}^2)=c^2(1-\dot{T}^2)+\left(\frac{fp_\chi}{m_0}+\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\right)\dot{\tau}^2,$$
$$\dot{T}^2=\dot{\tau}^2\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{fp_\chi}{m_0}+\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\right)\right\}. \quad (13)$$

Was sodann den Satz der lebendigen Kraft betrifft, so beträgt die kinetische Energie im xyz-System bekanntlich

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=\frac{m_0c^2}{\dot{\tau}}-m_0c^2.$$

Die potentielle Energie ist, da das magnetische Feld wattlos wirkt:

$$V=-\frac{e^2}{r}.$$

Bedeutet W die bei der Bewegung konstante Gesamtenergie, so gilt also

$$\frac{1}{\dot{\tau}}=\frac{1}{m_0c^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)+1. \quad (14)$$

Bei Benutzung dieser Form der Energiegleichung nehmen die Bewegungsgleichungen (10) eine wesentlich einfachere Form an.

§ 5. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen.

Durch Eintragen von (14) in (10) des vorigen Paragraphen ergibt sich

$$\begin{aligned}m_0\frac{d^2\xi}{d\tau^2}&=-\frac{e^2\xi}{r^3}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4\xi}{m_0c^2r^4}-m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\xi,\\ m_0\frac{d^2\eta}{d\tau^2}&=-\frac{e^2\eta}{r^3}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4\eta}{m_0c^2r^4}-m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\eta,\\ m_0\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}&=-\frac{e^2\zeta}{r^3}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4\zeta}{m_0c^2r^4}.\end{aligned} \quad (1)$$

Die rechten Seiten sind die negativen Ableitungen nach $\xi\eta\zeta$ des Potentials

$$V=-\frac{e^2}{r}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4}{2m_0c^2r^2}+m_0\frac{f^2}{8}(\xi^2+\eta^2). \quad (2)$$

Führt man noch die Impulskomponenten

$$p_\xi=m_0\frac{d\xi}{d\tau},\ p_\eta=m_0\frac{d\eta}{d\tau},\ p_\zeta=m_0\frac{d\zeta}{d\tau} \quad (3)$$

(die wegen Benutzung der „fremden Eigenzeit" τ nicht mit den Impulskomponenten im $\xi\eta\zeta$-Sytem identisch sind) sowie die Hamiltonsche Funktion

$$H=\frac{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}{2m_0}+V \quad (4)$$

ein, so schreiben sich die Gl. (1) und (3) in die folgende kanonische Form um:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_\xi}{d\tau}&=-\frac{\partial H}{\partial\xi},\ \frac{dp_\eta}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial\eta},\ \frac{dp_\zeta}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial\zeta},\\ \frac{d\xi}{d\tau}&=+\frac{\partial H}{\partial p_\xi},\ \frac{d\eta}{d\tau}=+\frac{\partial H}{\partial p_\eta},\ \frac{d\zeta}{d\tau}=+\frac{\partial H}{\partial p_\zeta}.\end{aligned}\right| \quad (5)$$

Aus dieser Form der Gleichungen schließt man sofort, daß gilt:

$$\frac{dH}{d\tau}=0, \text{ also } H=H_0=\text{konst.} \quad (6)$$

Allerdings ist die Konstante H_0 der Hamiltonschen Funktion nicht, wie in den gewöhnlichen Problemen der Mechanik, identisch mit der Energiekonstanten W. Wir finden aber den Ausdruck von H_0 durch W folgendermaßen:

Zunächst ist

$$\frac{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}{2m_0}=\frac{m_0}{2}\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}{\dot{\tau}^2}.$$

Aus den Gl. (11) und (12) des vorigen Paragraphen entnimmt man:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}{\dot{\tau}^2}&=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{\dot{\tau}^2}-\frac{fp_\chi}{m_0}-\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\\ &=c^2\left(\frac{1}{\dot{\tau}^2}-1\right)-\frac{fp_\chi}{m_0}-\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2).\end{aligned}$$

Nimmt man noch Gl. (14) des vorigen Paragraphen hinzu, so wird

$$\begin{aligned}\frac{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}{2m_0}&=\frac{1}{2m_0c^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)^2\\ &+\left(W+\frac{e^2}{r}\right)-\frac{fp_\chi}{2}-\frac{m_0f^2}{8}(\xi^2+\eta^2).\end{aligned} \quad (7)$$

Addiert man hierzu den Ausdruck von V in Gl. (2), so fallen alle veränderlichen Terme her-

aus und es entsteht als Konstante der Hamiltonschen Funktion:

$$H_0 = W\left(1 + \frac{W}{2m_0c^2}\right) - \frac{fp_\chi}{2}. \tag{8}$$

Bekanntlich besteht Jacobis Integrationsmethode der kanonischen Gleichungen der Mechanik darin, eine Wirkungsfunktion S einzuführen, die in unserem Falle der drei Variabeln $\xi\eta\zeta$ folgendermaßen zu definieren ist

$$S = \int_{\xi_0}^{\xi} p_\xi d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} p_\eta d\eta + \int_{\zeta_0}^{\zeta} p_\zeta d\zeta, \tag{9}$$

also als Summe der drei „Phasenintegrale" mit unbestimmter oberer und beliebiger unterer Grenze. Da hiernach

$$p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi},\ p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta},\ p_\zeta = \frac{\partial S}{\partial \zeta}, \tag{10}$$

so folgt aus (7) als Jacobische partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f p_\chi - \left(\frac{m_0 f}{2}\right)^2 (\xi^2 + \eta^2) \tag{11}$$

oder, in Polarkoordinaten $r\vartheta\chi$ geschrieben:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f p_\chi - \left(\frac{m_0 f}{2}\right)^2 r^2 \sin^2\vartheta. \tag{12}$$

Setzt man hierin $c = \infty$, so erhält man natürlich die entsprechende partielle Differentialgleichung für den Zeemaneffekt ohne Relativität. Die zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen sind durch (5) gegeben, wenn man darin τ durch t und H ersetzt durch

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{2m_0} - \frac{e^2}{r} + \frac{m_0 f^2}{8}(\xi^2 + \eta^2),$$

wie sich aus (2) mit $c = \infty$ ergibt.

Setzt man andererseits $f = 0$, so fällt man auf das Keplersche Problem ohne Magnetfeld, aber mit Relativität zurück. Die Hamiltonsche Funktion lautet in diesem Falle nach unserer Methode, bei der als unabhängige Variable die Eigenzeit benutzt wird:

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{2m_0} - \frac{e^2}{r}\left(1 + \frac{W}{m_0c^2}\right) - \frac{e^4}{2m_0c^2r^2}$$

und unterscheidet sich scheinbar wesentlich von der gewöhnlich angegebenen Form der Hamiltonschen Funktion, bei der als unabhängige Variable in den kanonischen Differentialgleichungen die Zeit t benutzt wird:

$$H = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) - \frac{e^2}{r}. \tag{13}$$

Dieser letzte Ausdruck ist nichts anderes als die Summe von kinetischer und potentieller Energie in relativistischer Form, ausgedrückt durch die rechtwinkligen Impulskoordinaten, welche im Anschluß an das Vorhergehende mit p_ξ, p_η, p_ζ bezeichnet sind. Bildet man hiermit die kanonischen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \ldots \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \ldots$$

so unterscheiden sich dieselben formal von denjenigen Gleichungen, die aus (5) mit $f = 0$ entstehen. Bildet man aber die Jacobische partielle Differentialgleichung, indem man in (13) p_ξ, p_η, p_ζ durch (10) ersetzt und H gleich W macht, so entsteht

$$1 + \frac{1}{m_0^2c^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2\right) = \left(1 + \frac{1}{m_0c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\right)^2.$$

Dies erweist sich als völlig identisch mit der Gl. (11), wenn man darin $f = 0$ setzt. Es ist auch von vornherein klar, daß die Einführung der Eigenzeit, die nur ein analytisches Hilfsmittel zur Vereinfachung der Gleichungen war, keinen Einfluß haben kann auf die Jacobische Differentialgleichung, aus der sie herausfällt, und auf die weiteren aus ihr zu ziehenden Schlüsse.

Schließlich läßt sich auch für den Zeemaneffekt mit Relativität eine Form der Hamiltonschen Funktion angegeben, die der Gl. (13) analog gebaut ist und zu kanonischen Gleichungen mit der unabhängigen Variabeln t statt τ gehört. Sie lautet nach einer freundlichen Mitteilung von G. Herglotz:

$$H = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{w^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) - \frac{e^2}{r}$$

mit der Abkürzung

$$w^2 = \left(p_\xi - \frac{m_0 f}{2}\eta\right)^2 + \left(p_\eta + \frac{m_0 f}{2}\xi\right)^2 + p_\zeta^2.$$

Die Konstante H_0 wird alsdann mit der Energie W identisch; die zugehörige Jacobische Gleichung stimmt mit (11) überein.

§ 6. Aufstellung der Quantenbedingungen.

Ebenso wie die rechtwinkligen Impulskomponenten in Gl. (10) des vorigen Paragraphen sind bei Einführung beliebiger Koordinaten q_i die zugehörigen Impulskomponenten die Ableitungen der Wirkungsfunktion nach den betr. q:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Die von mir aufgestellte allgemeine Quantenbedingung für die Koordinate q_i

$$\int p_i dq_i = n_i \cdot h \; (n_i = \text{ganze Zahl})$$

schreibt sich daher einfach

$$\int \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = [S]_i = n_i h .$$

Hier bedeutet $[S]_i$ die Änderung, welche die Wirkungsfunktion erfährt, wenn die Koordinate q_i denjenigen Bereich durchläuft, der zur Darstellung aller „Phasen" des betrachteten Systems erforderlich ist. Wir nennen diese Änderung den i^{ten} Periodizitätsmodul von S und haben den in der Einleitung genannten Satz: Die Periodizitätsmoduln der Jacobischen Wirkungsfunktion sind ganze Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums.

Wenden wir dieses Schema auf unsere Polarkoordinaten r, ϑ, χ an, so lautet es:

$$[S]_\chi = n_1 h, \; [S]_\vartheta = n_2 h, \; [S]_r = n' h . \qquad (1)$$

Aus der Differentialgleichung (12) des vorigen Paragraphen, in der χ rechter Hand nicht vorkommt, ergibt sich

$$\frac{\partial S}{\partial \chi} = p_\chi = \text{konst.}; \qquad (2)$$

da der Wertebereich des Winkels χ sich von o bis 2π erstreckt, hat man

$$[S]_\chi = \int_0^{2\pi} p_\chi \, d\chi = 2\pi \, p_\chi . \qquad (3)$$

Setzt man den aus (1), (2) und (3) folgenden Wert

$$p_\chi = \frac{\partial S}{\partial \chi} = \frac{n_1 h}{2\pi}$$

in Gl. (12) des vorigen Paragraphen ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f \cdot \frac{n_1 h}{2\pi} - \left(\frac{m_0 f}{2}\right)^2 r^2 \sin^2\vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2, \qquad (4)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{1}{c}\left(W + \frac{e^2}{r}\right) + m_0 c\right)^2 - \left(\frac{m_0 f}{2} r \sin\vartheta + \frac{n_1 h}{2\pi r \sin\vartheta}\right)^2 - m_0^2 c^2 . \qquad (4a)$$

Es wäre nun prinzipiell erforderlich, diese Gleichung in Strenge zu integrieren. Dies ist aber nach der gewöhnlichen Methode der Separation der Variabeln jedenfalls nicht möglich. Wir vernachlässigen daher das Glied mit f^2, indem wir uns auf die Abschätzung seiner Größe in § 2 berufen. Dann läßt sich (4) unter Hinzufügung des Gliedes

$$\pm \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta_0}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2$$

separieren in die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 . \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi} - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta_0}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 . \qquad (6)$$

ϑ_0 ist eine durch unsere Zerfällung neu eingeführte Integrationskonstante, deren Bedeutung aus (5) hervorgeht. Es muß nämlich $\partial S/\partial\vartheta$ reell sein und ϑ seiner geometrischen Bedeutung nach zwischen o und π liegen. Aus beidem folgt:

$$\sin\vartheta > \sin\vartheta_0, \; \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \pi - \vartheta_0 . \qquad (7)$$

ϑ_0 bestimmt also den Wertebereich, in dem der Winkel ϑ variieren kann. Daß ϑ die Grenzen ϑ_0 und $\pi - \vartheta_0$ wirklich erreicht, folgt aus Stetigkeitsgründen; eine Umkehr des Fortschreitungssinnes von ϑ kann nämlich nur an solchen Stellen erfolgen, wo $\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0$, also $\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$ ist. Infolgedessen wächst ϑ dauernd von ϑ_0 bis $\pi - \vartheta_0$, nimmt dauernd ab bis ϑ_0 usf. Der volle Wertebereich von ϑ entspricht dem Hin- und Rückwege von ϑ_0 bis $\pi - \vartheta_0$ und von $\pi - \vartheta_0$ bis ϑ_0.

Hiernach wird, das Integral über den eben genannten Wertebereich genommen:

$$[S]_\vartheta = \int \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta = \frac{n_1 h}{2\pi} \int \sqrt{\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}} \, d\vartheta .$$

Nach (1) lautet also unsere Quantenbedingung für ϑ:

$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}} \, d\vartheta = 2\pi \frac{n_2}{n_1} . \qquad (8)$$

Wir wenden uns zur Quantenbedingung in r und schreiben Gl. (6) zunächst abkürzend

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}, \qquad (9)$$

$$A = \frac{W^2}{c^2} + 2m_0 W - m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}, \quad B = \frac{W e^2}{c^2} + m_0 e^2, \quad C = \frac{e^4}{c^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta_0}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 . \qquad (9a)$$

Aus denselben Gründen wie vorher kann r im Verlauf der Bewegung seinen Fortschreitungssinn nur an solchen Stellen umkehren, für welche $dS/\partial r$ verschwindet. Die Grenzen $r_{\min}$ und $r_{\max}$, innerhalb deren r variiert, sind daher gegeben durch die quadratische Gleichung

$$A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} = 0 .$$

Der volle Wertebereich von r erstreckt sich von der einen Wurzel dieser Gleichung bis zur anderen und wieder zurück zur ersten. Infolge-

dessen wird nach (1) unsere dritte Quantenbedingung:

$$[S]_r = \int \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr = n' h. \qquad (10)$$

In beiden Fällen (8) und (10) haben wir es also, wie in der Einleitung bemerkt, mit sog. vollständigen Integralen zu tun, das Wort entlehnt aus der Theorie der elliptischen Integrale und in dem Sinne verstanden, daß die Integration von einem Verzweigungspunkte des Integranden (Verschwindungspunkte der Quadratwurzel) bis zum anderen und wieder zurück zum ersten geführt werden soll. Da ein vollständiges Integral analytisch ein wesentlich einfacheres Ding ist als ein unvollständiges, werden wir bei der Ausrechnung unserer Quantenbedingungen im nächsten Paragraphen von denjenigen Methoden Nutzen ziehen, die sich für vollständige, d. h. im Komplexen geschlossene Integrale darbieten. Die Allgemeinheit unserer Überlegung, die eigentlich nur auf der Stetigkeit von S und dem quadratischen Charakter des Differentialparameters

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2$$

beruhte, zeigt, daß auch ganz allgemein bei beliebigen Freiheitsgraden und bei beliebigen Kraftfeldern (äußeren oder inneratomistischen) unsere Quantenbedingungen auf vollständige Integrale führen und der Methode der komplexen Integration zugänglich sein müssen.

§ 7. Ausrechnung der Quantenbedingungen durch komplexe Integration.

Als Typus unserer Phasenintegrale betrachten wir die Form (10) des vorigen Paragraphen

$$J = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr. \qquad (1)$$

Durch den am Integralzeichen angebrachten Kreis wird wie üblich der geschlossene Charakter des Integrationsweges angedeutet. Er

Fig. 3.

erstreckt sich (vgl. Fig. 3) um die beiden Verzweigungspunkte $r_{\min}$ und $r_{\max}$ herum. Bezüglich des Vorzeichens der Quadratwurzel ist festzusetzen, daß dieses auf der reellen Achse zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$ positiv sein soll bei positivem dr, negativ bei negativem dr. Wir führen demnach von $r_{\min}$ bis $r_{\max}$ einen „Verzweigungsschnitt", sprechen von einem „negativen" und einem „positiven Ufer" desselben und bestimmen den Wert der Quadratwurzel an allen anderen Stellen der komplexen Ebene unserer Figur (des „oberen Blattes" einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche) im Anschluß an die Vorzeichen-Festsetzung auf den beiden Ufern unseres Verzweigungsschnittes. Z. B. gilt in der Nähe des Nullpunktes die Entwicklung

$$\sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} = \frac{\sqrt{C}}{r}\left(1 + \frac{B}{C} r + \ldots\right), \quad (2)$$

wo $\sqrt{C}$ eine negativ-imaginäre Größe sein muß, und in der Nähe des Unendlichkeitspunktes, den wir in der Figur der Deutlichkeit wegen ins Endliche hineintransformiert haben

$$\sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} = \sqrt{A}\left(1 + \frac{B}{A}\frac{1}{r} + \ldots\right), \quad (3)$$

wo $\sqrt{A}$ eine positiv-imaginäre Größe sein muß. In der Tat gelangen wir von dem positiven Ufer des Verzweigungschnittes nach dem Nullpunkt (bzw. Unendlichkeitspunkt) durch einen Umgang um den Verzweigungspunkt $r_{\min}$ (bzw. $r_{\max}$) vom Winkel 180^0 im negativen (bzw. positiven) Sinne, welcher Umgang den Faktor

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i \text{ (bzw. } e^{+\frac{i\pi}{2}} = +i)$$

mit sich bringt. Hierdurch bestätigen sich unsere Angaben bei (2) und (3) über den negativ-imaginären bzw. positiv-imaginären Charakter von $\sqrt{C}$ und $\sqrt{A}$.

Wir formen nun unseren Integrationsweg, der ursprünglich um die Verzweigungspunkte herum führte, um in einen Umlauf um die singulären Punkte des Integranden; es sind dieses der Nullpunkt $r = 0$ und der Unendlichkeitspunkt $s = \frac{1}{r} = 0$.

Beide Umläufe lassen sich nach der Residuenregel unmittelbar berechnen. Da sie beide (vgl. die Figur) im negativen Sinne erfolgen, ist ihr Beitrag bzw.

$$-2\pi i N \text{ bzw. } -2\pi i U,$$

wo N und U die Residuen bei $r = 0$ und $s = 0$ sind. N ergibt sich aus (2) als Koeffizient von $1/r$ zu

$$N = \sqrt{C}.$$

Um U zu erhalten, haben wir (3) mit $dr = -ds/s^2$ zu multiplizieren und den Koeffizienten von ds/s zu nehmen. Dieser ist

$$U = -\sqrt{A}\frac{B}{A} = -\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

Unser Integral (1) wird daher

$$J = -2\pi i(N+U) = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right). \quad (4)$$

Offenbar hat diese Berechnungsweise von J den Vorzug der Verallgemeinerungsfähigkeit.

Ebenso behandeln wir wegen einer späteren Anwendung das Integral

$$J' = \oint \frac{r\,dr}{\sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}}, \quad (5)$$

genommen auf demselben geschlossenen, in Fig 3 gezeichneten Wege. Auch jetzt ergibt sich:

$$J' = -2\pi i(N+U).$$

Indessen ist jetzt das Residuum N im Nullpunkte gleich Null, da hier der Nullpunkt als singulärer Punkt ausscheidet. Für den Unendlichkeitspunkt $s = 1/r = 0$ entwickelt, lautet der Integrand

$$-\frac{ds}{s^3}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(1 + \frac{2B}{A}s + \frac{C}{A}s^2\right)^{-1/2} =$$
$$-\frac{ds}{s^3}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(1 - \frac{B}{A}s + \left(\frac{3}{2}\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{2A}\right)s^2 + \ldots\right)$$

Der Faktor von ds/s ist also

$$U = -\frac{1}{2A^{3/2}}\left(\frac{3B^2}{A} - C\right).$$

Somit wird

$$J' = \frac{\pi i}{A^{3/2}}\left(\frac{3B^2}{A} - C\right). \quad (6)$$

Ähnlich verfahren wir mit dem Integral (8) des vorigen Paragraphen

$$J_1 = \int\sqrt{\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta.$$

Wir setzen

$$x = \sin^2\vartheta, \quad a = \sin^2\vartheta_0 \quad (7)$$

und erhalten

$$\sqrt{a}\,J_1 = \oint\sqrt{\frac{x-a}{1-x}}\,\frac{dx}{x}.$$

Die Integration, die in ϑ von ϑ_0 bis $\pi - \vartheta_0$ und zurück zu erstrecken war, geht in der x-Ebene (vgl. Fig. 4) von $x = a$ bis $x = 1$ und nach Umlaufung dieses Verzweigungspunktes

$x=0$ $x=a$ $x=1$ $y=\frac{1}{x}=0$

Fig. 4.

zurück bis $x = a$. Wir haben also auch hier ein in der x-Ebene geschlossenes Integral um die beiden Verzweigungspunkte $x = a$ und $x = 1$, welches wir auf die Umläufe um $x = 0$ und $x = \infty$ zusammenziehen können. Wiederum ergibt sich

$$\sqrt{a}\,J_1 = -2\pi i(N+U) \quad (8)$$

Das Residuum im Nullpunkt wird

$$N = -i\sqrt{a}. \quad (9)$$

Die Entwicklung des Integranden im Unendlichkeitspunkte $y = \frac{1}{x} = 0$ lautet

$$-\frac{dy}{y}\left(-1-(1-a)y+\ldots\right)^{-1/2}.$$

Da man von dem positiven Ufer des Verzweigungsschnittes der Fig. 4 nach dem Unendlichkeitspunkt durch einen positiven Umgang um den Verzweigungspunkt $x = 1$ vom Winkel 180^0 gelangt, wird das Residuum im Unendlichkeitspunkte

$$U = -\frac{1}{e^{+\frac{i\pi}{2}}} = +i. \quad (9a)$$

Aus (8), (9), und (9a) ergibt sich also

$$\sqrt{a}\,J_1 = 2\pi(1-\sqrt{a}). \quad (10)$$

Da aber nach Gl. (8) des vorigen Paragraphen war

$$J_1 = 2\pi\frac{n_2}{n_1},$$

so ergibt sich aus (7) und (10) dieses Paragraphen

$$\sqrt{a} = \sin\vartheta_0 = \frac{n_1}{n_1+n_2} = \frac{n_1}{n} \quad (11)$$

mit der früheren Abkürzung

$$n = n_1 + n_2.$$

Der Inhalt der Gl. (11) wurde bereits durch Gl. (1) und Fig. 1 der Einleitung dargestellt, welche also bei der relativistischen Behandlung ihre Gültigkeit behalten. In der Tat besteht zwischen unserem jetzigen Winkel ϑ_0 und dem früheren Neigungswinkel α der Bahnebene gegen die Äquatorebene die geometrische Beziehung

$$\sin\vartheta_0 = \cos\alpha.$$

Das auf den Winkel ϑ bezügliche Phasenintegral bestimmt also, wie in der Einleitung betont, die Lage der Bahnebene im Raume, und zwar im Raume des $\xi\eta\zeta$-Systems.

§ 8. Die Energie der Bewegung. Zeemaneffekt mit Relativität.

Wir überzeugen uns weiter, daß das auf den Radiusvektor r bezügliche Phasenintegral entsprechenderweise die Energie der Bewegung bestimmt. Nach Gl. (10) des vorvorigen und Gl. (4) des vorvorigen Paragraphen hat man

$$n'h = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right). \quad (1)$$

Wegen Gl. (11) des vorigen Paragraphen wird der Wert von C (vgl. Gl. (9a) des vorvorigen Paragraphen)

$$C = \frac{e^4}{c^2} - \left(\frac{nh}{2\pi}\right)^2 = -\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 (n^2 - \alpha^2), \qquad (2)$$

Hier bedeutet α die von mir früher eingeführte „Konstante der Feinstruktur"[1])

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = 7{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Somit nach der der Gl. (2) des vorigen Paragraphen hinzugefügten Vorzeichenbestimmung

$$-2\pi i \sqrt{C} = -h\sqrt{n^2 - \alpha^2}$$

und nach Gl. (1)

$$\frac{Ah^2}{(2\pi B)^2} = -\frac{1}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}. \qquad (3)$$

Nach Gl. (9a) des vorvorigen Paragraphen ist

$$2\pi B = \frac{2\pi e^2}{c}\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right) = \alpha h\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right),$$

$$A = \left(\frac{W}{c} + m_0 c\right)^2 - m_0{}^2 c^2 - m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi},$$

$$\frac{Ah^2}{(2\pi B)^2} = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{m_0{}^2 c^2 + m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}}{\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right)^2}\right),$$

also nach (3)

$$\frac{m_0{}^2 c^2 + m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}}{\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right)^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}$$

$$\frac{W}{c} + m_0 c = \left(m_0{}^2 c^2 + m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-1/2}.$$

Durch Division mit $m_0 c$ ergibt sich

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{f}{2\pi}\frac{n_1 h}{m_0 c^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-1/2} \qquad (4)$$

Setzt man hierin $f = 0$, so folgt die Energie der Keplerschen Ellipse ohne Magnetfeld[2]), die wir W_0 nennen wollen

$$1 + \frac{W_0}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-1/2}. \qquad (4a)$$

Man kann daher die Gl. (4) auch so schreiben

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{f}{2\pi}\frac{n_1 h}{m_0 c^2}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{W_0}{m_0 c^2}\right)$$

1) Vgl. Ann. d. Phys. l. c. Teil II. § 3, Gl. (12a); die ursprünglich in der Münchn. Akademie benutzte und ebenso bezeichnete Konstante war gleich $\alpha^2/4$.

2) Vgl. Ann. d. Phys. l. c. Teil II, Gl. (17), wo für Wasserstoff $E = e$ zu setzen ist.

oder bei konsequenter Vernachlässigung höherer Potenzen von f

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{f}{4\pi}\frac{n_1 h}{m_0 c^2}\right)\left(1 + \frac{W_0}{m_0 c^2}\right).$$

Durch Ausrechnung folgt:

$$W - W_0 = \frac{f}{4\pi} n_1 h\left(1 + \frac{W_0}{m_0 c^2}\right). \qquad (5)$$

Aus Gl. (4a) ersieht man aber, daß $\frac{W_0}{m_0 c^2}$ von der Ordnung $\alpha^2 = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ ist. Man kann daher ohne Fehler die vorige Gleichung einfacher schreiben:

$$W - W_0 = \frac{f}{4\pi} n_1 h. \qquad (6)$$

Damit sind wir auf Gl. (13) des § 2 zurückgefallen, aus welcher in gewissem Sinne (d. h. abgesehen von den überzähligen Komponenten) das normale Lorentzsche Triplett folgte. Unser Resultat lautet also: Der Zeemaneffekt mit Relativität ist nicht verschieden von dem Zeemaneffekt ohne Relativität. Oder anders ausgedrückt: Der Zeemaneffekt wird durch die aus der Relativitätstheorie folgende Feinstruktur der Wasserstofflinien nicht beeinflußt.

Dieses Resultat ist höchst verdächtig. Zwar kennt man den Zeemaneffekt der Wasserstofflinien wegen ihrer Diffusität nicht hinlänglich gut. Daß er aber für jede Komponente der H-Linien aus einem normalen Triplett bestehen sollte, ist sehr unwahrscheinlich. Tatsächlich zeigen den normalen Zeemaneffekt bei kleinen Feldern doch nur die einfachen Spektrallinien. Zweifellos ist der Paschen-Back-Effekt die allgemeinste und wichtigste magnetooptische Erfahrung, die wir haben; sie erklärt erst das normale Triplett der sog. einfachen Linien, die in Wirklichkeit wohl stets nur hinreichend enge mehrfache Linien sind. Von dem Paschen-Back-Effekt zeigt sich aber in unserer Berechnung keine Andeutung. Vielmehr würde nach unserer Gl. (6) die Mehrfachheit der H-Linien, die in der Mehrwertigkeit von W_0 steckt, auch in dem Werte von W erhalten bleiben, unabhängig von der Größe von f. Wir hätten also so viele sich überlagernde und sich nicht störende Tripletts (nebst überzähligen äußeren Linien) als wir ohne Magnetfeld Komponenten der Feinstruktur haben. Der Paschen-Back-Effekt tritt bekanntlich in Erscheinung, wenn f nicht mehr klein ist gegen $\Delta\nu_0$, d. h. gegen den ursprünglichen Abstand zweier Komponenten der mehrfachen Spektrallinie. In unserer Formel tritt aber das Verhältnis $f : \Delta\nu_0$ überhaupt nicht auf.

Wir müssen also unser Resultat (6) für

unzureichend erklären und müssen nach dem Grunde hierfür fragen.

1. In meiner ursprünglichen Darstellung machte die Wahl der Koordinaten, in denen die Quantenbedingungen angesetzt wurden, Schwierigkeit. In den Arbeiten von Schwarzschild und Epstein scheint diese Schwierigkeit behoben durch die Anweisung: Man gehe von kanonischen Gleichungen aus und benutze solche Koordinaten, in denen sich die Jacobische Differentialgleichung separieren läßt. Nach dieser Anweisung sind wir in den letzten Paragraphen verfahren.

Indessen gelang die Separierung der Variabeln nicht in Strenge, sondern nur unter Vernachlässigung höherer Potenzen von f. Trotz der Kleinheit der fraglichen Glieder ist es möglich, daß sie einen prinzipiellen Einfluß auf den Ansatz der Quantenbedingungen haben könnten. Jedenfalls sind unsere Variabeln r, ϑ, χ nicht in Strenge die richtigen Variabeln, die der Quantelung unterworfen werden sollten. Bei dem diskreten Charakter der Quantenbedingungen wäre es nicht ausgeschlossen, daß diese Bedingungen für die in Strenge richtigen Koordinaten wesentlich anders lauten und sich nicht stetig anschließen an diejenigen Bedingungen, die für die nur angenähert und scheinbar richtigen Koordinaten r, ϑ, χ berechnet wurden.

2. Man könnte andererseits die Schuld auf die Bohrsche Frequenzgleichung

$$h\nu = W_m - W_n$$

schieben. Sie ist aus verschiedenen Gründen unzureichend: als skalare Gleichung kann sie niemals die Polarisationen erklären; da sie nur die Anfangs- und Endbahn berücksichtigt, nicht aber die näheren Umstände des Überganges, verzichtet sie auf den Schwingungscharakter der Spektrallinien; ihr Ursprung aus der Vorstellung der Energiequanten steht mit der neueren Entwicklung der Quantentheorie im Widerspruch, welche nur mehr Wirkungsquanten kennt.

Um die Entscheidung zu treffen, ob mutmaßlich der Einwand 1 oder 2 für das negative Ergebnis unserer Untersuchung verantwortlich zu machen ist, werden wir uns am besten durch die Erfahrungen beim Starkeffekt leiten lassen. Hier wird die Bohrsche Frequenzgleichung ungeändert übernommen und der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Art des Übergangs zwischen Anfangs- und Endbahn durchaus nicht in Rechnung gesetzt.

Andererseits aber wird das mechanische Problem der Anfangs- und Endbewegung streng gelöst und der Quantenansatz in solchen Koordinaten vorgenommen, die zur genauen Separierung der Jacobischen Differentialgleichung führen. Die nachträgliche Beschränkung auf die erste Potenz des elektrischen Feldes ist hier nur Sache der praktischen Ausrechnung, hat aber keinen prinzipiellen Einfluß auf Koordinatenwahl oder Quantenansatz.

Hiernach werden wir auch beim Zeemaneffekt geneigt sein, den Einwand 1 als maßgebend anzusehen. Es ergibt sich also als Hauptresultat unserer Untersuchung die Forderung: die für den Quantenansatz strenge richtigen Koordinaten durch genaue Integration der Bewegungsgleichungen zu ermitteln.

§ 9. Anhang über den Stark-Effekt.

Das Elektron (Ladung $-e$) befinde sich unter dem Einfluß des Wasserstoffkernes (Ladung $+e$) und eines homogenen elektrischen Feldes von der Stärke E und der Richtung x. Seine potentielle Energie ist

$$V = -\frac{e^2}{r} + eEx,\ r^2 = x^2 + \varrho^2,\ \varrho^2 = y^2 + z^2. \quad (1)$$

a) Stark-Effekt ohne Relativität.

Anwendung der Methode der komplexen Integration.

Mit Schwarzschild und Epstein führen wir parabolische Koordinaten ξ, η, φ ein durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y = \varrho\cos\varphi,\ z = \varrho\sin\varphi,\ x + i\varrho = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2 \\ x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),\ \varrho = \xi\eta,\ r = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Das Linienelement wird

$$ds^2 = dx^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2) + \xi^2\eta^2 d\varphi^2.$$

Daher die lebendige Kraft

$$T = \frac{m}{2}\left\{(\xi^2 + \eta^2)(\dot\xi^2 + \dot\eta^2) + \xi^2\eta^2\dot\varphi^2\right\}$$

oder, in den Impulsen

$$p_\xi = \frac{\partial T}{\partial\dot\xi},\ p_\eta = \frac{\partial T}{\partial\dot\eta},\ p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}$$

geschrieben

$$T = \frac{1}{2m(\xi^2 + \eta^2)}\left\{p_\xi^2 + p_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)p_\varphi^2\right\}. \quad (3)$$

Die potentielle Energie wird nach (1) und (2)

$$V = \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2)}\left\{-4e^2 + eE(\xi^4 - \eta^4)\right\}. \quad (4)$$

Daher lautet die Hamiltonsche Funktion:

$$H = T + V = W:$$

$$H = \frac{1}{2m(\xi^2+\eta^2)}\Big\{p_\xi^2 + p_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)p_\varphi^2 - 4me^2 + mcE(\xi^4-\eta^4)\Big\}$$

und die Jacobische Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mW(\xi^2+\eta^2) + 4me^2 - mcE(\xi^4-\eta^4). \quad (5)$$

Ihre Integration ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi = \text{Konst.}, \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} = \sqrt{f_1(\xi)}, \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = \sqrt{f_2(\eta)}\,. \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(\xi) &= 2mW\xi^2 + 2m(e^2+\beta) - mcE\xi^4 - \frac{p_\varphi^2}{\xi^2} \\ f_2(\eta) &= 2mW\eta^2 + 2m(e^2-\beta) + mcE\eta^4 - \frac{p_\varphi^2}{\eta^2} \end{aligned}\right| \quad (7)$$

β ist eine bei der Separation der Variabeln ξ η eingeführte Integrationskonstante.

Die Quantenbedingungen lauten in der Schreibweise der Gl. (1) § 6:

$$[S]_\xi = n_1 h, \quad [S]_\eta = n_2 h, \quad [S]_\varphi = n_3 h. \quad (8)$$

Die Integration in $[S]_\varphi$ ist von 0 bis 2π zu erstrecken; die letzte Bedingung (8) liefert daher

$$p_\varphi = \frac{n_3 h}{2\pi}.$$

Die Integrationen in $[S]_\xi$ und $[S]_\eta$ erstrecken sich hin und her zwischen ξ_1 ξ_2 bzw. η_1 η_2, wo ξ_1 ξ_2 bzw. η_1 η_2 diejenigen beiden positiven Wurzeln von $f_1(\xi)=0$ bzw. $f_2(\eta)=0$ sind, die für $E=0$ nicht ∞ werden. Die beiden ersten Gl. (8) lassen sich daher zusammenfassend schreiben:

$$\oint\sqrt{A + 2\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + Dx}\,dx = 2nh. \quad (9)$$

Hier ist das eine Mal $\xi^2 = x$, das andere Mal $\eta^2 = x$ gesetzt und berücksichtigt, daß dann $d\xi/\xi$ und $d\eta/\eta$ gleich $dx/2x$ wird, wobei der Faktor 2 nach rechts gesetzt wurde und n die Zahl n_1 bzw. n_2 vertritt. Die Koeffizienten A, B, C, D bedeuten das einemal

$$A_1 = 2mW,\ B_1 = m(e^2+\beta),\ C_1 = -\left(\frac{n_3 h}{2\pi}\right)^2,\ D_1 = -mcE. \quad (9a)$$

das anderemal

$$A_2 = 2mW,\ B_2 = m(e^2-\beta),\ C_2 = -\left(\frac{n_3 h}{2\pi}\right)^2,\ D_2 = +mcE. \quad (9b)$$

Die Integration ist in der komplexen x-Ebene ein Umgang um diejenigen beiden Verzweigungspunkte x_1 x_2 des Radikanden von (9), die mit $D=0$ nicht ins Unendliche rücken. Außer diesen beiden Verzweigungspunkten gibt es noch zwei weitere, x_3 und ∞, so daß (9) ein vollständiges elliptisches Integral darstellt.

Nachdem so der Quantenansatz an die genaue Integration der Bewegungsgleichungen angeschlossen ist (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen), darf man für alle praktischen Zwecke das elliptische Integral nach Potenzen von D entwickeln, um es auf elementare Integrale zurückzuführen. Man schreibe:

$$\sqrt{A + 2\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + Dx} = \sqrt{A + 2\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}} + \frac{1}{2}\frac{Dx}{\sqrt{A + 2\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}}}.$$

Dann ergibt sich statt (9)

$$J + \frac{D}{2}J' = 2nh. \quad (10)$$

J und J' haben genau dieselbe Bedeutung wie in § 7 Gl. (1) und (5). Dabei ist folgender Umstand für unsere Rechnungsmethode charakteristisch. Die Integration in (9) ist ursprünglich um die Verzweigungspunkte x_1 x_2 des unverkürzten Radikanden in (9) zu erstrecken. Diese Verzweigungspunkte stimmen nicht genau überein mit den Verzweigungspunkten, sagen wir x^1_1, x^1_2, des verkürzten Radikanden $A + \frac{2B}{x} + \frac{C}{x^2}$. Jedenfalls aber kann der ursprüngliche Integrationsweg so gewählt werden, daß er auch die Verzweigungspunkte x^1_1, x^1_2 umschließt. Nach Vornahme unserer Potenzentwicklung ist er daher für die weitere Behandlung der Integrale J und J' völlig äquivalent mit demjenigen Integrationswege, der in § 7 zugrunde gelegt wurde. Es ist daher bei unserer Methode gar nicht nötig, die Verschiedenheit der Wurzeln x^1_1, x^1_2 einerseits und x_1, x_2 andrerseits zu berücksichtigen. Nicht so, wenn man an den ursprünglichen reellen Integralen festhält und auf die Freiheit in der Verfügung über den Integrationsweg, die die komplexe Auffassung mit sich bringt, verzichtet. Dementsprechend bemerkt Epstein[1]) daß man beim Übergang zur „zweiten Näherung" (d. h. bei Berücksichtigung der ersten Potenz der Feldstärke E) auf die abweichenden Werte der Integrationsgrenzen (bei Epstein u_1, u_2) zu achten habe, daß diese aber nur „Effekte zweiter Ordnung" mit sich bringen. Dagegen zeigt unsere Methode unmittelbar, daß diese Effekte in jeder Ordnung exakt verschwinden.

Setzt man nun aus § 7 Gl. (4) und (6) die

1) Ann. d. Phys. 50, 507, 1916.

Werte von J und J' in (10) ein, so entsteht

$$\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} - \frac{D}{4A^{3/2}}\left(\frac{3B^2}{A} - C\right) = \frac{nhi}{\pi}. \quad (11)$$

Diese Gleichung ist in A, B, C, D und n mit den Indizes 1 und 2 zu versehen und vertritt daher eigentlich zwei Gleichungen. Wir eliminieren aus ihnen die in B_1 und B_2 vorkommende Integrationskonstante β (vgl. Gl. (9a) und (9b)), da wir uns für sie nicht interessieren, und berechnen zu dem Ende zunächst B aus (11). Es ergibt sich

$$B\left(1 + \frac{3DB}{4A^2}\right) = \sqrt{A}\left(\sqrt{C} - \frac{nhi}{\pi}\right) + \frac{CD}{4A}. \quad (12)$$

In dem wegen D kleinen Gliede linker Hand kann man für B den Näherungswert $B = \sqrt{A}\,K$ einführen, wo zur Abkürzung geschrieben wird

$$K = \sqrt{C} - \frac{nhi}{\pi}. \quad (13)$$

Dann folgt aus (12)

$$B = \sqrt{A}K + \frac{CD}{4A} - \frac{3}{4}\frac{DK^2}{A}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \sqrt{A}K_1 - \frac{meEC}{4A} + \frac{3}{4}\frac{meEK_1^2}{A} \\ &= m(c^2 + \beta) \\ B_2 &= \sqrt{A}K_2 + \frac{meEC}{4A} - \frac{3}{4}\frac{meEK_2^2}{A} \\ &= m(c^2 - \beta) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Es unterscheiden sich nämlich nach (9a) und (9b) A_1, A_2 und C_1, C_2 nicht voneinander, weshalb für diese Größen die Buchstaben A und C beibehalten werden können. Die nur dem Vorzeichen nach verschiedenen Werte $\mp meE$ von D_1 und D_2 sind eingesetzt, ebenso die Werte von B_1 und B_2. K_1 und K_2 sind nach (13) verschieden wegen der verschiedenen Bedeutung von $n = n_1$ bzw. $n = n_2$.

Nehmen wir die halbe Summe der beiden Gl. (14)

$$\frac{K_1 + K_2}{2}\left(\sqrt{A} + \frac{3}{4}\frac{meE}{A}(K_1 - K_2)\right) = mc^2, \quad (15)$$

so ist die beabsichtigte Elimination von β erreicht und wir können zur Berechnung von $A = 2mW$ übergehen. In erster Näherung folgt

$$A = \left(\frac{2mc^2}{K_1 + K_2}\right)^2,$$

welchen Wert wir in dem mit E behafteten kleinen Gliede links eintragen können. Somit

$$\sqrt{A} = \frac{2mc^2}{K_1 + K_2} - \frac{3}{4}\frac{meE}{(2mc^2)^2}(K_1 - K_2)(K_2 + K_1)^2,$$

$$A = \frac{(2mc^2)^2}{(K_1 + K_2)^2} - \frac{3}{4}\frac{E}{e}(K_1 - K_2)(K_2 + K_1),$$

$$W = \frac{2mc^4}{(K_1 + K_2)^2} - \frac{3}{8}\frac{E}{me}(K_1 - K_2)(K_2 + K_1). \quad (16)$$

Nach (13) ist aber

$$K_1 - K_2 = \frac{hi}{\pi}(n_2 - n_1),$$

$$K_2 + K_1 = 2\sqrt{C} - \frac{hi}{\pi}(n_1 + n_2)$$

und nach (9a) oder (9b) mit Rücksicht auf die Vorzeichenbestimmung von $\sqrt{C}$ bei Gl. (2) in § 7

$$\sqrt{C} = -\frac{n_3 hi}{2\pi},$$

also

$$K_1 + K_2 = -\frac{hi}{\pi}(n_1 + n_2 + n_3), (K_1 - K_2)(K_2 + K_1)$$

$$= \frac{h^2}{\pi^2}(n_2 - n_1)(n_1 + n_2 + n_3). \quad (17)$$

Setzt man dieses in (16) ein, so ergibt sich als endgültiges Resultat

$$-W = \frac{2\pi^2 me^4 h^2}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} + \frac{3h^2 E}{8\pi^2 me}(n_2 - n_1)(n_1 + n_2 + n_3). \quad (18)$$

Dies stimmt genau mit Epsteins Gl. (62) überein und unterscheidet sich von Schwarzschilds Resultat nur unwesentlich aus Gründen, die Epstein inzwischen aufgeklärt hat. Wie man weiß, liegt in dem zweiten Term rechts in Gl. (18) die Erklärung für die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, die Stark bei den verschiedenen Balmer-Linien entdeckt hat. Man darf wohl ohne Übertreibung sagen, daß die formale Erklärung dieser Erscheinungen nicht einfacher gegeben werden kann, als in den vorstehenden Zeilen geschehen.

b) Stark-Effekt mit Relativität.

Die relativistische Bewegungsgleichung für die x-Komponente lautet mit dem Werte (1) für die potentielle Energie V:

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad p_x = m\frac{dx}{dt} = m_0\frac{dx}{d\tau}, \quad (19)$$

wo τ die Eigenzeit ist. Die Energiegleichung liefert ähnlich wie in § 4, Gl. (14) für $\dot{\tau} = d\tau/dt = \sqrt{1 - \beta^2}$:

$$\frac{1}{\dot{\tau}} = \frac{1}{m_0 c^2}(W - V) + 1. \qquad (20)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der vorhergehenden erhält man ähnlich wie in § 5:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial x}\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) + \frac{1}{m_0 c^2} V \frac{\partial V}{\partial x}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[V\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) - \frac{V^2}{2 m_0 c^2}\right]. \qquad (21)$$

Führt man also eine Hamiltonsche Funktion ein

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2 m_0} + V\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) - \frac{V^2}{2 m_0 c^2}, \qquad (22)$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen nach (19) und (21) in die folgende kanonische Form bringen:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ldots, \frac{dx}{d\tau} = +\frac{\partial H}{\partial p_x}, \ldots \qquad (23)$$

Die Konstante der Hamiltonschen Funktion ist nicht gleich der Energiekonstanten W sondern, wie man nach der Methode des § 5 leicht nachrechnet, gleich

$$H_0 = W\left(1 + \frac{W}{2 m_0 c^2}\right). \qquad (24)$$

Will man andrerseits in (22) die gewöhnliche Zeit t statt τ benutzen, so muß man statt (23) und (24) schreiben:

$$H = m_0 c^2\left(\sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m_0^2 c^2}} - 1\right) + V, \qquad (23a)$$

$$H_0 = W \qquad (24a)$$

Aus $H = H_0$ folgt nach (23) 24) ebenso wie nach (23a), (24a) die Jacobische partielle Differentialgleichung unseres Problems zu

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2 m_0 W\left(1 + \frac{W}{2 m_0 c^2}\right)$$
$$- 2 m_0 V\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) + \frac{V^2}{c^2}.$$

Diese Gleichung wird aber durch Einführung der parabolischen Koordinaten ξ, η, φ nicht mehr in eine separierbare Form übergeführt. Nach den Rechnungen vom Anfange dieses Paragraphen ergibt sich nämlich:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2$$
$$= 2 m_0 W\left(1 + \frac{W}{2 m_0 c^2}\right)(\xi^2 + \eta^2)$$
$$+ m_0\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right)(4 e^2 - e E(\xi^4 - \eta^4))$$
$$+ \frac{(4 e^2 - e E(\xi^4 - \eta^4))^2}{4 c^2 (\xi^2 + \eta^2)}.$$

Hier steht das letzte Glied, welches aus V^2/c^2 entstanden ist, der Separierung der Variabeln ξ η im Wege. Infolgedessen können wir diese Variabeln nicht mehr als die für den relativistischen Stark-Effekt richtigen anerkennen. In den richtigen Koordinaten angesetzt, mögen die Quantenbedingungen wesentlich und unstetig von den obigen Gl. (8) abweichen, ähnlich wie dies am Schluß des vorigen Paragraphen für die richtigen und die scheinbar angenähert richtigen Koordinaten beim Zeeman-Effekt vermutet wurde.

Offenbar wird es auch im Gebiete des Stark-Effektes ein Analogon zu dem magnetischen Paschen-Back-Effekte geben. Die ohne Rücksicht auf die Multiplizität gewonnene, nicht relativistische Formel (18) hat sich bei „starken" Feldern vollkommen bewährt. Dieselbe Formel kann aber bei „schwachen" Feldern gewiß nicht genau gelten, da sie mit $E = 0$ nicht den Übergang in die wirkliche Feinstruktur der Wasserstofflinien, sondern in die gröbere Balmersche Formel für einfache Linien vermittelt. Man wird hier offenbar ebenso wie beim Zeeman-Effekt sagen können: Die Feinstruktur wird gegenstandslos für elektrische Felder von solcher Stärke, daß ihre Aufspaltung groß ist gegenüber den Komponentenabständen der ursprünglichen Feinstruktur. Gegenüber solchen „starken Feldern" verhalten sich die Wasserstofflinien wie einfache Linien. Dagegen muß sich bei „schwachen" Feldern, deren Aufspaltung kleiner ist als die Feinstruktur, die letztere bemerklich machen.

Zusatz bei der Korrektur. Eine ganz elementare Betrachtung bestätigt die Ergebnisse der allgemeinen Behandlung des Zeeman-Effektes und gestattet einen Einblick in den Ursprung der magnetischen Aufspaltung.

Wir beschränken uns auf Kreisbahnen in der Ebene senkrecht zum Felde H. a sei der Radius des Kreises, w die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons. Die magnetische Energie des unserer Kreisbahn äquivalenten Elementarmagneten im magnetischen Felde ist

$$W_m = H \frac{a^2 w}{2} \frac{e}{c}.$$

Mit Rücksicht auf die Quantenbedingung $m a^2 w = \frac{nh}{2\pi}$ und die frühere Abkürzung $f = \frac{e}{m}\frac{H}{c}$ wird dieses

$$W_m = \frac{f}{4\pi} nh.$$

Rechnet man andererseits die kinetische und potentielle elektrische Energie aus, auf Grund

derselben Quantenbedingung und der durch das Feld abgeänderten dynamischen Bedingung, so ergibt sich als Summe beider bis auf Glieder mit f^2 derselbe Wert wie ohne Feld. Daraus erkennt man:

Die magnetische Aufspaltung rührt von der magnetischen Energie W_m her (paramagnetischer Effekt). Die Änderung der Kreisbahn durch das Feld ruft nur eine Korrektion zweiter Ordnung hervor (einen diamagnetischen Effekt). Die frühere Rechnung, bei welcher in der Differentialgleichung das Glied mit f^2 vernachlässigt wurde, ist exakt in dem Gliede erster Ordnung. Dasselbe gilt auch im relativistischen Falle. Die am Ende von § 8 ins Auge gefaßte Möglichkeit, daß das Auftreten überzähliger Linien und der Widerspruch gegen den Paschen-Back-Effekt von der ungenauen Integration der partiellen Differentialgleichung herrühren möchte, ist daher fallen zu lassen.

(Eingegangen 7. September 1916.)

Quantenhypothese und Zeeman-Effekt[1]).

Von P. Debye.

Nachdem durch die kurzen Andeutungen von P. Epstein[2]) und insbesondere durch die schöne Arbeit von K. Schwarzschild[3]) sichergestellt ist, daß die Verknüpfung von Quantentheorie und Bohrschem Modell eine Erklärung des Stark-Effekts liefert, sehen wir uns in Hinsicht auf den um Vieles älteren Zeeman-Effekt einer sehr unbefriedigenden Sachlage gegenübergestellt. Tatsächlich haben ja quasielastisch schwingende Elektronen als Energiequellen für die Serienlinien in den Bohrschen Ansätzen keinen Platz mehr und doch operieren alle bis jetzt erfolgreichen Theorien des Zeeman-Effekts von H. A. Lorentz bis W. Voigt mit diesem Bilde. Im Folgenden möchte ich einige Überlegungen vorbringen, welche den Anschluß des Zeeman-Effekts an die Quantentheorie anbahnen sollen.

§ 1. Die Grundlagen des Quantenansatzes.

Zunächst wollen wir in diesem Paragraphen versuchen, in engem Anschluß an Schwarzschild den Quantenansatz auf eine möglichst durchsichtige Form zu bringen und von allen unnötigen Zutaten zu befreien[4]).

Zugrunde gelegt sei ein „bedingt periodisches" System, so definiert wie das z. B. bei L. Charlier geschieht[1]).

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für S sei also gelöst und man habe gefunden, daß S sich in der Form

$$S = X_1 + \cdots + X_i + \cdots + X_n - a_1 t \quad (1)$$

darstellen läßt, wobei $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Variabelen bedeuten und X_1 nur Funktion von x_1, X_2 nur Funktion von x_2, usw. sind.

Das ist die erste Forderung, die an ein bedingt periodisches System gestellt wird.

Die zweite Forderung lautet mathematisch eingekleidet: die Funktionen X erscheinen als Integrale, welche die Eigenschaft besitzen, das ihre obere Grenze eine periodische Funktion des Integralwerts ist. Ein Integral von der Form

$$X = \int^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

wäre ein einfaches Beispiel für ein solches Verhalten, da mit stetig zunehmendem X die obere Grenze x zwischen den Werten $-a$ und $+a$ hin- und herpendelt. Gleich von vornherein möge bemerkt werden (mit Rücksicht auf die Beschränkung, welche den Systemen durch die obigen Forderungen auferlegt werden), daß alle Systeme, auf welche bis jetzt die Quantentheorie angewendet wurde, bedingt periodische sind.

Bekanntlich ist die Aufgabe die Bewegung des Systems zu finden durch (1) völlig gelöst, wenn dieser Ausdruck so viele beliebige Integrationskonstanten α enthält, als das System Freiheitsgrade besitzt. Die Bewegungsgleichungen bekommt man, indem man nach jedem α partiell differenziert und das Resultat einer zweiten Reihe beliebiger Konstanten β gleichsetzt, in der Form

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},\ \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2},\ \ldots,\ \beta_n = \frac{\partial S}{\partial \alpha_n}$$

für ein System von n Freiheitsgraden. Dabei ist die Anzahl Freiheitsgrade so definiert, daß einem linearen Oszillator z. B. ein Freiheitsgrad zuerkannt wird.

In der Mechanik nun wird bewiesen, daß man die zu den Koordinaten $x_1, \ldots x_i, \ldots x_n$ gehörigen Impulse $\xi_1, \ldots \xi_i, \ldots \xi_n$ bekommt, indem S partiell nach x differenziert wird, so daß

$$\xi_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1},\ \ldots\ \xi_i = \frac{\partial S}{\partial x_i},\ \ldots\ \xi_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}.$$

1) Nach einer am 3. Juni 1916 der Göttinger Ges. d. Wiss. vorgelegten Notiz.
2) Diese Zeitschr. 17, 148, 1916.
3) Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1916, S. 548.
4) In der ausführlichen Bearbeitung (Ann. d. Phys. 50, 489, 1916) seiner oben zitierten Notiz hat inzwischen P. Epstein dieselben Prinzipien, welche hier befürwortet werden, zur Grundlage seiner Theorie gemacht.

1) C. V. L. Charlier, Mechanik des Himmels I; Leipzig 1902, S. 97.

In dem durch (1) dargestellten Falle wird also:

$$\xi_1 = \frac{dX_1}{dx_1}, \ldots \xi_i = \frac{dX_i}{dx_i}, \ldots \xi_n = \frac{dX_n}{dx_n}, \quad (2)$$

oder anders ausgedrückt

$$X_1 = \int^{x_1} \xi_1 dx_1, \ldots X_i = \int^{x_i} \xi_i dx_i, \ldots X_n = \int^{x_n} \xi_n dx_n. \quad (2')$$

Nach dieser Bemerkung ist die Einführung der Quantenhypothese in Analogie mit dem bei einem System von einem Freiheitsgrad befürworteten Verfahren unmittelbar möglich.

In diesem Spezialfalle nämlich hat man in der Koordinaten-Impuls-Ebene die Bahnkurve zu zeichnen, welche hier durch den Energiesatz ohne weiteres gegeben ist. Die quantentheoretisch möglichen Bahnen sollen dann diejenigen sein, deren Flächeninhalt ein ganzzahliges Vielfaches von h ist. Da aber dieser Flächeninhalt durch das Integral

$$\int \xi dx$$

dargestellt wird, so sieht man, daß die Analogie konsequent durchgeführt wird, wenn wir von jedem der Integrale (2') verlangen, daß es einem ganzzahligen Vielfachen von h gleichzusetzen ist, um die Quantenbahnen zu definieren[1]). Dem Umstande entsprechend, daß beim einfachen System die Integration über die geschlossene Bahnkurve zu erstrecken ist, wird man dabei im allgemeinen Falle zu verlangen haben, daß jedes der Integrale von (2') über eine ganze Periode zu nehmen ist.

So kommt man zusammenfassend zu folgender Formulierung des Quantenansatzes:

Hat man für ein bedingt periodisches System bei Einführung passend gewählter Variabelen die Hauptfunktion in der Form

$$S = X_1 + \cdots + X_i + \cdots + X_n - \alpha_1 t \quad (3)$$

bestimmt, dann sind quantentheoretisch nur solche Bewegungen möglich, für die

$$X_1^0 = m_1 h, \ldots X_i^0 = m_i h, \ldots X_n^0 = m_n h, \quad (4)$$

wobei $X_1^0, \ldots X_i^0, \ldots X_n^0$ die Werte bedeuten, welche die Funktionen $X_1, \ldots X_i, \ldots X_n$ aus (4) annehmen, wenn die Integration über eine ganze Periode erstreckt wird und $m_1, \ldots m_i, \ldots m_n$ ganze Zahlen sind.

In dieser Form wollen wir das Prinzip im Folgenden verwenden. Dabei stellen wir uns insofern auf einen anderen Standpunkt als Schwarzschild, als wir völlig absehen von einer nachträglichen Untersuchung, ob zwischen den Perioden, welche in den Bewegungsgleichungen auftreten (die man durch Differentiation nach den Konstanten α erhält), lineare Nullbeziehungen mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen. Damit kommt die z. B. beim Resonator aus der Berücksichtigung jener Relationen folgende Trennung eines Resonators mit mathematisch gleichen Frequenzen von einem solchen mit beliebig wenig voneinander verschiedenen von selbst in Wegfall.

1) Vgl. für die Formulierung bei einem System von einem Freiheitsgrad P. Debye in „Vorträge über die kinetische Theorie der Materie", Teubner 1913, S. 27.

§ 2. Die partielle Differentialgleichung für die Hauptfunktion bei Anwesenheit eines Magnetfeldes.

Wir denken uns einen Kern von der Ladung E, um den ein Elektron von der Ladung ε sich bewegt, während zu gleicher Zeit in der z-Richtung eines rechtwinkeligen x, y, z-Koordinatensystems das homogene Magnetfeld von der Stärke H wirkt.

Eine erste Schwierigkeit tritt dadurch in Erscheinung, daß das Vorhandensein des Magnetfeldes zur Folge hat, daß das Problem zunächst aus dem Rahmen der gewöhnlichen mechanischen Probleme heraustritt. Tatsächlich ist die Hamiltonsche Funktion jetzt nicht wie gewöhnlich gleich der Differenz von kinetischer und potentieller Energie: $T-U$. Man überzeugt sich aber leicht, daß das Hamiltonsche Variationsprinzip zu den richtigen Bewegungsgleichungen führt, wenn zu $T-U$ noch das skalare Produkt

$$\frac{\varepsilon}{2c}(\mathfrak{H}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}])$$

ergänzend hinzugefügt wird, wobei $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{r}$ den als Vektor aufgefaßten Fahrstrahl von irgendeinem Aufpunkt aus zum Elektron hingezogen, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Danach wird also im vorliegenden Falle die Lagrangesche Funktion

$$L = T - U + \frac{\varepsilon \mathrm{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (5)$$

Man zeigt nun mittels der aus der Mechanik bekannten Überlegungen, daß man an Stelle des Hamiltonschen Variationsprinzips

$$\delta \int L\,dt = 0$$

auch hier zu einer partiellen Differentialgleichung für die Hauptfunktion

$$S = \int_{t_0}^{t} L\,dt$$

(als Funktion von t, Anfangslagen und Endlagen des Systems) kommen kann. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial S}{dt} + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial S}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial S}{\partial z} = L, \quad (6)$$

die dadurch zu einer partiellen Differentialgleichung für

$$S = S(x, y, z, t)$$

wird, daß man die Beziehungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial S}{\partial z} \tag{7}$$

benutzt, um $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ durch die partiellen Differentialquotienten von S zu ersetzen. Setzt man die kinetische Energie

$$T = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

wobei μ die Masse des Elektrons ist, dann wird (6)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{\varepsilon H}{2\mu c}\left(y\frac{\partial S}{\partial x} - x\frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon^2 H^2}{8\mu c^2}(x^2 + y^2) + U = 0, \tag{6'}$$

da nach (7) die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x} - \frac{\varepsilon H}{2c}y &= \frac{\partial S}{\partial x}, \\ \mu\dot{y} + \frac{\varepsilon H}{2c}x &= \frac{\partial S}{\partial y}, \\ \mu\dot{z} &= \frac{\partial S}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ, φ und nach Einsetzen des Wertes $\frac{\varepsilon E}{r}$ für U, kommt statt (6'):

$$\frac{\partial S}{dt} + \frac{1}{2}\mu\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} - \omega\frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta + \frac{\varepsilon E}{r} = 0, \tag{8}$$

wenn wir die Größe $\frac{\varepsilon H}{2\mu c}$ von der Dimension einer Winkelgeschwindigkeit abkürzend mit ω bezeichnen.

Gelingt es diese Differentialgleichung in der in § 1 besprochenen Form zu lösen, dann halten wir uns für berechtigt auf diese Lösung den am Ende desselben Paragraphen formulierten Quantenansatz zur Auswahl der wirklichen physikalischen Bewegungen bei Anwesenheit eines Magnetfeldes anzuwenden.

So kommt ein Vorteil der obigen Formulierung gleich zur Geltung, der darin besteht, daß der Ansatz nicht auf rein mechanische Systeme beschränkt ist, sondern stets dann anwendbar ist, wenn die Lösung des Problems auf die Diskussion einer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung zurückführbar ist. Diese Forderung aber ist stets dann erfüllt, wenn die Bewegungsgleichungen aus einem Hamiltonschen Variationsprinzip gefolgert werden können.

§ 3. Darstellung der Hauptfunktion.

Zunächst bemerken wir, daß es wegen der Kleinheit des Zeeman-Effekts offenbar möglich ist, das Glied mit ω^2 in (8) zu vernachlässigen. Allerdings würden, wie man leicht im Anschluß an das Folgende überlegt, Beobachtungen über zusätzliche Wirkungen proportional H^2 von besonderer Bedeutung für die Prüfung der Grundlagen sein. Wenn nun auch das einzige auf das Magnetfeld bezügliche Glied sich auf $-\omega\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ reduziert hat, so ist doch eine Zerlegung von S in eine Summe von Funktionen der Einzelvariabelen nicht ohne weiteres möglich. Macht man aber die Substitution

$$\left.\begin{aligned} t' &= t, \\ r' &= r, \\ \vartheta' &= \vartheta, \\ \varphi' &= \varphi + \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dann kommt statt (8):

$$\frac{\partial S}{\partial t'} + \frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right)^2 + \frac{1}{r'^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta'}\right)^2 + \frac{1}{r'^2 \sin^2\vartheta'}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi'}\right)^2\right\} + \frac{\varepsilon E}{r'} = 0 \tag{8'}$$

und diese Gleichung läßt eine solche Zerlegung ohne weiteres zu. Tatsächlich ist (8') genau die bekannte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Elektronenbewegung ohne Magnetfeld; die Substitution (9) beweist somit nur aufs neue die bekannte Tatsache, daß die Wirkung eines Magnetfeldes in erster Näherung besteht aus dem Hinzufügen einer Rotation der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ um die Feldrichtung als Achse.

Setzt man nunmehr

$$S = R' + \Theta' + \Phi' - \alpha'_1 t', \tag{10}$$

wobei R' nur von r', Θ' nur von ϑ' und Φ' nur von φ' abhängt, dann folgen für diese Funktionen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} r'^2\left(\frac{dR'}{dr'}\right)^2 + 2\mu\varepsilon E r' - 2\mu\alpha'_1 r'^2 &= -\alpha'^2_2, \\ \sin^2\vartheta'\left(\frac{d\Theta'}{d\vartheta'}\right)^2 - \alpha'^2_2 \sin^2\vartheta' &= -\alpha'^2_3, \\ \left(\frac{d\Phi'}{d\varphi'}\right)^2 &= \alpha'^2_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Größen α'_1, α'_2, α'_3 bedeuten die drei nötigen, willkürlichen Integrationskonstanten.

Die Gleichungen (11) lösen sich ohne weiteres und ergeben:

$$\left.\begin{aligned} R' &= \int\frac{dr'}{r'}\sqrt{2\mu\alpha'_1 r'^2 - 2\mu\varepsilon E r' - \alpha'^2_2}, \\ \Theta' &= \int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta'}\sqrt{\alpha'^2_2 \sin^2\vartheta' - \alpha'^2_3}, \\ \Phi' &= \alpha'_3\int d\varphi'. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Bewegung ist bedingt periodisch im Sinne der Ausführungen in § 1. Der Zentralabstand r' kann sich nur zwischen zwei, zu den beiden Nullwerten des in R' unter der Wurzel vorkommenden quadratischen Ausdrucks gehörigen Abständen, bewegen, der Polabstand ϑ' liegt ebenfalls zwischen $\arcsin\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}$ und $\pi - \arcsin\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}$, nur der Winkel φ ist formal nicht begrenzt. Tatsächlich aber ist die Begrenzung auf das Intervall $0-2\pi$ gegeben, da ja die Lagen φ und $\varphi+2\pi$ physikalisch gleichwertig sind.

Kehren wir jetzt zu unseren ursprünglichen Variabelen r, ϑ, φ mittels (9) zurück und nennen die statt R', Θ', Φ' auftretenden Funktionen nun R, Θ, Φ, dann wird

$$S = R + \Theta + \Phi - (\alpha'_1 - \alpha'_3\,\omega)\,t, \qquad (13)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} R &= \int \frac{dr}{r}\sqrt{2\mu\alpha'_1 r^2 - 2\mu\varepsilon E r - \alpha'^2_2}, \\ \Theta &= \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{\alpha'^2_2\sin^2\vartheta - \alpha'^2_3}, \\ \Phi &= \alpha'_3 \int d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

Mit Rücksicht auf das Folgende fassen wir schließlich noch die Integrationskonstanten anders zusammen, und zwar sei gesetzt:

$$\alpha_1 = \alpha'_1 - \omega\alpha'_3,$$
$$\alpha_2 = \alpha'_2,$$
$$\alpha_3 = \alpha'_3,$$

dann wird

$$S = R + \Theta + \Phi - \alpha_1 t, \qquad (14)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} R &= \int \frac{dr}{r}\sqrt{2\mu(\alpha_1+\omega\alpha_3)r^2 - 2\mu\varepsilon E r - \alpha_2^2}, \\ \Theta &= \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{\alpha_2^2\sin^2\vartheta - \alpha_3^2}, \\ \Phi &= \alpha_3 \int d\varphi. \end{aligned}\right| \qquad (14')$$

§ 4. Der Quantenansatz und seine unmittelbaren Folgen.

Nach der in § 1 gegebenen Vorschrift haben wir R^0, Θ^0, Φ^0 zu bestimmen, d. h. diejenigen Werte der in (14') vorkommenden Integrale zu berechnen für den Fall, daß dieselben über eine ganze Periode erstreckt werden.

Schreibt man

$$R^0 = 2\sqrt{-2\mu(\alpha_1+\omega\alpha_3)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)},$$

wobei r_1 und r_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$r^2 - \frac{\varepsilon E}{\alpha_1+\omega\alpha_3}\,r - \frac{\alpha_2^2}{2\mu(\alpha_1+\omega\alpha_3)} = 0$$

bedeuten, dann wird

$$r_1 = \frac{\varepsilon E}{2(\alpha_1+\omega\alpha_3)}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2(\alpha_1+\omega\alpha_3)\alpha_2^2}{\mu\varepsilon^2 E^2}}\right],$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon E}{2(\alpha_1+\omega\alpha_3)}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(\alpha_1+\omega\alpha_3)\alpha_2^2}{\mu\varepsilon^2 E^2}}\right].$$

Nach bekannten Formeln wird andererseits

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)} = \pi\left[\frac{r_1+r_2}{2} - \sqrt{r_1 r_2}\right],$$

so daß für R^0 der Wert resultiert:

$$R^0 = 2\pi\left[\sqrt{\frac{\mu\varepsilon^2 E^2}{-2(\alpha_1+\omega\alpha_3)}} - \alpha_2\right]. \qquad (15)$$

Ebenso findet man für

$$\Theta^0 = 2\int_{\vartheta=\arcsin\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}^{\vartheta=\pi-\arcsin\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{\alpha_2^2\sin^2\vartheta - \alpha_3^2}$$

den Wert

$$\Theta^0 = 2\pi(\alpha_2 - \alpha_3), \qquad (15')$$

während

$$\Phi^0 = 2\pi\alpha_3 \qquad (15'')$$

wird.

Nach § 1 lauten also die Quantenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu\varepsilon^2 E^2}{-2(\alpha_1+\omega\alpha_3)}} - \alpha_2 &= m_1\frac{h}{2\pi}, \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= m_2\frac{h}{2\pi}, \\ \alpha_3 &= m_3\frac{h}{2\pi}. \end{aligned}\right| \qquad (16)$$

Für die weitere Verwertung dieser Ansätze ist die Kenntnis der Energie notwendig, welche zu der entsprechenden Bewegung gehört. Nun beweist man aber auch an unsrer Funktion S, ebenso wie in der gewöhnlichen Mechanik, daß wenn S in der Form

$$S = f - \alpha_1 t$$

dargestellt ist, wobei f nur Funktion der Lagenkoordinaten ist, die Integrationskonstante α_1 gleich der gesuchten Energie ist. Die Berechnung derselben läuft also darauf hinaus, aus den drei Gleichungen (16) die Größen α_2 und α_3 zu eliminieren. Führt man das aus, dann ergibt sich

$$-\alpha_1 = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^2 E^2}{h^2}\,\frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^2} + m_3 h\frac{\omega}{2\pi}. \qquad (17)$$

§ 5. Die nach dem Quantenansatz möglichen Frequenzen.

Betrachtet man den Übergang von einer durch die drei ganzen Zahlen m_1, m_2, m_3 charakterisierten Bahn zu einer anderen, welche durch

m'_1, m'_2, m'_3 charakterisiert sein möge und setzt nach Bohr zur Bestimmung der ausgesandten Schwingungszahl ν für die Differenz dieser Energien $h\nu$, dann erhält man

$$\nu = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^2 E^2}{h^2}\left[\frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^2} - \frac{1}{(m'_1+m'_2+m'_3)^2}\right] + (m_3 - m'_3)\frac{\omega}{2\pi}. \quad (18)$$

Zunächst ist es vorteilhaft, die ganzen Zahlen m_1, m_2, m_3 durch andere zu ersetzen. Setzt man nämlich vorübergehend in (14'): $\omega = 0$ (d. h. man geht zum feldlosen Fall über), dann folgen aus (14) und (14') nach allgemeinen Formeln für die zu ϑ und φ gehörigen Impulse $\overline{\vartheta}$ und $\overline{\varphi}$ die Werte

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varphi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \alpha_3, \\ \overline{\vartheta} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\vartheta}}.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Andererseits hat das Impulsmoment $\mathfrak{M} = \mu[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$ des kreisenden Elektrons in r, ϑ, φ-Richtung die Komponenten

$$0, \quad -\frac{\overline{\varphi}}{\sin\vartheta}, \quad \overline{\vartheta},$$

da ja allgemein

$$\overline{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \mu r^2 \dot{\vartheta}, \quad \overline{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}.$$

Für $\mathfrak{M}^2$ berechnet man also mit Rücksicht auf (19):

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{\overline{\varphi}^2}{\sin^2\vartheta} + \overline{\vartheta}^2 = \alpha_2^2. \quad (20)$$

Nach (16) ist aber

$$\alpha_2 = (m_2 + m_3)\frac{h}{2\pi},$$

so daß wir nach (20) für das Impulsmoment senkrecht zur Ebene der Planetenbewegung den Wert finden

$$\mathfrak{M} = a_2 = (m_2 - m_3)\frac{h}{2\pi}. \quad (21)$$

Mit Rücksicht auf die physikalische Bedeutung von $\mathfrak{M}$ führen wir an Stelle von m_1, m_2, m_3 neue ganze Zahlen n_1, n_2, n_3 ein durch den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}n_1 &= m_1, \\ n_2 &= m_2 + m_3, \\ n_3 &= m_3.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die Formel für die ausgesandten Frequenzen wird dann

$$\nu = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^2 E^2}{h^3}\left[\frac{1}{(n_1+n_2)^2} - \frac{1}{(n'_1+n'_2)^2}\right] + (n_3 - n'_3)\frac{\omega}{2\pi}. \quad (23)$$

Das erste Glied der Formel entspricht nun sowohl in seinem Bau wie auch in seiner Bedeutung genau dem Resultat der Sommerfeldschen Überlegung[1]). In der Bahnebene sind alle durch die ganzen Zahlen n_1 ihrer Exzentrizität nach charakterisierten Ellipsen mit allen durch die ganzen Zahlen n_2 charakterisierten Flächengeschwindigkeiten verknüpft, möglich. Das erste Glied entspricht also z. B. bei Wasserstoff, wo $E = \varepsilon$ ist, allen Serien, von denen die Balmersche ein Spezialfall $(n_1 + n_2 = 2)$ ist.

Zu diesen Linien kommen nun durch die Wirkung des Magnetfeldes neue hinzu, welche aus den unbeeinflußten durch Verschiebungen hervorgehen, welche ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\omega}{2\pi}$ gleich sind.

Die Frequenz

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\varepsilon H}{4\pi\mu c}$$

entspricht aber genau der normalen Aufspaltung beim Zeeman-Effekt. Derselbe erscheint also hier als Folge des allgemeinen Quantenansatzes in richtiger Größe. Das gewöhnliche Triplet entsteht, wenn man für n_3 und n'_3 nur die kleinsten ganzen Zahlen 0 und 1 zuläßt. Da weiterhin n_3 und n'_3 gänzlich unabhängig von der Wahl bezüglich n_1, n_2, n'_1 und n'_2 sind, so kann man (23) dahin deuten, daß der Zeeman-Effekt für alle Serienglieder denselben Wert hat.

Wenn ich nun das Obige zugunsten der Quantenüberlegungen buche, so muß ich andererseits hervorheben, daß die Theorie nicht vorhersehen läßt, warum man sich auf die Zahlen 0, 1 zu beschränken hat, wie es doch allem Anschein nach in Wirklichkeit der Fall ist. Auch bleiben hier, ebenso wie beim Stark-Effekt, die Polarisationsverhältnisse zunächst unberücksichtigt. Zwar würde es nicht schwer fallen dieselben nachträglich an Hand der Beobachtung mit den geometrischen Eigenschaften der stattfindenden Elektronenbewegung zu verknüpfen. Aber das ist meines Erachtens nur ein Notbehelf. Es scheint, daß ein wesentlicher Fortschritt hier nur zu erreichen ist, indem man für den zweiten Bohrschen Ansatz $h\nu$ = Energiedifferenz einen detaillierteren Ersatz substituiert, was ja sowieso auf diesem Gebiete als vorderhand ungelöste Aufgabe an der Spitze steht[2]).

1) Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1915, S. 425.

2) Die detailliertere Fassung muß sich indessen der Forderung, daß die Energiedifferenz genau gleich $h\nu$ zu setzen ist, stets unterordnen. Das scheint mir durch die Einsteinschen Überlegungen (Verhandl. d. D. Phys. Ges. 1916, S. 318) bewiesen zu sein.

Trotzdem scheint mir auch beim Zeeman-Effekt die an das Bohrsche Modell quantentheoretisch anknüpfende Überlegung den Vorzug zu verdienen, weil es nur so gelingt, gleichzeitig Zeeman-Effekt und Serienformel miteinander ursächlich zu verknüpfen.

Göttingen, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. September 1916.)

Die Feinstruktur wasserstoffähnlicher Spektren [1].

Von P. Debye.

Von Bohr rührt ein erster Versuch her die Veränderlichkeit der Elektronenmasse nutzbar zu machen bei der Erklärung der Struktur der Wasserstofflinien. Indessen ist es aber erst Sommerfeld [2]) kürzlich gelungen, eine weitgehende und befriedigende Theorie zu entwerfen, welche jenen Einfluß voll zur Geltung bringt.

Die Quantenansätze, welche Sommerfeld benutzt, sind nicht so durchsichtig, wie man das wünschen möchte. Andererseits gelingt es im Anschluß an die Schwarzschildsche Berechnung des Stark-Effektes ein Verfahren zu formulieren, das sehr allgemein ist und sehr wenig Willkür enthält. Es liegt nahe zu versuchen, zu welchen Resultaten das letztere Verfahren unter Einführung einer veränderlichen Elektronenmasse führt. Über einen solchen Versuch möchte ich im Folgenden berichten.

Es zeigt sich, daß es gelingt, eine geschlossene Formel für die Serienfrequenzen, auch unter Mitberücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse zu erhalten. Dieselbe ergibt ohne weiteres quantitativ richtige Resultate, z. B. bezüglich des Abstandes der H_α-Komponenten und damit nach Sommerfeld zugleich eine Berechnung beobachteter Linienabstände in den Röntgenserien [3]).

Der Vorteil der hier angewandten Prinzipien liegt besonders in der Zwangläufigkeit der darauf aufgebauten Rechnung. Auch die notwendige Rechenarbeit ist übrigens auf ein Mindestmaß zurückgeführt; sie geht nicht über das Maß hinaus, welches man bei angenommener Konstanz der Elektronenmasse aufzuwenden hat.

1) Nach einer am 24. Juni 1916 der Göttinger Ges. d. Wiss. vorgelegten Notiz.

2) Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1915, S. 425.

3) Sommerfeld, dem ich dieses Resultat mitteilte, schreibt mir in einem Briefe vom 21. Juni, daß die geschlossene Formel auch aus seinen Überlegungen folgt. Es genügt die Kombination einiger Gleichungen seiner eben zitierten Arbeit, sofern man die im Zusatz, S. 498, befürwortete Quantenforderung zugrunde legt.

§ 1. Die Differentialgleichung für die Hauptfunktion.

Bekanntlich ist es möglich, die Bewegungsgleichungen für das Elektron mit veränderlicher Masse aus einem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

abzuleiten[1]), wenn man die Lagrangesche Funktion L definiert durch die Gleichung:

$$L = -\mu c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) - U. \qquad (1)$$

Dabei ist μ die Ruhmasse und v die Geschwindigkeit des Elektrons, U ist seine potentielle Energie, während c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Immer dann aber, wenn ein solches Hamiltonsches Prinzip besteht, kann die Frage auch gelöst werden mittels einer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung für die Hauptfunktion

$$S = \int_{t_0}^{t} L\,dt,$$

wobei S in bekannter Weise als Funktion der Koordinatenwerte von Anfangslagen und Endlagen des Systems, sowie der Zeit zu betrachten ist. Für S findet man in üblicher Weise die Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x} + \cdots - L = 0, \qquad (2)$$

wobei $x, \ldots$ die Koordinaten, $\dot{x}, \ldots$ die zugehörigen Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \ldots$ bedeuten.

Die Beziehung (2) wird zu der gesuchten Differentialgleichung durch Hinzunahme der Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \ldots\ldots, \qquad (3)$$

welche dazu dienen, in (1) die Geschwindigkeiten zu ersetzen durch die partiellen Differentialquotienten der Hauptfunktion S nach den Koordinaten.

Im speziellen, vorliegenden Falle erhält man, wenn zunächst rechtwinkelige Koordinaten x, y, z eingeführt werden um die Lage des Elektrons zu bestimmen, mit Rücksicht auf (3) aus (1):

$$\dot{x}\frac{\partial S}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial S}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial S}{\partial z} = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

$$= \mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right),$$

1) Vgl. z. B. H. A. Lorentz in „Das Relativitätsprinzip", Teubner 1913, S. 83.

wenn man

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

setzt.

Die linke Seite von (2) wird also:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) + U. \qquad (4)$$

Andererseits folgt aus (3) und (1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu c}\frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\dot{x}/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \frac{1}{\mu c}\frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{\dot{y}/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \frac{1}{\mu c}\frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{\dot{z}/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right|$$

und hieraus durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\mu^2 c^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right\}.$$

Mittels dieser letzten Gleichung kann man die in (4) vorkommende „kinetische Energie" des Elektrons

$$\mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

in den Differentialquotienten von S ausdrücken und erhält so die gesuchte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mu c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{Q}{\mu^2 c^2}} - 1 \right) + U = 0, \qquad (5)$$

wobei Q eine Abkürzung ist für den quadratischen Differentialausdruck:

$$Q = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2. \qquad (5')$$

Ist eine Lösung S dieser Differentialgleichung (5) gefunden mit so vielen Integrationskonstanten, als das System Freiheitsgrade besitzt, dann ist damit in bekannter Weise die Bewegung des Elektrons bestimmt.

§ 2. Die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung.

Um den Kern mit der Ladung E bewege sich das Elektron mit der Ladung ε. Da, wie die Rechnungen im früheren Falle zeigen, keine neuen Besonderheiten auftreten, wenn man das Beliebige der Lage der Elektronenbahn im Raume durch Beibehaltung dreier Koordinaten mit berücksichtigt, führen wir in der Bahnebene Polarkoordinaten r, φ ein. Dann wird

$$Q = \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \qquad (6)$$

und

$$U = \frac{\varepsilon E}{r}.$$

Setzt man nun in (5)

$$S = V - \alpha_1 t,$$

wobei V nur von r und φ abhängt, dann nimmt jene Gleichung folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \mu c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{Q}{\mu^2 c^2}} - 1 \right) + \frac{\varepsilon E}{r} = \alpha_1 \\ \text{mit} \quad Q = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2. \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

Man berechne nun zunächst aus der ersten Gleichung (7) den Differentialausdruck Q selbst. Dafür erhält man

$$Q = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = \mu^2 c^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha_1 - \frac{\varepsilon E}{r}}{\mu c^2} \right)^2 - 1 \right]. \qquad (8)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nur von der Koordinate r abhängig, wir bezeichnen dieselbe vorübergehend mit ϱ, dann kommt statt (8):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = \varrho. \qquad (9)$$

Diese Gleichung aber kann sofort gelöst werden, indem man den Ansatz macht

$$V = R + \alpha_2 \varphi,$$

wobei R nur von r abhängt und α_2 eine neue Integrationskonstante bedeutet. Tut man das, dann muß R der Gleichung:

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = \varrho - \frac{\alpha_2^2}{r^2}$$

genügen und ergibt sich also zu

$$R = \int \frac{dr}{r} \sqrt{r^2 \varrho - \alpha_2^2}.$$

Das endgültige Resultat lautet demnach:

$$S = \int \frac{dr}{r} \sqrt{r^2 \varrho - \alpha_2^2} + \alpha_2 \int d\varphi - \alpha_1 t, \qquad (10)$$

mit der Abkürzung

$$\varrho = \mu^2 c^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha_1 - \frac{\varepsilon E}{r}}{\mu c^2} \right)^2 - 1 \right]. \qquad (10')$$

Aus dieser Darstellung sieht man sofort, daß der Bewegung des Elektrons auch jetzt

die Eigenschaften einer bedingt periodischen zukommen. Der in der Notiz über die Zeeman-Aufspaltung auseinandergesetzte Weg zur Einführung der Quanten ist demnach ohne weiteres anwendbar.

§ 3. Der Quantenansatz.

Nach dem zugrunde gelegten allgemeinen Prinzip lauten die Gleichungen für die Quantenauswahl:

$$\oint \frac{dr}{r}\sqrt{r^2\varrho-\alpha_2^2}=m_1 h,\quad \alpha_2\oint d\varphi=m_2 h. \qquad (11)$$

Dabei ist h das Wirkungsquantum, m_1 und m_2 sind ganze Zahlen. Der an die Integrale angehängte Kreis soll bedeuten, daß dieselben in Übereinstimmung mit der Vorschrift über eine ganze Periode zu erstrecken sind.

Beachtet man den Ausdruck (10') für ϱ, dann sieht man, daß unter dem Wurzelzeichen im ersten der Integrale (11) eine quadratische Funktion von r auftritt. Das ist auch bei der gewöhnlichen Planetenbahnberechnung der Fall, wo die Masse als konstant angesehen wird. Von dort können wir also alles ohne weiteres übertragen, wenn nur den Konstanten eine andere Bedeutung beigelegt wird.

Explicite wird:

$$r^2\varrho-\alpha_2^2=2\mu\alpha_1\left(1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}\right)r^2$$
$$-2\mu\varepsilon E\left(1+\frac{\alpha_1}{\mu c^2}\right)r-\alpha_2^2\left(1-\frac{\varepsilon^2E^2}{\alpha_2^2c^2}\right);$$

für das erste Integral in (11) nach r können wir also schreiben:

$$\oint \frac{dr}{r}\sqrt{r^2\varrho-\alpha_2^2}=2\sqrt{-2\mu\alpha_1\left(1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$
$$\sqrt{-\left(r^2-\frac{\varepsilon E}{\alpha_1}\frac{1+\frac{\alpha_1}{\mu c^2}}{1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}}r-\frac{\alpha_2^2}{2\mu\alpha_1}\frac{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{\alpha_2^2c^2}}{1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}}\right)}, \qquad (12)$$

wobei r_1 und r_2 die kleinere und die größere Wurzel des in der eckigen Klammer stehenden quadratischen Ausdruckes in r bedeuten. Schreiben wir für letzteren

$$(r-r_1)(r-r_2),$$

dann hat das gesuchte Integral die Form

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)}.$$

Ausgerechnet ergibt dasselbe:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)}=\pi\left[\frac{r_1+r_2}{2}-\sqrt{r_1r_2}\right].$$

Im vorliegenden Falle ist aber nach (12):

$$\left.\begin{aligned} r_1+r_2&=\frac{\varepsilon E}{\alpha_1}\frac{1+\frac{\alpha_1}{\mu c^2}}{1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}},\\ r_1r_2&=-\frac{\alpha_2^2}{2\mu\alpha_1}\frac{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{\alpha_2^2c^2}}{1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}},\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

da die Größen $-(r_1+r_2)$ und r_1r_2 die Koeffizienten des unter der Wurzel stehenden quadratischen Ausdrucks nach r bilden müssen.

Fassen wir das Obige zusammen, dann erhalten wir schließlich

$$\oint\frac{dr}{r}\sqrt{r^2\varrho-\alpha_2^2}=2\pi$$
$$\left\{\sqrt{-\frac{\mu\varepsilon^2E^2}{2\alpha_1}\frac{\left(1+\frac{\alpha_1}{\mu c^2}\right)^2}{1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}}}-\alpha_2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{\alpha_2^2c^2}}\right\};$$

nach der allgemeinen Vorschrift muß dieser Ausdruck gleich einer ganzen Zahl m_1 mal dem Wirkungsquantum h sein.

Der auf φ bezügliche Summand der Hauptfunktion erledigt sich sofort; man erhält dafür

$$\alpha_2\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\alpha_2.$$

Dieser Wert ist gleich einer ganzen Zahl m_2 mal h zu setzen.

Die Quantenvorschrift verlangt also schließlich, daß von allen zunächst möglichen Bahnen nur diejenigen wirklich vorkommen, für welche die Integrationskonstanten α_1 und α_2 durch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-\frac{\mu\varepsilon^2E^2}{2\alpha^1}\frac{\left(1+\frac{\alpha_1}{\mu c^2}\right)^2}{1+\frac{\alpha_1}{2\mu c^2}}}\\ &-\alpha_2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{\alpha_2^2c^2}}=m_1\frac{h}{2\pi},\\ &\alpha_2=m_2\frac{h}{2\pi}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

bestimmt sind.

§ 4. Die Serienformel.

Aus der Form (10) der Hauptfunktion S folgt, wie in der gewöhnlichen Mechanik, daß

α_1 die Gesamtenergie der Bewegung darstellt. Durch Elimination von α_2 in (14) erhält man zunächst:

$$\frac{\mu\varepsilon^2 E^2}{-2\alpha_1}\,\frac{\left(1-\frac{-\alpha_1}{\mu c^2}\right)^2}{1-\frac{-\alpha_1}{2\mu c^2}}=\frac{h^2}{4\pi^2}M^2,$$

wenn M eine Abkürzung ist für

$$M=m_1+\sqrt{m_2^2-\frac{4\pi\varepsilon^2E^2}{h^2c^2}}\,.$$

Wir setzen jetzt noch

$$E=z\varepsilon,$$

dann ist z gleich der Zahl der elementaren Kernladungen. Für den unter der Wurzel vorkommenden Ausdruck $\frac{4\pi^2\varepsilon^2E^2}{h^2c^2}$ kann dann geschrieben werden

$$\frac{4\pi^2\varepsilon^2E^2}{h^2c^2}=z^2\,\frac{2h}{\mu c^2}\,\frac{2\pi^2\mu\varepsilon^4}{h^3}\,.$$

Der Faktor $\frac{2\pi^2\mu\varepsilon^4}{h^3}$ ist aber die Rydbergsche Schwingungszahl, welche wir mit R bezeichnen wollen und welche den Wert $3,29\cdot 10^{15}\frac{1}{\text{sec}}$ hat, entsprechend der gewöhnlich angegebenen Wellenzahl 109675. Dann wird

$$M=m_1+\sqrt{m_2^2-z^2\frac{2hR}{\mu c^2}} \qquad (15)$$

und man sieht, wie die quantenmäßig bestimmte zur Rydbergschen Schwingungszahl R gehörige Energie hR in Wettbewerb tritt mit der für das Elektron charakteristischen Energie $\frac{\mu}{2}c^2$.

Auch die Bewegungsenergie $-\alpha_1$ wollen wir mit $\frac{\mu}{2}c^2$ vergleichen und dementsprechend das Verhältnis $\frac{-2\alpha_1}{\mu c^2}$ als gesucht ansehen. Dafür findet man dann die quadratische Gleichung:

$$\frac{1}{(-2\alpha_1/\mu c^2)}\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}\frac{-2\alpha_1}{\mu c^2}\right)^2}{1-\frac{1}{4}\frac{-2\alpha_1}{\mu c^2}}=\frac{M^2}{z^2\frac{2hR}{\mu c^2}}\,. \qquad (16)$$

Aufgelöst ergibt dieselbe

$$-\frac{2\alpha_1}{\mu c^2}=2\left\{1\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{M^2}\frac{3hR}{\mu c^2}}}\right\}. \qquad (17)$$

Zeichnet man nun eine Bewegung aus durch die ganzen Zahlen m_1, m_2 und definiert dazu das zugehörige M durch (15), während eine zweite Bewegung charakterisiert wird durch die ganzen Zahlen m'_1 m'_2, bzw. durch ein analog wie in (15) definiertes M', dann liefert der zweite Bohrsche Ansatz für die ausgestrahlte Schwingungszahl ν, nach (17) sofort das Resultat

$$-\frac{h\nu}{\mu c^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2hR}{\mu c^2}\frac{z^2}{M^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2hR}{\mu c^2}\frac{z^2}{M'^2}}}\,, \qquad (18)$$

wobei also

$$\left.\begin{aligned} M&=m_1+\sqrt{m_2^2-\frac{2hR}{\mu c^2}z^2},\\ M'&=m'_1+\sqrt{m'^2_2-\frac{2hR}{\mu c^2}z^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (18')$$

Die Gleichungen (18) und (18′) stellen die genaue Serienformel dar mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse.

§ 5. Entwicklung. Abstand der H_α-Komponenten.

Die Größe $\frac{2hR}{\mu c^2}\frac{z^2}{M^2}$ ist eine kleine Zahl; in den allermeisten Fällen genügt deshalb eine Entwicklung nach Potenzen derselben.

In erster Näherung findet man

$$\frac{\nu}{z^2R}=\frac{1}{(m_1+m_2)^2}-\frac{1}{(m'_1+m'_2)^2}, \qquad (19)$$

d. h. die der Balmerschen Serie entsprechende Formel, wie sie bei Vernachlässigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse nach Sommerfeld geschrieben werden soll.

In zweiter Näherung kommt

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{z^2R}=&\left[\frac{1}{(m_1+m_2)^2}\left(1-\frac{3}{2}z^2\frac{hR}{\mu c^2}\frac{1}{(m_1+m_2)^2}\right)\right.\\ &\left.-\frac{1}{(m'_1+m'_2)^2}\left(1-\frac{3}{2}z^2\frac{hR}{\mu c^2}\frac{1}{(m'_1+m'_2)^2}\right)\right]\\ &+2z^2\frac{hR}{\mu c^2}\left\{\frac{1}{m_2(m_1+m_2)^3}-\frac{1}{m'_2(m'_1+m'_2)^3}\right\}.\end{aligned} \qquad (19')$$

Die eckige Klammer allein ergibt ideelle Spektrallinien, welche den gewöhnlichen Linien der Balmerschen Formel entsprechen, sofern zu ihrer Darstellung nur die Summen m_1+m_2 und $m'_1+m'_2$ als ganze maßgebend sind, die allerdings aber durch die Wirkung der veränderlichen Elektronenmasse bei größeren Werten von z gegenüber der nach der ersten Näherung (19) berechneten Lage merklich nach Rot verschoben sind. Um diese ideellen Linien gruppieren sich die wirklichen Komponenten nach Maßgabe der in m_1+m_2 und $m'_1+m'_2$, ent-

haltenen Zahlen m_2 und m'_2, welche die Quantenzahlen des Impulsmomentes messen.

Die Diskussion der Komponentengruppierung würde gegenüber den Sommerfeldschen Betrachtungen nichts Neues ergeben, sofern wir uns seiner erweiterten Einschränkung der zulässigen Zahlen m_1, m'_1 und m_2, m'_2 anschließen.

Die wesentlich interessante Frage ist die, ob der in (19') enthaltene Zahlenfaktor 2 vor dem Gliede mit der geschweiften Klammer der Wirklichkeit entspricht. Das ist nun tatsächlich der Fall. Bei H_α, d. h.

$$z = 1, \ m_1 + m_2 = 2, \ m'_1 + m'_2 = 3,$$

sind, sofern man sich auf positive Zahlen beschränkt, 6 Komponenten möglich. Von diesen scheidet Sommerfeld durch seine Einschränkung 2 aus, so daß 4 übrig bleiben. Unter diesen 4 sind aber 2 besonders ausgezeichnet dadurch, daß bei ihrer Entstehung die der r-Richtung zugehörigen Quantenzahlen unverändert bleiben. Eine Übersicht über die Möglichkeiten gibt die folgende Tabelle

$2 \rightarrow 1;\ 1 \rightarrow 1$	$2 \rightarrow 0;\ 1 \rightarrow 2$
$1 \rightarrow 1;\ 2 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0;\ 2 \rightarrow 2$
$0 \rightarrow 1;\ 3 \rightarrow 1$	$0 \rightarrow 0;\ 3 \rightarrow 2$

in der die auftretenden Quantenänderungen dargestellt sind. So stellt z. B. die erste Zahlenreihe $2 \rightarrow 1;\ 1 \rightarrow 1$ eine Komponente dar, bei deren Aussendung die der r-Richtung zugehörige Quantenzahl von 2 auf 1 fällt, während die der φ-Richtung zugehörige 1 erhalten bleibt.

Die oben genannten ausgezeichneten Linien sind nun

$$1 \rightarrow 1;\ 2 \rightarrow 1 \ \text{und} \ 0 \rightarrow 0;\ 3 \rightarrow 2,$$

explicite:

$$m'_1 = 1, \ m_1 = 1, \ m'_2 = 2, \ m_2 = 1$$

und

$$m'_1 = 0, \ m_1 = 0, \ m'_2 = 3, \ m_2 = 2.$$

Die Abstände von der ideellen H_α-Linie sind nach (19')

$$2 \frac{hR^2}{\mu c^2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{54}\right)$$

und

$$2 \frac{hR^2}{\mu c^2}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{81}\right).$$

Setzt man

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}, \quad R = 3{,}29 \cdot 10^{15},$$
$$\mu = 0{,}901 \cdot 10^{-27}, \quad c = 3 \cdot 10^{10},$$

dann ergibt sich ihr gegenseitiger Abstand $\Delta\nu$ in Schwingungszahlen zu

$$\Delta\nu = 0{,}973 \cdot 10^{10}.$$

Andererseits folgt aus der mittleren Wellenlänge von H_α (6563 A^0) und dem gemessenen Abstand von 0,14 A^0 die experimentelle Schwingungsstrahlendifferenz

$$\Delta\nu = 0{,}977 \cdot 10^{10},$$

bzw. mit dem von anderen Beobachtern gefundenen Abstand 0,132 A^0 statt 0,14 A^0:

$$\Delta\nu = 0{,}920 \cdot 10^{10}.$$

Die Übereinstimmung ist so gut, daß sie besonders mit Rücksicht auf ihren von Sommerfeld hervorgehobenen Wert bei der Übertragung auf die Röntgenspektren eine starke Stütze für die Richtigkeit der hier befürworteten allgemeinen Formulierung abgibt[1]). Man hat also offenbar den richtigen Quantenansatz für den allgemeinen Fall der bedingt periodischen Bewegungen erreicht, wesentlich im Sinne der von M. Planck geforderten „Struktur des Phasenraums"[2]).

1) Macht man den Versuch die Theorie des Zeeman-Effektes so wie in der Notiz vom 3. Juni durchzuführen, aber jetzt mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse, dann zerfällt jede der Komponenten, soweit ich sehe, regulär ohne einen Paschen-Back-Effekt zu zeigen. Man versteht dieses Resultat, wenn man bedenkt, daß die Aussendung der einzelnen Komponenten bei zeitlich verschiedenen physikalischen Prozessen vor sich geht, eine Koppelung also von vornherein nicht zu erwarten ist. Es darf indessen nicht unerwähnt bleiben, daß im Gegensatz zu diesem theoretischen Resultat P. Erochin in den Ann. d. Phys. **42**, 1054, 1913 aus seinen Beobachtungen auf die Existenz eines Paschen-Back-Effekts auch bei den Komponenten der Wasserstofflinien geschlossen hat.

2) Vgl. z. B. die Zusammenfassung der Planckschen Forderungen und Ansätze: Ann. d. Phys. **50**, 385, 1916.

Göttingen, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. September 1916.)

Bemerkung über die Umladung von Kanalstrahlen.

Von J. Koenigsberger.

Die Herren J. Franck und G. Hertz erwähnen in ihrer Abhandlung „Über Kinetik von Elektronen und Ionen in Gasen"[1]) daß die Erfahrungen über Umladung von Kanalstrahlen dafür zu sprechen scheinen, daß chemische Kräfte bei der Ionisation durch positive Ionen eine Rolle spielen. Auf Grund eigener Versuche bin ich bezüglich der Umladung früher[2]) zu der entgegengesetzten Ansicht gekommen.

1) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. **17**, 415, 1916.

2) Diese Zeitschr. **12**, 1090, 1911 u. Ann. d. Phys. **37**, 161, 1912.



Folgende Gründe sprechen gegen die Annahme einer elektrochemischen Affinitätswirkung bei der Umladung von Kanalstrahlen.

1. Der elektropositive Wasserstoff und der elektronegative Sauerstoff geben beide sowohl positive wie negative Atomkanalstrahlen, obgleich Wasserstoffatom mit negativer Ladung bisher elektrochemisch unbekannt, Sauerstoff mit positiver Ladung selten ist. Die Bedingungen, unter denen man negativen Sauerstoff und negativen Wasserstoff im Kanalstrahl erhält, sind nahezu dieselben.

2. Stickstoff, der chemisch keineswegs ausgeprägt elektropositiv sondern auch elektronegativ ist, erscheint im Gegensatz zu Wasserstoff in den Kanalstrahlen nur positiv geladen.

3. Das chemisch neutrale Helium ist nur in elektrisch-positivem und neutralem Zustande beobachtet worden.

4. Das elektronegative Jod lädt sich im Kanalstrahl leichter positiv als negativ. Man kann sogar leichter negativen H-Kanalstrahl als negativen J-Kanalstrahl erhalten.

5. Die Berechnung der Umladungs-Weglängen positiver und neutraler Kanalstrahlatome zeigte, daß ein spezifischer Unterschied zwischen H, He, O nicht besteht. Man kann ferner diese Weglängen in erster Annäherung gut durch eine Formel darstellen, die lediglich eine Funktion der Geschwindigkeit mit zwei für die drei Atome gleichen Konstanten ist.

Bei der Umladung der Kanalstrahlen sind also Stabilitätsbedingungen für das Rutherford-Bohrsche Atommodell maßgebend, die zum Teil anderer Art sind als die bei der chemischen Bindung zweier oder mehrerer Kerne.

Freiburg i. B., September 1916.

(Eingegangen 11. September 1916.)

BESPRECHUNGEN.

I. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung nach den Bedürfnissen der technischen Mechanik und Elektrizitätslehre. gr. 8⁰. XIV u. 386 S. mit 48 Textabbildungen. Stuttgart, Konrad Wittwer. 1916. Preis geh. M. 14.—, geb. M. 16.—.

Wenn man die Vektorrechnung nicht nur zum Lesen und Verstehen wissenschaftlicher Arbeiten kennen zu lernen wünscht, sondern sie sich wirklich zu eigen machen muß, um damit zu arbeiten, und zwar mit den Symbolen selbst, um ihres mathematisch-physikalischen Inhalts willen zu rechnen imstande sein will, dann empfindet man den Mangel eines geeigneten Lehrbuches. Denn will man sich den weitgehenden Anforderungen der Physik und Technik gemäß auch die „höheren" Methoden aneignen, so muß man wohl oder übel schon eine ganze Anzahl von Originalwerken lesen, in denen bekanntlich einmal die Darstellungen gänzlich verschieden sind und in denen auch das philosophische Moment zum Teil eine Rolle spielt, welche für ein Erwerben rechnerischer Fähigkeiten mehr hemmend als fördernd wirkt. Deshalb ist es dem jetzigen Stande dieser zwar sehr reizvollen Entwicklung der Methoden entsprechend zweckmäßig, zuerst ein — natürlich genügend umfassendes — Lehrbuch durchzuarbeiten und erst mit dieser Grundlage die Spezialwerke zu studieren. Ich glaube, daß viele Physiker nur deshalb nicht mit Vektoren arbeiten, weil sie kein geeignetes Lehrbuch fanden. — Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet ist das vorliegende, auf Veranlassung von Fritz Emde entstandene Lehrbuch von Spielrein, gerade das Richtige. —

Das anfängliche Ziel des Verfassers ist es gewesen, den Studierenden der Ingenieurwissenschaften eine Grundlage zu geben; indessen ist der Stoff weit über dieses Ziel ausgedehnt worden und es wird auch speziell für den Physiker als ein hervorragendes Mittel zur Einarbeitung bezeichnet werden müssen. Charakteristisch an dem Werke ist die Art, in der mit besonderem Lehrgeschicke der Leser zum Durcharbeiten des Stoffes gezwungen wird. Eine persönliche Gewandtheit in der Behandlung der Methoden ist unerläßlich — deshalb sind hier wichtige und schwierige Sätze, die man in anderen Büchern einfach vorgetragen findet, in die Form von Aufgaben gekleidet, deren Lösungen in besonderen, den drei Abschnitten, in die das Werk sich gliedert, folgenden Teilen gegeben werden. (Diese Lösungen machen etwa ein Viertel des gesamten Umfanges aus.) Der Verfasser hat es sich sehr angelegen sein lassen, durch saubere Ausdrucksweise dem Leser „unnötige" Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen und die Gedankenarbeit ganz dem Kern der Sache zukommen zu lassen. Gerade hier, wo die Bezeichnungen wegen der Neuheit und dem noch Entwickeltwerden der Methoden oft durchaus nicht einfach und selbstverständlich sind, ist es recht angenehm, diese „Äußerlichkeiten" mit taktvoller Sorgfalt behandelt zu finden.

Teil I, Vektoralgebra, zerfällt in „elementare Vektoroperationen", „besondere Vektoren" und „Bezeichnungen der Vektorrechnung". Aus Kapitel 1, dessen Schluß erst die Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten bringt, sei erwähnt der Paragraph über „inverse Operationen", in dem die Zerlegung eines Vektors in Komponenten nach vorgeschriebenen Richtungen behandelt wird, was für die späteren Rechnungen recht wertvoll ist. Man findet überhaupt in diesem Teile viele an sich einfache Dinge, die für die Anwendungen in Physik und Technik von Bedeutung sind. Dem Radiusvektor zum Beispiel wird besondere Aufmerksamkeit zuteil und in § 10, „Sprungflächen", sind Flächengradient, -divergenz und -rotor einer eingehenden Behandlung unterzogen. (Hierzu vgl. F. Emde, Zur



Vektorenrechnung, Archiv f. Math. u. Phys., III. Reihe, XXIV, 1. Heft.) Auch die komplexe Darstellung komplanarer Vektoren ist in Hinsicht auf Schwingungsprobleme ausführlich entwickelt. Durch die Aufgaben, bzw. Lösungen wird der Leser einesteils auf vieles aufmerksam gemacht, was sonst kaum erwähnt zu werden pflegt, andernteils zur Ableitung vielfach gebrauchter Formeln veranlaßt. Der zweite, der Vektoranalysis gewidmete Teil bringt zunächst die „Funktionen skalarer Veränderlicher“: die Differentiationen nach Skalaren und recht instruktive geometrische und kinematische Anwendungen. Bei den Funktionen mehrerer Variabeln ist einiges aus der Flächentheorie gegeben (z. B. geometrische Bedeutung der Funktionaldeterminante) und der Begriff der Flächen — speziell des „Hüllen“integrals entwickelt. — Ausgezeichnet ist das umfangreiche Kapitel über „Ortsfunktionen“. Die Art, wie hier die in Rede stehenden Operatoren nach allen Seiten durchgearbeitet und beleuchtet — „verdaut“ — werden, nicht zum wenigsten durch gute Aufgaben und Lösungen, wird manchen Physiker erfreuen. Vektorielle Ortsfunktionen, Richtungsableitungen, räumliche Ableitungen vektorieller Ortsfunktionen, Divergenz, Gaußscher Satz, dementsprechende hydrodynamische Betrachtungen, Linienintegral, Rotor, Stokesscher Satz, Hüllen- und Raumintegrale — das ist alles wie für den Physiker geschrieben! Erläuterungen und Aufgaben aus der Potential- und der Maxwellschen Theorie sind geschickt angebracht. Bei den zweiten Ableitungen wurden auch schiefwinklige Koordinaten berücksichtigt. Die „Aufgaben“ führen hier sehr in Mitte des Stoffes (z. B. die Greenschen Sätze). Flächendivergenz und -rotor werden hier nochmals als Ausartung räumlicher Ableitungen gewonnen. Im Abschnitt „Geometrie der Vektorfelder“ ist beachtenswert die Behandlung der Deformation des Integrationsgebiets von Linien-, Flächen- und Raumintegralen. Bei den Funktionen von Ort und Zeit erfährt das bewegte Koordinatensystem Beachtung. Es ist unmöglich, auf die Fülle des Gebotenen einzugehen (z. B. die geometrische Bedeutung bei Divergenz und Rotor, geometrische Eigenschaften des Laplaceschen Feldes). Hingewiesen sei noch auf § 33 u. 34 über krummlinige Koordinaten und räumliche Ableitungen in diesen. Auch in den hierher gehörenden Aufgabenlösungen ist vieles speziell den Physiker Angehende enthalten.

Der Affinorrechnung ist der dritte Teil des Buches zugedacht, und zwar sind im ersten Kapitel die nötigen Grundlagen über lineare Vektorfunktionen gegeben. (Definitionen, Einteilungen, Koordinatendarstellung.) Auch in diesem hochwichtigen Abschnitte ist für anschauliches Verarbeiten und Anwendenlernen bestens gesorgt. Die elastischen Spannungen deformierter Körper, selbstverständlich auch das Tensorellipsoid, die lineare Vektorfunktion in schiefwinkligen Koordinaten und die Faraday-Maxwellschen Spannungen werden hier erörtert. Nach diesen Vorbereitungen wird dann im zweiten Kapitel im Anschluß an F. Jung die von Gibbs als „dyadic“, von Budde neuerdings als „Diatensor“ bezeichnete geometrische Größe höherer Ordnung als Affinor eingeführt und es werden entwickelt: Koaffinor, Versor, Invarianten des Affinors. Die Darstellung durch Vektoren führt dann zum dyadischen Produkt. Die Affinoren werden sodann als Dyadensummen dargestellt. Als Tensor wird in § 41 der symmetrische Teil des Affinors definiert, während der antimetrische (alternierende) als Axiator bezeichnet wird. Es folgen Abschnitte über Multiplikation von Affinoren, reziproke A., Division von A., A.-reihen, „Versoren“ und „Drehstrecker“. Man stößt hier auf hochinteressante Entwicklungen — z. B. die Darstellung des Versors als Exponentialfunktion eines Axiators. Nebenbei bemerkt wird durch geeignete Hinweise der Kontakt mit den Darstellungen anderer Autoren ermöglicht. —

Bei der Affinoranalysis sei hervorgehoben, daß die Beleuchtung der Analogien, welche zwischen den auf Skalare, Vektoren oder Affinoren wirkenden Operatoren bestehen, viel zu Verständnis und Übersicht beiträgt. Nach einem Paragraphen über Ableitung von Affinoren nach einem Skalar wird der Nablaaffinor eines Feldvektors (Nabladyade) ausführlich behandelt. Hier findet man auch als Nablaaffinor eines Laplaceschen Vektors den von Schouten Deviator genannten Tensor. Die räumliche Ableitung von Affinoren führt zu dem von Emde (l. c.) als "Traktor" bezeichneten Vektor. (∇ auf Affinor angewandt), ferner zu dem „Vortex“ eines Affinors (dies entspricht dem Rotor des Vektors) und zu dem „Turbor“ des Affinors (Emde l. c.). Die verallgemeinerten Sätze von Gauß und Stokes finden sich dann auch hier wieder. Auch die Richtungsableitungen von Affinoren werden behandelt. Die letzten Artikel des Buches sind dann den Ableitungen von Affinoren enthaltenden Produkten und den zweiten Ableitungen gewidmet sowie der Darstellung einer stetigen Raumtransformation durch den Nablaaffinor, den Funktionen von Ortsfunktionen und den räumlichen Ableitungen in krummlinigen Koordinaten. — Auch in diesem „nicht einfachen“ dritten Teile tritt das Bestreben hervor, den Leser zur Anwendung der Methoden und zur erfolgreichen Lektüre der Spezialwerke zu befähigen. Am Schlusse befindet sich noch eine sehr ausführliche Formelsammlung sowie Namen- und Sachverzeichnis. Die sehr gute Ausstattung des Buches trägt bei dem komplizierten mathematischen Satze auch mit zum leichteren Verständnis bei. Im ganzen läßt sich schwer ein Bild von der Fülle des behandelten Stoffes geben — jedenfalls sei der Physiker nachdrücklich auf dieses hervorragende Lehrbuch aufmerksam gemacht. Hörig.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Privatdozent für Physik an der Technischen Hochschule Karlsruhe i. B. Dr. **R. Schachenmeier** ist als Leutnant der Landwehr Führer einer drahtlosen Station im Osten.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. Friedrich Kottler für mathematische Physik, an der Universität Budapest für Funktionslehre Dr. Ludwig David (bisher für Theorie der Algebraischen Zahlen und Funktionen an der Universität Klausenburg).

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Christian Füchtbauer zum a.o. Professor für theoretische Physik an die Universität Tübingen, der ord. Professor der Chemie an der Universität Graz Dr. Roland Scholl zum ord. Professor der Organischen Chemie an der Technischen Hochschule Dresden, der Privatdozent an der Universität Würzburg Dr. Friedrich Harms zum etatsmäßigen a.o. Professor der Theoretischen Physik an derselben Hochschule.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Halle Dr. Erich Beschke, dem Privatdozenten der Mathematik an der Universität Greifswald Dr. Clemens Thaer, dem Privatdozenten der Astronomie und Meteorologie an der Universität Marburg Dr. Alfred

Wegener, dem Privatdozenten der Physik an der Universität Berlin Dr. James Franck, dem Privatdozenten der Mathematik an der Universität Kiel Dr. Richard Neuendorff, dem Privatdozenten für reine und angewandte Mathematik an der Universität Münster Dr. Aloys Timpe und dem Privatdozenten für Mathematik an der Universität Breslau Dr. Walter Schnee der Titel Professor, dem früheren ord. Professor der Ingenieurwissenschaften an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Christian Otto Mohr in Dresden-Blasewitz der Titel und Rang als Wirklicher Geheimer Rat.

Gestorben: Der frühere Dozent für Photographie an der Technischen Hochschule Dresden Hofrat Professor Dr.-ing. Hermann J. Krone, der a.o. Professor für Heizungs-, Lüftungs- und Feuerungstechnik an der Technischen Hochschule Wien Eduard Meter.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1916/17.

Technische Hochschule Brünn.

Jaumann: Allgemeine und technische Physik, 3½; Theoretische Physik, 1½; Physikalisches Praktikum, 3. — **Lohr**: Elektromagnetische Theorien für bewegte Körper, 1. — **Szarvassi**: Elektrizitätsleitung in Gasen, 2. — **Zickler**: Allgemeine Elektrotechnik, 5; Elektrotechnisches Praktikum II, 8. — **Niethammer**: Bau elektrischer Maschinen II, 3; Projektierung elektrischer Anlagen, 2; Elektrische Konstruktionsübungen I, 10, II, 2. — **Siegel**: Elemente der Elektrotechnik, 2. — **Filepek**: Telegraphie und Telephonie, 2. —

Frenzel: Anorganische Chemie, 6; Analytische Chemie II, 2; Chemische Übungen I, 24, II, 19½; Elektrochemisches Praktikum, 3; Physikalische Chemie II, 3. — **Hönig**: Organische Chemie II, 4; Ausgewählte Kapitel der Tier- und Pflanzenchemie, 1½; Agrikulturchemie, 3; Chemische Übungen zu Agrikultur- und Nahrungsmittelchemie, 11. — **Kurtenacker**: Mikrochemische Analyse, 1, Übungen, 2. — **Gröger**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 1½. — **Knöpfer**: Konstitutionsbestimmungen organischer Verbindungen, 2. — **Donath**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe II, 3; Chemische Technologie organischer Stoffe I, 3; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie I, 20. — **Ulrich**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Chemische Technologie organischer Stoffe II, 5, Übungen, 14; Spezielle chemische Technologie der Gerbstoffe, 1; Grundzüge der Textilchemie, 1. — **Margosches**: Chemische Technologie organischer Stoffe III, 2; Chemische Technologie III, 3; Chemische Technologie der organischen Kolloide, 2. —

Tietze: Mathematik I a, 7, Korrepetitionen, 1. — **Waelsch**: Mathematik I b, 4, Korrepetitionen, 1; Darstellende Geometrie, 4; Konstruktives Zeichnen, 8. — **v. Schrutka**: Mathematik II, 3, Korrepetitionen, 1; Elemente der höheren Mathematik, 4, Korrepetitionen, 1; Elliptische Funktionen, 2. — **Benze**: Wahrscheinlichkeitsrechnung I, 2. — **Fanta**: Versicherungsmathematik II, 2, Übungen, 1. — **Löschner**: Technisches Zeichnen II, 4; Plan- und Geländezeichnen, Übungen, 4; Niedere Geodäsie, 5; Elemente der niederen Geodäsie, Situationszeichnen, Übungen, 2; Vermessungsübungen, 4½; Höhere Geodäsie, 3. —

Technische Hochschule Graz.

v. Ettingshausen: Physik für Ingenieure: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Elemente der mechanischen Wärmetheorie, Magnetismus, Elektrostatik, Galvanismus, Elektromagnetismus, Induktion, 5; Elektrotechnik, 3½, Übungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik für techn. Chemiker: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 5, für Geodäten: Mechanik und geometrische Optik, 5. —

Emich: Anorganische Chemie, 7; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **v. Cordier**: Geschichte der Chemie von Lavoisier bis zur Gegenwart, 1. — **v. Hemmelmayr**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2. — **Kremann**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie I, 2. — **B. Reinitzer**: Quantitative chemische Analyse I: Gewichts-Analyse, 1, Seminar, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der chemischen Gewichtsanalyse, 20; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der anorganisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **Andreasch**: Qualitative chemische Analyse I, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der qualitativen chemischen Analyse, 14; Chemische Technologie der organischen Stoffe: a) Chemische Fabriksindustrie der organischen Stoffe: Teerfarben usw., 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung organisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschrittene. —

Hocevar: Mathematik I: Algebra und Analysis, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Weitzenböck**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, 1. — **v. Peithner**: Mathematik II: Geometrie, Integralrechnung, Differentialgleichungen, 4, Übungen, 2. — **Schüßler**: Darstellende Geometrie, 5, Übungen, 6, Repetitorium, 2; Projektive Geometrie I, 3, Übungen, 3, Seminarübungen: a) Unterseminar, 2, b) Oberseminar, 2. — **Wittenbauer**: Allgemeine Mechanik, einschließlich Elemente der graphischen Statik, 4, Übungen, 3 und 2; Technische Mechanik I: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 4; Die Mechanik auf Grund der Vektorenrechnung, 2. — **Klingatsch**: Niedere Geodäsie, 4; Elemente der niederen Geodäsie, 4; Höhere Geodäsie: Methode der kleinsten Quadrate, Das Präzisions-Nivellement, Landesvermessung, 4; Geodätisches Seminar, 6; Situations- und Terraindarstellung, für Bauingenieure, 4 und 2, für Geodäten, 4. —

Universität Wien.

Lecher: Experimentalphysik für Mediziner und Lehramtskandidaten, 5, Demonstrationspraktikum, 4; Physikalische Demonstrationen für Mittelschulen, 6; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Exner**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, Chemiker und Naturhistoriker, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. — **Meyer**: Radioaktivität, 3; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Ehrenhaft), 1 *g*. — **Ehrenhaft**: Theorie des elektromagnetischen Feldes und der Strahlung, 5. — **Haschek**: Interferenz- und Beugungserscheinungen, 3. — **Mache**: Die physikalischen Grundlagen der inneren Ballistik, 1. — **Kohl**: Grundzüge der Hydrodynamik, 2. — **Nabl**: Ergebnisse der neueren theoretisch-physikalischen Forschung, 2. — **Hess**: Atmosphärische Elektrizität, 1. — **Sirk**: Einführung in die kinetische Gastheorie, 2, Übungen, 1. — **Thirring**: Die partiellen Differentialgleichungen in der mathematischen Physik, 2. — **Flamm**: Bau der Atome und Moleküle, 2. — **Defant**: Sonnenstrahlung, 1. — **Schmidt**: Erdbeben und ihre Messung, 1. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 12 *g*; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20 *g*. —

Wegscheider: Theoretische und physikalische Chemie I, 5; Chemische Übungen für Philosophen, tägl. außer Sonnabend; Übungen in der chemischen Analyse für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend; Arbeiten im I. chemischen Laboratorium für Vorgeschrittene, tägl. — **Herzig**: Über Alkaloide, 2; Übungen aus pharmazeutischer



Chemie für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. — **Franke**: Anleitung zur Ausführung chemisch-wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytische Chemie im Anschluß an die chemischen Übungen für Mediziner, 1; Maßanalyse, 2; Übungen in der Ausführung chemischer Schulversuche, 2. — **Schacherl**: Ausgewählte Kapitel der Chemie und Technologie der Nahrungsmittel, 2. — **Vortmann**: Praktische Übungen in gerichtlich-chemischer Analyse für Kandidaten der Lebensmittel-Expertise, 3 halbe Tage. — **Billiter**: Ausgewählte Kapitel der anorganisch-chemischen Technologie, 2. — **M. Kohn**: Einführung in das Studium der heterozyklischen Verbindungen der organischen Chemie, 1. — **Abel**: Elektrochemie, 2. —

v. Escherich: Funktionentheorie, 5; Proseminar für Mathematik, 1 *g*; Seminar für Mathematik, 2 *g*; Elementarmathematik, 1 *g*. — **Wirtinger**: Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*; Mathematisches Proseminar, 1 *g*. — **Furtwängler**: Zahlentheorie, 5; Elementarmathematik, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*; Seminar, 2 *g*. — **G. Kohn**: Einleitung in die synthetische Geometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Analytische Geometrie des *n*-dimensionalen Raumes, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 4. — **Blaschke**: Die Mathematik der öffentlichen Versicherung, 2. — **Roth**: Elliptische und Modulfunktionen, 3. — **Groß**: Konforme Abbildung, 3, Übungen zur Funktionentheorie; Kurs über darstellende Geometrie, 3 *g*. — **Radon**: Quadratische und bilineare Formen unendlich vieler Veränderlicher, 2. — **v. Hepperger**: Sphärische Astronomie, 4. — **Oppenheim**: Mechanik des Himmels, 3, Übungen, 1 *g*; Astronomische Geographie, 2. — **Schram**: Kalendariographie und Zeitrechnung verschiedener Völker, mit Rücksicht auf Historiker, 1. —

Technische Hochschule Wien.

Jäger: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik, für Geodäten, 2. — **Mache**: Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker: Wärmelehre, Optik und Akustik, Elektrizitätslehre, 5; Physikalische Grundlagen der inneren Ballistik, 1. — **Liznar**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie für Ingenieure, 2. — **Knoller**: Luftschifffahrt und Automobilwesen, 3. — **Sahulka**: Elektrotechnik für Maschinenbauer, 4½, Praktische Übungen I (mit Reithoffer), 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2. — **Reithoffer**: Enzyklopädie der Elektrotechnik, für Bauingenieure und technische Chemiker, 2; Elektrische Schwingungen und Wellen, 2. — **N. N.**: Dynamobau, 5½, Konstruktionsübungen, 6; Elektrotechnik, Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg**: Elektrische Arbeitsübertragung, mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Bahnen, 3; Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 2, Übungen, 4. — **Paweck**: Elektrochemie, für Elektrotechniker, 2; Technische Elektrochemie, 3. — **Jüllig**: Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko**: Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. — **Aigner**: Unterwasser-Telegraphie und -Telephonie, 1. — **Strunz**: Geschichte der Naturwissenschaften und der Naturbetrachtung im Mittelalter und in der Renaissance, 2; Hypothese und Irrtum, geschichtlich betrachtet, 2; Übungen: Neue Literatur über Geschichte der Naturwissenschaften, 2. —

Bamberger: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6, Übungen, täglich. — **Suida**: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie II (Die wichtigsten Kapitel aus der Chemie der aromatischen Verbindungen), 4; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Vortmann**: Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. — **Moser**: Qualitative chemische Analyse, 2. — **Ulzer**: Technische Analyse organischer Stoffe, 2. — **Weissenberger**: Anorganisch-chemische Arbeitsmethoden, 1, Übungen, 2. — **v. Jüptner**: Theoretische und physikalische Chemie II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend; Technische Feuerungen: Wärmelehre, 5. — **Praetorius**: Physikalisch-chemisches Messen und Rechnen, 1. — **Lafar**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Technische Mykologie, 2, Übungen für Anfänger, 2. — **Böck**: Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2. — **Klimont**: Chemie der hydroaromatischen Verbindungen und Terpene, 2. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Phasenlehre, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie, 2, Übungen in Gasbeleuchtung, Brennstoffe und Feuerungsanlagen, 4. — **Oettinger**: Fette und ätherische Öle, 1½. — **Erban**: Chemische Textilindustrie I, 2. — **Russ**: Neuere Verfahren der anorganisch-chemischen Großindustrie, 1½. —

Zsigmondy: Mathematik I, für Maschinenbauer, 5, Korrepetitionen, 2. — **Rothe**: Mathematik I, für Bauingenieure, 5; Analytische Geometrie der Ebene, 2. — **Czuber**: Mathematik II, 5; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — **Suppantschitsch** (ev. Radon): Elemente der höheren Mathematik, 4. — **Reich**: Algebra, 2. — **Radon**: Enzyklopädie der Mathematik, 3; Einführung in die Funktionentheorie: Analysis der komplexen Veränderlichen, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 4, II, 2. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3; Mathematik der öffentlichen Versicherung, 2. — **Müller**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, für Bauingenieure, 5, Konstruktionsübungen, 6; Konstruktive Behandlung der Regelflächen, 2, Konstruktionsübungen, 2; Seminar für darstellende Geometrie, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, für Maschinenbauer, 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie I, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Danzer**: Normale und schiefe Axonometrie, 2. — **Wieghardt**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Bauingenieure, 5, Übungen, 1½. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Maschinenbauer, 5, Übungen, 2. — **Kirsch**: Mechanik II: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 5, Übungen, 4. — **Girtler** (ev. Wolf): Enzyklopädie der Mechanik, 5. — **Fillunger**: Analytische Mechanik des elastischen festen Körpers, 1½. — **Wolf**: Einführung in die theoretische Elastizitätslehre, 2. — **Leon**: Die Kerbfrage in Theorie und Praxis, 1; Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, 1½. — **Pollack**: Elemente der niederen Geodäsie, 4. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, 6, Übungen I: Instrumental- und Vermessungsübungen, Zimmerübungen, 3; Ausgewählte Kapitel der Niederen Geodäsie, 1½; Geodätisches Seminar, 2; Photographische Meßkunst: Photogrammetrie, 1½, Übungen, 2. — **Dokulil**: Übungen zur Niederen Geodäsie, für Bauingenieure, II: Kartierungsübungen, 3; Übungen zur Niederen Geodäsie, für Geodäten: Zimmerübungen, 5; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, 2½. — **Schumann**: Höhere Geodäsie, 2; Ausgewählte Kapitel aus Höherer Geodäsie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21. 1. November 1916. 17. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 22 am 28. Oktober 1916.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs.

Von Rudolf Plank.

Vor einiger Zeit haben wir verschiedene Beziehungen, die zwischen der Temperaturveränderung bei der Drosselung realer Gase, der spezifischen Wärme und der Zustandsgleichung bestehen, mitgeteilt[1]). Es sollen in dieser Arbeit weitere neue Zusammenhänge klargelegt werden und es soll besonders gezeigt werden, in welcher Weise die endliche Abkühlung bei der Drosselung mit dem elementaren Kühleffekt sowie mit kalorischen und thermischen Größen in Beziehung gebracht werden kann. Es wird sich dabei zeigen, daß die Messungen der endlichen Abkühlung, ausgehend von verschiedenen Drücken und Temperaturen im allgemeinen der experimentellen Bestimmung des elementaren Kühleffekts vorzuziehen sind.

Nebenbei werden besonders einfache Ableitungen der von Linde, Grindley und Davis angegebenen Gleichungen mitgeteilt, die sich sämtlich aus der Thomsonschen Grundgleichung entwickeln lassen.

Der Begriff der Inversionskurve, der bisher nicht eindeutig gebraucht wurde, wird zu klären versucht.

Die mitgeteilten Beziehungen werden auf die bekannt gewordenen Versuchszahlen für Luft angewendet.

Der Zweck der Untersuchung ist, einen Beitrag zur Theorie der Lindeschen Luftverflüssigungsmaschinen zu liefern, die bisher nicht in erschöpfender Weise behandelt werden konnte und zu deren lückenlosem Aufbau noch viel Arbeit experimenteller und theoretischer Natur erforderlich sein wird.

1) Diese Zeitschr. 15, 904, 1914.

§ 1. Die Gleichungen von Davis und Grindley.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

T die absolute Temperatur,
P der absolute Druck,
v das spezifische Volumen,
c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck
} vor der Drosselung,

T_0, P_0 und c_p^0 die ensprechenden Werte nach der Drosselung,

A das mechanische Wärmeäquivalent,

u die innere Energie in Kalorien,

$i = u + APv$ der Wärmeinhalt in Kal., der bei der Drosselung unverändert bleibt,

$\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i$ der elementare Kühleffekt bei der Temperatur T und dem Druck P,

$\triangle = T - T_0$ die endliche Abkühlung beim Abdrosseln von P auf P_0.

Die Thomsonsche Grundgleichung lautet:

$$\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i = \frac{A}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right] = \frac{AT^2}{c_p}\left(\frac{\partial (v/T)}{dT}\right)_P. \quad (1)$$

Durch partielle Differentiation nach T erhält man

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P = \frac{AT}{c_p}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_P - \frac{1}{c_p}\left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i,$$

wobei bekanntlich

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = -AT\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_P$$

und damit

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{c_p}\left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i\right] = -\frac{1}{c_p}\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_i. \quad (2)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$\ln \frac{c_p}{c_p^0} = -\int_{P_0}^{P} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P dP, \qquad (3)$$

wobei im Integral auf der rechten Seite $i =$ konst. ist. Die Gleichung (3) wurde zuerst von Davis auf anderem Wege abgeleitet und mit Erfolg für die Berechnung der spezifischen Wärme des Wasserdampfes aus allen bekannten Drosselversuchen verwendet[1]). Die Bildung der Integralwerte ist aber, wie Davis selbst zugibt, sehr umständlich und mühsam und muß im allgemeinen auf graphischem Wege erfolgen.

Nur wenn sich aus den Versuchen für $\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i$ eine so einfache Funktion von P und T ergibt, daß sich die Variablen trennen lassen, kann man die Integration in Gleichung (3) in geschlossener Form durchführen. Setzt man z. B.

$$\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i = \frac{\varphi(P)}{f(T)}, \qquad (4)$$

so wird

$$\ln \frac{c_p}{c_p^0} = \int_{P_0}^{P} \frac{\varphi(P) f'(T)}{[f(T)]^2} dP = \int_{T_0}^{T} \frac{f'(T)\, dT}{f(T)} = \ln \frac{f(T)}{f(T_0)}$$

also

$$\frac{c_p}{c_p^0} = \frac{f(T)}{f(T_0)}.$$

Aus Gleichung (2) folgt ferner

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = -c_p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P - \alpha \left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_P$$
$$= -\left(\frac{\partial (\alpha c_p)}{\partial T}\right)_P. \qquad (5)$$

Diese Bezeichnung ist zuerst von Grindley[2]) abgeleitet; sie wurde später von Griesmann[3]) zur Diskussion seiner Drosselversuche mit Wasserdampf herangezogen.

§ 2. Der Zusammenhang zwischen der endlichen Abkühlung $\triangle$ und dem elementaren Kühleffekt α.

Aus der Definition der endlichen Abkühlung

$$\triangle = T - T_0$$

erhält man durch Differentiation nach dem Druck bei konstantem Wärmeinhalt (auf einer Drosselkurve)

$$\left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_i = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i - \left(\frac{\partial T_0}{\partial P}\right)_i = \alpha - \left(\frac{\partial T_0}{\partial P}\right)_i.$$

Wenn wir nun von verschiedenen Anfangsdrücken ausgehend, immer auf denselben Enddruck P_0 abdrosseln, z. B. auf 1 Atmosphäre oder auf das absolute Vakuum, dann ist auf ein und derselben Drosselkurve die Endtemperatur T_0 für alle Anfangsdrücke P konstant und damit $\left(\frac{\partial T_0}{\partial P}\right)_i = 0$. Ermittelt man also ein System von $\triangle$-Werten, wobei man immer auf denselben Enddruck P_0 abdrosselt, so ist

$$\left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_i = \alpha = \left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial \triangle}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i$$

und folglich

$$\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i = \frac{\left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T}{1 - \left(\frac{\partial \triangle}{\partial T}\right)_P}. \qquad (6)$$

Diese Gleichung ermöglicht die Berechnung der elementaren Abkühlung, wenn die endliche Abkühlung als Funktion vom Druck und von der Temperatur vor der Drosselung ermittelt ist.

Von der Beziehung (6) ist meines Wissens bisher niemals Gebrauch gemacht worden.

Die umgekehrte Bestimmung des Systems der $\triangle$-Werte aus den α-Werten stößt immer auf Schwierigkeiten; die Integration ist in geschlossener Form nur dann möglich, wenn sich α als eine so einfache Funktion von P und T darstellen läßt, daß die Trennung der Variablen möglich ist, wie das z. B. bei der einfachen Form der Gleichung (4) der Fall ist; in allen anderen Fällen ist man auf die schrittweise Integration angewiesen. Die Versuche lehren, daß die Form der Gleichung (4) stets nur ein sehr beschränktes Druck- und Temperaturintervall zu umfassen vermag.

Es folgt aus diesem Sachverhalt, daß die Ermittlung der $\triangle$-Werte mehr liefert, als die Bestimmung der α-Werte. Es dürfte sich daher empfehlen, bei weiteren auszuführenden Drosselversuchen stets von verschieden hohen Anfangs-Drücken auf Atmosphärendruck abzudrosseln und nicht die Abkühlung für 1 Atmosphäre Drucksenkung, die mit dem Wert α identifiziert werden kann, zu bestimmen. Es wird sich zeigen, daß die Kenntnis der $\triangle$-Werte auch in mancher anderen Beziehung vorteilhafter ist.

Die wichtigsten bisher ausgeführten Drosselversuche sind die folgenden:

1. Bestimmung von $\triangle$: Olszewski[1]) (Luft), Dalton[2]) (Luft und H_2), Bradley und Hale[3]) (Luft) und Hirn[4]) (Wasserdampf).

1) H. N. Davis, Notes on certain thermal properties of steam. Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences XLV, Heft 9, März 1910 S. 267—311.

2) Grindley, Phil. Trans. A. **194**, 31, 1900.

3) Griesmann, Mitt. über Forschungsarbeiten des Vereins Deutscher Ing. Heft 13, 1904, S. 48.

1) Olszewski, Anz. d. Akad. Krakau 1906, S. 792.

2) Dalton, Comm. Leiden Nr. 109a und 109c, 1909.

3) Bradley und Hale, Phys. Rev, **29**, 582, 1909.

4) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur 1865, **I**, S. 177.

2. Bestimmung von α: Thomson und Joule[1]) (Luft, CO_2 und H_2), Vogel[2]) (Luft und O_2), (Noell[3]), (Luft), Natanson[4]) und Kester[5]) (CO_2).

3. Aufnahme ganzer Drosselkurven (gleichzeitige Bestimmung von $\triangle$ und α): Grindley[6]), Griesmann[7]), Peake[8]) und Dodge[9]) (Wasserdampf).

Die ausführlichsten Drosselversuche wurden bisher mit Luft vorgenommen. Bradley und Hale bestimmten a. a. O. die endliche Abkühlung $\triangle$ für Anfangsdrücke von 68 bis 204 Atmosphären und für Anfangstemperaturen von 0 bis -100^0, wobei immer bis zum Druck von 1 Atmosphäre abgedrosselt wurde. Noell dagegen hat a. a. O. die elementare Abkühlung α für Drücke von 25 bis 150 Atmosphären und Temperaturen von -55 bis $+250^0$ gemessen. Die Ergebnisse beider Forscher können mit Hilfe der Gleichung (6) unmittelbar miteinander verglichen werden, was weiter unten (in § 7) durchgeführt ist.

§ 3. Die Gleichung von C. v. Linde.

Aus Gleichung (6) erhält man durch partielle Differentiation nach T und unter Berücksichtigung der Gleichung (2) bzw. (3)

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial \ln c_p}{\partial P}\right)_i = \frac{\frac{\partial^2\triangle}{\partial P\cdot\partial T}}{1-\left(\frac{\partial\triangle}{\partial T}\right)_P} + \frac{\left(\frac{\partial^2\triangle}{\partial T^2}\right)_P\left(\frac{\partial\triangle}{\partial P}\right)_T}{\left[1-\left(\frac{\partial\triangle}{\partial T}\right)_P\right]^2}$$

oder

$$\left(\frac{\partial \ln c_p}{\partial P}\right)_i = \frac{\partial}{\partial P_T}\left\{\ln\left[1-\left(\frac{\partial\triangle}{\partial T}\right)_P\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial T_P}\left\{\ln\left[1-\left(\frac{\partial\triangle}{\partial T}\right)_P\right]\right\}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i = \frac{\partial}{\partial P_i}\left\{\ln\left[1-\left(\frac{\partial\triangle}{\partial T}\right)_P\right]\right\}.$$

1) Thomson und Joule, Phil. Trans. S. 357, 1853; S. 321, 1854; S. 579, 1862.
2) Vogel, Diss. München 1910 und Mitt. über Forschungsarb. d. Ver. D. Ing. Heft 108/109, 1911.
3) Noell, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. math.-phys. Kl. 1913 und Mitt. über Forschungsarb. d. Ver. D. Ing. Heft 184.
4) Natanson, Wied. Ann. d. Phys. und Chem. **31**, 502, 1887.
5) Kester, diese Zeitschr. **6**, 44, 1905 und Phys. Rev. **21**, 260, 1905.
6) Grindley, Phil. Trans. A. **194**, 31, 1900.
7) Griesmann, Mitt. über Forschungsarb. d. Ver. D. Ing. Heft 13, S. 48, 1904.
8) Peake, Proc. Roy. Soc. A. **76**, 185, 1905.
9) Dodge, Journ. Amer. Soc. Mech. Engs. **28**, 1265, 1907, u. **30**, 1227, 1908.

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{c_p}{c_p^0} = 1 - \left(\frac{\partial\triangle}{\partial T}\right)_P. \qquad (7)$$

Das ist die wichtige Formel, welche die Berechnung der c_p-Werte aus dem System der $\triangle$-Werte gestattet. Diese Formel ist zuerst auf ganz anderem Wege von C. v. Linde gefunden[1]). Sie eignet sich wesentlich besser für die Berechnung der c_p-Werte als die Gleichung (3), so daß auch aus diesem Grunde die Kenntnis der endlichen Abkühlung $\triangle$ als Druck- und Temperaturfunktion mehr Vorteile bietet als die Kenntnis der Werte des elementaren Kühleffekts α. Identifiziert man den letzteren mit der Abkühlung für 1 Atmosphäre Drucksenkung, so kann man Gleichung (7) auch für α statt $\triangle$ anwenden, muß aber dann von Atmosphäre zu Atmosphäre schrittweise vorgehen und für c_p^0 immer die entsprechenden Bezugswerte für den Zustand nach der Drosselung einsetzen. Dieses Verfahren ist sehr mühsam und zeitraubend. Wählt man, um Zeit zu sparen, größere Druckintervalle, so erhält man Näherungswerte von geringerer Genauigkeit[2]).

Wir werden weiter unten (in § 7) nachweisen, daß die nach Gleichung (7) aus den Messungen von Bradley und Hale berechneten Werte von c_p sowohl mit den direkten Bestimmungen wie auch mit den von Noell aus seinen Messungen der elementaren Abkühlung berechneten Werten sehr gut übereinstimmen.

§ 4. Der Zusammmenhang zwischen der Zustandsgleichung und der endlichen Abkühlung $\triangle$.

Aus der Thomsonschen Grundgleichung (1) läßt sich eine Zustandsgleichung durch einfache Integration nur dann ableiten, wenn man entweder die Annahme macht, daß c_p konstant ist oder für α einen funktionalen Zusammenhang von der einfachen Form der Gleichung (4) annimmt; in diesem letzten Fall läßt sich nämlich c_p als Funktion von P und T ermitteln (vgl. § 1) und in Gleichung (1) einsetzen[3]). Beide Annahmen sind aber nur für beschränkte Gebiete zulässig.

Dagegen läßt sich eine bequeme Zustandsgleichung mit einer viel weniger einschränkenden Bedingung ableiten, wenn man wieder an Stelle des elementaren Kühleffekts α die endliche Ab-

1) C. v. Linde, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. math.-phys. Kl. XXVII, Heft 3, 1897.
2) Bequeme Näherungsformeln wurden von Noell a. a. O. und Holborn u. Jakob, Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1914, S. 1436 angegeben.
3) Vgl. auch Plank, diese Zeitschr. **15**, 904, 1914.

kühlung $\triangle$ bestimmt hat. Mit den Gleichungen (6) und (7) erhält man nämlich

$$\alpha c_p = c_p^0 \left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T;$$

damit folgt aus Gleichung (1)

$$A T^2 \left(\frac{\partial (v/T)}{\partial T}\right)_P = c_p^0 \left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T,$$

wobei c_p^0 in viel weiteren Grenzen als konstant angenommen werden kann. Durch Multiplikation mit dT und Integration dieser partiellen Differentialgleichung erhält man

$$\frac{v}{T} = \frac{c_p^0}{A} \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T dT + f(P).$$

Hierbei ist die willkürliche Funktion $f(P) = \frac{R}{P}$, weil für ein ideales Gas der Integralwert auf der rechten Seite verschwindet und $\frac{v}{T} = \frac{R}{P}$ wird.

Man erhält also die einfache Zustandsgleichung

$$v = \frac{RT}{P} + \frac{c_p^0 T}{A} \int \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T dT, \qquad (8)$$

wobei im Integral P konstant zu setzen ist. Diese Zustandsgleichung eignet sich besonders gut auch für technische Zwecke, da in ihr das spezifische Volumen v nur in der ersten Potenz enthalten ist.

§ 5. Der Wärmeinhalt und die Drosselkurven.

Aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich für den Wärmeinhalt die Beziehung

$$i = \int c_p^0 \cdot dT - A T^2 \int \left(\frac{\partial (v/T)}{\partial T}\right)_P dP + \text{konst.}, \qquad (9)$$

wobei der Wert der Konstanten auf der rechten Seite von der Festlegung des Nullpunktes für den Wärmeinhalt abhängt. In der Technik setzt man $i = 0$ für $T = 273$.

Wenn man die in § 4 abgeleitete Gleichung

$$A T^2 \left(\frac{\partial (v/T)}{\partial T}\right)_P = c_p^0 \left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T$$

auf beiden Seiten mit dP multipliziert und integriert, so erhält man mit der in weiten Grenzen zulässigen Annahme, daß c_p^0 unveränderlich ist,

$$A T^2 \int \left(\frac{\partial (v/T)}{\partial T}\right)_P dP + f(T) = c_p^0 \triangle.$$

In dieser Gleichung muß die willkürliche Temperaturfunktion $f(T)$ offenbar verschwinden, weil für ideale Gase einerseits $\triangle = 0$ und andererseits $\frac{v}{T} = \frac{R}{P}$ wird, so daß auch der Integralwert auf der linken Seite verschwindet. Damit erhält aber Gleichung (9) die einfache Form

$$i = c_p^0 (T - \triangle) + \text{konst.} \qquad (10)$$

oder mit $\triangle = T - T_0$

$$i = c_p^0 T_0 + \text{konst.} \qquad (10')$$

Ist $\triangle$ aus Versuchen als Funktion von Druck und Temperatur ermittelt, so kann nach Gleichung (10) der Wärmeinhalt in jedem Zustand berechnet werden. Gl. (10') sagt aus, daß der Wärmeinhalt, abgesehen von einer additiven Konstante, gleich ist dem Produkt aus dem Grenzwert der spezifischen Wärme und der Endtemperatur beim Abdrosseln bis zu einem Druck, der dem idealen Gaszustand entspricht (also z. B. bei Luft auf Atmosphärendruck). Für ideale Gase wird $T_0 = T$, wodurch Gl. (10') die übliche Form $i = c_p^0 T$ + konst. erhält. Diese Zusammenhänge sind aus Fig. 1 ohne weiteres ersichtlich. Da längs

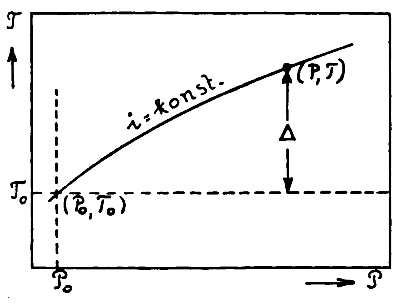


Fig. 1.

einer Drosselkurve der Wärmeinhalt konstant ist, so lautet die Gleichung der Drosselkurve im P/T-Diagramm

$$T - \triangle = \text{konst.},$$

wobei $\triangle$ als Funktion von Druck und Temperatur einzusetzen ist.

§ 6. Die Inversionskurve.

Der Begriff der Inversionskurve ist bisher nicht einheitlich definiert worden und es erklären sich dadurch vielfache Widersprüche, die z. B. von Bradley und Hale a. a. O. erwähnt werden. Während ein Teil der Autoren die Inversionskurve durch die Gleichung

$$\triangle = 0 \qquad (11)$$

definiert, also diejenigen Wertepaare von Druck und Temperatur zusammenfaßt, von denen ausgehend keine Temperaturveränderung bei der Abdrosselung auf Atmosphärendruck auftritt, verstehen die anderen unter der Inversionskurve die durch die Gleichung

$$\alpha = 0 \tag{12}$$

oder auch mit Gl. (6) $\left(\frac{\partial \triangle}{\partial P}\right)_T = 0$

dargestellte Kurve.

Wir möchten empfehlen, die Kurve $\triangle = 0$ als „endliche Inversionskurve“ und die Kurve $\alpha = 0$ als „elementare Inversionskurve“ zu bezeichnen. Durch diese Differenzierung der Begriffe werden manche Widersprüche gegenstandslos. Man findet ferner in der Literatur vielfach Hinweise auf scheinbar vorhandene Gegensätze, die darin bestehen sollen, daß nach den Feststellungen einiger Autoren der Inversionsdruck mit zunehmender Temperatur steigt, während er nach der Ansicht anderer sinkt. Das erklärt sich, wie zuerst von Porter[1]) mit aller Klarheit nachgewiesen wurde, dadurch, daß die Inversionskurve aus 2 Ästen besteht, so daß jedem Druck 2 Inversionstemperaturen zugeordnet sind. Je nachdem man sich im Bereich des oberen bzw. unteren Astes befindet, sinkt bzw. steigt der Inversionsdruck mit zunehmender Temperatur.

Auf diese Verhältnisse werden wir im folgenden Zahlenbeispiel (§ 7) näher eingehen.

Aus der Gl. (12) ergibt sich, daß man für jede gegebene Anfangstemperatur die größtmögliche endliche Abkühlung dann erreicht, wenn man mit demjenigen Anfangsdruck arbeitet, für welchen bei der gegebenen Temperatur die elementare Abkühlung α verschwindet.

Für die elementaren Inversionspunkte selbst gilt mit Gleichung (1) die Bedingung $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \frac{v}{T}$ oder $\left(\frac{\partial (v/T)}{\partial T}\right)_P = 0$ und damit wird für sie auf einer Isobare $\frac{v}{T} =$ max. oder min. Porter schloß daraus, daß die Inversionspunkte auf einer Isobare im v/T-Diagramm so liegen, daß sie durch eine gerade Linie verbunden werden können, welche durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht. Diese Schlußfolgerung ist jedoch irrig. In Wirklichkeit liegen die Inversionspunkte auf einer Isobare im v/T-Diagramm so, daß in ihnen die Tangenten an die Isobare durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgehen (vgl. § 7 und Fig. 5).

§ 7 Die Anwendung der vorstehend entwickelten Formeln auf die vorhandenen Versuchszahlen für Luft.

Die ausführlichsten experimentellen Bestimmungen der endlichen Abkühlung bei der Drosselung wurden von Bradley und Hale mit Luft vorgenommen. Sie arbeiteten zwischen 0 und -100^0 und zwischen 68 und 204 Atmosphären vor der Drosselstelle. In allen Versuchen wurde auf Atmosphärendruck abgedrosselt.

Es muß nun versucht werden, die für die endliche Abkühlung gewonnenen Zahlen durch eine möglichst einfache Gleichung darzustellen. Bradley und Hale haben diesen Versuch a. a. O. selbst unternommen und zwei Gleichungen mitgeteilt, welche die von ihnen ermittelten Zahlenreihen mit keinem größeren Fehler, als er den Versuchswerten selbst anhaftet, wiedergeben. Diese Gleichungen haben jedoch zweierlei Nachteile: einerseits ist die Zahl der Konstanten außerordentlich groß (in der ersten Gleichung 11 und in der zweiten 10 Konstanten), anderseits verschwindet der Wert der Abkühlung nicht, wenn die Druckdifferenz vor und hinter der Drosselstelle gleich Null wird.

Wir haben daher versucht, eine einfachere Gleichung zu finden. Bezeichnet man mit p den absoluten Druck in metrischen Atmosphären (kg pro qcm), so lassen sich die Versuchszahlen von Bradley und Hale zwischen 0 und -80^0 durch die einfache Formel

$$\triangle = -\frac{17{,}8\,p}{T} + \frac{23500\,p}{T^2} - \frac{20\,p^3}{T^3} \tag{13}$$

darstellen. Nach Gl. (13) wird für $p = 0$ auch $\triangle = 0$. Da Bradley und Hale stets auf Atmosphärendruck abgedrosselt haben, wären die eben erwähnten Wertepaare zutreffend, wenn p nicht den absoluten Druck, sondern den Überdruck bedeuten würde. Die Versuchswerte der genannten Forscher gelten jedoch erst für p

Tabelle I.

p	$T = 273$			$T = 253$			$T = 233$			$T = 213$			$T = 193$		
	$\triangle$ beob.	$\triangle$ ber. Gl. (13)	Fehler	$\triangle$ beob.	$\triangle$ ber. Gl. (13)	Fehler	$\triangle$ beob.	$\triangle$ ber. Gl. (13)	Fehler	$\triangle$ beob.	$\triangle$ ber. Gl. (13)	Fehler	$\triangle$ beob.	$\triangle$ ber. Gl. (13)	Fehler
70,3 kg/qcm	17,1⁰	17,2⁰	+0,1⁰	20,3⁰	20,4⁰	+0,1⁰	23,8⁰	24,5⁰	+0,7⁰	28,2⁰	29,8⁰	+1,6⁰	35,4⁰	36,9⁰	+1,5⁰
105,8 „	25,0	25,3	+0,3	30,0	29,9	−0,1	35,7	35,8	+0,1	43,0	43,5	+0,5	54,9	53,7	−1,2
140,5 „	32,6	32,4	−0,2	38,7	38,3	−0,4	46,0	45,7	−0,3	55,5	55,3	−0,2	69,5	68,0	−1,5
175,7 „	39,4	38,6	−0,8	46,0	45,4	−0,6	54,0	54,0	±0,0	64,2	65,1	+0,9	79,6	79,5	−0,1
211,6 „	44,6	43,6	−1,0	52,1	51,1	−1,0	61,1	60,4	−0,7	72,5	72,3	−0,2	88,2	87,7	−0,5

1) Porter, Phil. Mag. (6), 11, 554, 1906.

>70 Atm. und für so hohe Drücke macht es fast keinen Unterschied, ob wir unter p den absoluten Druck oder den Überdruck verstehen. In Tabelle I sind die nach Gleichung (13) berechneten Werte den von Bradley und Hale beobachteten und graphisch ausgeglichenen Werten gegenübergestellt. Die Übereinstimmung ist bis — 80° nicht weniger gut, als es bei den viel komplizierteren Formeln von Bradley und Hale der Fall ist, auf deren Wiedergabe wir verzichten.

Unterhalb von — 80° werden die Abweichungen jedoch größer. Wir wollen nun aus Gleichung (13) nach der in § 2 entwickelten Formel (6) die Werte des elementaren Kühleffekts α berechnen und mit den direkten Beobachtungen von Noell a. a. O. vergleichen[1]).

Wir erhalten

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial \triangle}{\partial p}\right)_T}{1 - \left(\frac{\partial \triangle}{\partial T}\right)_p} = \frac{-17{,}8 + \frac{23500}{T} - \frac{60p^2}{T^2}}{\frac{T - 17{,}8p}{T} + \frac{47000p}{T^2} - \frac{60p^3}{T^3}} \qquad (14)$$

Der Vergleich ergibt sich aus Tabelle II.

und verbindet die Punkte mit gleicher Anfangstemperatur durch glatte Kurven, so erhält man bei Extrapolation der Kurven nach unten bis $\triangle = 0$ nicht $p = 0$ bzw. 1, sondern um so höhere Werte von p, je tiefer die Anfangstemperatur ist. Die verlängerten Kurven gehen nur dann durch den Koordinatenanfangspunkt, wenn man die beobachteten Werte von Bradley und Hale für 70 kg/qcm etwas vergrößert. Die geringere Übereinstimmung der Werte für 50 kg/qcm in vorstehender Tabelle scheint also in den etwas zu kleinen beobachteten Werten von $\triangle$ begründet zu sein. Für noch kleinere Drücke wird die Übereinstimmung zwischen den nach Gl. (14) berechneten und den beobachteten Werten immer schlechter. So findet man z. B. für $p = 1$ aus Gl. (6) $\alpha = 0{,}251$, während Thomson und Joule 0,267 fanden und Noell sogar 0,272 gemessen hat.

Wenden wir uns nun zur Berechnung der spezifischen Wärme nach Gl. (7). Aus Gleichung (13) folgt

$$c_p = c_p^0 \left[1 - \left(\frac{\partial \triangle}{\partial T}\right)_p\right] = c_p^0 \left(1 - \frac{17{,}8p}{T^2} + \frac{47000p}{T^3} - \frac{60p^3}{T^4}\right). \qquad (15)$$

Tabelle II.

p	$T = 217{,}6$			$T = 272{,}4$			$T = 322{,}2$			$T = 372{,}5$		
	α beob.	α ber. Gl. (14)	% Fehler	α beob.	α ber. Gl. (14)	% Fehler	α beob.	α ber. Gl. (14)	% Fehler	α beob.	α ber. Gl. (14)	% Fehler
50 kg/qcm	0,360	0,332	—7,8	0,231	0,222	—3,9	0,169	0,157	—7,1	0,120	0,114	—5,0
100 „	0,272	0,257	—5,5	0,191	0,185	—3,1	0,141	0,137	—2,8	0,102	0,102	±0,0
150 „	0,184	0,185	+0,5	0,150	0,145	—3,3	0,113	0,112	—0,9	0,084	0,086	+2,4

Die Übereinstimmung ist nur bei dem niedrigsten Druck von 50 kg/qcm, der auch schon unterhalb der direkten Beobachtungen von Bradley und Hale liegt, weniger gut. Dagegen ergibt sich auch für höhere Temperaturen bis über $t = +100°$ eine recht gute Übereinstimmung, so daß die Gleichung (13) offenbar auch für höhere Temperaturen die endliche Abkühlung richtig wiedergibt. Bei niedrigeren Drücken (70 kg/qcm) scheinen die Messungen von Bradley und Hale etwas zu kleine Werte von $\triangle$ zu ergeben, und zwar insbesondere bei den tieferen Temperaturen. Trägt man nämlich die gemessenen Werte von $\triangle$ über dem Druck auf

1) Die Werte von Noell sind nach den von ihm angegebenen Gleichungen berechnet, und zwar:
für $T = 217{,}6$: $\alpha = 0{,}448 - 0{,}00176\,p$
$T = 272{,}4$: $\alpha = 0{,}272 - 0{,}00081\,p$
$T = 322{,}2$: $\alpha = 0{,}197 - 0{,}00056\,p$
$T = 372{,}5$: $\alpha = 0{,}138 - 0{,}00036\,p$

Hierbei ist nach den neuesten Messungen

$$c_p^0 = 0{,}2413$$

zu setzen und in weiten Temperaturgrenzen als konstant anzunehmen[1]). Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme der Luft vom Druck wurde in neuester Zeit durch sehr genaue Beobachtungen von Holborn und Jakob[2]) bei $t = +60°$ und für Drücke 1 bis 200 Atm. bestimmt; sie drückten ihre Beobachtungen durch die Gleichung

$$10^4 c_p = 2413 + 2{,}86p + 0{,}0005p^2 - 0{,}00001p^3 \qquad (15')$$

aus. Wir erhalten aus Gleichung (15) für $T = 273 + 60 = 333°$

$$10^4 c_p = 2413 + 2{,}77p - 0{,}0000122p^3. \qquad (15'')$$

1) Scheel u. Heuse, Ann. d. Phys. **37**, 79, 1912 und Swann, Phil. Trans. **210**, 199, 1910.
2) Holborn u. Jakob, Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure S. 1436, 1914.

Diese Gleichung zeigt mit der Formel von Holborn und Jakob eine auffällige Übereinstimmung; es fehlt nur das Glied mit p^2, dem jedoch auch in der Holborn-Jakobschen Gleichung zahlenmäßig nur eine untergeordnete Rolle zukommt. Beide Gleichungen liefern denn auch fast genau die gleichen Werte von c_p, wie aus Tabelle III ersichtlich ist.

Tabelle III.

p in at.	0	50	100	150	200
$10^4 C_p$ nach Gl. (15′)	2413	2556	2694	2819	2925
„ „ „ „ (15″)	2413	2550	2678	2787	2870
$^0/_0$ Abweichung . .	—	0,2	0,6	1,1	1,9

Es können ferner die nach Gl. (15) aus den gemessenen $\triangle$-Werten berechneten Größen von c_p mit denjenigen verglichen werden, die Noell aus seinen α-Bestimmungen ableitet. Die Werte sind in Tabelle IV einander gegenübergestellt.

Tabelle IV.

	$p = 50$ kg/qcm		$p = 100$ kg/qcm		$p = 150$ kg/qcm	
T^0	berechn. aus $\triangle$ n. Gl. (15)	berechn. aus α n. Noell	berechn. aus $\triangle$ n. Gl. (15)	berechn. aus α n. Noell	berechn. aus $\triangle$ n. Gl. (15)	berechn. aus α n. Noell
223	0,287	0,288	0,329	0,325	0,362	0,347
273	0,266	0,266	0,289	0,287	0,307	0,303
373	0,251	0,253	0,259	0,263	0,267	0,271

Es ergibt sich also eine sehr befriedigende Übereinstimmung. Die nach Gl. (15) berechneten Werte sind in Fig. 2 graphisch dargestellt. Der

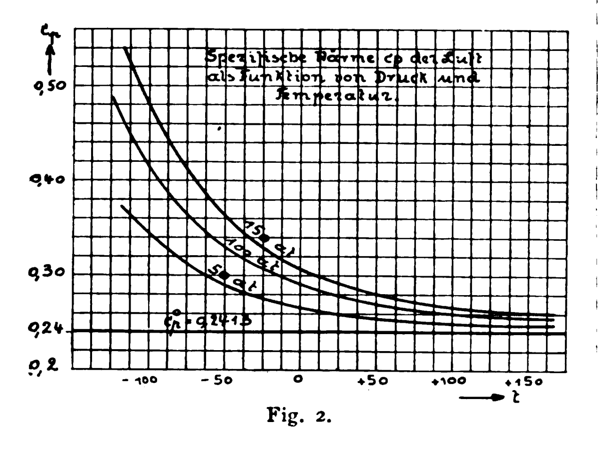


Fig. 2.

Verlauf der Kurven entspricht auch qualitativ durchaus den in neuerer Zeit besonders im Münchener Laboratorium für technische Physik am Wasserdampf gefundenen Gesetzmäßigkeiten, wonach vom Sättigungszustand ausgehend zunächst eine Abnahme der spezifischen Wärme mit zunehmender Temperatur stattfindet. Das Durchschreiten eines Minimalwertes und eine sich daran schließende Zunahme von c_p bei höheren Temperaturen tritt nur dann auf, wenn eine merkliche Zunahme von c_p^0 mit wachsender Temperatur vorliegt (Wasserdampf). Zwischen -100^0 und $+200^0$ kann aber c_p^0 für Luft unbedingt als konstant angenommen werden und die Isobaren der spezifischen Wärme nähern sich dann bei höheren Temperaturen alle asymptotisch dem Wert c_p^0.

Es dürfte noch der Verlauf der Inversionskurven interessieren, der sich aus Gl. (13) ergibt. Bezeichnen wir für die elementare Inversionskurve (§ 6) die zugehörigen Wertepaare von Druck und Temperatur mit p_i und T_i, so lautet die Gleichung dieser Inversionskurve nach Gl. (12):

$$17{,}8\, T_i^2 - 23500\, T_i + 60\, p_i^2 = 0\,. \qquad (16)$$

Der Verlauf dieser Kurve geht aus dem p/T-Diagramm, Fig. 3, hervor. Für jeden

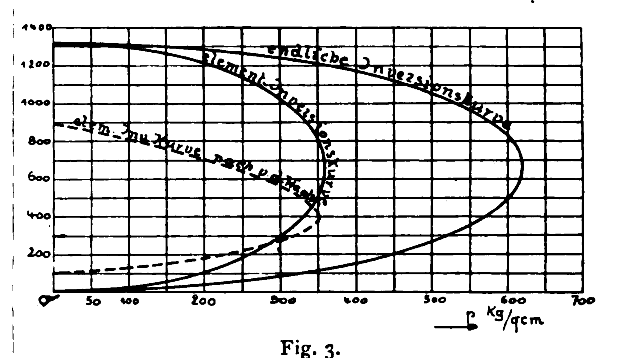


Fig. 3.

Wert von p_i erhält man zwei Werte von T_i, und zwar wird für $p_i = 0$ einmal $T_i = 0$ und das andere Mal $T_i = 1320^0$ ($t_i = 1047^0$). Der Scheitel der Parabel (16) liegt bei ca. 360 kg/qcm und $T_i = 660^0$. Zwischen $t = -100^0$ und t $+200^0$ ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der Inversionskurve, die Porter a. a. O. aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung entwickelte[1]) und die ebenfalls in Fig. 3 eingezeichnet ist.

Die Gleichung der endlichen Inversionskurve ($\triangle = 0$), bei welcher wir die zugehörigen Wertepaare von Druck und Temperatur mit p_i' und T_i' bezeichnen wollen, lautet mit Gl. (13)

$$17{,}8\ (T_i')^2 - 23500\, T_i' + 20\,(p_i')^2 = 0. \quad (17)$$

1) Die Gleichung dieser Inversionskurve lautet in reduzierter Form

$$\pi = 12\sqrt{12\tau} - 12\tau - 27.$$

Um zu gewöhnlichen Koordinaten überzugehen, muß man den reduzierten Druck π mit dem kritischen Druck $p_k = 39$ kg/qcm und die reduzierte Temperatur τ mit der kritischen Temperatur $T_k = 133^0$ multiplizieren.



Der Verlauf dieser Kurve ist auch in Fig. 3 enthalten. Zwischen dem endlichen und dem elementaren Inversionsdruck besteht für jede Temperatur die einfache Beziehung

$$p_i' = p_i\sqrt{3}.$$

Auf den Inversionskurven selbst verschwindet der Kühleffekt. Für Zustände, die innerhalb der von den Inversionskurven und der T-Achse eingeschlossenen Flächen liegen, tritt bei der Drosselung eine Abkühlung ein; für Zustände außerhalb der Inversionskurve tritt dagegen bei der Drosselung eine Erwärmung ein.

Es läßt sich ferner die Zustandsgleichung sofort herleiten, wenn man von den Gleichungen (8) und (13) Gebrauch macht. Drückt man das spezifische Volumen v in m^3/kg aus, so erhält man mit $A = 1/427$ und $R = 29{,}26$ nach Ausführung der Integration

$$v = \frac{RT}{10^4 p} + 0{,}0103\left(\frac{8{,}9}{T} - \frac{7833}{T^2} + \frac{15p^2}{T^3}\right). \quad (18)$$

Das Korrektionsglied

$$\triangle v = 0{,}0103\left(\frac{8{,}9}{T} - \frac{7833}{T^2} + \frac{15p^2}{T^3}\right),$$

welches die Abweichungen vom Gesetz der idealen Gase kennzeichnet, kann positiv, negativ und gleich Null werden. Die Punkte, in denen $\triangle v = 0$ ist, für welche also das Gasgesetz gerade erfüllt ist, ergeben sich aus der Bedingung

$$8{,}9\,T^2 - 7833\,T + 15p^2 = 0. \quad (19)$$

Diese Gleichung stellt im p/T-Diagramm eine Parabel dar, welche in Fig. 4 neben der elementaren Inversionskurve wiedergegeben ist. Man könnte die Gl. (19) als Boylesche Kurve bezeichnen. Für Zustände, die innerhalb der von dieser Kurve und der T-Achse eingeschlossenen Flächen liegen, wird $\triangle v < 0$, also das Gasvolumen kleiner als bei einem idealen Gas; für außerhalb liegende Punkte wird $\triangle v > 0$.

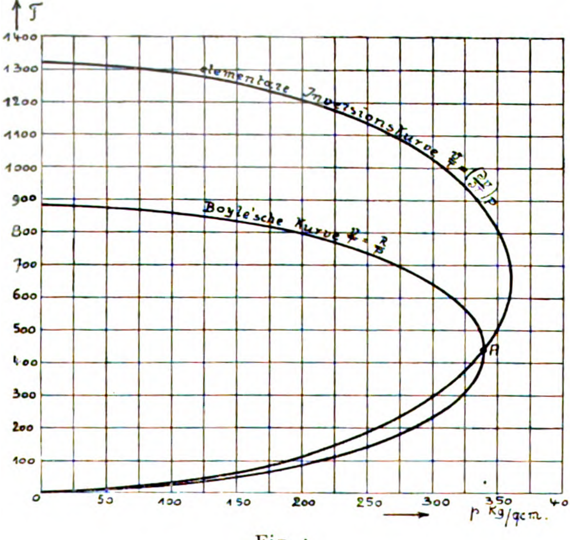


Fig. 4.

Der Zusammenhang der elementaren Inversionskurve mit der Zustandsgleichung ergibt sich aus Gleichung (1). Für Zustände auf der Inversionskurve wird $\frac{v}{T} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$; innerhalb der Inversionskurve ist $\frac{v}{T} < \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ (Abkühlung bei der Drosselung), außerhalb dagegen ist $\frac{v}{T} > \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ (Erwärmung bei der Drosselung).

Der Scheitelpunkt A der Boyleschen Parabel (Fig. 4) ist zugleich ein elementarer Inversionspunkt. Das Vorhandensein zweier Boylescher Punkte und zweier elementarer Inversionspunkte für einen gegebenen Druck nach (Fig. 4) kann man auch aus dem Verlauf der Isobare in einem v/T-Diagramm (Fig. 5) deutlich erkennen.

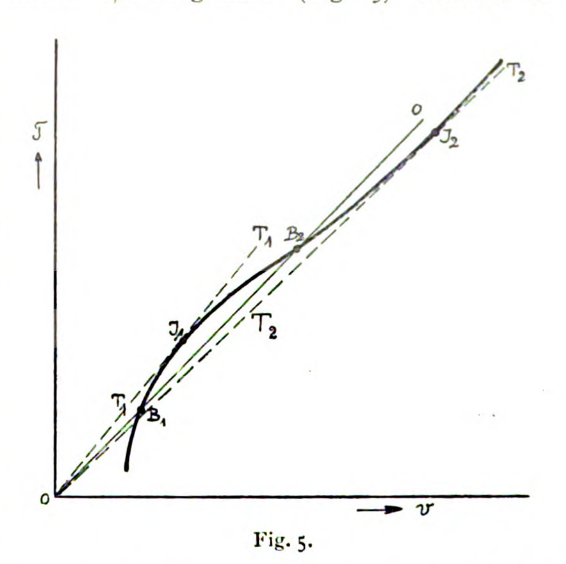


Fig. 5.

In Fig. 5 bedeutet oo die Isobare eines idealen Gases, die als gerade Linie durch den Koordinatenanfangspunkt erscheint. Die wirkliche Isobare nach Gl. (18) ist durch die geschlungene Kurve $B_1 J_1 B_2 J_2$ dargestellt und in Fig. 5 stark ausgezogen. J_1 und J_2 sind die beiden elementaren Inversionspunkte, in denen $\frac{v}{T} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ wird, so daß also die Tangenten an die Isobare durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgehen. B_1 und B_2 sind die Boyleschen Punkte, in welchen sich die theoretische und die wirkliche Isobare schneiden. Zwischen B_1 und B_2 ist $\triangle v < 0$, unterhalb B_1 und oberhalb B_2 dagegen ist $\triangle v > 0$.

Für die Isobare $p = 300$ kg/qcm erhält man z. B. folgende Zahlen:

Punkt B_1: $T = 235{,}2^0$; $v = 2295$ ccm; $\triangle v = 0$ ccm
Punkt J_1: $T = 297\ ^0$; $v = 2822$ „ ; $\triangle v = -75$ „
Punkt B_2: $T = 644{,}8^0$; $v = 6295$ „ ; $\triangle v = 0$ „
Punkt J_2: $T = 1023\ ^0$; $v = 10006$ „ ; $\triangle v = +26$ „

Aus diesen Betrachtungen geht deutlich hervor, daß die in § 6 erwähnte Schlußfolgerung Porters betreffend die Lage der Inversionspunkte irrig war.

Für den Wärmeinhalt erhalten wir aus Gl. (10)

$$i = c_p^0\left(T + \frac{17{,}8p}{T} - \frac{23500p}{T^2} + \frac{20p^3}{T^3}\right) + \text{konst.}$$

Hierdurch läßt sich jede gewünschte Drosselkurve $i =$ konst. im p/T-Diagramm einzeichnen. Aus diesen Drosselkurven kann man dann die endliche Abkühlung nicht nur bei der Abdrosselung auf Atmosphärendruck, sondern auch für jeden beliebigen Enddruck abgreifen.

Zusammenfassung.

1. Die Gleichungen von Linde, Davis und Grindley, welche die Temperaturänderung bei der Drosselung mit der spezifischen Wärme in Verbindung setzen, lassen sich unmittelbar aus der Thomsonschen Grundgleichung entwickeln.
2. Der elementare Kühleffekt läßt sich aus der endlichen Abkühlung stets berechnen, wenn letztere als Funktion von Druck und Temperatur bestimmt ist. Die umgekehrte Berechnung der endlichen Abkühlung aus dem elementaren Kühleffekt ist aber nur bedingungsweise möglich.
3. Sowohl die spezifische Wärme wie auch die Zustandsgleichung lassen sich durch die Werte der endlichen Abkühlung viel bequemer darstellen als durch den elementaren Kühleffekt.
4. Aus vorstehenden Gründen ist den Bestimmungen der endlichen Abkühlung ein größerer praktischer Wert beizumessen als den Messungen des elementaren Kühleffekts.
5. Es muß zwischen der Inversionskurve für den elementaren Kühleffekt und der Inversionskurve für die endliche Abkühlung unterschieden werden.
6. Die entwickelten Beziehungen werden auf die bekannt gewordenen Versuchszahlen für Luft angewendet.

(Eingegangen 8. September 1916.)

Zur Absorption solarer positiver (Nordlicht-) Strahlen in der Erdatmosphäre.

Von Richard Swinne.

Vom Rutherfordschen Atommodell ausgehend, hat Darwin[1]) solche Zusammenstöße von α-Teilchen mit Atomen von geringer Masse behandelt, durch die deren Kerne, ihrer Elektronen beraubt, in Bewegung gesetzt werden. Beträgt die Masse dieser Atomkerne $M = \mu M_\alpha$, so folgt für ihre Geschwindigkeit

$$V = V_\alpha \frac{2}{(1+\mu)} \cos\vartheta,$$

wobei sich der Index α auf das stoßende α-Teilchen bezieht; ϑ ist hierbei der Winkel zwischen der Bahn des gestoßenen Atoms und der ursprünglichen Richtung des α-Teilchens. Insbesondere ließ die Theorie für den Durchgang von α-Teilchen durch Wasserstoff eine leicht nachweisbare Bildung von H-Teilchen, den eine positive Ladung tragenden Kernen der Wasserstoffatome, erwarten. Die Bohrsche Theorie der Geschwindigkeitsabnahme geladener Teilchen beim Durchgang durch Materie[2]) ergab für die bei einem geraden Zusammenstoß ($\vartheta = 0$) gebildeten H-Teilchen eine etwa viermal größere Reichweite, als die der sie erzeugenden α-Teilchen beträgt. Der Nachweis der Erzeugung solcher H-Teilchen gelang Marsden[3]) mittels der Szintillationsmethode und kürzlich auch D. Bose[4]) mittels der Wilsonschen Methode[5]) der photographischen Fixierung der Bahnen geladener Teilchen.

Wird nun angenommen, daß α-Teilchen von unserer Sonne ausgeschleudert werden, so ist im Sinne dieser Darwinschen Theorie der Schluß naheliegend, daß sie die Atomkerne der leichten Bestandteile der äußersten Gashülle der Sonne, nämlich von Wasserstoff und Koronium, analog den H-Teilchen der erwähnten Versuche, in Bewegung setzen, falls nicht bereits durch radioaktive Vorgänge auf der Sonne auch H-Teilchen fortgeschleudert werden[6]). Auch beim Zusammenstoß mit Wasserstoff oder mit dem von A. Wegener vermuteten Geokoronium in den höchsten Schichten unserer Atmosphäre

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. (6) **27**, 499, 1914.
2) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **25**, 10, 1913; vgl. auch unten.
3) E. Marsden, Phil. Mag. (6) **27**, 824, 1914; E. Marsden und W. C. Lantsberry, Phil. Mag. (6) **30**, 240, 1915.
4) D. Bose, diese Zeitschr. **17**, 388, 1916; vgl. auch J. C. Mc Lennan und H. V. Mercer, Phil. Mag. (6) **30**, 676, 1915.
5) C. T. R. Wilson, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **10**, 34, 1913.
6) Vgl. über event. radioaktive H-Teilchen die ebenerwähnte Arbeit von Marsden u. Lantsberry.

könnten einfallende α-Teilchen (oder sonst geeignete Korpuskularstrahlen hoher Geschwindigkeit) H- bzw. Geokoronium-Teilchen (event. sogar α-Teilchen) bilden.

Bereits Birkeland[1]), Störmer[2]) und Lenard[3]) haben kurz positive Teilchen als mögliche Polarlichterreger erwähnt; ausführlich hat Vegard[4]) die in dieser Hinsicht zugunsten der α-Teilchen sprechenden Punkte erörtert. Nun ergab die von Störmer auf Bossekop in der Nacht vom 11. auf den 12. März 1913 während ihres Durchgangs durch den Zenith stereophotogrammometrierte Nordlichtdraperie zusammen mit den gleichzeitig auf Haldde erhaltenen magnetischen Registrierungen die Schlußfolgerung, daß dies Polarlicht durch positiv geladene, aus dem Weltenraum in die Luft eindringende Teilchen hervorgerufen wurde[5]). Es mag daher angebracht sein, die Absorption kosmischer oder solarer positiver Strahlen seitens der Erdatmosphäre zu behandeln; die Absorption von Kathodenstrahlen durch die Lufthülle ist bereits von Lenard[6]) untersucht worden, wobei er auf den ersten photogrammometrischen Höhenbestimmungen der Nordlichter durch Störmer[7]) fußte, indem sie, im Birkelandschen Sinne, als durch solare Elektronen (Heliokathodenstrahlen) hervorgerufen, betrachtet wurden.

Bereits Vegard hat aus den Wegenerschen Angaben[8]) über den Luftdruck in großen Höhen mit Hilfe der Geigerschen Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Reichweite von α-Teilchen die zum Durchdringen von Schichten homogener Luft bzw. Wasserstoff notwendigen α-Teilchengeschwindigkeiten berechnet. Das Daltonsche Gesetz der Partialdrucke verlangt aber die einzelnen Luftbestandteile getrennt zu behandeln, wie dies bei der Berechnung der Elektronenabsorption (unter Voraussetzung von Massenproportionalität) schon Störmer[9]) getan hat. Die von diesem Forscher (S. 121) für die einzelnen Luftbestandteile in verschiedenen Höhen über dem Meeresspiegel angegebenen Werte von $\gamma_k \lambda_k e^{-b_k h}$ ergeben, mit der Luftdichte bei 0° C und 76 cm Hg multipliziert, die in g/cm² gemessenen Massen der betreffenden Gassäulen. Bei positiven Strahlen, spez. α-Teilchen und auch H-Teilchen[1]) weisen nicht gleiche Massen verschiedener Stoffe gleiches Absorptionsvermögen auf, sondern — im Sinne des Braggschen Gesetzes — deren Quotienten durch die Summe der Quadratwurzeln aus den Atomgewichten A der betreffenden Verbindung. Es sind daher in der Tabelle für verschiedene Höhen über dem Meeresspiegel (von 20 bis 500 km) die entsprechenden Quotienten

$$\frac{\gamma_k \lambda_k e^{-b_k h}}{\sqrt{A_k}},$$

auf Wasserstoff bezogen, berechnet, dgl. ihre Summe Σ und das Produkt dieser Summe in die Luftdichte bei 0° C und 76 cm Hg, d. h. das in g/cm² gemessene Wasserstoffäquivalent der betreffenden Luftsäule. Die Verknüpfung der Geigerschen und der Braggschen Beziehungen ergibt für die α-Teilchengeschwindigkeit V_α, welche durch die gegebene Säule gerade gebremst wird, den Wert

$$V_\alpha = 3{,}51 \times 10^8 \times \sum \frac{\gamma_k \lambda_k e^{-b_k h}}{\sqrt{A_k}};$$

die so erhaltenen V_α-Werte sind auch in der Tabelle angegeben.

Ein anderer Weg zur Schätzung des Bremsvermögens von Materie für geladene Teilchen wird durch die Bohrsche Theorie der Geschwindigkeitsabnahme solcher Teilchen beim Durchgang durch Materie[2]) geboten. Diese ergibt

$$\frac{dV}{dx} = -K_1 \frac{n}{V^3}\left(\log\text{nat}\, V^3 - \frac{1}{n}\sum \log\text{nat}\, \nu + K_2\right) \quad (1)$$

wobei n die Anzahl der auf eine Molekel des bremsenden Gases entfallenden Elektronen und ν deren Eigenfrequenz bedeutet. Da diese Bohrsche Annäherung für geringe Geschwindigkeiten zu gelten aufhört, so sei mit Darwin[3]) die Geigersche empirische Formel für die Reichweite R und die Anfangsgeschwindigkeit V_0, welche für α-Teilchen in Luft gilt, herangezogen. Nach ihr beträgt $V^3 = V_0^3 (1 - x/R)$; demnach folgt hieraus zusammen mit (1)

$$R = \frac{V_0^4}{3nK_1 \left(\log\text{nat}\, V_0^3 - \frac{1}{n}\sum \log\text{nat}\, \nu + K_2\right)},$$

wobei (2)

$$K_1 = 1{,}193 \times 10^{34} \frac{\eta^2}{\mu} \text{ u. } K_2 = -21{,}77 - \log\text{nat}\, \eta$$

1) K. Birkeland, Videnskapsselskapets Skrifter Kristiania I. Math.-nat. Kl. 1901, Nr. 1.

2) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat., Genf 1907, Sonderabdruck S. 14; 1911/2, Sonderabdruck S. 123.

3) P. Lenard, Heidelberg. Ber., Math.-nat. Kl. 1911, Nr. 12, Anm. 7.

4) L. Vegard, Phil. Mag. (6) **23**, 211, 1912.

5) C. Störmer, Terr. Magn. **20**, 12, 1915.

6) P. Lenard, Heidelberg. Ber., Math.-nat. Kl. 1910, Nr. 17.

7) C. Störmer, Vid.selsk. Skrifter Kristiania, Math.-nat. Kl. 1911, Nr. 17.

8) A. Wegener, Thermodynamik der Atmosphäre, Leipzig 1911, S. 46.

9) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat., Genf, 1911/2, Sonderabdruck S. 114—123.

1) Vgl. hierüber E. Marsden, a. a. O. S. 829.

2) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **30**, 595, 1915.

3) C. G. Darwin, Phil. Mag. (6) **27**, 504, 1914.

Höhe	$\frac{\gamma_k \lambda_k e^{-b_k h}}{\sqrt{A_k}}$ [cm]						Wasserstoff-äquivalent	$V_\alpha \times 10^{-9}$
[km]	H_2	He	N_2	O_2	Ar	Σ	$\left[\frac{g}{cm^2}\right] \times 10^3$	[cm/sec]
500	0,115					0,11	0,15	0,78
450	0,199					0,20	0,26	0,93
400	0,343					0,34	0,44	1,12
350	0,591	0,001				0,59	0,77	1,34
300	1,019	0,003				1,02	1,32	1,61
250	1,757	0,010				1,77	2,28	1,94
200	3,028	0,028				3,06	3,95	2,32
180	3,765	0,043				3,81	4,92	2,50
160	4,681	0,066				4,75	6,14	2,69
140	5,820	0,102				5,92	7,66	2,90
120	7,237	0,157	0,003			7,40	9,56	3,12
100	8,998	0,241	0,053	0,001		9,23	12,01	3,37
90	10,03	0,298	0,240	0,009		10,58	13,68	3,51
80	11,19	0,370	1,095	0,050		12,70	16,43	3,74
70	12,48	0,458	4,987	0,282		18,21	23,55	4,12
60	13,91	0,568	22,67	1,595	0,004	38,75	50,10	5,42
50	15,51	0,703	103,4	9,02	0,030	128,66	166,3	8,08
40	17,30	0,870	470,7	51,0	0,286	540,15	698,4	13,04
30	19,29	1,08	2144,	288,2	2,41	2455,0	3174,3	
20	21,50	1,34	9763,	1630,2	20,83	11437	14788	

für Gase bei 0° C und 76 cm Hg und durchgehende Teilchen, deren Masse $M = \mu M_\alpha$ und deren Ladung $E = \eta E_\alpha$ ist. Die Gleichung (2) ergibt für Wasserstoff bei 15° C und 76 cm Hg-Säule die Reichweite der α-Teilchen von RaC, deren Geschwindigkeit $V_\alpha = 1,922 \times 10^9$ cm/sec[1]), zu 30,6 cm, während Taylor[2]) experimentell 30,9 cm gefunden hat. Die zur Bremsung eines Teilchens nötige Masse in g pro cm² ergibt sich aus (2) gleich dem Produkt (RD), wobei D die Dichte der bremsenden Schicht bedeutet; speziell für Wasserstoff folgt nach Einführung der numerischen Konstantenwerte

$$(RD)_{H_2} = \frac{V^4}{7,973 \times 10^{38}} \frac{\mu}{\eta^2 \left(\log \text{nat} \frac{V^3}{\eta} - 57,37\right)} \left[\frac{g}{cm^2}\right]; \qquad (3)$$

die in der 8. Kolonne der Tabelle angeführten Wasserstoffäquivalente sind die gleichen $(RD)_{H_2}$-Werte der betreffenden Luftsäulen.

Es erscheint wohl angebracht, die zur Bremsung der α-Teilchen der bekannten Radioelemente erforderlichen Luftsäulen zu berechnen; desgl. diejenigen, welche auf diese α-Teilchen zurückgehende H-Teilchen zu stoppen vermögen. Nun umfassen die Anfangsgeschwindigkeiten der bekannten α-Teilchen den Bereich 1,37 bis $2,06 \times 10^9$ cm/sec[1]); berücksichtigt man den neuesten, noch nicht genügend geklärten Befund der wenig zahlreichen, sehr durchdringenden α-Teilchen von ThC[1]), so beträgt der größte V_α-Wert $2,20 \times 10^9$ cm/sec. Die diesen α-Teilchen zugehörigen $(RD)_{H_2}$-Werte reichen bis $3,24 \times 10^{-3}$ bzw. sogar bis $4,51 \times 10^{-3}$ g/cm²; die entsprechenden $(RD)_{H_2}$-Werte für die durch diese α-Teilchen erzeugten H-Teilchen reichen aber bis $10,31 \times 10^{-3}$ bzw. sogar bis $22,93 \times 10^{-3}$ g/cm². Somit könnten die schnellsten α-Teilchen bis zu einer Höhe von etwa 220 km über dem Meeresspiegel aus dem Weltenraum bei senkrechtem Einfall gelangen bzw. — sogar bis etwa 190 km; die schnellsten, durch sie gebildeten H-Teilchen — bis etwa 80 km bzw. sogar bis etwa 70 km Höhe (die zweiten Werte beziehen sich auf die neuentdeckten α-Teilchen von ThC).

Diese Höhenwerte stimmen auffallend gut mit den neueren Höhenbestimmungen der unteren scharfen Grenze der Nordlichter überein. Die durch die Wahl einer zu kleinen Basislinie (4,3 km) den photogrammometrischen Messungen der I. Störmerschen Expedition nach Bossekop innewohnende Ungenauigkeit wurde auf der II.[2]) durch Verwendung einer viel längeren Basis (27,5 km) bei sonstigen Verbesserungen vermieden. Das hierbei erhaltene Material von 2500 Einzelwerten bei 447 Parallaxenbestimmungen ergab kein Nordlicht unterhalb 86 km Höhe; 22 Werte entfallen auf den Bereich von 86—90 km, 2098 auf 90—129 km, 322 auf 130—199 km, 35 auf 200—350 km[3]). Die

1) E. Rutherford und H. Robinson, Wien. Ber. **122**, IIa, 1879, 1913.
2) H. S. Taylor, Phil. Mag. (6) **26**, 408, 1913.

1) Sir E. Rutherford und A. B. Wood, Phil. Mag. (6) **31**, 379, 1916.
2) C. Störmer, Terr. Magn. **18**, 133/5, 1913; **20**, 1/12, 1915; 159/74, 1915.
3) C. Störmer, C. R. **162**, 390, 1916.

im gleichen Winter 1912/13 auf Spitzbergen von K. Wegener[1]) und bei Bossekop von Krogness und Vegard[2]) mit kleineren Basislinien auch weniger zahlreich ausgeführten Nordlichthöhenbestimmungen stimmen mit dem obigen Ergebnis überein; hier entfällt die untere scharfe Nordlichtgrenze auf etwa 85 bis 130 km bei letzteren und auf 70 bis 120 km bei ersterem.

Es möge erwähnt werden, daß Birkeland[3]) die Störmersche Deutung der gleichzeitig mit jener oben erwähnten Nordlichtdraperie erhaltenen Magnetogramme in Zweifel zieht und damit auch die Auffassung der Nordlichtstrahlen als positiver Strahlen. Ohne in diese Diskussion eingreifen zu wollen, wollte der Verfasser in dieser Mitteilung allein den Nachweis führen, daß, ihrer Durchdringungsfähigkeit nach, die Nordlichtstrahlen sehr wohl durch positive Träger bereits bekannter Geschwindigkeit, nämlich durch H-Teilchen, hervorgerufen werden könnten. Ihr für die magnetische Ablenkbarkeit maßgebendes Produkt

$$(H\varrho) = \frac{MV}{E}$$

fällt geringer aus, als bei den sie erzeugenden α-Teilchen; beziehen wir uns wieder auf α-Teilchen, so gilt

$$(H\varrho) = (H\varrho)_\alpha \cdot \frac{2}{\eta\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}.$$

Demnach beträgt das charakteristische Produkt für H-Teilchen $^4/_5\,(H\varrho)_\alpha$, erreicht somit für die schnellsten, oben erörterten H-Teilchen allein $3{,}44 \times 10^5$ bzw. $3{,}76 \times 10^5$ [C.G.S.], während Birkeland[4]) für seine Heliokathodenstrahlen $(H\varrho) = 3 \times 10^6$ angibt. Doch wäre nach Störmer[5]) mit dem bekannten Winkelabstand des Polarlichtgürtels vom magnetischen Pol auch ein kleinerer $H\varrho$-Wert vereinbar, falls äquatorielle (außerhalb der Erde kreisende), elektrische Ströme anzunehmen wären. Weitere Eigenschaften der H-Teilchen in Beziehung zu den Nordlichtstrahlen zu erörtern, möge aufgeschoben werden, bis daß sie genügend experimentell untersucht worden sind.

1) H. Hergesell, Das deutsche Observatorium in Spitzbergen I. Schriften d. Wiss. Ges. Straßburg, Nr. 21, S. 21, 1914.

2) O. Krogness und L. Vegard, Videnskapsselsk. Skrifter Kristiania I. Math.-nat. Kl. Nr. 11, 1914.

3) K. Birkeland, Arch. d. sc. phys. et nat. Genf, (4), **41**, 22, 109, 1916.

4) K. Birkeland, The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902/3. Christiania, S. 594, 1913.

5) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat. Genf (4) **32**, Sonderabdruck S. 101, 1911/12.

Bad Rappenau (Baden), den 30. August 1916.

(Eingegangen 3. September 1916.)

Über sekundäre Wirkungen der Röntgenstrahlen.

Von Friedrich Voltz.

In einer früheren Arbeit, betitelt: „Zur Frage der Härtemessung der Röntgenstrahlen auf photographischem Wege“, diese Zeitschrift **16**, 306 1916, habe ich auf Grund mehrerer Versuchsreihen den Schluß gezogen, daß es durchaus nicht gleichgültig ist, mit welcher Sorte photographischer Platten man eine photographische Härtebestimmung der Röntgenstrahlen durchführt und daß es außerdem durchaus nicht gleichgültig ist, wie die oder jene Platte nach der Exposition entwickelt wird, wobei die Entwicklerzusammensetzung bestimmend ist. Weiter habe ich in der damaligen Arbeit bereits angedeutet, daß auch bei der subjektiven Feststellung der Härte einer Röntgenröhre auf fluorometrischem Wege Unterschiede auftreten werden, wobei die Unterschiede von dem zur Messung verwandten Leuchtschirm abhängig sind. Aus diesen seinerzeitigen Feststellungen habe ich dann den weiteren, allerdings schwerwiegenden Schluß gezogen, daß unsere Härtemeßtechnik, soweit dieselbe auf fluorometrischen oder photographischen Methoden beruht, mit großen Fehlerquellen behaftet ist und daß man diese Methoden nur mehr zu orientierenden Schätzungen verwenden solle, während man für exakte Messungen entweder die Spannungsmessung an der Röntgenröhre oder ionometrische Methoden anwenden müsse. Wegen dieser Schlußfolgerung, die allerdings für manche röntgenologische Arbeiten die Umgestaltung der Grundlagen erfordert, bin ich mehrfach scharf angegriffen worden, obwohl meine damaligen Versuchsreihen mit größter Sorgfalt durchgeführt worden waren. In der Zwischenzeit habe ich nun in zwei größeren Arbeiten in den „Fortschritten auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen“, unter dem Titel: „Röntgenstrahlenmeßeinrichtungen und deren Vergleich“ und „Ziele und Probleme der Röntgenstrahlenmeßtechnik“ gezeigt, daß meine seinerzeitige Schlußfolgerung wohlberechtigt war.

Ich will nun heute einige weitere Beobachtungen mitteilen, die die erwähnten Schlußfolgerungen weiter begründen. Im Anschluß daran will ich dann auch versuchen eine Darstellung all dieser Erscheinungen zu geben.

Die Heyden-Aktiengesellschaft in Dresden-Radebeul brachte vor einiger Zeit einen neuen Durchleuchtungsschirm in den Handel, der gegenüber den bisherigen Leuchtschirmen mancherlei Vorteile aufweist, so insbesondere die bedeutend größere Helligkeit. Auch hat der Schirm noch die angenehme Eigenschaft

weniger nachzuleuchten, als dies Schirme anderen Fabrikats tun. Das Korn des Schirmes scheint ebenfalls ein feineres zu sein, als das anderer Schirme, ebenso wie das der Bariumplatinzyanürschirme, was für manche Untersuchungen, insbesondere physikalischer Natur, sicherlich von Vorteil sein dürfte.

Einen derartigen Schirm bekam ich vor längerer Zeit zu Versuchszwecken zur Verfügung gestellt und machte ich zunächst einige orientierende Versuche, die mich von den obenbeschriebenen Vorteilen des neuen Schirmes überzeugten. Als Vergleichsschirm verwandte ich einen „Astral"schirm der Firma Reiniger, Gebbert & Schall. Zu den rein orientierenden Versuchen benutzte ich das Phantom einer Hand und konnte dabei ohne weiteres feststellen, daß bei gleicher Röhrenspannung, gleicher Belastung, gleicher Betriebsart das Durchleuchtungsbild des Phantoms auf dem „Astral"schirm dunkler und kontrastreicher erschien, als auf dem neuen „Ossal"schirm der Heyden-Aktiengesellschaft. Der Kontrastreichtum des Bildes mag für medizinische Untersuchungen von Vorteil sein. Dagegen machte das Durchleuchtungsbild auf dem „Ossal"schirm den Eindruck, als ob es ganz bedeutend härter sei als das Bild auf dem „Astral"schirm, trotzdem die Röhrenspannung und die Belastung der Röhre die gleiche geblieben war. Diese Beobachtung wurde von einer ganzen Reihe von Herren, denen ich dieselbe mitteilte und denen ich die Durchleuchtungsbilder vorführte, gleichfalls gemacht.

Ich baute nun ein Stück des neuen „Ossal"-schirmes und ein Stück „Astral"schirm zusammen in einen Rahmen ein und zwar so, daß die Schnittflächen der Schirme in der Mitte der Rahmenfläche direkt aneinanderstießen. Hinter diesen Rahmen wurde nunmehr das Phantom gebracht und zwar so, daß die eine Hälfte des Phantoms hinter den „Ossal"schirm zu stehen kam, während die andere Hälfte hinter dem „Astral"schirm war. Schaltete man nun die Röhre ein, so hatte man die unbedingte Gewißheit, daß die Röhrenspannung und die Belastung der Röhre während der Beobachtung die gleiche blieben. Und tatsächlich zeigte sich denn auch bei diesem Versuch das Resultat des Vorversuches völlig bestätigt. Das Durchleuchtungsbild auf dem „Ossal"schirm erschien bedeutend härter. Man konnte nun die Durchleuchtungsbilder bequem miteinander vergleichen und es zeigte sich dabei, daß der Härteunterschied sehr groß war. Es war also keine Täuschung, sondern Tatsache. Die Leuchtfarbe ist bei beiden Schirmen grünlich.

Die durch diese Versuche festgestellte Beobachtung veranlaßte mich nun einige systematische Versuche anzustellen, durch die dargetan werden sollte, ob meine früheren Beobachtungen über die Differenzen bei den fluorometrischen Methoden auch für den neuen Leuchtschirm zu Recht bestehen. Gleichzeitig wollte ich damit untersuchen, wie groß die Unterschiede bei den Härtebestimmungen sind, wenn man die fluorometrische Methode anwandte und verschiedene Leuchtschirme benutzte. Ich baute deshalb in einen Rahmen von 60 cm Länge und 15 cm Höhe 3 Fluoreszenzschirme ein und zwar so, daß die Schnittflächen der Schirme unmittelbar aneinanderstießen. Die Größe der einzelnen Schirme war je 20 × 15 cm. An Fluoreszenzschirmen baute ich ein einen „Ossal"schirm, einen „Astral"schirm und einen Bariumplatinzyanürschirm.

Bei den ersten Versuchsreihen war hinter den Schirmen eine Wehneltskala angebracht, und zwar eine mit einem nach einer geometrischen Reihe zweiter Ordnung treppenförmig ansteigenden Aluminiumkeil. Der Rahmen wurde auf einem Schlitten angebracht, so daß die einzelnen Schirme rasch und bequem vor den Wehneltkeil gebracht werden konnten. Die Röhrenspannung wurde genau kontrolliert und außerdem wurden zu den Versuchen nur sehr gut eingearbeitete Röhren verwandt. Es wurde eine ganze Anzahl von Versuchsreihen durchgeführt, die hier alle zu beschreiben, viel zu weit führen würde. Es genügt eine dieser Reihen aufzuführen, welche die Erscheinung typisch genug zeigt. Dieselbe ist in Tabelle I enthalten.

Tabelle I.

Härte in Wehnelteinheiten, Müller-Wasserkühlröhre, „Apex"-Instrumentarium (Induktorapparat) von Reiniger, Gebbert & Schall.

Röhrenbelastung	„Astral"-Schirm	„Ossal"-Schirm	Barium-Schirm
1 M.A.	8	9	8
2 M.A.	9	10	8
3 M.A.	9—(10)	11	8—(9)
4 M.A.	9—(10)	11	8—(9)
5 M.A.	9—(10)	über 11	9

Die Versuchsreihen wurden dabei so durchgeführt, daß die Röhre unter genauer Kontrolle der Röhrenspannung auf die jeweilige Belastung eingestellt wurde und dann die einzelnen Schirme nacheinander vermittels der Schlittenführung des Rahmens vor den Meßkeil gebracht wurden. Bei den zweiten Versuchsreihen wurde an Stelle des Wehneltkeiles eine Benoistskala angebracht und an dieser die Werte auf den Schirmen abgelesen. Ich greife auch hier

nur eine Versuchsreihe von den vielen als Beispiel heraus. Hier wurde ebenfalls die Röhre unter genauer Kontrolle der Röhrenspannung auf die jeweilige Belastung eingestellt. Die erwähnte Versuchsreihe ist in Tabelle II aufgezeichnet.

Tabelle II.

Härte in Benoisteinheiten, Müller-Wasserkühlröhre, „Apex"-Instrumentarium (Induktorapparat) von Reiniger, Gebbert & Schall.

Röhren-belastung	„Astral"-Schirm	„Ossal"-Schirm	Barium-Schirm
1 M.A.	3	3	nicht ablesbar
2 M.A.	4	4	4
3 M.A.	4	5	5
4 M.A.	5	6	5
5 M.A.	6	über 7	5

Die beiden hier aufgeführten Versuchsreihen sind, wie bereits bemerkt wurde, typisch für diese Erscheinung. Oft konnte ich weit größere Unterschiede feststellen. Zu den Beobachtungen habe ich mehrmals des Ablesens kundige Personen zugezogen und diese haben ebenfalls die erwähnten großen Unterschiede feststellen können.

Es geht somit aus den vorausgegangenen Ausführungen hervor, daß Unterschiede in den abgelesenen Härtegraden tatsächlich in sehr weiten Grenzen vorkommen können, und zwar hängen die Unterschiede einzig und allein von dem zur subjektiven Feststellung der Härte verwandten Leuchtschirm ab. Wie aus den aufgeführten Tabellen hervorgeht, scheint in unserem Falle die Röhre härter zu sein, wenn man die Ablesung am „Astral"schirm vornimmt statt am Bariumplatinzyanürschirm und weiter wieder härter, wenn man an dem neuen „Ossal"-schirm abliest, statt am „Astral"schirm.

Das Resultat dieser Versuche deckt sich also vollkommen mit meinen früheren Beobachtungen.

Auch bezüglich der photographischen Härtemessung habe ich meine früheren Versuche fortgesetzt. Die Versuchsbedingungen waren die gleichen, wie ich sie seinerzeit beschrieb, nur bin ich bei der Kontrolle eventueller Fehlerquellen noch strenger und genauer vorgegangen Neuerdings habe ich andere Plattensorten, so Perutzplatten und Matterplatten in den Bereich meiner Untersuchungen gezogen und habe hier ebenfalls meine früheren Versuchsresultate als gültig gefunden.

Wenn wir für diese Erscheinungen, also sowohl die Differenzen in den photographischen Härtebestimmungen als auch die durchaus einwandfreien, hier ebenfalls wieder bewiesenen, Unterschiede in den subjektiven Härteablesungen auf den verschiedenen Leuchtschirmen eine Ursache feststellen wollen, und dieselben damit zugleich einer einheitlichen Erklärung unterwerfen wollen, so müssen wir zunächst etwas weiter ausholen.

Die Schwärzung einer photographischen Schicht, also die chemische Veränderung der in der Emulsion der Platte enthaltenen Silbersalze, ist einzig und allein eine Folge der in der Schicht zur Absorption gelangten Strahlungsenergie, und zwar ist dabei die chemische Variation der Silbersalze, wie allgemein jede Veränderung einer chemischen Verbindung, auf eine Dissoziation ihrer Molekeln zurückzuführen. Die Dissoziation der Molekeln findet wiederum ihre Ursache in der Loslösung von Elektronen aus den einzelnen Atomen der molekularen Systeme.

Die Loslösung findet unter dem Einfluß der absorbierten Röntgenstrahlenenergie statt, d. h. vielmehr nach der Absorption der Röntgenstrahlenenergie erscheint diese nach ihrer Transformation in der kinetischen Energie der Elektronen wieder. Ist der Energieverlust, welchen die in der Zeit t auftreffende Strahlenenergie E_0 beim Durchlaufen einer Silberschicht erleidet dE_0, so ist

$$S_t = \varphi(dE_0) \qquad (1)$$

wenn S_t den jeweiligen Schwärzungsgrad bedeutet. Nehmen wir nun an, daß die Röntgenstrahlen kleinerer Wellenlänge die Träger größerer Energiemengen sind, während umgekehrt die Röntgenstrahlen größerer Wellenlänge die Träger kleinerer Energiemengen sind, so stellt sich die Gesamtenergie eines Spektrums pro Zeiteinheit dar als

$$E_0 = J_0 \cdot V_0, \qquad (2)$$

wobei J_0 die Intensität des Strahlengemisches bedeutet.

Der in Gleichung 1 auftretende Faktor dE_0 ist gebildet durch die Summe der Energiemengen, welche den durch die Absorption gebildeten Elektronen innewohnt.

Es ist:

$$dE_0 = \sum_0^n E'_0, \qquad (3)$$

wobei E'_0 die Energie eines Elektrons bedeutet und n die Anzahl der gebildeten Elektronen darstellt. Die Größe E'_0 ist gegeben durch

$$E'_0 = \frac{1}{2} mc^2 \qquad (4)$$

und für welche Gleichung abzuleiten ist:

$$E'_0 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-27} \cdot f(\lambda) \text{ Erg.} \qquad (5)$$



Nehmen wir hierbei nun weiter an, daß ein Röntgenstrahl die Energie für einen β-Strahl liefert (Bragg und Madsen, Trans. Roy. Soc. of. South. Austral. 1908, S. 32) so erreicht die Zahl n dann ein Maximum, wenn ein Intensitätsmaximum eines Spektrums im Gebiete der Wellenlängen λ_m oder λ_{m+n} liegt, wobei die genannten Wellenlängen gleich sind den Wellenlängen der Eigenstrahlung des Silbers. In diesen Fällen haben wir also Maxima der Schwärzung der Schicht der photographischen Platte zu erwarten.

Diese von mir bereits früher gemachte Annahme findet eine schöne experimentelle Bestätigung in einer neueren Arbeit von E. Wagner, Ann. d. Phys. **46**, 868ff., 1915: „Über Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen". Der Verfasser zeigt hier an Hand seiner außerordentlich wichtigen Versuche, daß die von de Broglie im Bereich der kurzen Wellen des Röntgenspektrums gefundenen zwei Banden nicht durch eine besondere charakteristische Strahlung der Röntgenröhre in diesem Wellenbereich hervorgerufen werden, sondern, daß das Silber und das Brom der photographischen Platte durch den Wellenlängenbereich, in welchem die beiden Banden auftreten, zu starker Eigenstrahlung erregt werden und daß also erst diese sekundäre Strahlung für die Schwärzung der Platte verantwortlich zu machen ist. Nun ist aber, wie ich an anderer Stelle ausführte, die Fluoreszenzstrahlung nicht ein sekundärer Vorgang, sondern ein tertiärer, dem die Bildung und Loslösung der Elektronen vorausgeht. Wagner führt seinen Beweis an Hand folgender Versuche: In den Weg der Röntgenstrahlung wurde eine dünne Folie reinen Silbers gebracht. Da dadurch der Teil des Röntgenspektrums, der die Silberfluoreszenz erregt, absorbiert wird, so muß jetzt die in dem Silber der photographischen Schicht erregte Fluoreszenzstrahlung wegfallen und damit muß auch die Silberbande verschwinden. Dies war denn auch in der Tat der Fall. Wenn sich nun die von Wagner mitgeteilten Versuche nur auf die Silber-Fluoreszenzstrahlung beziehen und noch nicht auf die Bromstrahlung, so ist doch nicht an dem Ursprung der Brombande zu zweifeln.

Die Einwirkung der Röntgenstrahlen auf die photographische Platte beruht demnach im Gebiete der meistens angewandten kurzen Wellen zum großen Teil auf der höchst eigentümlichen Fluoreszenz der Silber- und Bromatome der photographischen Schicht bzw. meiner Auffassung nach auf dem dieser Fluoreszenz vorausgehenden Vorgang.

Wenden wir nun diese Erklärungen auf die meßtechnischen Fragen an, so haben wir im Wege der Röntgenstrahlen, wenn wir ihre Härte mit einer Benoistskala oder einer Wehneltskala feststellen, ein dünnes Silberblech und eine Aluminiumtreppe, bzw. einen Aluminiumkeil. Das Röntgenstrahlenbündel verliert nun beim Durchlaufen der Silberschicht der Skalen denjenigen Wellenlängenbereich, der die Fluoreszenz der Silberatome der Emulsion hervorzurufen imstande ist. Beim Passieren der Aluminiumteile der Skalen verliert das Röntgenstrahlenbündel dagegen nicht diesen Wellenlängenbereich. Bei beiden durchläuft aber der Teil die Schichten, der die Fluoreszenz der Bromatome hervorruft.

Denken wir uns nun unter einer dieser Skalen in lichtdichtes Papier gehüllt eine photographische Platte, so wird in den Silberatomen des unter dem Silberblech liegenden Teiles der Platte ganz normale Absorption stattfinden, während in den Bromatomen selektive Absorption stattfindet. In demjenigen Gebiet der Schicht, das unter den Aluminiumteilen der Skala liegt, wird neben der normalen Absorption sowohl in den Bromatomen als auch in den Silberatomen selektive Absorption stattfinden. In dem Gebiet der Schicht, das unter dem Silberblech liegt, wird also der Schwärzungsgrad bestimmt durch die normale Absorption plus der selektiven Absorption der Bromteile; in dem unter dem Aluminium liegenden Teile der Schicht tritt neben der normalen Absorption in der Schicht auch noch selektive Absorption sowohl in den Bromatomen als auch in den Silberatomen auf.

Nun haben wir bereits ausgeführt, daß der Schwärzungsgrad einer photographischen Platte eine Funktion der Menge der gebildeten Elektronen ist und diese Menge ist einerseits wieder abhängig von der Menge der vorhandenen Silber- und Bromatome, also von der Zusammensetzung der Emulsion und andererseits von den im Vorhergehenden beschriebenen Vorgängen. Sonach wird daraus klar, daß die Werte einer Härtemessung andere werden, wenn die Zusammensetzung der Emulsion eine andere ist. Daß dann auch die Entwicklungsart der Platte einen bestimmenden Einfluß auf die Resultate ausübt, erklärt sich ebenfalls hieraus. Andererseits kann eine ganz geringe Veränderung im primären Spektrum große Bestimmung auf die Schwärzung der Schicht ausüben, ohne daß der mittlere Härtegrad, der eigentlich gemessen werden soll, sich wesentlich verändert.

Ich habe früher an anderer Stelle gezeigt, daß eine Härtemessung niedere Werte ergibt, wenn die Skala, die zur Messung verwendet wird, direkt auf die photographische Schicht



der Platte zu liegen kommt, dagegen höhere Werte wenn zwischen der Meßskala und der Schicht der Platte ein Kartonblatt oder ein Stück Papier liegt. Auch hierfür finden wir die Erklärung in den vorausgegangenen Mitteilungen. Die in dem Silberblech der Meßskala absorbierte Röntgenstrahlenenergie regt die Atome des Bleches zu reger Eigenstrahlung an und diese Eigenstrahlung wirkt wieder auf die Silberatome der Emulsion und trägt als vermehrendes Moment bei der Bildung der Elektronen in der Emulsion bei und so findet eine erhöhte Dissoziation statt und deshalb wird auch die Schicht unter dem Silberblech mehr geschwärzt. Liegt jedoch das Kartonblatt oder das Stück Papier zwischen der Schicht der Platte und der Meßskala, so wird der größte Teil der Energie der Fluoreszenzstrahlung in dem Kartonblatt zur Absorption kommen, daher auch die geringere Schwärzung in diesem Falle.

Wenden wir nun diese Erklärungsform auf die subjektiven Meßmethoden an, so müssen wir uns vor allem klarmachen, daß die chemische Zusammensetzung der fluoreszierenden Massen eine ganz verschiedene ist. Es sind Elemente absolut verschiedenen Atomgewichtes in ihnen enthalten und die sekundär aus diesen Elementen durch die Absorption der Röntgenstrahlen frei gemachten Elektronen spielen dabei die Rolle der Stoßerreger für einen zur Lichtemission befähigten elementaren Oszillator. Für die Größe des Fluoreszenzlichtes ist deshalb auch wieder die Menge der sekundär gebildeten Elektronen maßgebend. So wird es klar, daß die Absorptionsfähigkeit der Fluoreszenzmasse für bestimmte Strahlungsgruppen integrierend ist für das Resultat der subjektiven Messung. Sind in dem primären Röntgenstrahlenspektrum Strahlungskomponenten enthalten, welche imstande sind die Atome eines oder mehrerer Elemente der fluoreszierenden Massen zu erhöhter Elektronenemission anzuregen, so kann das Meßresultat durch dieses vermehrte Auftreten der Elektronen bei dem einen Schirm sehr stark beeinflußt werden, während dies bei dem anderen Schirm noch nicht der Fall ist. Die beschriebenen Versuche zeigen ja auch, daß das Meßresultat durch die Art der Leuchtmasse bestimmt wird.

Zusammenfassung.

1. Durch neuere systematische Versuche ergibt sich eine wesentliche Beeinflußbarkeit einer Röntgenstrahlenhärtemessung durch die Zusammensetzung der fluoreszierenden Masse, wodurch frühere Vermutungen und Beobachtungen bestätigt werden.

2. Es wird durch die beschriebenen Versuche gezeigt, daß die auftretenden Unterschiede sehr groß sein können und gleichzeitig wird im Anschluß hieran eine Erklärung dieser Erscheinungen versucht, wonach eben die selektive Absorptionsfähigkeit der zur Meßreaktion verwandten Substanzen, bzw. die Größe der infolge dieser Eigenschaft absorbierten Energie die bestimmende Rolle spielt.

3. Im Zusammenhang damit wird dargetan, daß auch früher beschriebene Erscheinungen der photographischen Härtemessung in der selektiven Absorptionsfähigkeit der Emulsion ihre Ursache finden.

(Eingegangen 10. September 1916.)

Über das Korn der photographischen Platte und eine Methode zu seiner Untersuchung [1]).

Von Peter Paul Koch
und Gerhard Freiherr du Prel.

(Mit Tafel IX u. X.)

(Aus einem November 1915 an der Universität Göttingen auf Einladung des Kuratoriums der Wolfskehlstiftung gehaltenen Vortrag des einen von uns[2]).)

§ 1. Vorbemerkungen.

Die bisher verfügbaren Methoden zur Untersuchung der Eigenschaften des Bromsilberkornes und seines Verhaltens beim photographischen Prozeß waren der Erzielung zahlenmäßiger Aufschlüsse wenig günstig. So war Bellach[3]) bei seinen schönen Untersuchungen über das Plattenkorn darauf angewiesen, seine Messungen etwa über Korngrößenänderung bei variierter Art der Entwicklung an verschiedenen, selbstverständlich von vornherein möglichst gleichartig gemachten Präparaten vorzunehmen und die derart erhaltenen Messungen aufeinander zu beziehen. Bei der Größenverschiedenheit der Einzelkörner unserer gebräuchlichen Plattenfabrikate ist es klar, daß nur eine große Häufung der Einzelmessungen von Körnern der untersuchten Präparate ein einigermaßen gesichertes Ergebnis zu erzielen gestattet und daß ein von dem der Allgemeinheit abweichendes Verhalten einzelner Körner der Beobachtung ganz entgehen muß. Angesichts dieser Sachlage liegt es nahe, Untersuchungen der geschilderten Art am identifizierbaren Einzelkorn vorzunehmen.

Die dem entgegenstehenden Schwierigkeiten,

1) Wir übergeben die folgende vorläufige Mitteilung auf Wunsch des Institutsvorstandes, Exz. Röntgen, der Veröffentlichung, da es zweifelhaft ist, ob überhaupt und wenn wann die Untersuchung fortgesetzt werden kann.

2) P. P. Koch.

3) V. Bellach, Die Struktur der photographischen Negative. Halle a. S. 1903. Knapp.

die sich jedoch unschwer umgehen lassen, sind verschiedener Art. Im allgemeinsten der im folgenden behandelten Fälle muß das Untersuchungsverfahren zunächst gestatten, von dem nur über einige tausendstel Millimeter ausgedehnten Bromsilberkorn eine stark vergrößerte Mikrophotographie herzustellen, ohne durch die dabei und bei der vorhergehenden Einstellung mit dem Auge nötige Belichtung das Korn merklich, das heißt bis zur Entwickelbarkeit zu beeinflussen. Es muß ferner die Möglichkeit vorhanden sein nach erfolgter Aufnahme dem Korn die auf ihre Wirkung zu untersuchende Behandlung, beispielsweise durch entwickelnde Flüssigkeiten, angedeihen zu lassen. Dadurch verbietet sich die Verwendung der üblichen Präparate mit aufgekittetem Deckglas, während gerade die infolge der Kleinheit des Korns allein in Frage kommenden Mikroskopobjektive höchster optischer Leistung für die Verwendung von Deckgläsern konstruiert sind. Und schließlich muß das Mikroskop mit einer Vorrichtung versehen sein, um das Präparat vor und nach der Behandlung etwa auf die Dimensionen des Kornes genau an die gleiche Stelle unter dem Mikroskopobjektiv bringen zu können.

§ 2. Arbeitsmethode.

Zur Herstellung einer stark vergrößerten Mikrophotographie des Bromsilberkornes, ohne dieses dabei photographisch wirksam zu belichten, diente ein vor die Lichtquelle geschaltetes Rotfilter in Verbindung mit der Benutzung höchstrotempfindlicher Trockenplatten als Aufnahmematerial. Um das Korn im Laufe der Untersuchung mit Flüssigkeiten behandeln zu können, wurde es auf gewöhnliche Mikroskopdeckgläser aufgebracht, die bei der Aufnahme mit der Glasseite dem Mikroskopobjektiv zugewandt waren. Die üblichen Objektträger entfielen also. Schließlich diente ein Anschlag, nach Art des beim Maltwoodfinder[1]) verwandten, zur jederzeit mit genügender Genauigkeit reproduzierbaren Einstellung des Präparates unter dem Mikroskopobjektiv.

§ 3. Einzelheiten des Verfahrens.

Um in der beschriebenen Weise arbeiten zu können und vor allem um Präparate zu gewinnen, bei denen die Körner möglichst in einer einzigen Schicht nebeneinander ausgebreitet waren, verfuhr man folgendermaßen, natürlich bei voller Dunkelheit oder bei stark gedämpftem rotem Licht. Trockenplatten des Handels ließ man einige Stunden in destilliertem Wasser quellen, brachte dann eine kleine Menge der gequollenen Gelatineemulsion auf ein sorgfältig gereinigtes Deckglas, erwärmte dieses vorsichtigst über einem elektrisch geheizten Draht gerade bis zum Schmelzpunkt der (feuchten) Gelatine, drückte rasch ein zweites Deckglas auf, quetschte die Emulsion in eine möglichst dünne Schicht aus und zog beide Deckgläser wieder voneinander ab. Wie an den auf Tafel IX u. X. veröffentlichten Photogrammen zu ersehen, erhielt man auf diese Weise in der Tat Präparate, bei denen die Körner nur in einer Schicht liegen. Die Messung der Dicke der Schicht mit einem Wildschen Libellensphärometer ergab einen gerade noch meßbaren Wert von einigen μ. Behandlung derartiger Präparate mit Entwickler zeigt, daß der Prozentsatz entwickelbarer Körner nicht größer ist als bei direkt der Packung entnommenen unbelichteten Trockenplatten des Handels. Es ist ja auch die leichte Erwärmung bei der Herstellung der Präparate sicher nicht höher als die bei der fabrikatorischen Herstellung der Emulsionen übliche. Übrigens lieferten durch liebenswürdiges Entgegenkommen des wissenschaftlichen Leiters der Perutzwerke München, Herrn Dr. v. Owen, direkt auf Mikroskopdeckgläsern besonders dünn vergossene Emulsionen die gleichen Ergebnisse wie die selbst hergestellten Präparate.

Als Lichtquelle zur Herstellung der Mikrophotogramme des Plattenkorns wurde eine selbstregulierende Bogenlampe verwandt, als Rotfilter ein für andere Zwecke (Isolation der roten Kadmiumlinie $\lambda = 644\,\mu\mu$ aus dem Kadmiumspektrum) bezogenes der Firma Wratten & Wainwright. Ein Zeißmikroskop mit Apochromat 3 mm mit Korrektionsfassung für Deckglasdicke sowie ein Kompensationsokular bildete die Aufnahmeoptik. Das Aufnahmematerial für das etwa 100- bis 400-fach vergrößerte Bild des Plattenkornes waren Panchromatic-B-Platten des Formats 9×12 cm der Firma Kodak (früher Wratten & Wainwright). Ein Beweis für die geradezu erstaunliche Rotempfindlichkeit dieses Fabrikates ist die Tatsache, daß es möglich war unter den beschriebenen Umständen ausreichend belichtete Mikrophotogramme des Plattenkorns in 1—3 Sekunden herzustellen mit Licht von einer Farbe, wie es etwa von einer tiefdunkelroten Dunkelzimmerlampe ausgeht, ohne daß dabei dem aufzunehmenden Korn eine photographisch wirksame Belichtung erteilt wurde.

§ 4. Vorläufige Ergebnisse.

a) Aussehen des Bromsilberkorns.

In Fig. 1 (die Figuren befinden sich auf den Tafeln IX u. X) sind zwei typische Bromsilberkorn-

1) W. Scheffer, Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops. Leipzig, 1911. Teubner. S. 41.

präparate (Emulsion Lumière sensibilité extrême) dargestellt, wie sie zu den meisten der im folgenden beschriebenen Versuche benutzt wurden. Die Korngröße schwankte zwischen 2 und 10 μ etwa. Die Körner sind, wie man sieht, in eine einzige Schicht nebeneinander ausgebreitet. Sehr deutlich zeigt sich besonders bei den größeren Körnern ihre kristallinische Struktur. Sie erscheinen vielfach als Sechsecke (Dreiecke mit abgestumpften Ecken). Ob das Korn räumlich plättchenförmig gestaltet ist, wie wahrscheinlich, oder aber tetraedrisch bleibt festzustellen. Die Fig. 2, 3 und 4 veranschaulichen das Korn einer Kranzeder-Reformplattenemulsion, einer Eisenberger Reformplattenemulsion und einer Lumière-Blau-Etikett Plattenemulsion. Das Korn ist bei den beiden erstgenannten wesentlich feiner (Dimensionen von etwa 4 μ abwärts) als bei den Lumièrefabrikaten.

b) Kornformänderung beim Entwickeln.

In der Fig. 5 ist festgestellt, wie sich das Bromsilberkorn einer Lumière sensibilité extrême-Emulsion nach normaler Belichtung beim Entwickeln mit normalem Metol-Hydrochinonentwickler verhält. Jedem Bromsilberkorn der einen Aufnahme der Doppelfigur entspricht ein ausentwickeltes Silberkorn der anderen Aufnahme. Man ersieht auf einen Blick[1]), daß die Körner auf Bruchteile ihrer Dimensionen genau beim Entwickeln ihre gegenseitige Lage beibehalten, daß sie im allgemeinen ihre Größenausdehnung und Form nicht wesentlich ändern und daß nur manche von den Körnern eine Art Auswüchse erhalten. Im Zusammenhang mit letzterem Befund steht wohl die hier öfters gemachte Beobachtung, daß das ausentwickelte Silberkorn, mit einem Paraboloidkondensor betrachtet, ansgesprochen traubige Struktur hat.

Ganz anders als in der Fig. 5 dargestellt, verhielt sich das Bromsilberkorn einer Kranzeder-Reformplatte, wie Fig. 6 zeigt. Hier verwandelte sich das normal aussehende Bromsilberkorn nach normaler Belichtung und Entwicklung in Silbergebilde, die langgestreckt sind und dabei allerdings im Mittel die Lage der Bromsilberkörner beibehalten haben. Eine weitere Untersuchung muß zeigen, welche Bewandtnis es mit dieser Strukturänderung hat.

c) Entwickler, die feines Korn liefern.

Besonderes Interesse bot das Studium der Wirkungsweise des Paraphenylendiaminentwicklers[2]), dem nachgerühmt wird, daß er auch von groben Bromsilberemulsionen sehr feinkörnige Negative liefert. Fig. 7 zeigt seine Art zu arbeiten. Das erste Teilbild stellt wieder das benutzte Bromsilberkorn (Lumière-sensibilité-extrême) dar, das zweite die identisch gleichen Körner nach reichlicher Belichtung und völliger Ausentwicklung (Entwicklungsdauer 12 Minuten) unfixiert und das dritte Teilbild schließlich dasselbe nach Ausfixierung. Mit großer Deutlichkeit ergibt sich besonders aus einem Vergleich der Teilbilder 1 und 3, daß die Feinkörnigkeit des entwickelten Kornes dadurch zustandekommt, daß der Paraphenylendiaminentwickler nur einzelne Teile des Bromsilberkorns reduziert, andere dagegen offenbar trotz reichlicher Belichtung und langdauernder Entwicklung nicht zu reduzieren imstande ist. Die weitere Verfolgung dieses höchst interessanten Vorganges mit Hilfe der hier benutzten Methode ist sehr verlockend.

Die Tatsache, daß man mit dem Paraphenylendiaminentwickler nur sehr dünne, wenig geschwärzte Negative erhält auch bei reichlicher Belichtung, ist nach dem Gesagten ohne weiteres verständlich. Neben diesem für viele Zwecke offenkundigen Nachteile ist es aber die Frage, ob man mit dem Entwickler ein der Feinheit des entwickelten Silberkorns entsprechendes Auflösungsvermögen der so behandelten Platte für feine Details erhält[1]). Das hängt mit der Frage zusammen ob ein, sagen wir, nur halbseitig belichtetes Bromsilberkorn auch nur auf dieser belichteten Hälfte entwicklungsfähig wird oder ob innere Reflexionen im Bromsilberkorn oder der Entwicklungsmechanismus selbst es bedingen, daß ein derart belichtetes Korn schließlich doch nur als Einheit durch den Entwickler reduziert wird. Versuche, die die Aufklärung dieser Frage bezwecken und die wohl unschwer durchführbar sind, waren im Gange. Übrigens wurde festgestellt, daß auch sehr verdünnter Metolhydrochinonentwickler unter Umständen ähnlich wie der Paraphenylendiaminentwickler nur Teile des reichlich belichteten Bromsilberkorns zu Silber reduziert.

d) Entwickeln nach dem Fixieren.

Auch über den Mechanismus des Entwickelns nach dem Fixieren gestattete das beschriebene Verfahren einige vorläufige Aufschlüsse zu gewinnen. Fig. 8 gibt dafür ein Muster. Die benutzte Emulsion ist die einer Lumière-Blau-Etikett-Platte. Teilbild 1 zeigt sie und Teilbild 2 das Aussehen nach Ausfixieren in 2 proz. Fixiernatronlösung und Entwicklung nach dem im Jahrbuch der Photographie 1913, S. 183 veröffentlichten Rezept (entwickelnde

1) Sehr zu empfehlen ist die Benutzung eines Blinkmikroskops.

2) Lumière und Seiewetz, Zeitschr. f. wissenschaftliche Photogr. **2**, 358, 1904.

1) C. E. K. Mees, Proc. Roy. Soc. **83**, 10, 1909.



Substanz Hydrochinon). Nach dem Fixieren erschien, wie bekannt, die Platte mit der benutzten Optik untersucht glasklar. Vom Bromsilberkorn waren auch nicht mehr Spuren zu erkennen. Ein Vergleich der Teilbilder von Fig. 8 zeigt, daß trotzdem im allgemeinen jedem Bromsilberkorn ein entwickeltes Silberkorn entspricht, wenn auch die Übereinstimmung nicht ganz so ins einzelne geht wie bei der gebräuchlichen Art des Entwickelns vor dem Fixieren. So ist z. B. mehrfach zu beobachten, daß Bromsilberkörner, darunter gerade auch größere, nicht zu einem entwickelten Silberkorn geführt haben, so daß also der im allgemeinen nach dem Fixieren zurückbleibende unsichtbare Kornrest offenbar vom Fixierbad aufgelöst oder mechanisch weggeschwemmt worden sein muß. Auch sind typischerweise viele Silberkörner wesentlich größer als die ursprünglich vorhandenen Bromsilberkörner und wohl auch hier und da von ihrem ursprünglichen Platz verschoben. Eine Fortsetzung der Versuche unter variierten Bedingungen könnte möglicherweise die Unterlagen schaffen für eine Aufklärung des alten Grundrätsels der Photographie, nämlich welcher Art die Beeinflussung ist, durch die das Licht das Bromsilberkorn entwicklungsfähig macht. Eine Untersuchung mit dem Cardioid-Kondensor, bei der der Versuch des Entwickelns nach dem Fixieren an flüssiger Emulsion ausgeführt wurde, zeigte jedenfalls, daß nach dem Fixieren mit diesem zur Zeit geeignetsten verfügbaren optischen Mittel „Keime“ irgendwelcher Art in der Flüssigkeit nicht wahrgenommen werden konnten.

e) Korngröße und Lichtempfindlichkeit.

Es ist eine allgemein verbreitete Ansicht, daß hohe Lichtempfindlichkeit eines Plattenfabrikats mit der Korngröße Hand in Hand geht derart, daß grobes Bromsilberkorn eine besonders empfindliche Platte bedingt, bei der also verhältnismäßig geringe Belichtung eine verhältnismäßig große Schwärzung beim Entwickeln hervorruft. Auch einige der hier reproduzierten Figuren scheinen das zu bestätigen. Beispielsweise ist das feinkörnige Kranzederfabrikat der Fig. 2 sehr viel weniger lichtempfindlich im eben definierten Sinn als das grobkörnige Lumièrefabrikat der Fig. 1. Eine Ausnahme macht allerdings das gleichfalls untersuchte Korn der Hauff-Höchstempfindlich-Platte, die bei mindestens gleicher Lichtempfindlichkeit wie das Lumièrefabrikat wesentlich feinkörniger ist. Auch ist es eine — wie aus mündlichen Äußerungen hervorgeht — bekannte Tatsache der fabrikmäßigen Emulsionsbereitung, daß feinkörnige Emulsionen sehr lichtempfindlich sein können.

Mit der beschriebenen Anordnung bietet es keine Schwierigkeit der aufgeworfenen Frage nachzugehen. Die Untersuchung erfolgte in der Weise, daß zunächst vom Bromsilberkorn ein Mikrophotogramm hergestellt wurde, ohne ihm eine „wirksame Belichtung“ zu erteilen und daß man dann dem Korn eine bestimmt bemessene Zusatzbelichtung gab. Nach Entwickeln und gegebenenfalls Fixieren konnte durch Identifizieren Korn für Korn festgestellt werden, welche Körner durch Belichten entwicklungsfähig geworden waren und wie diese sich auf die verschiedenen vorhandenen Korngrößen verteilten. Man könnte übrigens vermuten, daß, wenn erst einmal festgestellt wäre, daß eine bestimmte Emulsion beim Entwickeln eine Änderung von Korngröße und -Form nicht zeigt, daß dann die das Verfahren einigermaßen komplizierende mikrophotographische Aufnahme des Bromsilberkorns vor der Belichtung entfallen könnte. Das ist aber deshalb nicht angängig, weil man einem durch Entwickeln undurchsichtig gewordenen Korn niemals ansehen kann, aus wieviel Bromsilberkörnern es entstanden ist, die sich etwa vor der Entwicklung berührt haben könnten.

Da ein Blinkmikroskop mit Meßvorrichtung am Ort der derzeitigen Tätigkeit leider nicht zur Verfügung stand, mußte man sich beim Auszählen und Größenschätzen des Kornes mit einem Millimeternetz begnügen. Einige somit vorläufige Ergebnisse sind im folgenden mitgeteilt. (Tabellen 1—4)[1]). Die Einzelheiten jeden Versuchs sind den Tabellen beigesetzt. Die Größenangaben der ersten Kolonnen der Tabellen sind nicht direkt miteinander vergleichbar, weil die Mikrophotogramme nicht mit der gleichen Vergrößerung aufgenommen sind. Die angegebenen Werte jeweils der beiden Schlußkolonnen sind, wie wiederholte unabhängige Auszählungen, sowie Zusammenfassung in verschiedenartige Größengruppen zeigten, auf mindestens 10 Proz. sicher. Somit steht unzweifelhaft fest, daß, soweit die bisherigen Erfahrungen gehen, kein eindeutiger Zusammenhang besteht zwischen Korngröße und Empfindlichkeit, vor allem, daß keineswegs die größten Körner einer Emulsion stets die empfindlichsten sind. Im Gegenteil: Tabelle IV zeigt mit Sicherheit, daß der umgekehrte Fall vorkommen kann.

Woher die landläufige Ansicht kommt, daß grobkörnige Platten die höchste Empfindlichkeit zeigen, bleibt offen. Es wäre die Möglichkeit, daß grobkörnige Platten im allgemeinen

1) Fig. 9 stellt die der Tabelle 3 zugrunde liegende Aufnahme dar.



Tabelle I.

Perutz-Emulsion. Belichtung nur durch das rote Licht bei der Aufnahme des Bromsilberkorns. Keine Zusatzbelichtung. Ausentwickelt mit normalem Metol-Hydrochinon-Entwickler.

Mittlerer Durchmesser d. Bromsilberkorns in mm gemessen am Mikrophotogramm mit d. Millimeternetz	Ursprüngliche Zahl der Bromsilberkörner im Gesichtsfeld	Davon entwickelt:	
		Absolute Anzahl	Proz. der ursprünglich vorhandenen
0,2—0,4	161	144	89
0,5—0,7	345	313	91
0,8—1,2	100	89	89

Tabelle II.

Emulsion: Lumière sensibilité extrême. Vorbelichtung durch rotes Licht bei der Aufnahme des Bromsilberkorns praktisch unbeträchtlich. Zusatzbelichtung: 10 Sekunden mit 100 Kerzen aus 4 m Entfernung. Kurz entwickelt mit verdünntem Metol-Hydrochinonentwickler.

0,3—0,6	113	30	27
0,7—1,0	114	44	39
1,1—1,5	9	4	44

Tabelle III.

Einzelheiten wie bei Tabelle II. Länger entwickelt.

0,2—0,4	28	23	83
0,5—0,8	284	171	60
0,9—1,8	106	77	73

Tabelle IV.

Emulsion: Eisenberger Reformplatte. Einzelheiten wie bei Tabelle II. Ausentwickelt mit normalem Metol-Hydrochinonentwickler.

0,1—0,3	69	26	38
0,4—0,6	166	107	64
0,7—1,0	15	2	13

silberreicher und daß sie infolgedessen höhere Schwärzungen zu liefern imstande sind[1]).

Eine Fortsetzung der geschilderten Untersuchungen ist zur Zeit nicht möglich. Neben vielem anderem waren gerade Versuche begonnen, um der Wirkungsweise der Röntgenstrahlen auf das Bromsilberkorn nachzugehen. Diese bietet besonders Interesse, weil sie vermutlich durch sekundär ausgelöste Korpuskularstrahlen erfolgt. Die Versuche Wagners[2]) sprechen dafür, gleichfalls die von Friedrich und Koch[3]), nach denen die Schwärzungskurve für Röntgenstrahlen sehr verschiedener Härte den gleichen Verlauf zeigt.

1) Vgl. das grundlegende Resultat von Hurter und Driffield, bestätigt durch Eder, daß die Schwärzung einer entwickelten Trockenplatte dem Silbergehalt der Schicht proportional ist. Eder und Valenta, Beiträge zur Photochemie usw. 2. Teil, S. 58, Wien 1904.

2) E. Wagner, Sitzungsber. d. kgl. bayer. Akad. d. Wissensch. S. 329, 1914.

3) W. Friedrich u. P. P. Koch, Ann. d. Phys. **45**, 399, 1914.

Nowo-Grodek (Gouvernement Minsk) — München, Physikalisches Institut der Universität, 29. Juni 1916.

(Eingegangen 20. September 1916.)

BESPRECHUNGEN.

K. Jellinek, Lehrbuch der physikalischen Chemie. Vier Bände. Erster Band: Die Lehre von den Aggregatzuständen (I. Teil). XXXVI u. 732 S. mit 81 Tabellen, 253 Textabbild. u. 4 Bildnissen. Lex. 8⁰. Stuttgart, Ferdinand Enke. 1914. Geh. M. 24.—, geb. M. 27.—.

Mit dem vorliegenden Werke unternimmt der Verf. eine Darstellung des Gesamtgebiets der physikalischen Chemie in Form eines ausführlichen Lehrbuches von vier Bänden. Bei Anordnung und Behandlung des Stoffes wurden nach Möglichkeit pädagogische Gesichtspunkte berücksichtigt und entsprechend der Richtung, welche die Entwicklung der physikalischen Chemie genommen hat, die physikalischen Grundlagen der Wissenschaft in den Vordergrund gerückt.

Dem Werke vorangestellt ist ein umfangreiches Literaturverzeichnis, welches, mit allgemeinen Bibliographien beginnend, eine große Anzahl der für den physikalischen Chemiker wichtigsten Werke aufführt und durch geeignete Klassifikation ihrem Inhalte nach kennzeichnet. Hieran schließt sich ein Verzeichnis der wichtigsten Zeitschriften des Gebietes sowie eine Liste von Formelzeichen. — Dieser bibliographische Teil wird besonders den Studierenden von Nutzen sein, würde indessen seinen Zweck noch besser erfüllen, wenn die für den Studierenden zunächst wichtigsten Bücher hervorgehoben wären. Anderseits sollten Werke wie die Kowalewskischen über Infinitesimalrechnung, die Experimentalphysik von Warburg, die Thermodynamik von Poincaré und vor allem die Scientific papers von Gibbs in einer derartigen Zusammenstellung nicht fehlen. — Die hierauf folgende Einleitung weist auf den Zusammenhang der Naturwissenschaften mit den Geisteswissenschaften hin, bietet dem Leser Anregung zum Studium der Philosophie und sucht in dankenswerter Weise im Studierenden das Empfinden zu wecken, daß die Naturwissenschaften nicht durch bloßen Zufall der Philosophie untergeordnet wurden. Eine etwas systematischere, ausführlichere und weniger aphoristische Behandlung dieser Einleitung würde ihren Zweck noch weiter gefördert haben und die Bedeutung der angeregten Fragen noch mehr hervortreten lassen. — Hieran schließt sich eine kurze Betrachtung der Beziehungen zwischen Physik,

Chemie und physikalischer Chemie und des historischen Entwicklungsganges dieser Wissenschaften. — Unter dem Titel „Einige Grundprinzipien der physikalischen Chemie" werden die Atomtheorie, die stöchiometrischen Gesetze, das absolute Maßsystem, sowie die Grundzüge der kinetischen Gastheorie und der Thermodynamik entwickelt. Die Darstellung der letzteren ist recht wohlgelungen, nur wäre für eine spätere Behandlung der heterogenen Systeme eine engere Anlehnung an die Gibbssche Anschauungsweise erwünscht. Die Ausführungen über totale Differentiale (Integration der Ausdrücke $Xdx + Ydy$) erscheinen dem Referenten hingegen ungeeignet zur Einführung in das Wesen der Sache und gerade solche Veranschaulichungen sollten grundsätzlich vermieden werden, die mit größerer Wahrscheinlichkeit das Verständnis einer Sache vortäuschen, als vermitteln, was auch von der Einführung des Ausdrucks „Diminutiv" gilt, dem kein mathematischer Begriff entspricht. — Das hierauf folgende erste Buch behandelt die Lehre von den Aggregatzuständen. Beginnend mit dem gasförmigen Aggregatzustand, werden die Bestimmungen der spez. Wärmen der Gase behandelt und durch Tabellen und gute Abbildungen von Versuchsanordnungen zusammengefaßt und erläutert, sowie die kinetische Gastheorie und die kinetische Ableitung der Gasgesetze ausführlich entwickelt. Ferner werden die Atomschwingungen, die Theorie der spezifischen Wärme, kinetisch und mit Einführung der Quantentheorie und die kinetische Auffassung des zweiten Hauptsatzes klar und eingehend dargestellt. Daran schließt sich die Behandlung der inneren Reibung und Wärmeleitung sowie des Verhaltens der hochverdünnten Gase mit ausführlicher Beschreibung der Apparate zur Erzeugung und Messung hoher Verdünnungsgrade. Diesem Abschnitt folgen entsprechende Kapitel über Erzeugung und Verhalten verdichteter Gase; die van der Waalssche Zustandsgleichung wird abgeleitet und die Theorie des Joule-Thomsoneffekts. Ein weiterer Abschnitt ist dem Vorgange der Kondensation der Gase gewidmet; die kritischen Erscheinungen werden erörtert und die verschiedenen Methoden der Gasverflüssigung, nach ihren Grundprinzipien gesondert, besprochen und durch Abbildungen veranschaulicht. Mit der Behandlung des flüssigen Aggregatzustandes schließt der Band ab. So wie im vorangehenden Teil das Hauptgewicht der Darstellung gelegt ist auf die systematische Vorführung der experimentell gewonnenen Erkenntnisse über den gasförmigen Zustand, so umfaßt der Schlußteil die wichtigsten Experimentalerkenntnisse über den flüssigen Zustand. Hier werden Dichte und Kompressibilität, Wärmeausdehnung, spez. Wärme, innere Reibung und Oberflächenspannung der Flüssigkeiten, sowie deren Meßmethoden ausführlich behandelt. Das folgende Kapitel über den Verdampfungsvorgang bringt die Methoden der Dampfspannungsmessung, der Bestimmung der Verdampfungswärme und im Anschluß hieran die thermodynamische Behandlung der Verdampfung, die Ableitung der Clausius-Clapeyronschen Gleichung und einer Dampfdruckformel unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Verdampfungswärme, endlich die Diskussion des Druckeinflusses und des Einflusses der Oberflächenkrümmung auf die Dampfspannung. Zum Schlusse werden die Methoden zur Bestimmung der kritischen Daten geschildert. — Obwohl die eigentliche theoretische Bearbeitung des gasförmigen und flüssigen Aggregatzustandes dem zweiten Bande des Werkes vorbehalten bleibt, ist doch im vorliegenden Bande das experimentelle Material so zusammengestellt und behandelt, daß die Vorbedingungen zu seiner theoretischen Zusammenfassung bereits erfüllt sind. Wie der Verf. im Vorwort betont, fußt sein Lehrbuch auf älteren Werken, was bei dem großen Umfange des Werkes verständlich ist und diesem um so weniger zum Nachteil angerechnet werden kann, als dadurch in der vorliegenden geschickten Verarbeitung die Vorzüge eines von mehreren Spezialisten bearbeiteten Werkes mit pädagogischer und sachlicher Einheitlichkeit verbunden werden. Auch vereinzelte Mängel, wie die eingangs erwähnten, sind bei der Fülle des Stoffes fast unvermeidlich und können den Wert des Werkes nicht verringern, welches im übrigen warme Anerkennung und Empfehlung verdient. S. Kyropoulos.

(James Clerk Maxwell), Auszüge aus James Clerk Maxwells Elektrizität und Magnetismus. Übersetzt von Hilde Barkhausen. Herausgegeben von F. Emde. 8°. XI u. 182 S. mit 9 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1915. Geh. M. 7.—, geb. M. 8.—.

Das Studium des Maxwellschen Originalwerkes bleibt bekanntlich in den meisten Fällen ein frommer Wunsch. Der Studierende lernt „die Maxwellsche Theorie" gewöhnlich in der ihr von späteren Autoren gegebenen Form kennen — häufig sogar von dem farblos definierenden Standpunkte „das System der Maxwellschen Gleichungen" aus — obwohl doch gerade hier ein Zurückgehen auf die Quelle wertvoll ist. Maxwells Lehrbuch enthält vieles, was mit dem Kern der Sache nur indirekt zusammenhängt: es ist nach bekannter englischer Gepflogenheit eine Superposition von Lehrbüchern aus verschiedenen Gebieten. Für den Anfänger ist es schwer, die Grundzüge herauszufinden. Dieser Schwierigkeit will das vorliegende Buch begegnen. Es ist in der Tat in hervorragendem Maße geeignet, ein ökonomisches Studium des Maxwellschen Buches zu veranlassen. Obwohl man auch ohne gleichzeitige Benutzung des Originals aus Emdes Zusammenstellung ein gutes Bild gewinnen kann, regen diese Auszüge doch gerade zum Nachlesen an. Es handelt sich nun hier weniger um die wortgetreue Übersetzung (zugrunde gelegt ist immer der englische Urtext) als vielmehr um die sinngemäße Darstellung dessen, was Maxwell gemeint hat. Darin geht der Herausgeber anerkennenswerterweise so weit, daß er einige Artikel, die schlechterdings im Original nicht zu verstehen sind, ganz frei bearbeitet wiedergibt. Auch benutzt er, dem Geiste der Maxwellschen Darstellung entsprechend, konsequent Vektorenschrift, und zwar in jener Form, die frei ist von der Erinnerung an die drei Koordinaten. — Dadurch wird neben großer Erleichterung der Rechnung von vornherein eine bessere Aufnahme der Faradayschen Anschauungen, um deren Wiedergabe es Emde zu tun ist, erzielt, als bei der oft reichlich schwerfälligen Darstellung Maxwells. Was Emde im Vorwort im allgemeinen über Vektorrechnung in der Physik sagt, ist durchaus zu billigen. Dem Buche ist beigefügt eine außergewöhnlich reichhaltige Formelsammlung aus der Vektorrechnung, in der man manches Neue finden wird, z. B. die Richtungsableitungen an krummlinigen Koordinaten betreffend (vgl. hierzu auch Emde, Zur Vektorrechnung, Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe XXIV. 1. Heft, sowie das auf Emdes Anregung verfaßte „Lehrbuch der Vektorrechnung" von J. Spielrein, Stuttgart 1916).

Die eigentliche Neuübersetzung ist von Frau Hilde Barkhausen vollzogen worden — in ein hervorragend gutes Deutsch, mit feinem Takt ist die physikalisch zutreffende Ausdrucksweise gefunden worden, so daß der englische Ursprung wirklich nicht mehr durchklingt.

Von den 805 Artikeln bei Maxwell sind hier etwa 120 wiedergegeben. Man kann sich an der Hand des vollständig reproduzierten Inhaltsverzeichnisses sofort unterrichten. Aus der Elektrostatik ist unter Weglassung aller Potentialtheorie und der rein mathematischen Entwicklungen auf etwa 50 Seiten das physikalisch Wichtige gegeben. Viele Anmerkungen — zum Beispiel über die uns nicht mehr geläufige Terminologie Maxwells, Schwierigkeiten bezüglich der Vorstellungen der Polarisation im Dielektrikum, Maxwells nicht konsequente Berücksichtigung der Dielektrizitätskonstanten, die Begriffe „Spannung", Feldstärke sowie namentlich die mechanischen Kräfte und die fiktiven Spannungen — erleichtern das Verständnis. Von Teil II, „Elektrokinematik", ist nur Art. 325 aufgenommen; wie eine Durchsicht erkennen läßt, vollkommen mit Recht, wenn auch vielleicht manchem Physiker einiges aus Kap. VIII (Art. 303?) oder X (334) willkommner sein würde. — Aus dem III. Teil (Magnetismus) ist Kap. II (magnet. Feldstärke u. magnet. Induktion) ganz und ein großer Teil von Kap. III. (magnet. Solenoide und Schalen) gebracht worden. Auch hier findet man wertvolle Erläuterungen. — Dem IV. Teile (Elektromagnetismus) ist wiederum das entnommen, was den Faradayschen Wurzeln entspricht. Nächst Teilen des I. und III. Kapitels ist aus dem VIII. Art. 598—603 gewählt, und ungekürzt wiedergegeben sind Kap. IX (allgemeine Gleichungen des elektromagnetischen Feldes), XI (Energie und Spannungen), XX (Elektromagnetische Lichttheorie). — Bezüglich der Zusätze sei, abgesehen von der dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ zuteil gewordenen Aufmerksamkeit, auf das zu XI gehörende hingewiesen. Art. 641 (Spannungszustand des elektromagnetischen Feldes) ist frei wiedergegeben und 642 ist die ausführliche Bearbeitung der Maxwellschen fiktiven Spannungen. Hier findet man auch eine interessante Zeichnung betreffend das Ellipsoid des fiktiven Spannungsvektors $\mathfrak{P}''$. Daran schließt sich dann eine eingehende Diskussion dieser Spannungen und der von Heaviside, Hertz, Cohn u. a. gegebenen Ansätze. Auch die neueren Messungen über Zugkräfte von Elektromagneten, die größer als $\mathfrak{B}^2 8\pi$ ausfallen, sind berücksichtigt (Fig. 6). — (Übrigens hat Emde zur Erläuterung der Maxwellschen fiktiven Spannungen Vorlesungsmodelle konstruiert: „Drei Modelle zur Erläuterung der Faraday-Maxwellschen Spannungen", Elektrotechnik und Maschinenbau, Heft 12 u. 13. Wien, 1916.) Auch der Abschnitt über elektromagnetische Lichttheorie enthält zahlreiche vertiefende und anregende Zusätze. Bei Art. 797 (Doppelbrechung) ist eine Darstellung in Tensoren gegeben. Auf eine längere, auch numerische Angaben und Kurven enthaltende Ausführung zu 803 sei noch hingewiesen: es handelt sich hier um die Analogien zwischen thermischen und elektromagnetischen Vorgängen („Ausbreitungsgeschwindigkeit").

Manchem Leser würde vielleicht — in Überschreitung der Abgrenzung Emdes auf Grund des Faradayschen Kernes der Theorie — noch einiges aus dem elektromagnetischen Teile, aus Kap. V bis VIII, willkommen gewesen sein, doch ist dies selbverständlich subjektiv! Jedenfalls aber muß diese überaus sorgfältig gearbeitete Zusammenstellung der Beachtung der Physiker angelegentlichst empfohlen werden.

Hörig.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 10. umgearbeitete und vermehrte Auflage. Herausgegeben von L. Pfaundler. IV. Bd. 2. Abt. V. Buch. Magnetismus und Elektrizität von W. Kaufmann, A. Coehn und A. Nippoldt. 2. Abt. VII u. S. 623—976 mit 412 Abb. 3. Abt. (Schluß) VII u. S. 977—1492 m. 312 Abb. u. 3 Taf. Lex. 8. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 1912 u. 1914. Geh. M. 23.—, geb. M. 25.—.

Der vorliegende Band schließt das Lehrbuch der Elektrizität und Magnetismus ab; er ist zum größten Teil (Kapitel 12—14) von W. Kaufmann, zum kleineren Teil (Kapitel 15—16) von A. Nippoldt ebenso wie die früheren Kapitel völlig neu geschrieben. Das Referat ist leider durch die Kriegsverhältnisse unerwünscht verzögert.

Mit derselben außerordentlichen Sorgfalt, sicheren Beherrschung des Materials und eindringenden Klarheit wie die vorhergehenden sind auch diese neuen Kapitel von W. Kaufmann verfaßt. Kapitel 12, das erste des vorliegenden Bandes, behandelt die „Stromleitung in Gasen", also das Gebiet, an dessen schneller und glänzender Entwicklung die Arbeiten Kaufmanns einen wesentlichen Anteil haben. Bei der Kompliziertheit der Versuchstechnik und der Apparatur dieses Gebietes war es hier nicht mehr, wie in den früheren Kapiteln, möglich, möglichst an vom Leser selbst ausgeführte Versuche anzuknüpfen; die Auswahl und Beschreibung der referierten Versuche ist aber so gut, daß trotzdem ein voller Einblick in die komplizierten Erscheinungen gewonnen wird. Kaufmann bringt im Teil A zunächst die wichtigsten Erfahrungstatsachen, die eigentlichen Entladungsvorgänge oder „die selbständige Strömung"; im Teil B die „elektrischen Strahlen" und die Grundlagen der Ionentheorie; im Teil C endlich die ausführliche Entwicklung der Ionentheorie, mit deren Hilfe dann die „unselbständige Strömung" und im Anschluß daran die selbständige Strömung von der theoretischen Seite behandelt werden.

In Teil A werden vor allem an Hand der sog. „charakteristischen" Kurven 1. Der Lichtbogen, 2. Der Funken, 3. Spitzen- und Büschelentladung, 4. Der Glimmstrom, sowie die Übergangsformen zwischen diesen verschiedenen Entladungsarten anschaulich dargestellt. Hier findet sich das wichtige, vom Autor aufgestellte Kriterium des stabilen und labilen Zustandes der Entladung, die Theorie der im Anschluß daran bes. von H. Th. Simon weiter entwickelten Theorie des oszillierenden Lichtbogens, der in der Poulsonlampe für die drahtlose Telegraphie eine wichtige Rolle spielt; ferner der sprechende Lichtbogen, die Funkenpotentiale als Funktion von Schlagweite und Gasdruck, der Glimmstrom bei hohem Gasdruck und der Spitzenstrom. Dann der Glimmstrom in verdünnten Gasen und sein Potentialverlauf, die Ventilwirkungen infolge des Kathodenfalls und die Kathodenzerstäubung.

Kapitel B beginnt mit der ausführlichen Behandlung der Kathodenstrahlen, zunächst ihrer experimentell festgestellten Eigenschaften. Die Deutung und quantitative Beherrschung dieser Tatsachen bringt dann die Elektronentheorie, deren wichtigstes Resultat der Nachweis der Existenz des negativen Elektrons ist; der wichtige Nachweis der Unabhängigkeit von Ladung zur Masse des Elektrons von der Natur der Substanzen, aus denen sie stammt, ist bekanntlich von Kaufmann erbracht. Der Lehre von den Kathodenstrahlen schließt sich die von den Kanalstrahlen an, die ja neuerdings durch die Konstatierung minimalster Mengen von Molekülen auch ein erhebliches chemisches Interesse gewonnen hat. Der Doppler-Stark-Effekt an Kanalstrahlen sowie an den ihnen nahe verwandten, von Gehrcke und Reichenheim entdeckten Anodenstrahlen wird eingehend behandelt. Unter dem Namen „Photokathodenstrahlen" folgt ein Paragraph über die

lichtelektrischen Erscheinungen, die vielleicht eine etwas ausführlichere Darstellung hätten finden können; die lichtelektrische Ermüdung ist nur eben erwähnt. Die Berechnung des Maximums der lichtelektrischen Empfindlichkeit bei einer bestimmten Wellenlänge durch F. A Lindemann, die hier angeführt wird, ist schon durch K. Herrmann als unhaltbar nachgewiesen, da das von Lindemann benutzte Atommodell keine Resonanz zuläßt.

Dann werden noch die Ionisierung durch Ionenstoß, die Absorption der Kathodenstrahlen und die sog. Sekundärstrahlen behandelt. Den Schluß des Kapitels B bildet eine eingehende Darstellung der jetzigen Kenntnisse von den Röntgenstrahlen. Hier ist wieder von der gelegentlich auch früher angewandten historischen Methode Gebrauch gemacht und ein Auszug aus den drei klassischen Arbeiten Röntgens gegeben, über deren Ergebnisse ja 10 Jahre lang unsere Kenntnisse auf diesem Gebiete nicht hinauskamen. § 331 bringt einen reichlich kurzen Exkurs über Röntgentechnik; man vermißt hier die Erwähnung der sog. Gleichrichterapparate. Dagegen wird die Wiechert-Stokessche Theorie der Röntgenstrahlen ausführlich behandelt und ihre Weiterentwicklung durch A. Sommerfeld, die sich besonders auf die sog. Bremsstrahlung bezieht; hier findet sich auch der Bericht über die bekannte Messung der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen von Marx. Aber auch die Fluoreszenzstrahlung, besonders die Versuche von Barkla, wird eingehend referiert. Das Kapitel schließt mit der epochemachenden Entdeckung v. Laues, sowie seiner Mitarbeiter Friedrich und Knipping, der Interferenz der Röntgenstrahlen an Kristallen.

Teil C, die „Theorie der Gasionen" beginnt nach einem Überblick über die ionisierenden Ursachen mit fünf anschaulichen Versuchen über Flammengase. Es folgt die Diskussion des Sättigungsstromes und der Ionisierungsarbeit, ferner die allgemeine Theorie der Ionenbewegung und die Berechnung der „Charakteristik" des Gases, die Molekulartheorie der Ionenbewegung, die Diffusion und Wiedervereinigung der Ionen. Die für atmosphärische Verhältnisse wichtige Kondensationswirkung der Ionen wird ausführlich dargelegt. Der nächste Paragraph bringt die verschiedenen Methoden zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums. Der Austritt von Elektronen aus glühenden Metallen wird sowohl vom Standpunkte der Dampfdrucktheorie wie der Reaktionstheorie behandelt; im Anschluß daran werden andere Reaktionseffekte: Ionisierung durch sich oxydierenden Phosphor, durch ultraviolettes Licht und zum Schluß die sog. Wasserfallelektrizität kurz erwähnt. Einem besonderen Paragraphen über Flammenionen folgt dann eine ausführliche Entwicklung der Theorie der Stoßionisation und des Funkenpotentials. Der Abschnitt schließt mit der Theorie des Spitzenstromes, des Glimmstromes und des Lichtbogens.

Das 13. Kapitel enthält die Elektronentheorie der Metalle. Kaufmann teilt sie ein in A. die thermoelektrischen Wechselwirkungen und B. die galvano- und thermomagnetischen Effekte. Der Begriff „thermoelektrisch" wird insofern etwas weit gefaßt, als ihm auch die Erscheinungen der metallischen Stromleitung subsumiert werden; eine Dreiteilung des Kapitels wäre vielleicht doch natürlicher. Es wird hier zunächst die Elektronentheorie der metallischen Leitfähigkeit entwickelt, wie sie in Anlehnung früherer Arbeiten vor allem von Riecke und Drude aufgestellt ist. Das thermoelektrische Kapitel behandelt sowohl die Ergebnisse des Experiments wie der Theorie. In § 364 wird hier gesagt, daß in einem arbeitenden Thermoelement durch den Strom Wärme vernichtet oder Kälte erzeugt werden muß; richtiger müßte es wohl heißen, daß dabei Wärme von höherer auf tiefere Temperatur übergehen muß, denn nur diese Bedingung ist mit dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik im Einklang. Weiterhin sagt Kaufmann, daß seine Darstellung der Elektronentheorie der thermoelektrischen Erscheinungen an Ausführungen des Referenten und Richardsons anknüpften, die er z. T. kombiniert; es ist jedoch zu bemerken, daß Referent in seiner Theorie sich ausschließlich thermodynamischer Beziehungen bedient und die Anwendung von Gleichungen der kinetischen Gastheorie prinzipiell vermieden hat, Richardson dagegen benutzt für die Verdampfungswärme der Elektronen eine der Kinetik entlehnte Gleichung, deren Nichtübereinstimmung mit den Beobachtungen wenigstens bei Flüssigkeiten bekannt ist. Für die galvano- und thermomagnetischen Effekte werden die elektronentheoretischen Beziehungen in vereinfachter Weise abgeleitet. Unter den thermodynamischen Gleichungen für die Thermoelektrizität, die ja hier auch entwickelt werden, hätte wohl noch die Anwendung des Nernstschen Wärmetheorems aufgenommen werden müssen, die das experimentell bestätigte Nullwerden der Thermokräfte bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt verlangt. Kaufmann betont selbst, daß er die neueren Untersuchungen über das Verhalten der metallischen Leitfähigkeit bei den tiefsten Temperaturen, da noch zu neu, nur flüchtig streife. Bei dem großen prinzipiellen Interesse und den Schwierigkeiten, die hier den Elektronentheorien entstehen, hätten sie vielleicht doch etwas eingehender gewürdigt werden können. Andererseits ist der Kaufmannsche Standpunkt doch anzuerkennen, die zweifellosen Erfolge der Elektronentheorie der metallischen Leitfähigkeit, wie die Deutung des Wiedemann-Franzschen Gesetzes und andere, hervorzuheben, da diese Theorie vermutlich doch die Basis der noch ausstehenden, verbesserten sein wird.

Kapitel 14 bringt auf 80 Seiten eine sehr gute Übersicht über das große Gebiet der Radioaktivität, sowohl nach seiner physikalischen Seite in bezug auf die α-, β- und γ-Strahlung, wie nach der chemischen in bezug auf die Umwandlung der Atome. Es schließt mit einem Paragraphen über Atommodelle. Im § 376 findet sich hier die fundamentale Entdeckung Kaufmanns über die Abhängigkeit der Masse der β-Strahlen von ihrer Geschwindigkeit, sowie die Beziehungen dieser Tatsache zur Relativitätstheorie, ferner die entsprechenden Messungen anderer Autoren. Bei der großen prinzipiellen Bedeutung dieser Versuche dürfte dieser Paragraph doch wohl besser in einem anderen Kapitel des Buches, etwa unter Elektrodynamik, seinen Platz finden als in dem speziellen Kapitel über Radioaktivität, mit der er doch nur mehr äußerlich verknüpft ist.

Mit diesem Kapitel schließt der von Kaufmann bearbeitete Teil des Buches und es folgen noch Kapitel 15 „Der Erdmagnetismus" und Kapitel 16 „Die Erdelektrizität", beide bearbeitet von A. Nippoldt. Das erstere bringt zunächst sehr ausführlich die Meßmethoden des Erdmagnetismus, sowohl der Deklination wie der Inklination, der horizontalen wie der vertikalen Komponente, ferner der zeitlichen Änderungen des Erdmagnetismus. Die Darlegung der Gaußschen Theorie entwickelt ein anschauliches Bild dieses wohl mit bedeutendsten Beispiels einer phänomenologischen Theorie. Gute Karten und Kurventafeln geben eine klare Vorstellung über die Verbreitung des Erdmagnetismus und seiner Variationen. Die Störungserscheinungen leiten über zu den Beziehungen zwischen Sonnentätigkeit und Erdmagnetismus und damit zu den Erscheinungen des Polarlichts. Die von Birkeland entwickelte, dann von Stoermer quantitativ mathematisch durchgeführte Elektronen-

theorie des Polarlichts gibt die volle physikalische Erklärung dieser so lange rätselhaften Erscheinung. Der Satz auf S. 1377, daß das Polarlichtspektrum als Linienspektrum von glühenden Gasen ausgesandt sein müsse, ist wohl nur ein schiefer Ausdruck, es soll wohl eher heißen von lumineszierenden Gasen. Die bisherigen physikalischen Erklärungen des remanenten Erdmagnetismus werden diskutiert, eine sichere Erklärung fehlt noch, wenn auch mögliche Gründe für seine Entstehung angebbar sind.

Noch weit ferner von einer endgültigen Lösung sind die Fragen der Erdelektrizität, die das 16. Kapitel behandelt. Freilich haben in den letzten Jahrzehnten die Messungen des Potentialgefälles der Erde und seine Variationen ein reiches Material erbracht. Einen außerordentlichen Fortschritt bedeuten ferner die vor allem auf Elster und Geitel zurückgehenden Messungen der luftelektrischen Zerstreuung und der Leitfähigkeit der Luft, besonders aber ihre Zurückführung auf die Ionisation durch radioaktive Substanzen. Ein zusammenhängendes Bild der erdelektrischen Erscheinungen läßt sich jedoch noch nicht geben. Doch ergibt sich im einzelnen manches, so die Anwendung der Ergebnisse der Untersuchungen der Radioaktivität der Erdrinde auf geologische Probleme. Ungelöst bleibt zur Zeit noch die Frage, ob die durchdringende Strahlung in höheren Schichten der Atmosphäre von der Sonne herrührt. Die anderen ionisierenden Ursachen, wie besonders die ultraviolette Sonnenstrahlung und die Wasserfallelektrizität komplizieren das Grundproblem, so daß die Beziehungen dieser elektrischen Grundelemente zu den meteorologischen Erscheinungen zwar an einigen Stellen wohl erkennbar werden, aber im allgemeinen ein gesetzmäßiger Zusammenhang noch nicht festzustellen ist. Die Untersuchung der elektrischen Ladung der atmosphärischen Niederschläge hat die erhoffte Theorie der Gewitterbildung in befriedigender Weise noch nicht zu erbringen vermocht. Die Theorie des elektrischen Feldes der Erde auf Grund der durch radioaktive Substanzen bedingten Ionisation der Luft der Erdkruste, in der Form der Ebertschen Modifikation der Anschauungen von Elster und Geitel, ist dem Ziele schon näher. Der Paragraph über elektrische Ströme in der Erdrinde bringt das wichtige Resultat, daß der zeitliche Gang der Süd-Nord-Komponente des Erdmagnetismus mit der der Ost-West-Komponente des Erdstroms parallel geht, so daß dieser als Ursache dieser magnetischen Variation aufgefaßt werden kann; daß dagegen die Nord-Süd-Komponente des Erdstroms dem zeitlichen Differentialquotienten der Ost-West-Komponente des Erdmagnetismus entspricht, d. h. daß der Nord-Süd-strom von den Änderungen des Erdmagnetismus induziert ist. (Die vom Autor beliebte, abkürzende fremdländische Bezeichnung E für Ost ist wohl eine veraltete geophysikalische Gepflogenheit.) Als letzte Ursache der erdelektrischen und erdmagnetischen Variationen erscheint die Sonnenenergie, die das Stromsystem in den höchsten Schichten der Atmosphäre bedingt, das dann gleichzeitig den Induktionsstrom in der Erdrinde und die magnetischen Variationen erzeugt. Zusammenfassend erklärt der Autor, daß die neuere Forschung auf dem Gebiete der Erdelektrizität gegenüber den Kenntnissen früherer Jahrzehnte wohl große und schnelle Fortschritte gebracht habe, daß aber ein abschließendes Bild noch durchaus nicht erreicht sei, daß jedoch diese noch dauernd im Fluß befindlichen Forschungen weitere Klärung erhoffen lassen.

Das nunmehr fertig vorliegende Lehrbuch des Magnetismus und der Elektrizität im alten Gewande des Müller-Pouilletschen Lehrbuchs, aber mit völlig neuem Inhalte bildet eine sehr wertvolle Bereicherung der physikalischen Literatur. Im Umfange über die üblichen Lehrbücher weit hinausgehend und schon mehr der Form eines Handbuches sich nähernd, ist es infolge der Bearbeitung des überwiegenden Teils durch einen Autor der ja nicht zu vermeidenden Ungleichmäßigkeit in der Behandlung der Lehrbücher mit Spezialautoren durch die Einheitlichkeit seiner Darstellungsweise überlegen. Es bringt dem Leser, auf welchem Teilgebiet er auch sucht, sachkundigste Auskunft; man fühlt sich auf jeder Seite des Buches auf dem gesunden, mit besonnener Kritik bearbeiteten Boden experimenteller Naturforschung, was man in unserer Zeit besonders angenehm empfindet.

Freilich die Genehmigung der Anwendung der Infinitesimalrechnung von seiten der Gesamtredaktion für die nächste Auflage, das sei hier nochmals gesagt, ist bei der Tiefe der hier vermittelten Kenntnisse auf das dringendste erwünscht, sie würde für den Leser wie für den Autor eine Erleichterung bedeuten. Daß trotz dieser Erschwerung etwas so Gutes geschaffen wurde, ist ein besonderes Verdienst Kaufmanns und seiner beiden Mitarbeiter. Die weiteste Verbreitung als Lohn der ungewöhnlichen auf dies Buch verwandten Mühe und Sorgfalt dürfte dem Werke sicher sein.

F. Krüger.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Bergakademie Freiberg Dr. Erich Ebert für Chemie, an der Universität Lemberg Dr. Ladislaus Dziewulski für Astronomie, an der Universität Göttingen Dr. O. Nolte für Agrikulturchemie.

Ernannt: Dr. Erich Przybulla zum Observator am Geodätischen Observatorium bei Potsdam.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.



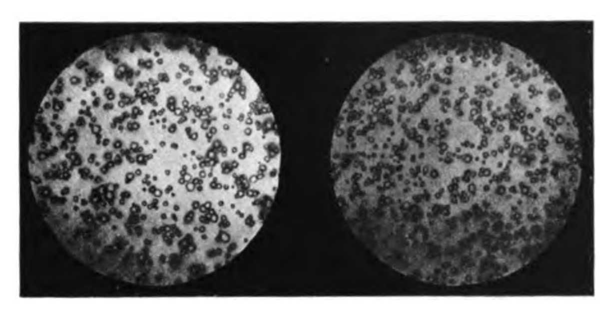


Fig. 1. Bromsilberkorn einer Lumière-sensibilité-extrême-Platte. Vergr.: 110. Positiv.

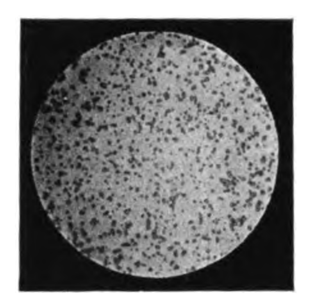


Fig. 2. Bromsilberkorn einer Kranzeder-Reformplatte. Vergr.: 370. Positiv.

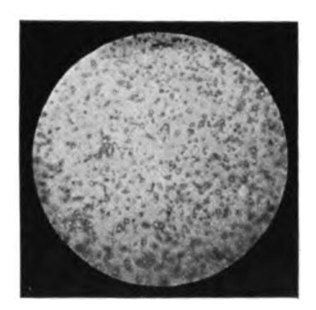


Fig. 3. Bromsilberkorn einer Eisenberger-Reformplatte. Vergr.: 110. Positiv.

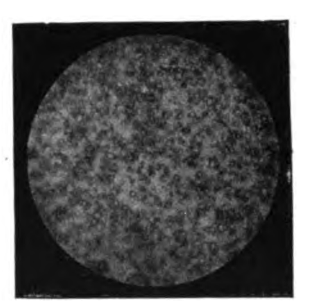


Fig. 4. Bromsilberkorn einer Lumière-Blau-Etikett-Platte. Vergr.: 110. Positiv.

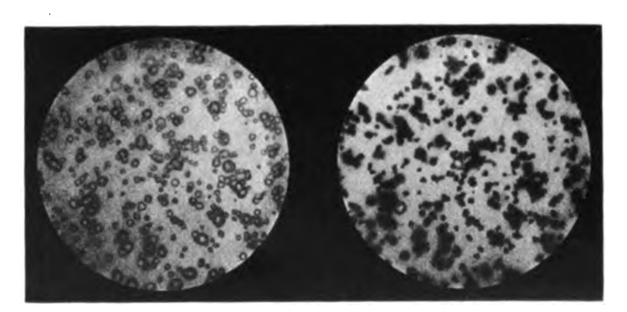


Fig. 5. Bromsilberkorn (links) und daraus entwickeltes Silberkorn (rechts). Lumière-sensibilité-extrême. Vergr.: 110. Positiv.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

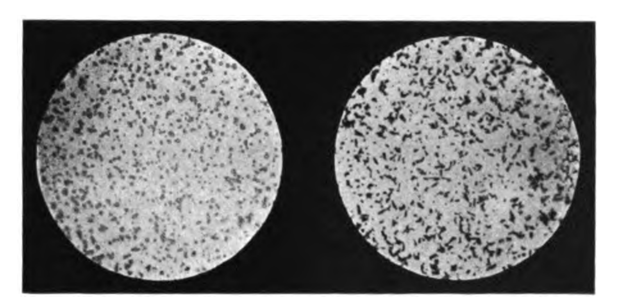


Fig. 6. Kornformänderung beim Entwickeln. Links Bromsilberkorn. Rechts Silberkorn. Kranzeder - Reformplatte. Vergr.: 370. Positiv.

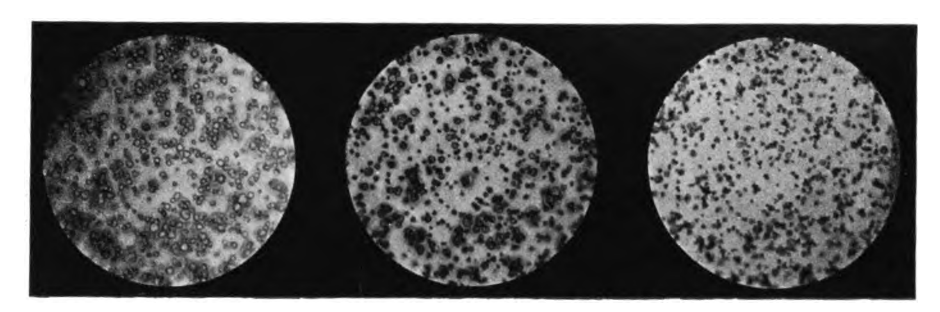


Fig. 7. Wirkungsweise des Paraphenylendiamin-Entwicklers. Links Bromsilberkorn (Lumière-sensibilité-extrême). Mitte dasselbe nach Belichtung und Entwicklung. Rechts dasselbe nach Fixieren. Vergr.: 110. Positiv.

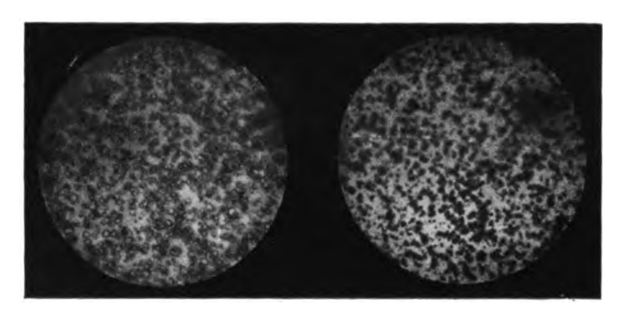


Fig. 8. Entwickeln nach dem Fixieren. Links Bromsilberkorn (Lumière-Blau-Etikett). Rechts dasselbe nach dem Fixieren entwickelt. Vergr.: 110. Positiv.

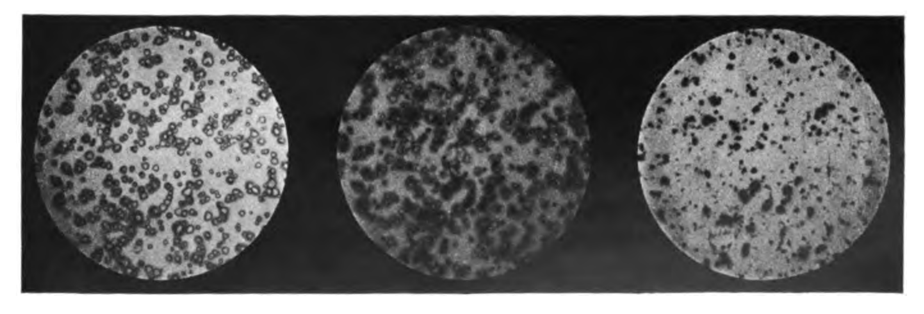


Fig. 9. Korngröße und Empfindlichkeit. Links Bromsilberkorn (Lumière-sensibilité-extrême). Mitte dasselbe nach Belichten und Entwickeln. Rechts dasselbe nach Fixieren. Vergr.: 110. Positiv.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22. 15. November 1916. 17. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 23 am 11. November 1916.

INHALT:

Karl Schwarzschild.

Von C. Runge.

Am 11. Mai dieses Jahres starb in Potsdam an einer tückischen Krankheit, die er sich im Felde zugezogen hatte, der Astronom und Physiker Karl Schwarzschild, Direktor des Potsdamer astrophysikalischen Instituts, im 43. Lebensjahre, betrauert nicht allein von seinen Angehörigen und dem großen Kreise seiner Freunde, sondern auch von allen seinen Fachgenossen. Es ist etwas anderes, wenn ein Gelehrter dahingeht, der seine Lebensarbeit getan hat. Da sagen wir mit den Worten der Schrift: „Selig sind die Toten. Sie ruhen von ihrer Arbeit und ihre Werke folgen ihnen nach". Bei Schwarzschilds Tod fehlt uns dieser Trost. In der vollen Kraft seines reichen Geistes ist er aus seinen wissenschaftlichen Plänen herausgerissen worden, und bis zum letzten Atemzuge hielt er seine Gedanken auf die Probleme seiner Wissenschaft gerichtet. Seine letzte schöne Arbeit „Zur Quantenhypothese" ist der Berliner Akademie in ihrer letzten Sitzung vor seinem Tode vorgelegt und an seinem Todestage ausgegeben worden.



K. Schwarzschild

Es war noch Großes von ihm zu erwarten. Denn er vereinigte die Meisterschaft der mathematischen Analyse mit dem tiefen Verständnis physikalischer Vorgänge und mit experimentellem und technischem Geschick. Aber schon die Arbeiten, die es ihm vergönnt war auszuführen, sichern ihm den Namen eines der hervorragendsten naturwissenschaftlichen Gelehrten unsrer Zeit.

Schwarzschild ist am 9. Oktober 1873 in Frankfurt a. M. als das älteste Kind des Börsensensals Martin Schwarzschild geboren und im glücklichen Familienkreise mit zahlreichen Ge-

schwistern aufgewachsen. Seinen ersten Unterricht erhielt er in der Vorschule des Philanthropinums, der Schule der israelitischen Gemeinde, und wurde dann im Herbst 1882 in die Sexta des städtischen Gymnasiums aufgenommen. Seine mathematische Begabung und seine astronomischen Neigungen traten schon frühzeitig hervor und führten ihn mit dem Lehrer am Philanthropinum Professor J. Epstein zusammen, auf dessen Privatsternwarte er seine ersten Himmelsbeobachtungen gemacht und astronomische Zeit- und Ortsbestimmungen auszuführen gelernt hat. Zwei Arbeiten im 124. Bande der Astronomischen Nachrichten „Zur Bahnbestimmung nach Bruns" und „Methode zur Bahnbestimmung der Doppelsterne" sind schon im Jahre 1890 erschienen, und geschrieben als Schwarzschild noch Obersekundaner war. Einer seiner damaligen Mitschüler erzählt aus seiner Primanerzeit: „Als eine mathematische Klassenarbeit einmal geschrieben wurde, hatte er seine Logarithmentafel vergessen und trotzdem löste er die gestellte Aufgabe numerisch wie immer tadellos, indem er sie durch Reihen, die wir in der Klasse noch nicht gehabt hatten, behandelte." Auch in anderen Fächern zeichnete er sich aus, besonders im Deutschen, dessen Unterricht der damalige Direktor Karl Reinhardt, jetzt vortragender Rat im preußischen Kultusministerium, leitete.

1891—93 studierte er in Straßburg und zog 1893 nach München, um dort unter Seeliger sich ganz dem astronomischen Studium zu widmen, das zu seiner Doktor-Promotion im Jahre 1896 führte mit der Dissertation: „Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse". Nach seiner Promotion veranlaßte ihn Seeliger eine Assistentenstelle an der Kuffnerschen Sternwarte in Wien anzunehmen, von wo er 1899 nach München zurückkehrte, um sich hier zu habilitieren. Schon im Herbst 1901 wurde er Direktor der Göttinger Sternwarte und zunächst außerordentlicher, ein Semester später ordentlicher Professor der Universität. Hier hat er sowohl als beobachtender Astronom wie als Universitätslehrer nachhaltig gewirkt, bis er 1909 die Leitung des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam übernahm.

In diesen acht Jahren seiner Universitätstätigkeit ist seine vielseitige Begabung am stärksten hervorgetreten. Er war der geborene akademische Lehrer und fesselte sein Publikum, mochte er die astronomischen Fachvorlesungen halten oder vor einem weiteren Kreise über allgemeiner verständliche Gegenstände sprechen. Seine Dienstwohnung auf der Sternwarte und der bezaubernde alte Garten waren die Szene so mancher fröhlicher jugendlicher Vereinigungen. Wer sie mit erlebt hat, dem sind sie eine kostbare Erinnerung echter feiner Geselligkeit. In dem Göttinger wissenschaftlichen Leben hat Schwarzschild eine hervorragende Rolle gespielt. Seine Vorträge in der mathematischen Gesellschaft und im physikalischen Kolloquium waren der gespanntesten Aufmerksamkeit gewiß und seine Bemerkungen in den allgemeinen Diskussionen pflegten den Nagel auf den Kopf zu treffen. Er war die Seele und der gute Genius eines Kreises von jungen Gelehrten, für deren freundschaftliche Beziehungen sein gastfreies Haus den äußeren Rahmen bildete. Kein Wunder, daß er sich in Göttingen am wohlsten befunden hat. Von hier hat er sich auch seine Gattin mitgenommen, als er Göttingen verließ und nach seinem letzten Willen ist seine Familie nach seinem Tode dahin zurückgekehrt und er selbst dort auf dem Zentralfriedhof zur letzten Ruhe bestattet worden.

In Potsdam hat er nicht so recht Wurzeln fassen können, so ersprießlich er auch

als Leiter des astrophysikalischen Observatoriums gewirkt hat und so groß die Anerkennung war, die ihm als Gelehrten und als Menschen von den Berliner Kreisen entgegengebracht wurde. Mit der Zeit wäre er gewiß auch da warm geworden. Inzwischen kam der Krieg, und Schwarzschild rückte schon im September 1914 ins Feld. Auch dort hat seine wissenschaftliche Meisterschaft sich geltend gemacht, und er hat sich den Dank der Heeresleitung durch wichtige ballistische Berechnungen erworben. Erst im März 1916 ist er aus dem Felde zurückgekehrt, schon mit der bösartigen Hautkrankheit, dem Pemphigus, behaftet, die dann in wenigen Wochen seinem Leben ein Ende bereitet hat.

Schwarzschild hat keine Schule gemacht. Er gehörte nicht zu den Gelehrten, die sich eine bestimmte eng begrenzte Lebensarbeit wählen, die sie unablässig fördern. Vielmehr hat bald dieses bald jenes Gebiet seine Aufmerksamkeit gefesselt. Auf vielen hat er Hervorragendes geleistet. Dazu gehören von seinen mehr als hundert Publikationen die Arbeiten: Zur Elektrodynamik, die Untersuchungen zur geometrischen Optik, die Aktinometrie der Sterne, die Theorie der Zerlegung der Spektrallinien im magnetischen Felde und im elektrischen Felde, sowie die Ausführungen zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Reiche Anregungen hat er ausgestreut und Manchem, der das Glück hatte, ihm näher zu treten, hat er, bisweilen nur durch eine hingeworfene Bemerkung, das Verständnis einer Erscheinung oder einer Theorie eröffnet.

Wenn Menschen noch in jüngeren Jahren sterben, so hält die Erinnerung an sie das jugendliche Bild fest. So wird auch Schwarzschild in der Erinnerung Aller, die den Zauber seiner Persönlichkeit erfahren haben, leben in der Blüte seiner geistigen Frische und Kraft.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über thermodynamische Maschinen, die unter Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten.

Von R. Wenger.

Unter diesem Titel hat Professor V. Bjerknes kürzlich Überlegungen veröffentlicht[1]), welche in dem Nachweise gipfeln, daß in einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit eine Zirkulation durch Wärmezufuhr und -entziehung nur dann hervorgerufen und erhalten werden kann, wenn die Kältequelle höher liegt als die Wärmequelle[2]). Wenn man diese Überlegungen durchgeht, so erkennt man leicht, daß bei den dort untersuchten thermodynamischen Prozessen die Schwerkraft nur insofern mitwirkt, als sie eine Abnahme des Druckes nach oben bedingt. Indem ein Flüssigkeitsteilchen seine Höhe ändert, erleidet es diejenigen Änderungen des Druckes, ohne welche ein Kreisprozeß nicht zustandekommen kann. Es ist daher zu erwarten, daß man ein allgemeines, den obigen Satz als Spezialfall enthaltendes Gesetz erhalten wird, wenn man statt der Höhe den Druck in die Überlegungen einführt. In der Tat kann man den folgenden Satz aussprechen:

Damit bei einem Kreisprozeß Arbeit gewonnen werde, ist es notwendig, daß die Wärmezufuhr durchschnittlich unter einem höheren Druck erfolge als die Wärmeentziehung.

Zum Beweise nehmen wir (Fig. 1) ein pv-System in der Ebene (p Druck, v spezifisches Volumen, p nach oben, v nach rechts wachsend). Die geschlossene Kurve s sei der Weg, den der

1) Diese Zeitschr, 17, 335—341 und 365—369, 1916. Ferner Bd. XXXV No. 1 der Abh. der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1916.

2) Dieser Satz war vorher schon von Sandström ausgesprochen worden. J. W. Sandström, The origin of the wind. Month. Weath. Rev. 43, 161, 1915. Meteorologische Studien im schwedischen Hochgebirge. Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhetssamhälles Handlingar, Fjärde följden XVII, 2, Göteborg 1916.

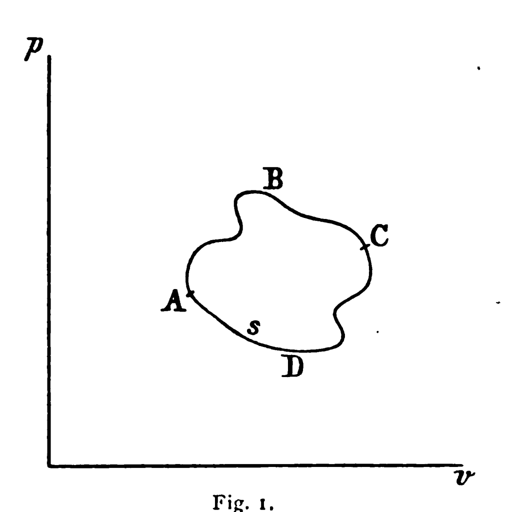


Fig. 1.

Zustand der arbeitenden Substanz bei dem Kreisprozeß durchläuft. A und C seien diejenigen Punkte, in denen die Entropie bzw. ihr Minimum und ihr Maximum erreicht.

Damit bei dem Kreisprozeß Arbeit gewonnen werde, muß

$$\int_s p\,dv > 0$$

sein, oder, geometrisch ausgedrückt, der Zustandspunkt muß den geschlossenen Weg s im Uhrzeigersinne durchlaufen.

Durch die Punkte A und C wird der Weg in zwei Zweige zerlegt, von denen der eine, ABC von der kleinsten zur größten Entropie hin-, der andere, CDA, von der größten zur kleinsten Entropie zurückführt. Dann hat, nach der Definition der Entropie, die zugeführte Wärmemenge dQ auf dem Zweige ABC vorwiegend positives, auf dem Zweige CDA vorwiegend negatives Vorzeichen. Auf dem ersten Zweige wird also der arbeitenden Substanz vorwiegend Wärme zugeführt, auf dem zweiten wird ihm vorwiegend Wärme entzogen.

Indem wir das obige Integral über diese beiden Zweige gesondert bilden, mit $\bar{p}_1$ und $\bar{p}_2$ die mittleren Drucke längs der Zweige ABC bzw. CDA, mit v_A und v_C die den Punkten A bzw. C entsprechenden Volumina bezeichnen, erhalten wir

$$\int_s p\,dv = \int_{ABC} p\,dv + \int_{CDA} p\,dv$$
$$= \bar{p}_1(v_C - v_A) + \bar{p}_2\,(v_A - v_C)$$
$$= (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(v_C - v_A).$$

Damit dies positiv sei, muß, da $(v_C - v_A) > 0$, auch $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) > 0$, also $\bar{p}_1 > \bar{p}_2$ sein, d. h. der Druck, unter dem die Wärmezufuhr erfolgt, muß im Durchschnitt höher sein als der Druck, unter dem die Wärme entzogen wird.

Man hätte auch aus der Figur ohne weiteres übersehen können, daß zum Zustandekommen eines Umlaufs im Uhrzeigersinne der Zweig ABC „über" dem Zweig CDA liegen muß, d. h. eben, daß der Druck auf dem ersten Zweige höhere Werte haben muß als auf dem zweiten.

Die Erkenntnis von der Wichtigkeit dieser Druckdifferenz ist natürlich nicht neu. Man begegnet ihr besonders in der technischen Literatur[1]) häufig, wenn auch der Satz gewöhnlich nicht so allgemein und deutlich ausgesprochen wird. Auch in Sandströms Begründung des Satzes, daß die Kältequelle höher liegen müsse als die Wärmequelle, findet sich eine Stelle, wo die Bedeutung des Druckes erwähnt wird[2]).

In der Meteorologie scheint es besonders dann empfehlenswert, die Wärme- und Kältequellen in ihrem Verhältnis zum Druck und nicht zu der Höhe zu betrachten, wenn die Zirkulation eine solche horizontale Ausdehnung hat, daß die Höhenänderungen der Isobarenflächen nicht mehr vernachlässigt werden können, vor allem also bei der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre. Der einfachste ideale Kreisprozeß ist in diesem Falle der Ericssonsche, bei dem die Wärmeaufnahme und -abgabe längs Isobaren, die Expansion und Kompression längs Adiabaten erfolgen[3]). Die von der Masseneinheit Luft bei einem Umlauf aufgenommene Wärmemenge ist hier (s. Fig. 2; T_1 T_2 T_3 T_4 die den Eckpunkten entsprechenden absoluten Temperaturen)

$$Q_1 = c_p(T_1 - T_4),$$

die abgegebene

$$Q_2 = c_p(T_2 - T_3)$$

wo c_p die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck ist;

der Nutzeffekt

$$N = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}.$$

Nun ist aber

$$\left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \frac{T_4}{T_3}$$

---

1) Z. B. H. Lorenz, Technische Wärmelehre S. 66, bei Behandlung der Luftmaschine von Ericsson: „Man erkennt, daß die Umwandlung der zugeführten Wärme in Arbeit um so vollständiger wird, je größer das Druckverhältnis $p_1 : p_2$ in den beiden Kesseln ausfällt", und an vielen Stellen bei Zeuner, Technische Thermodynamik, bei Behandlung der Heißluftmaschinen, 3. Aufl. I, S. 279 ff.

2) Sandström, a. a. O. S. 41. „Eine atmosphärische Abkühlung muß offenbar unter niedrigerem Drucke als die Erwärmung stattfinden, wenn überhaupt Bewegungsenergie erzeugt werden soll usw."

3) H. Lorenz, a. a. O.

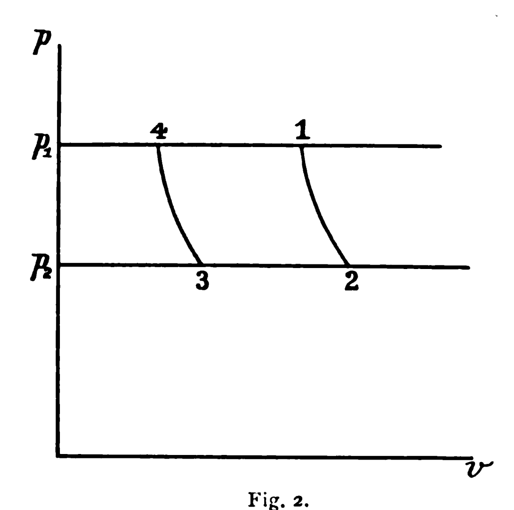


Fig. 2.

mithin

$$(a)\ N = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{T_4 - T_3}{T_4} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Der Nutzeffekt kann also durch das Verhältnis der Drucke allein ausgedrückt werden.

Indem man die Differenzen $(T_1 - T_4)$, $(T_2 - T_3)$ kleiner und kleiner macht, kann man diesen Prozeß dem Carnotschen beliebig nahe bringen. Dabei wird aber die Fläche (1 2 3 4) und damit auch die gewonnene Arbeit unendlich klein. Das ist der von Bjerknes behandelte Fall, bei dem die Wärme- und Kältequelle verschwindend kleine vertikale Dimensionen haben und ihre Temperaturdifferenzen gegenüber der Luft im gleichen Niveau unendlich klein sind.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß infolge der horizontalen Druckunterschiede in der Atmosphäre doch thermodynamische Prozesse möglich sind, bei denen Arbeit gewonnen wird, obwohl Wärme- und Kältequelle in derselben Höhe[1]) liegen. Einen solchen Prozeß kann man sich etwa in folgender Weise denken: Eine Luftmasse bewege sich, ohne ihr Niveau zu verändern, unter gleichzeitiger Wärmeaufnahme (von der Unterlage, durch Kondensation des Wasserdampfes, Strahlung oder Leitung) längs einer Isobare und durchlaufe dabei die durch die Linie (4—1) in der Fig. 2 dargestellten Zustände. Sodann gelange sie im wesentlichen adiabatisch längs dem Wege (1—2) in ein Gebiet tieferen Druckes. Von hier ab folge sie wieder der Isobare, aber unter gleichzeitiger Wärmeabgabe (Weg 2—3). Und schließlich kehre sie, indem sie auf Kosten der vorher gewonnenen kinetischen Energie gegen den Gradienten strömt, adiabatisch zum Zustand 4 zurück. Die punktierte Linie in der Fig. 3 zeigt den Weg des Teilchens in dem durch Isobaren dargestellten Druckfelde.

1) Richtiger: in demselben Niveau.

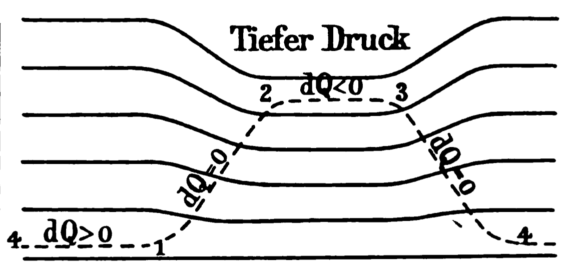


Fig. 3.

Ein solcher Vorgang ist dynamisch möglich, auch wenn Reibungswiderstände vorhanden sind. Denn auf dem Wege von 1 nach 2 wird das Teilchen wegen des größeren spezifischen Volumens stärker beschleunigt, als es auf dem Wege von 3 nach 4 verzögert wird. Allerdings hat man es bei dem in Fig. 3 dargestellten Vorgang nicht mit einer geschlossenen, sondern mit einer offenen Luftmaschine zu tun, indem stets neue Luftmassen von dem Zustand 4 in den Prozeß eintreten, während diejenigen Luftmassen, die den Prozeß durchlaufen haben, wieder austreten. Nichts hindert übrigens, die Isobaren und Trajektorien in sich geschlossen zu denken, so daß dieselben Teilchen immer wieder zurückkehren.

Nehmen wir, sehr extrem, $p_1 = 770$ mm, $p_2 = 730$ mm Hg, so ist der Nutzeffekt (Gleichung a)

$$N = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 1 - \left(\frac{730}{770}\right)^{\frac{0.4}{1,4}} = 0{,}015.$$

Denselben Nutzeffekt hätte eine nur ca. 400 m hohe vertikale Maschine der von Bjerknes betrachteten Art.

Zum Vergleiche der Leistungen der horizontalen und der vertikalen Maschinen in der Atmosphäre ist die Bemerkung wichtig, daß die horizontalen Komponenten des Windes bedeutend (etwa 100 mal) größer sind als die vertikalen. Dem steht aber wieder der Umstand gegenüber, daß die horizontalen Druckgradienten so sehr viel (10,000 bis 100,000 mal) kleiner sind als die vertikalen. Die Leistungen der horizontalen Maschinen werden also gegenüber denjenigen der vertikalen stets stark zurücktreten.

Leipzig, Geophysikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Oktober 1916.)

Die Gesetzmäßigkeiten im Neon- und Argonspektrum.

Von K. W. Meißner.

Während das Heliumspektrum durchaus den Charakter eines Serienspektrums trägt, ist es bei den Spektren der übrigen Edelgase nur ge-

Tabelle I.

a) Triplet-System.

Intensität	λ intern. Å.-E.	λ im Vakuum	Wellenzahl ν im Vakuum	Wellenzahlendifferenzen $\Delta\nu$	Anmerkungen
6	7173,938	7175,913	13 935,509	1429,427	
9	6506,527	6508,324	15 364,936	417,451	
9	6334,428	6336,177	15 782,387		
8	6929,465	6931,375	14 427,152	1429,428	
6	6304,788	6306,530	15 856,580	417,449	
10	6143,061	6144,760	16 274,029		
8	6678,275	6680,121	14 969,795	1429,430	
10	6096,163	6097,849	16 399,225	417,449	
9	5944 834	5946,479	16 816,674		

b) Quadruplet-System.

Intensität	λ intern. Å.-E.	λ im Vakuum	Wellenzahl ν im Vakuum	Wellenzahlendifferenzen $\Delta\nu$	Anmerkungen
—	*8082,453*	*8084,676*	*12 369,080*	*1070,097*	Berechnet mit Linie 7032
2	7438,885	7440,932	13 439,177	359,332	
6	7245,165	7247,160	13 798,509	417,450	
8	7032 410	7034,348	14 215,959		
1	*7024,049*	*7025,985*	*14 232,879*	*1070,078*	Watson korr.: 7024.09
7	6532,881	6534,685	15 302,957	359,354	
9	6382,991	6384,754	15 662,311	417,450	
6	6217,279	6218,998	16 079,761		
8	6717,042	6718,895	14 883,400	1070,075	
8	6266,495	6268,227	15 953,475	359,353	
1	*6128,450*	*6130,145*	*16 312,828*	*417,450*	Watson korr.: 6128,43
6	5975,534	5977,187	16 730,278		
6	6598,953	6600,775	15 149,736	1070,080	
8	6163,594	6165,208	16 219,816	359,349	
6	6029,999	6031,667	16 579,165	417,451	
8	5881,896	5883,524	16 996,616		

$$\nu_1 = \nu_0 + 1070,078$$
$$\nu_2 = \nu_0 + 1429,429 = \nu_1 + 349,351$$
$$\nu_3 = \nu_0 + 1846,879 = \nu_2 + 417,450 = \nu_1 + 766,801$$

lungen, gewisse Komplexe (Duplet, Triplet, Quadruplet) konstanter Schwingungsdifferenz aufzufinden.

Solche Untersuchungen wurden für das Neonspektrum von H. E. Watson[1]) durchgeführt. Es gelang ihm, fast alle stärkeren Linien in Quadruplette und Triplette konstanter Wellenzahlendifferenzen zu ordnen. Diese zwei Grundtypen zeigten sich jedoch nicht unabhängig voneinander, da die Schwingungsdifferenzen der Triplette dieselben sind, wie die zwischen der ersten, dritten und vierten Linie der Quadruplette.

Die Feststellung ähnlicher Gesetzmäßigkeiten im Spektrum von Argon, verdanken wir Kayser[2]) und Rydberg[1]). Der letztere ordnet die Linien in Quadrupletten konstanter Schwingungsdifferenz an ($\Delta\nu_1 = 846,47$; $\Delta\nu_2 = 803,21$; $\Delta\nu_3 = 607,03$), doch sind von den 23 Quadrupletten nur sieben vollständig, während die übrigen Lücken aufweisen.

Den langwelligen Teil des Argonspektrums hat E. Paulson[2]) auf konstante Schwingungsdifferenzen untersucht, doch findet auch er unter 36 Gliedern nur ein vollständiges Quadruplet (Nr. 6).

Da bis jetzt ein Gesetz, nach dem die einzelnen Glieder miteinander in Zusammenhang stehen, noch unbekannt ist, so bietet das Aufsuchen solcher schwingungsgleicher Glieder wenig Interesse. Dennoch möchte ich hier an

1) H. E. Watson, Proc. Cambr. Phil. Soc. 16, 130, 1912; Astroph. Journ. 33, 402, 1911.

2) H. Kayser, Berl. Ber. 551, 1896; Astroph Journ. 4, 1, 1896.

1) J. R. Rydberg, Astroph. Journ. 6, 338, 1897.

2) E. Paulson, diese Zeitschr. 15, 831, 1914.

Tabelle II.

Nr.	Int.	λ intern. Å.-E.	λ im Vakuum	Wellenzahl ν im Vakuum	Δν	Anmerkungen
1			*11491,32*	*8702,22*	*846,16*	Paschen: 1,159 μ ?
			10472,98	*9548,38*	*803,08*	„ 1.064 μ ?
	(7)	*9657,82*	*9660,47*	*10351,46*	*606,84*	„ 9658,90
	1	9123,00	9125,77	10958,30		Gittermessung gegen Eisen II. Ordnung. Gen. ± 0,03 Å.-E.
2	0	*9224,515*	*9227,047*	*10837,704*	*846,164*	Paschen: 9225,88
			8558,810	11683,868	*803,083*	
	3	8006,158	8008,360	12486,951	606,841	
	7	7635,107	7637,207	13093,792		
3	2	8521,46	8523,80	11731,86	846,18	Gittermessung gegen Eisen; Gen. ± 0,03 Å.-E.
	4	7948,177	7950 363	12578,042	*803,083*	
			7490,441	*13381,125*	*606,837*	Runge u. Paschen: korr. 7147,01
	(1)	*7147,036*	*7149,004*	*13987,962*		
4	2	8408,216	8410,526	11889,863	1649,247	
			7851,742	*12736,027*		
	7	7383,978	7386,010	13539,110	606,832	
	8	7067,218	7069,165	14145,942		
6	2	8264,525	8266,796	12096,585	846,164	
	5	7724,210	7726,334	12942,749	803,07	
	3	7272,94	7274,94	13745,82	606,835	Nur einmal roh interferometrisch gemessen.
	8	6965,432	6967,352	14352,655		
7	4	8014,786	8016,990	12473,595	*846,164*	
			7507,643	*13319,759*	*803,083*	
			7080,728	*14122,842*	*606,837*	
	(1)	*6787,142*	*6789,014*	*14729,679*		Kayser: korr. 6786,2 ?
8	7	7503,868	7505,933	13322,794	*846,164*	Runge u. Paschen: korr. 6677,34
			7057,682	*14168,958*	*803,083*	
	(6)	*6677,273*	*6679,116*	*14972,041*	*606,837*	
	(8)	*6417,174*	*6418,947*	*15578,878*		R. u. P : korr. 6416,32 ?
	0	*9354,231*	*9356,798*	*10687,417*	*846,164*	beob. 9360
	2	*8667,953*	*8670,334*	*11533,581*	*803,083*	„ 8675
	3	8103,691	8105,919	12336,664	606,839	
	3	7723,760	7725,884	12943,503		

$$\nu_1 = \nu_0 + 846,164$$
$$\nu_2 = \nu_0 + 1649,247 = \nu_1 + 803,083$$
$$\nu_3 = \nu_0 + 2256,120 = \nu_1 + 1409,956 = \nu_2 + 606,837$$

Hand der genaueren Wellenlängenmessungen, die vor kurzem veröffentlicht wurden[1]), die für den roten Teil bekannten Gesetzmäßigkeiten zusammenstellen.

1. Das Neonspektrum.

In Tabelle I sind die Resultate der Rechnungen zusammengestellt[2]). Mit Ausnahme der drei starken Linien 5852 (Int. 10, $\nu_{\text{Vak.}} = 17082,022$), 6074 (Int. 9, $\nu_{\text{Vak.}} = 16458,150$) und 6402 (Int. 10, $\nu_{\text{Vak.}} = 15615,204$) finden sich alle stärkeren Linien des roten Spektralteiles in diesem Schema, das drei Triplette und vier Quadruplette umfaßt. Abgesehen von dem neugefundenen langwelligsten Quadruplet sind alle Glieder vollständig. Ob die berechnete Linie 8082 wirklich existiert, ist zurzeit nicht zu entscheiden, da seinerzeit nur Aufnahmen mit kurzer Expositionszeit gemacht wurden, auf denen allerdings auch keine Spur zu finden ist. Leider bin ich zurzeit nicht in der Lage, diese Lücke zu ergänzen.

Auffallend ist, was auch Watson hervorhebt, daß hinsichtlich der Intensität keine Einheitlichkeit herrscht. Um so schöner ist aber die Übereinstimmung der Wellenzahlendifferenzen, die sich bis auf einige Dezimalen der letzten Stelle erstrecken. Die einzige schlechte Übereinstimmung findet sich bei der Linie 7438, die wegen ihrer Schwäche nur auf einer Gitteraufnahme gegen Eisen und roh auf einer Interferometeraufnahme bestimmt werden konnte.

Erwähnt mag noch werden, daß bei einer

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. 51, 115, 1916.

2) Kursivschrift bedeutet, daß die betreffende Linie berechnet ist.

Anordnung der Komplexe nach der Größe der Wellenlänge (oder Schwingungsdifferenz) entsprechender Komponenten im Schema je ein Triplet zwischen zwei Quadrupletten zu stehen kommt.

2. Das Argonspektrum.

Nicht annähernd so vollständig gelingt die Anordnung der Linien beim Spektrum des Argons. Das Schema ist in Tabelle II gegeben[1]); die nur berechneten, nicht beobachteten Wellenlängen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie nur in der Spalte der Vakuumwellenlänge geführt sind. Wie man sieht, sind die Lücken verhältnismäßig zahlreich und in vielen Fällen sind sie nicht etwa durch unbeobachtete Linien zu erklären. Allerdings sollte zur zweifelsfreien Entscheidung ihrer Realität das Spektrum des Argons im roten Teile viel genauer durchmustert werden und insbesondere müßte man sich um eine genaue Messung der schwächeren Linien bemühen.

Aus Aufnahmen, die lediglich zur Justierung des verwendeten Spektralapparates und zur Untersuchung verschiedener Sensibilisatoren ausgeführt wurden, können immerhin einige Lücken als reell bezeichnet werden. Hiernach wären die Glieder 2 und 4 als Triplette aufzufassen; wahrscheinlich auch Glied 8, da eine Linie mit der Wellenlänge 7080 auf keiner Platte zu finden ist; auch genaue okulare Musterung dieses Spektralteils förderte dasselbe Resultat. (Die zu diesem Komplex gehörige Linie ist nicht etwa mit Helium oder Neon 6678 identisch!)

Aus diesen Tatsachen scheint hervorzugehen, daß man die Linien des Argonspektrums, wie die des Neonspektrums, in Quadruplette und Triplette zerlegen muß. Ob bei Argon außerdem auch Duplette (vgl. Glied 7) oder anders gelagerte Triplette (vgl. Glied 3) auftreten, wird man erst nach genauer Musterung des Spektrums entscheiden können. Das von Paulson geführte Glied Nr. 5 existiert mit Sicherheit nicht. Daß der neugefundene Komplex 9356 usw. ein vollständiges Quadruplet ist, ist sehr wahrscheinlich. Die beobachteten Wellenlängenwerte der ersten zwei Komponenten dieses Gliedes können mit einem Fehler von 5 bis 10 Å.-E. behaftet sein, da die hierfür benützten Aufnahmen mit einem Prismenapparat bei weitem Spalt ausgeführt wurden.

3. Da die Schwingungsdifferenzen nach obigen Messungen und Rechnungen sicher vollkommen konstant sind, dürfte es vielleicht angängig sein, aus zuverlässig gemessenen Linien und gut bekannten Differenzen die genaue Wellenlänge schwächerer Linien, die der direkten interferometrischen Bestimmung nicht gut zugängig sind, zu berechnen und diese Werte nötigenfalls auch als Normalen zu verwenden. Durch die hier durchgeführten Rechnungen hätte man dann folgende weitere Normalen gewonnen:

a) Neon: 7024,046; 6128,450;
b) Argon: (9657,82); 9354,231; 9224,515; 8667,953; 8521,446; 7147,036; 6677,273.

Alle hier verwerteten, eigenen Wellenlängenwerte entstammen Aufnahmen, die in den Jahren 1914/15 im Physikalischen Institut Tübingen gemacht wurden.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, 12. September 1916.

(Eingegangen 15. September 1916.)

1) Die Numerierung entspricht der von Paulson (l. c.).

Die reversible magnetische Permeabilität bei hohen Frequenzen.

Von W. Kaufmann[1]).

Das magnetische Verhalten des Eisens gegenüber raschen Wechselfeldern ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen[2]), ohne daß man behaupten könnte, es seien klare und übereinstimmende Resultate erhalten worden. Völlig exakt erscheinen bloß die Resultate M. Wiens, der für Frequenzen bis zu 520/sec die Magnetisierungskurven harmonisch analysierte und im wesentlichen eine Verminderung der Permeabilität bis zu 40 Proz. für die Grundschwingung mit wachsender Frequenz feststellte. Bei den anderen Autoren ist die Deutung der Resultate infolge der willkürlichen Annahmen über die zeitliche Stromform meist zweifelhaft. Für sehr hohe Frequenzen, wie sie durch elektrische Schwingungen erzeugt werden (10^6 bis 10^8/sec), wurde festgestellt[3]), daß die Permeabilität bis auf die Größenordnung der sogenannten Anfangspermeabilität, d. h. des Wertes $\mu_0 = (B/H)_{\lim\, H=0}$ heruntersinke und mehr oder weniger unabhängig von H werde. Leider ist der Wert von μ_0 für statische Felder am gleichen Eisenmaterial nicht untersucht worden.

Unterdessen hat Herr R. Gans[4]) in einer Reihe sehr bemerkenswerter theoretischer und experimenteller Untersuchungen festgestellt, daß

1) Die hier mitgeteilten Versuche sind auf meine Veranlassung von Herrn stud. Fr. Erhardt ausgeführt und sollen in dessen demnächst erscheinender Dissertation ausführlicher mitgeteilt werden.

2) Literatur s. Graetz, Handb. d. Elektr. u. d. Magnet. IV. 1, S. 319ff.

3) S. a. J. Zenneck, Elektr. Schwingungen, S. 414ff.

4) Diese Zeitschr. 11, 988, 1910; 12, 1053 1911. Ann. d. Phys, 27, 1, 1908; 33, 1065, 1910.

die Anfangspermeabilität nur einen ganz speziellen Fall einer allgemeineren Größe darstellt, nämlich der von ihm so genannten „reversiblen Permeabilität“.

Unter reversibler Permeabilität versteht Gans die Größe

$$\mu_r = \left(\frac{-\delta B}{-\delta H}\right),$$

welche man erhält, wenn man nach Steigerung des magnetisierenden Feldes bis zu einem Werte H um eine sehr kleine Strecke $-\delta H$ zurückgeht und δH in die zugehörige Abnahme δB der Induktion dividiert. Diese Änderung ist nach Gans reversibel, d. h. wenn man H wieder um δH steigert, so gelangt man an den Ausgangspunkt zurück. Die Anfangspermeabilität μ_0 ist also der Spezialwert von μ_r für $H = 0$ und $B = 0$, d. h. für den Nullpunkt der Neukurve.

Die Annahme liegt nahe, daß μ_r in derselben Weise wenig oder gar nicht von der Frequenz abhängig sei, wie für μ_0 wenigstens qualitativ bisher gefunden. Zur Untersuchung dieser Frage mußte an Stelle der von Herrn Gans benutzten statischen magnetometrischen Methode eine für rasche Wechselströme und Schwingungen geeignete Methode ausgearbeitet werden:

Ein Eisenkern, offen oder ringförmig, ist mit zwei Wicklungen I und II versehen, von denen I den das konstante Feld H erregenden Gleichstrom J führt, während die andere von dem das Wechselfeld δH erzeugenden Wechselstrom i durchflossen wird. Dabei ist stets i sehr klein gegen J.

Zur Messung von μ_r kann nun jede beliebige zur Messung von Selbstinduktivitäten geeignete Schaltung dienen, da ja die Selbstinduktivität L der Wicklung II dem Strome i gegenüber proportional mit μ_r ist. Am bequemsten erwies sich für niedrige Frequenzen (50/sec = städtischer Wechselstrom und ca 630/sec = Summerstrom) die bekannte Brückenschaltung mit einer variablen Induktivität im zweiten Zweige. Als Nullinstrument diente für $N = 630$/sec das Telephon, für $N = 50$/sec ein Gleichstromgalvanometer in Verbindung mit einem von einem Synchronmotor angetriebenen Gleichrichter[1]).

Hohe Frequenzen ($N = 10^6$/sec) wurden durch Stoßerregung eines Schwingungskreises mittels tönender Funken erhalten und die Wicklung II in einen extrem lose gekoppelten Resonanzkreis eingeschaltet, der außerdem noch enthielt: Einen Luftkondensator (C = ca. 3000 cm), eine variable Induktivität und einen Blockkondensator von 0,25 μF, zu welchem ein Thermodetektor nebst Telephon parallel lag. Nach Herstellung der Resonanz wurde die Wicklung II kurzgeschlossen und soviel Induktivität zugeschaltet, daß wieder Resonanz eintrat. Der Zuwachs war gleich der Induktivität der Wicklung II.

Es wurde zunächst ein Eisenring aus käuflichem Blumendraht von 0,28 mm Durchmesser untersucht (mittlerer Ringdurchmesser ca 3 cm), Windungszahl von II gleich 80, L (für $H = 0$) etwa 237000). μ_r wurde in seiner Abhängigkeit von H und von B für $N = 50$ und $N = 630$ untersucht; die Kurven für beide Frequenzen fielen völlig zusammen und stimmten qualitativ mit den von Herrn Gans gefundenen überein. Nur für die Neukurve zeigten sich Abweichungen gegenüber dem Verlaufe bei Herrn Gans, die noch näher untersucht werden müssen.

Für die hohen Frequenzen von ca 10^6/sec war der erwähnte Ring nicht brauchbar, da allein durch Wirbelstromwirkung in den relativ dicken Eisendrähten eine Herabdrückung von L auf etwa den dritten Teil zu erwarten war. Deshalb wurde ein zweiter Ring aus sogenanntem „Haardraht“[1]) hergestellt (Drahtdurchmesser 0,0025 cm, Ringdurchmesser 1,9 cm, ca 45 m Eisendraht, 2 mal 185 Windungen parallel geschaltet aus 0,2 mm dickem Cudraht). Die Induktivität des gänzlich entmagnetisierten Ringes ergab sich zu

17100 ± 100 cm für $N = 630$/sec (3 Versuchsreihen)

und zu

17200 ± 200 cm für $N = 0{,}646 \cdot 10^6$/sec (7 Versuchsreihen).

Also völlige Unabhängigkeit von der Frequenz bis zu $N = 10^6$.

Die qualitativ jedenfalls sicher nachgewiesene Abnahme der gewöhnlichen Permeabilität (namentlich im Gebiete ihres Maximalwertes, s. M. Wien) mit steigender Frequenz läßt vermuten, daß es sich bei der Magnetisierung um die Übereinanderlagerung zweier Vorgänge von verschiedenem physikalischen Charakter handele. Die starken und irreversiblen Änderungen der Magnetisierung werden ja wohl allgemein auf ein „Umklappen“ der Molekularmagnete in neue Gleichgewichtslagen zurückgeführt. Für die reversiblen kleinen Änderungen kann man dagegen ein bloßes schwaches Herausdrehen aus der jeweils vorhandenen Gleichgewichtslage annehmen. Eine Abhängigkeit dieses Vorganges von der Frequenz ist offenbar erst dann zu erwarten, wenn die Frequenz sich der Eigenfrequenz nähert, mit welcher ein solcher Molekularmagnet um seine Gleichgewichtslage schwingen würde. Nach

1) Die besonderen Maßnahmen zur Einstellung der richtigen Phase des Gleichrichters werden in der Dissertation beschrieben.

1) Bezogen von Hartmann u. Braun, Frankfurt a. M.

Arkadiew[1]) soll eine starke Abnahme von μ im Gebiete der Wellen zwischen etwa 70 und 1,3 cm Länge, also $N=4\cdot 10^8$ und $2,3\cdot 10^{10}$ stattfinden. Leider ist mir das Original der A.schen Arbeit nicht zugänglich, so daß ich kein Urteil über die Zuverlässigkeit seines Resultats habe; in jedem Falle muß die Abnahme von ca. 180 auf den Wert 1 herunter in dem Gebiete zwischen etwa $N=10^8$ und demjenigen der längsten von Rubens und seinen Mitarbeitern untersuchten Wärmewellen liegen, für welche sich das Reflexionsvermögen von Eisenspiegeln noch aus der Leitfähigkeit ohne Rücksicht auf ihre Magnetisierbarkeit berechnen läßt. Eine exakte Beobachtung des Veränderlichkeitsgebietes von μ_r würde jedenfalls Schlüsse auf die Eigenfrequenz der Molekularmagnete, die Form der Abhängigkeit vielleicht auch Schlüsse auf die Dämpfung der Schwingungen gestatten.

Den Umklappvorgang andrerseits kann man sich entweder als ein aperiodisches Hineingleiten in die neue Gleichgewichtslage vorstellen mit einer Zeitkonstante von etwa 10^{-3} Sekunden, entsprechend der beobachtbaren Verminderung von 40 Proz. im Gebiete von rund 500 Schwingungen/sec oder aber als eine gedämpfte Schwingung um die neue Gleichgewichtslage mit anfangs sehr großer Amplitude (nämlich gleich der gesamten Drehung vom Labilitätspunkt bis zur Gleichgewichtslage). Dann müßte die Dämpfungskonstante von der Ordnung 10^3/sec sein. Vielleicht können Beobachtungen an Maurainschem Elektrolyteisen[2]), bei welchem ja der Umklappvorgang besonders rein hervortritt, hierüber Klarheit verschaffen.

1) Journ. d. russ. phys. Ges. **44**, 165, 1912; **45**, 103, 1913. Diese Zeitschr. **14**, 561, 1913.
2) Vgl. W. Kaufmann u. Meier, diese Zeitschr. **12**, 513, 1911.

(Eingegangen 19. Oktober 1916.)

Beugung der Röntgenstrahlen in Metallen.

Von K. E. F. Schmidt.

(Erste Mitteilung.)

(Mit Tafel XI.)

Debye hat in den Ann. d. Phys. **46**, 809, 1915 eine Theorie der Zerstreuung der Röntgenstrahlen gegeben, welche zu Interferenzerscheinungen, „die sich bei photographischen Aufnahmen als Ringe von rasch abnehmender Intensität zeigen müssen", führt.

Solche Ringe hat zuerst Friedrich[1]) bei Wachs und Paraffin gefunden.

1) Friedrich, diese Zeitschr. **14**, 317, 1913.

Debye und Scherrer[1]) haben solche Interferenzringe erhalten, indem sie die Röntgenstrahlen an Stäbchen aus amorphen Pulvern kristallinischer Substanzen beugen ließen.

Überlegungen an der Hand der Debyeschen Arbeit führten mich zu den im folgenden beschriebenen Versuchen über Beugung der Röntgenstrahlen in Metallschichten. Anzeichen von Beugungen hat schon Hupka[2]) an *Pt* und *Au* gefunden; im Gegensatz zu den Mitteilungen Hupkas finde ich ganz deutlich ausgesprochene Beugung auch an *Al* und *Fe*. Bei *Cu* treten besonders scharf zwei Interferenzringe auf, bei *Ag* und *Al* sieht man solche mittlerer Schärfe, während an den bis jetzt von mir untersuchten Metallen *Li*, *Ka*, *Na* — *Ni*, *Co*, *Fe* — *Zn*, *Sn*, *Pb* Interferenzfiguren verschiedenster Gestalt ohne deutliche Ringe auftreten.

Mechanische Behandlung des Materials, wie Walzen, Hämmern, Glühen, beeinflußt das Interferenzbild beträchtlich. Nur beim *Cu* bleibt die Erscheinung insofern unverändert, daß die beiden Ringe immer in gleicher Lage auftreten.

Die Versuchsanordnung war im wesentlichen die von Laue, Friedrich und Knipping angegebene. Die Aufnahmen geschahen mit Müller-Rapid-Röhren und solchen mit Lindemannfenster, welche mit Röntgeninduktor und Turbinenunterbrecher betrieben wurden[3]). Das benutzte Röntgenstrahlenbündel fiel durch ein Blendensystem, dessen letzte 1 mm Durchmesser hatte, auf die Metallschicht und das durch diese erzeugte Beugungsbild wurde auf einer zur Metallschicht parallelen photographischen Platte aufgenommen.

I. Interferenz bei *Cu*-Schichten.

a) Eine elektrolytisch hergestellte Haut gibt eine scharf ausgesprochene Interferenzfigur (Fig. 1), bei der sich um den kreisförmigen Durchstoßfleck der Röntgenstrahlen eine nach außen stetig an Intensität abnehmende Corona lagert; dann folgen 2 Ringe von 18,6 bzw. 24 mm inneren und 20,2 bzw. 25,7 mm äußeren Durchmesser. Die Stärke der Schwärzung ist bei dem innern Ring erheblich größer als beim äußern. Innerhalb der Ringflächen ist die Schwärzung nicht gleichmäßig; bei schwacher Vergrößerung erkennt man Flecken mit stärkerer Schwärzung in dichter regelloser Verteilung.

b) Eine elektrolytisch hergestellte Haut wurde durch Hämmern auf 0,08 mm gebracht. Auch bei dieser treten 2 Ringe von nahezu gleichem

1) Debye u. Scherrer, diese Zeitschr. **17**, 277, 1916.
2) Hupka, diese Zeitschr. **14**, 623, 1913.
3) Bei diesen Aufnahmen hat mich der Institutsmechaniker Hr. Böckel in sehr dankenswerter Weise unterstützt.

Durchmesser wie bei a auf, deren innerer auch stärker als der äußere geschwärzt ist.

c) Eine aus *Cu*-Guß herausgesägte und dann gefeilte Scheibe gab ein Interferenzbild, bei dem von der Durchstoßfläche gebeugte Strahlen verschiedener Intensität radial nach allen Richtungen gleichmäßig verteilt ausgehen. Dann folgen längliche Interferenzflecken, welche auf 2 Kreisen mit den Durchmessern 19 und 24,2 mm verteilt sind (Fig. 2). Das gleiche Gußstück, dünn gehämmert, ergab im wesentlichen die gleiche Erscheinung.

Das gehämmerte Gußstück wurde geglüht, und dann in Wasser abgeschreckt. Man beobachtet in dem durch diese Schicht erzeugten Bilde eine die Durchstoßscheibe umgebende vielstrahlige Interferenzfigur, hervorgerufen durch einzelne Punkte verschieden starker Schwärzung. Ferner 2 Ringe gebildet aus regellos verteilten Punkten ungleicher Schwärze.

d) Gewalzte *Cu*-Bleche.

Um die Durchstoßfläche lagern sich 6 Interferenzscheibchen, von denen schwach angedeutete Bänder nach der Mitte laufen. Ferner sieht man Bogensegmente, die auf 2 Kreisen mit 20 bzw. 26 mm Durchmesser liegen.

Die Interferenzbilder fallen somit beim *Cu* verschieden aus; bleibend sind die beiden Ringe, die wohl in ihrer Struktur, aber in Lage und Größe kaum geändert erscheinen[1]).

II. Interferenz bei *Ag*-Schichten.

a) Elektrolytisch hergestellte Haut.

Das Interferenzbild weist außer dem zentralen Fleck einen Ring von 7 mm Durchmesser auf.

b) Gehämmertes Blech.

Auch hier tritt ein Ring auf, bei dem aber eine an verschiedenen Stellen ungleich starke Schwärzung zu beobachten ist.

c) *Ag* gehämmert und dann ausgeglüht.

Um den Durchstoßfleck lagert sich radial nach allen Seiten verteilt ein Fleckensystem unregelmäßig in Anordnung und Schwärzung; die Flecken verdichten sich an der Stelle der oben erwähnten Ringe so, daß der Eindruck der ringförmigen Verteilung der Interferenzstrahlung deutlich hervortritt (Fig. 3).

III. Interferenz an *Al*.

a) Gewalztes Blech *A* ca. 1 mm stark.

Von dem Durchstoßfleck gehen radial in nahe gleichen Abständen nach 6 Richtungen Interferenzbänder; konzentrisch um die Mitte lagern sich 2 Ringe, deren äußerer nur schwach angedeutet ist.

b) Gewalztes Blech *B* ca. 1 mm stark.

Die Bänder sind geblieben, liegen aber jetzt in den Azimuten 0^0, 66^0, 163^0 (Fig. 4); an den Enden der Bänder sieht man nahezu kreisförmige Scheibchen mit verwaschenen Rändern.

Hinzu treten 2 schmale Bänder in den Azimuten 54^0 und 126^0 von etwas größerer Länge. Ferner sind Andeutungen eines Ringes vorhanden. Bei Drehung des Bleches um 90^0 dreht sich die Interferenzfigur ebenfalls um 90^0.

c) *Al*-Guß.

Um den Durchstoßfleck liegt ein System von kleinen Flecken in radialer Anordnung höchst unregelmäßig in Gestalt und Schwärzung. Vielfach sind die Flecken zu Bändern mit zerfetzten Umrissen zusammengetreten, in denen die Schwärzung stark wechselt (Fig. 5).

d) *Al*-Guß, stark gehämmert.

Das Interferenzbild zeigt einen aus 6 unter 60^0 zueinander gestellten Bändern bestehenden regelmäßigen Stern. An den Enden der Bänder treten Interferenzscheibchen auf, die auf einem zur Mitte konzentrischen Interferenzkreise liegen. (Fig. 6).

Die Interferenzbilder der von mir weiter untersuchten Metalle weisen deutliche Ringe nicht mehr auf; ob sie überhaupt fehlen, können erst Versuche mit stärker wirkenden Röhren zeigen.

Li: Um den zentralen Fleck liegt ein Hof, in dem ein Ring mit kleinem Durchmesser angedeutet ist.

Na: Außer dem Interferenzhof erscheinen regellos verteilte Interferenzflecke von ganz unregelmäßiger Gestalt und ungleichmäßiger Verteilung der Schwärzung.

Ka: Von dem zentral gelagerten Interferenzhof gehen radial Bänder in unregelmäßiger Verteilung aus. An einer Stelle der Durchstoßfläche liegt ein größerer Fleck von ganz unregelmäßiger wolkiger Gestalt.

Fe: Gußstück zeigt einen schön ausgebildeten vielstrahligen Stern; Walzblech 0,3 mm, feine Corona, gleichmäßig nach außen an Intensität abnehmend.

Ni: (dünn gefeiltes Blech) besonders gut ausgebildeter vielstrahliger Stern, überlagert von einer Corona mit 30 mm Durchmesser und sehr kräftiger Schwärzung.

Co: (dünn gehämmert und gefeilt, 0,05 mm) Corona mit ca. 27 mm Durchmesser und merklicher Schwärzung.

Zn: (gegossen) vielstrahliger Stern, überdeckt von einer schwach geschwärzten Corona; durch Hämmern wird der Stern fast zum Verschwinden gebracht.

1) Eine letzthin gewonnene Aufnahme zeigt noch einen dritten nur schwach hervortretenden Ring mit wesentlich größerem Durchmesser. Auch beim Beugungsbilde des Magnesiums findet sich ein Ring angedeutet.



Pb: Auf 0,05 mm gehämmert, zeigt radial gelagerte Flecken mannigfacher Gestalt (ähnlich wie beim *Al*-Guß Fig. 5).

Die Bilder zeigen nur in erster Annäherung das, was von Aufnahmen mit stärker belastbaren Röntgenröhren nach den Rinneschen[1]) Erfahrungen erwartet werden darf. Ich denke, in einiger Zeit über solche berichten zu können und daran quantitative Angaben anzuschließen, auf welche die Debyesche Theorie hinweist. Die auftretenden Ringe scheinen mir die Debyesche Theorie zu stützen.

Ferner darf man annehmen, daß sich hier ein Weg zeigt, über Strukturfragen von Metallen, an deren Lösung die Technik lebhaftes Interesse hat, Aufschluß zu erhalten.

1) Rinne, Ber. d. Math.-Phys. Klasse der Kgl. Akad. d. Wiss., Leipzig **58**, 25, X. 1915.

Halle a. S., Oktober 1916.

(Eingegangen 27. Oktober 1916.)

Über Röntgenstrahlspektra, die an gekrümmten Kristallflächen erzeugt wurden.

Von P. Cermak.

(Mit Tafel XII.)

In meiner gleich benannten Abhandlung (diese Zeitschrift **17**, 405, 1916) waren leider die den Text begleitenden Abbildungen nicht so ausgefallen, daß sie die dortigen Auseinandersetzungen gut verdeutlichten. Der Verlag hat sich nun auf meinen Wunsch in sehr entgegenkommender Weise bereit erklärt, die Bilder neu herstellen zu lassen in einer Ausführung, die die schwer wiederzugebenden Originalaufnahmen besser zum Ausdruck bringt.

Mit wenigen Worten möchte ich nochmals auf einige Einzelheiten der Aufnahme hinweisen. Sie sollten zeigen, daß Röntgenspektralaufnahmen, die man an künstlich oder natürlich gebogenen Kristallflächen ohne Drehung des Kristalls erhalten kann, ganz verschieden ausfallen können, je nachdem, ob bei der Biegung das Kristallgefüge vollkommen erhalten bleibt, ob dauernde Translationen stattfinden, oder ob schließlich Teile des Kristallgefüges vollkommen zerstört werden.

Die Figuren 1—2 dienen dem Vergleich und sind Drehaufnahmen an nicht gebogenen Steinsalzstücken; die zweite von ihnen ist gewonnen an einem Kristallstück, das künstlich zusammengesetzt war aus einem klaren und einem blauen Stück, das senkrecht zur Richtung des Röntgenspaltes viele kleine Sprünge angedeutet enthielt. Deshalb sind in der einen Hälfte der Fig. 2 die Linien horizontal unterteilt und durch das ganze Bild zieht sich entsprechend der Stelle, wo die Ränder der beiden Teilstücke aufeinanderstoßen, ein horizontales helles Band, das auf den Originalaufnahmen aus lauter einzelnen Linienelementchen besteht. (Die gegenüber den Originalen etwas verkleinerten mittels eines Rasterverfahrens hergestellten Bilder lassen nicht alle diese Einzelheiten wiedergeben.) — Die Figuren 3 bis 7 zeigen ohne Drehung gewonnene Aufnahmen, zunächst Fig. 3 am Steinsalz. Dabei sind Linien sowohl horizontal unterteilt als in ihrer vertikalen Längsrichtung zerfasert und außerdem tritt die unregelmäßige Verteilung der Linienelemente zwischen den Hauptlinien, das „Viellinienspektrum", auf. Beim Steinsalz ergibt die Biegung außer dauernder Translation (Zerfaserung) auch wirre Zerstörung des Gefüges (Viellinienspektrum). Fig. 4 gibt dafür noch einen Beweis, indem sie zeigt, daß es an solchem gebogenen Stücke gelingt, eine Linienaufnahme zu erhalten ohne Einschaltung eines Spaltes zwischen Röntgenröhre und Kristall. Fig. 5 vergleicht die Verhältnisse beim Steinsalz mit denen am gebogenen elastischen Glimmer, wobei die Linien des Glimmers ohne Zerfaserung und ohne „Viellinienspektrum" auftreten. Fig. 6 zeigt eine schwer wiederzugebende Aufnahme an Antimonit. Die Originalaufnahme läßt deutlich Zerfaserung der Linien ohne wirre Zwischenschaltung von einem Viellinienspektrum erkennen. Das läßt schließen auf eine dauernde Translation ohne allgemeine Verwirrung des Kristallgefüges. — Fig. 7 zeigt das an einer natürlich gebogenen Gipsfläche aufgenommene Spektrum, wo die Linien wie beim Glimmer ohne Zerfaserung erscheinen. Im übrigen sei auf die Ausführungen in meiner ersten Mitteilung verwiesen.

(Eingegangen 28. Oktober 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen.

Von M. v. Smoluchowski.

I. Diffusion im unbegrenzten Raum.

1. Einleitung.

In den nachstehenden drei Vorträgen[1]) soll eine Übersicht über einige neuere theoretische Untersuchungen gegeben werden, in welchen ich versucht habe, den inneren Mechanismus der Diffusion und einiger damit zusammenhängender Molekularphänoneme klarzustellen, indem ich einige Gedanken näher ausgeführt habe, welche in einem vor drei Jahren hier in Göttingen gehaltenen Vortrag[2]) kurz angedeutet waren. Einerseits besitzt dieses Thema eine besondere Bedeutung infolge seiner Anwendung auf die Physik der Kolloide, in welcher diese Erscheinungen eine grundlegende Rolle spielen — einen charakteristischen, hierher gehörigen Fall, den Koagulationsprozeß, werden wir später noch eingehender zu betrachten haben — andererseits sollte es meiner Ansicht nach in der theoretischen Physik die Stellung eines Schulbeispiels einnehmen, an welchem man die relative Berechtigung und Tragweite der thermodynamisch-makroskopischen Betrachtungsweise und der mikroskopisch-molekularen Analyse in allen Einzelheiten und in relativ einfacher Weise vergleichen kann, wobei sich überdies fast jeder Schritt durch direkte experimentelle Erfahrung illustrieren und kontrollieren läßt.

Es liegt das daran, daß uns ein und dieselbe Erscheinung, je nach dem von uns eingenommenen Standpunkt, in dreifach verschiedener Weise entgegentritt: makroskopisch betrachtet heißt sie „Diffusion", mikroskopisch entweder „Brownsche Molekularbewegung", falls man nämlich die Lebensgeschichte eines individuellen materiellen Teilchens verfolgt, oder aber „Konzentrationsschwankung", falls man ein bestimmtes Volumelement im Auge behält und die zeitliche Änderung der Anzahl der jeweilig darinnen befindlichen Teilchen notiert. Natürlich muß zwischen diesen verschiedenen Erscheinungsformen ein innerer Zusammenhang bestehen, und die theoretische Untersuchung dieses Zusammenhangs, sowie die nähere Bestimmung der Gültigkeitsgrenzen der üblichen Diffusionstheorie soll unsere erste Aufgabe bilden, während wir später zu einigen darauf beruhenden Anwendungen übergehen wollen, welche einen mehr konkreten, dem experimentellen Gebiet näherstehenden Charakter besitzen.

1) Veranstaltet durch die Wolfskehlstiftung zu Göttingen, 20.—22. Juni 1916.

2) Vgl. Vorträge üb. kinetische Theorie d. Materie u. Elektrizität, Leipzig 1914, S. 89 (diese Zeitschr. **14**, 261, 1913).

2. Brownsche Molekularbewegung.

Auf die Gefahr hin, genügend Bekanntes zu wiederholen, muß ich vorerst einige Worte über Brownsche Molekularbewegung[1]) vorausschicken. Der eigentliche innere Mechanismus derselben ist zweifellos äußerst kompliziert, viel komplizierter als unsere mathematische Formelsprache es ausdrücken kann, aber einem eigentümlichen und für diese Untersuchungen sehr vorteilhaften Umstand haben wir es zu verdanken, daß diese Komplikationen und überhaupt die Einzelheiten der Teilchenbewegung auf die Gestalt der praktisch wichtigen Endformel ohne irgendwelchen Einfluß sind. Diese Formel, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, daß ein von der Abszisse x_0 anfänglich ausgehendes Teilchen zur Zeit t in den Abzissenbereich $x \cdots\cdots x + dx$ gelangt sei:

$$W(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4Dt}} dx \qquad (1)$$

gilt dabei nicht nur für Kolloid-Teilchen, welche in einer Flüssigkeit enthalten sind, sondern ebenso auch für irgendein Molekül eines gasförmigen oder flüssigen Mediums, vorausgesetzt, daß sie für Zeiten oberhalb einer gewissen unteren Grenze der Größenordnung angewendet wird (nämlich solche die erheblich länger sind, als die durchschnittliche Zeitdauer der annähernd geradlinigen Bewegung des Moleküls, bzw. Teilchens).

Man kann diese Formel beispielsweise aus der Annahme ableiten, daß die Bewegung des Teilchens fortwährend mit konstanter Geschwindigkeit C vor sich gehe, aber jedesmal nach Zurücklegung einer geradlinigen Wegstrecke λ eine plötzliche Richtungsänderung erleide, so daß das Teilchen in einem jeden solchen Punkte, unabhängig von der vorhergehenden Richtung, mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgend-

1) Zusammenfassende Bearbeitungen und Literatur betreffs dieser und verwandter Erscheinungen: G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung, Braunschweig 1913; The Svedberg, Die Existenz d. Moleküle, Leipzig 1912; Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **10**, 467, 1913; J. Perrins Bericht in den Rapports Solvay (La théorie du rayonnement etc., Paris 1912; Die Theorie d. Strahlung u. d. Quanten, herausgeg. v. A. Eucken, Leipzig, 1914); J. Perrin, Die Atome, Leipzig 1914; M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **13**, 1069, 1912.

eine Richtung des Raumes einschlage. Wie sich nämlich nachweisen läßt[1]), beträgt in diesem, Falle die Wahrscheinlichkeit für Erreichung einer Abszisse $x \cdots x + dx$ nach Zurücklegung der n ten Wegstrecke:

$$W_n(x)\,dx = \frac{dx}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin q\lambda}{q\lambda}\right)^n \cos q(x-\alpha)\,dq$$

was für große Zahlen n übergeht in:

$$W_n(x)\,dx = \sqrt{\frac{3}{2n\lambda^2\pi}}\, e^{-\frac{3}{n\lambda^2}(x-x_0)^2}.$$

Berücksichtigt man, daß $n = \frac{Ct}{\lambda}$ ist, so gibt dies die Formel (1) wenn der Koeffizient $\frac{C\lambda}{6}$ mit D bezeichnet wird.

In der Gastheorie sind wir seit Clausius gewohnt, auch die Verschiedenheiten in der Länge der geradlinigen Wegstücke in Rechnung zu ziehen, indem wir für die Wahrscheinlichkeit einer geradlinigen freien Wegstrecke r das Verteilungsgesetz annehmen:

$$W(r)\,dr = \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda}\,dr,$$

wo λ die sog. mittlere freie Weglänge ist. Auch unter dieser Annahme berechnen wir für den Fall, daß die aus Zurücklegung sehr vieler freier Wegstücke resultierende Verschiebung des Moleküls betrachtet wird, dasselbe Wahrscheinlichkeitsgesetz (1), nur mit dem Unterschiede, daß nun der Koeffizient $\frac{C\lambda}{3} = D$ zu setzen ist.

Aber dieselbe Formel (1) läßt sich auch unter der Annahme ableiten, daß für die Verteilung der Länge der freien Wegstücke nicht die Formel (2), sondern irgendeine andere, durch eine stetige Funktion von r ausdrückbare, gilt. Und zweifellos wird sie auch unter der weit allgemeineren Annahme gültig bleiben, daß eine gewisse „Wahrscheinlichkeits-Koppelung" in bezug auf Richtung und Größe der aufeinanderfolgenden Wegstücke besteht[2]).

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 10, 73, 1880; M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Cracovie 1906, S. 203. In ähnlicher Weise läßt sich das einst (Nature 1905) von K. Pearson aufgeworfene zweidimensionale Problem des Irrwanderns („random walk") behandeln.

2) Es hat namentlich Jeans darauf hingewiesen, daß bei Zusammenstößen zwischen Gasmolekülen eine Tendenz zur Beibehaltung der ursprünglichen Bewegungsrichtung besteht. Diese „Persistenz" der Bewegungsrichtung, welcher ich in meiner ersten Arbeit über Brownsche Bewegung (Ann. d. Phys. 21, 756, 1906) durch eine einfache geometrische Konstruktion näherungsweise Rechnung getragen habe, tritt bei der Bewegung eines Kolloidteilchens wegen dessen großer Masse in weit erhöhtem Grade auf.

Nachdem nun alle diese speziellen Voraussetzungen zu demselben Resultate führen, — abgesehen natürlich von dem Zusammenhang zwischen dem Wert des Koeffizienten D und den betreffenden molekularen Bestimmungsstücken — ist es für diesbezügliche Rechnungen, wo nur die resultierende Bewegung, ohne Rücksicht auf die Details des Mechanismus, in Frage kommt, am praktischsten, wenn man hierfür das einfachst mögliche Modell benützt. Dieses besteht darin, daß man sich für jede der drei Bewegungskomponenten vorstellt, das Teilchen erleide in gleichen Zeitintervallen τ gleich große Verschiebungen δ, welche jedesmal ebenso wahrscheinlich positives wie negatives Zeichen haben können.

Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß das Teilchen nach m-Zeitintervallen eine resultierende Verschiebung von n-Wegstücken, im positiven oder negativen Sinne, erlangt habe, lassen sich dann sukzessive ermitteln und in das nachfolgende Schema einordnen:

$n =$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
$m = 0$				1					
1			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{1}{4}$			
3	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{4}{16}$		$\frac{6}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{5}{32}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$
6		$\frac{15}{64}$		$\frac{20}{64}$		$\frac{15}{64}$		$\frac{6}{64}$	

Es zeigt sich also, daß die Zähler mit den Binomialkoeffizenten, die Nenner mit den $n$ten Potenzen von 2 identisch sind. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit eines positiven oder negativen Überschusses von m Einheiten:

$$W(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \binom{m}{\frac{m-n}{2}} \qquad (2)$$

woraus sich mit Benutzung der Stirlingschen Näherungsformel für große Zahlen n, m und für einen kleinen Wert des Verhältnisses $\frac{n}{m}$ wiederum die Formel (1) ergibt, wenn die Beziehungen $m = \frac{t}{\tau}$ und $n = \frac{x}{\delta}$ eingeführt und der Wert $\frac{\delta^2}{2\tau} = D$ gesetzt wird.

Auf dieses einfache mathematische Modell der Brownschen Bewegung werden wir uns noch

später, anläßlich einer etwas schwierigeren Frage berufen. Nur das eine möchte ich bei dieser Gelegenheit bemerken, daß man auch ein dementsprechendes, überaus einfaches mechanisches Modell der Brownschen Bewegung konstruieren kann, nämlich das sogen. Galtonsche Brett, welches seinerzeit von Galton zur Veranschaulichung des Gaußschen Fehlergesetzes verwendet wurde. Es besteht einfach aus einem genügend großen, schwach geneigten Brett, in welches eine große Anzahl regelmäßiger horizontaler Nägelreihen in Wechselstellung eingeschlagen ist:

. . . .
. . . .
. . . .

Wird nun von einem Punkte des oberen Randes eine Kugel über das Brett rollen gelassen (und zwar am besten von solcher Größe, daß sie zwischen den Nägeln eben noch durchschlüpfen kann), so stößt sie auf die Nägel, erleidet infolgedessen beim Durchtritt durch die Reihen derselben unregelmäßig zufällige Ablenkungen nach rechts oder links und führt in bezug auf die Falllinie eine Bewegung aus, welche genau mit der soeben besprochenen Brownschen Bewegung (der X-Komponente) übereinstimmt.

3. Diffusion.

Würde man nun im Galtonschen Apparat eine Schar von Kugeln von demselben Punkte ausgehen lassen, so würden sie sich in passenden Behältern am unteren Rande des Brettes in Quantitäten ansammeln, welche gerade der Laplaceschen Glockenkurve (1) entsprechen. Was geschieht aber, wenn man die Kugeln (eventuell von verschiedener Farbe) nach einem gewissen Dichtigkeitsgesetz $n = \varphi(x)$ verteilt, von verschiedenen Punkten des oberen Randes ausgehen läßt? Das gibt genau jene Erscheinung, die man kurz Diffusion nennt, und zwar illustriert uns das die Diffusion in einer Flüssigkeitssäule, deren Konzentration zu Anfang der Zeit gemäß jenem Gesetze verteilt war.

Nehmen wir nämlich an, die Anfangsverteilung der in Betracht kommenden Substanzteilchen sei durch jene Verteilungsfunktion: Anzahl pro Volumeinheit $n = \varphi(x)$, gegeben, so resultiert aus (1) — selbstverständlich unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der Teilchen voneinander — für die Verteilung zur Zeit t:

$$n_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi, \qquad (3)$$

indem sich die von den verschiedenen Ausgangspunkten stammenden Teilwirkungen einfach überlagern. Dies ist bekanntlich die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (4)$$

für den Fall, daß die Anfangsverteilung $\varphi(x)$ in der ganzen Ausdehnung von $-\infty$ bis $+\infty$ gegeben ist, was man auch ohne weiteres durch Ausführung der Differentiation a posteriori verifizieren kann, und der Koeffizient D der Formel (1) erweist sich als identisch mit dem Diffusionskoeffizienten der Formel (3).

Also geht die Diffusion einfach als Resultat der ungestörten Brownschen Bewegungen der einzelnen Teilchen hervor[1]), und es ist ganz falsch, wenn manche Forscher[2]) meinen, daß dabei noch ein spezieller, der Brownschen Bewegung eine Richtung gebender Einfluß, — etwa das osmotische Druckgefälle — tätig sei. Der fiktive, der makroskopischen Auffassungsweise der Diffusion entsprechende Begriff des osmotischen Druckes vertritt die Betrachtung der „verborgenen" Molekularbewegungen und ist mit derselben — soweit die klassischen Diffusionserscheinungen in Betracht kommen — vollkommen äquivalent, darf aber mit ihr nicht verquickt werden. Entweder denke man sich die Substanzteilchen als passiv durch den osmotischen Druck getrieben, ohne die Brownschen Bewegungen zu berücksichtigen, oder aber man ziehe die letzteren in Rechnung, ohne den fiktiven osmotischen Druck einzuführen.

Bemerken wir übrigens noch, daß die charakteristische Eigentümlichkeit der Brownschen Bewegung, welche aus (1) durch einfache Rechnung folgt, — daß nicht die Elongation aus der Anfangslage, sondern das Quadrat derselben proportional mit der Zeit wächst

$$\overline{(x - x_0)^2} = 2Dt \qquad (5)$$

— in dem allgemeinen Ähnlichkeitsgesetz der Diffusion zum Vorschein kommt, wonach Diffusionsprozesse sich bei n maliger Vergrößerung der räumlichen Lineardimensionen so abspielen, daß die Zeiten im Verhältnis n^2 vergrößert erscheinen.

Gegen unsere ganze Argumentation ist nun aber ein gewichtiger Einwand zu erheben. Mathematisch stimmt die Formel (1) allerdings mit der sog. Hauptlösung der Diffusionsgleichung (4) überein, welche angibt, in welcher Weise sich eine Substanz zur Zeit t verteilt, die zur Zeit Null im Punkte x_0 angesammelt war, und wenn sie wirklich diese Bedeutung

1) In Einsteins Arbeiten gründete sich eben darauf die Ableitung des Gesetzes für die Brownsche Bewegung.

2) Vgl. L. Cassuto, Der kolloide Zustand der Materie, Leipzig 1913, S. 74.

hätte, wäre die vollständige Äquivalenz der üblichen Diffusionstheorie mit dem Resultat der Brownschen Bewegungen der einzelnen Teilchen erwiesen. In Wirklichkeit ist aber das von x_0 ausgehende Teilchen unteilbar und (1) stellt nur ein Wahrscheinlichkeitsgesetz für seine spätere Lage dar.

Infolgedessen entspricht das Resultat der mathematischen Diffusionstheorie nicht dem Zustand, welcher tatsächlich zur Zeit t herrschen wird, sondern es stellt den Durchschnittswert[1]) der Zustände dar, welche verschiedene, von scheinbar identischen Anfangszuständen ausgehende Systeme in der Zeit t aufweisen würden. Mit anderen Worten: ein jedes individuelle molekulare System wird im Vergleich mit der theoretischen Diffusionsformel gewisse, entweder positive oder negative Divergenzen aufweisen, und die Häufigkeit derselben wird durch Wahrscheinlichkeitsgesetze geregelt sein.

4. Konzentrations-Schwankungen, Größe derselben in verdünnten Lösungen.

Näheren Aufschluß über die Art und Größe dieser zufälligen Abweichungen gibt die Theorie der molekularen Konzentrationsschwankungen, welche man auch als „mikrostatistische Analyse" des Diffusionsvorganges in festgelegten Volumelementen definieren könnte. In voller Allgemeinheit ist diese Art der Analyse noch nicht durchgeführt worden, aber ich glaube, auch das, was man heute darüber aussagen kann, beleuchtet den Mechanismus der Diffusion in sehr charakteristischer Weise, so daß es von Interesse sein dürfte, diese theoretischen Untersuchungen etwas eingehender zu behandeln.

In der Theorie der Konzentrationsschwankungen handelt es sich um zweierlei Probleme, einerseits um die wahrscheinliche Größe der momentanen Abweichung der Konzentration in einem gewissen Volumelement vom durchschnittlichen Zustand, andererseits um die zeitliche Veränderlichkeit jener Abweichungen oder, wie man kurz sagen kann, um die Schwankungsgröße und die Schwankungsgeschwindigkeit.

Was die Größe der Konzentrations-Schwankungen anbelangt, so lassen sich die betreffenden Formeln in sehr einfacher Weise mittels direkter Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen für den Fall entwickeln, wo es sich um den normalen, im Laufe langer Zeit sich einstellenden Gleichgewichtszustand eines idealen Gases oder einer verdünnten Lösung handelt, deren Teilchen aufeinander keine merklichen Kräfte ausüben[1]). Meine diesbezügliche, recht kurz gefaßte Ableitung ist später von Lorenz und Eitel in sehr ausführlicher und verständlicher Form wiedergegeben worden; derselbe Gedankengang hat anläßlich der Entdeckung der radioaktiven Schwankungen (Schweidler, Bateman, Rutherford u. Geiger, Marsden u. Barratt u. a.) aufs neue Anwendung gefunden, analoge Entwickelungen lassen sich aber schon weit früher in wahrscheinlichkeits-theoretischen Untersuchungen auffinden, so daß ich heute auf Einzelheiten dieser bereits genügend bekannten Erwägungen nicht einzugehen brauche, und mich darauf beschränken kann, die Endresultate anzuführen.

Nehmen wir an, das in Betracht gezogene Volum v bilde einen Teil eines weit größeren Volums, in welchem sich das Diffusionsgleichgewicht hergestellt hat, und bezeichnen wir mit ν die Anzahl der Substanzteilchen, welche bei gleichmäßiger Verteilung auf das betrachtete Volum v entfallen würde. Wird nun die Anzahl der augenblicklich in v befindlichen Teilchen systematisch — beispielsweise in gleichen Zeitintervallen — notiert, so muß sich zeigen, daß die relative Häufigkeit jeder Zahl n innerhalb langer Zeiträume gegeben ist durch die Formel:

$$W(n) = \frac{e^{-\nu} \nu^n}{n!}. \tag{6}$$

So führte beispielsweise Svedberg[2]) mittels ultramikroskopischer Beobachtung der Teilchen einer kolloiden Goldlösung eine Reihe von 518 Zählungen, und zwar in Intervallen von $^1/_{33}$ Minute aus, deren Resultate eine Zahlenreihe angibt, auf welche wir uns weiterhin noch werden berufen müssen:

12000 2001 324 123 102 1111 3 1125 1110 23313 usw.

In dem betrachteten, optisch abgegrenzten Volumteil der Lösung befanden sich also, unregelmäßig abwechselnd, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Teilchen, und zwar ist die empirische Häufigkeit dieser Zahlen durch die Werte k der nebenstehenden Tabelle gegeben, während die Formel (6) die Werte k_{ber} erfordern würde — was jedenfalls als eine für ein Wahrscheinlichkeitsgesetz ausreichende Bestätigung angesehen werden darf:

1) Welcher auch mit dem wahrscheinlichsten Zustand identisch sein dürfte.

1) M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift 1904, S. 626; Bull. Acad. Cracovie 1907, S. 1057; Ann. d. Phys. **25**, 205, 1908; R. Lorenz u. W. Eitel, Zeitschr. f. phys. Chem. **87**, 293, 434, 1914. Vgl L. Bortkiewicz, Die radioaktive Strahlung, Berlin 1913.

2) Th. Svedberg, Zeitschr. f. phys. Chem. **77**, 147, 1911.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
k	112	168	130	69	32	5	1	1
k_{ber}	109,9	170,4	132,0	68,2	26,4	8,2	2,1	0,5

Analoge Messungsreihen[1]) mit demselben Resultate sind übrigens auch von B. Iljin, R. Costantin, R. Lorenz u. W. Eitel und neuerdings von A. Westgren erhalten worden.

Treten Abweichungen von dem Wahrscheinlichkeitsgesetz (6) auf, so beweisen sie die Existenz von Anziehungs- oder Abstoßungskräften zwischen den Teilchen, und eine dementsprechend modifizierte Theorie ermöglicht es, auf dieser Grundlage die entsprechenden Änderungen der Gesetze des osmotischen Druckes zu bestimmen, welche bei derartigen Lösungen natürlich keinerlei direkter Messung zugänglich sind. Tatsächlich haben sich solche Abweichungen bei äußerst konzentrierten Gummigutt-Lösungen herausgestellt, in denen die Volumkonzentration mehr als $\frac{1}{100}$ beträgt, aber außer in solchen Ausnahmsfällen ist heute Gleichung (6) für Kolloidteilchen als genau gültig anzusehen, und sind jetzt auch gewisse, früher von Svedberg und Westgren vermutete Divergenzen, insbesondere durch eine von Westgren unlängst hier bei Professor Zsigmondy ausgeführte Arbeit, vollständig aufgeklärt worden. Auf diesen, für die Kolloidforschung äußerst wichtigen Gegenstand werden wir später noch zurückkommen, einstweilen wollen wir voraussetzen, daß wir uns auf solche Fälle der Diffusion beschränken, wo die gegenseitige Einwirkung der Teilchen infolge wechselseitiger Kräfte überhaupt zu vernachlässigen ist, mit anderen Worten: wir nehmen an, es handle sich um relativ verdünnte Lösungen.

Als Maß der Größe der Konzentrationsschwankungen hatte ich anfangs den durchschnittlichen Absolutwert der Schwankungen verwendet. Bezeichnen wir mit δ die Verdichtung $\delta = \frac{n-\nu}{\nu}$, so erhält man aus (6) für den durchschnittlichen Absolutwert derselben:

$$\overline{|\delta|} = \frac{2\nu^k e^{-\nu}}{k!} \qquad (7)$$

wo k die größte ganze Zahl bedeutet, welche gleich oder kleiner als die Normalzahl ν ist. Rechnerisch einfacher ist es, anstatt dessen den Betrag der „mittleren" Schwankung zu nehmen, für welche man aus Formel (6) findet:

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}. \qquad (8)$$

So resultiert im obigen Beispiele aus der Beobachtungsreihe: $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}798$, während andererseits $\frac{1}{\sqrt{\nu}} = 0{,}803$ ist.

Der algebraische Durchschnittsbetrag der Schwankung ist dagegen selbstverständlich gleich Null.

Von Wichtigkeit ist nun folgender Umstand: die Größe der Schwankungen hängt laut (6) ausschließlich von der durchschnittlichen Teilchenzahl ν ab; die Gestalt und Größe des betreffenden Volums, die Art der in Betracht kommenden Teilchen, die Natur des flüssigen Mediums, welches als Suspensionsmittel dient, die Temperatur usw. — all dies ist für die Größe der Schwankungen, natürlich unter Voraussetzung genügend langer Beobachtungszeit, vollständig gleichgültig, und zwar hängt dies damit zusammen, daß die in Rede stehende Erscheinung sich als spezieller Fall der allgemeinen Molekularschwankungen auffassen läßt, für welche gemäß der statistischen Mechanik ein ganz allgemeines, vom speziellen Mechanismus des Systems unabhängiges Verteilungsgesetz existiert.

5. Geschwindigkeit der Konzentrationsschwankungen.

Dagegen sind alle oben erwähnten Umstände ganz wesentlich bestimmend für die zeitliche Veränderlichkeit der Schwankungen. Die Berechnung dieser Größe, oder wie man auch sagen kann, der Schwankungsgeschwindigkeit, ist bei jeder Art Schwankungen ein wesentlich schwierigeres Problem als jene der Schwankungsgröße, und bis jetzt war überhaupt nur ein einziger Fall bekannt, welcher — allerdings als Fall „astatischen" Gleichgewichts in denkbar vereinfachter Form — sich hier einreihen läßt: die schon besprochene Brownsche Bewegungsformel (1), nebst einer gewissen Verallgemeinerung derselben, von welcher später[1]) die Rede sein wird; die Konzentrationsschwankungen sind das zweite Beispiel, wo sich die Berechnung ausführen ließ[2]).

Wenn wir uns den Mechanismus dieser Erscheinung vor Augen halten, so ist klar, daß die eigentliche Ursache der Veränderlichkeit der

1) B. Iljin, Zeitschr. f. phys. Chem. **83**, 592, 1913; R. Lorenz u. W. Eitel, Zeitschr. f. anorgan. Chem. **87**, 357, 1914; R. Costantin, C. R. **158**, 1341, 1914; A. Westgren, Arkiv f. Mat. Svensk. Vet. Akad. **11**, Nr. 8, 1916.

1) Vgl. II. Vortrag, 5. Abschn.

2) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. **123**, 2381, 1915; diese Zeitschr. **16**, 321, 1915.

Konzentrationsschwankungen auf der Brownschen Bewegung beruht, und daß alle Umstände, welche dieselbe verlangsamen, wie Zähigkeitszunahme, Temperaturabnahme, auch jene Schwankungsgeschwindigkeit herabsetzen müssen, wie dies tatsächlich von Svedberg bemerkt wurde.

Um nun zu quantitativen Berechnungen zu gelangen, wollen wir uns folgende Aufgabe stellen: das betrachtete Volum v bilde einen Teil des relativ äußerst großen Volums V, so daß bei gleichförmiger Verteilung der in Betracht kommenden Substanzteilchen (Moleküle oder Kolloidteilchen) die Anzahl ν auf v entfallen würde. Falls sich nun tatsächlich n-Teilchen zur Zeit $t=0$ in v aufhalten, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit $W_n(+k)$, daß eine Zunahme um k stattfinde, daß also im Zeitpunkte t die Teilchenzahl $(n+k)$ betrage?

Die Beantwortung dieser Frage stützt sich auf zwei Tatsachen: 1. daß die Bewegungen der einzelnen Teilchen voneinander unabhängig erfolgen, 2. daß für jedes derselben alle Lagen im Raume v gleich wahrscheinlich sind. Man hat dann zuerst die Wahrscheinlichkeit P zu bestimmen, daß ein einziges, ursprünglich irgendwo in v befindliches Teilchen nach Ablauf der Zeit t sich außerhalb jenes Raumes befinde. Ist diese bekannt, so gehen wir weiter:

Wenn sich nicht nur ein einziges, sondern n-Teilchen anfangs in v befinden, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß irgendwelche i darunter ausgetreten, die übrigen $(n-i)$ aber in v verblieben seien:

$$A_i = \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i} \tag{9}$$

Falls man aber die anfängliche Zahl n unbestimmt läßt und die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ der verschiedenen Zahlen n gemäß der Formel (6) berücksichtigt, erhält man als allgemeine Wahrscheinlichkeit des Austrittes von m-Teilchen:

$$\overline{A}_m = \sum_{n=m}^{\infty} W(n) A_m = e^{-\nu P} \frac{(\nu P)^m}{m!} = E_m. \tag{10}$$

Dieselbe Größe muß nämlich auch die allgemeine Wahrscheinlichkeit E_m des Eintrittes von m-Teilchen bestimmen, da im stationären Zustand der Austritt und Eintritt gleichberechtigte Ereignisse sind.

Damit sind die Faktoren gegeben, aus denen sich die gesuchte Größe $W_n(+k)$ zusammensetzt. Denn eine Vermehrung der ursprünglichen Teilchenzahl n auf $(n+k)$ kann entweder dadurch zustandekommen, daß gar kein Teilchen austritt und gleichzeitig k neu eintreten, oder daß 1 Teilchen austritt und gleichzeitig $k+1$ neu eintreten, oder daß 2 Teilchen austreten und gleichzeitig $k+2$ neu eintreten usw.

Somit ist mit Berücksichtigung aller Kombinationen:

$$W_n(+k) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i E_{i+k}$$

$$= e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m+k}}{(m+k)!} \tag{11}$$

und in analoger Weise ist die Wahrscheinlichkeit für eine Verminderung der ursprünglichen Anzahl n um k Einheiten:

$$W_n(-k) = e^{-\nu P} \sum_{m=k}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!} \tag{12}$$

Aus diesen komplizierten Formeln lassen sich mittels verwickelter Summationen merkwürdigerweise recht einfache Resultate für die durchschnittliche Änderung der Teilchenzahl ableiten, welche in der Zeit t eintritt, wenn die Anfangszahl n beträgt:

$$\overline{\Delta_n} = \overline{k} = (\nu - n) P \tag{13}$$

sowie für das allgemeine Änderungsquadrat bei unbestimmter Anfangszahl:

$$\overline{\Delta^2} = \overline{k^2} = 2 \nu P. \tag{14}$$

Um die Bedeutung dieser Formeln zu würdigen, müssen wir noch zur Berechnung des Ausdruckes P zurückkehren, welcher dem vorher Gesagten zufolge die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein anfangs irgendwo innerhalb des Volums v befindliches Teilchen sich nach Ablauf des Intervalles t außerhalb v befinde. Man erhält somit P durch einfache Anwendung der Formel (1) für die voneinander unabhängigen Verschiebungen in XYZ, welche infolge der Brownschen Bewegung eintreten:

$$P = \frac{1}{v} \frac{1}{[2\sqrt{\pi D t}]^3} \int dv \int e^{\frac{-(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}{4Dt}} dV$$

$$= \frac{1}{v[2\sqrt{\pi D t}]^3} \int\int e^{-\frac{r^2}{4Dt}} dv\, dV, \tag{15}$$

worin r den Abstand eines Punktes innerhalb v von einem Punkte des äußeren Raumes $(V-v)$ bedeutet, und die erste Integration über den inneren, die zweite über den äußeren Raum zu erstrecken ist.

Ich habe die Rechnung für zwei Spezialfälle ausgeführt, nämlich den von Svedberg verwirklichten Fall, wo es sich um eine von kräftigem Licht durchstrahlte, dünne, planparallele Schicht innerhalb eines größeren Flüssigkeits-

volums handelte[1]), sowie eine später von Westgren verwendete Anordnung, wo die Verhältnisse in einer zylindrischen Scheibe innerhalb zweier fester Deckgläser beobachtet wurden.

Im ersteren Fall gilt die Formel:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\beta^2} \right], \qquad (16)$$

wo β ein mit der Dicke der Schicht h zusammenhängender Ausdruck ist: $\beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}$.

Für den Fall eines zylindrischen Volums läßt sich P durch die Zylinderfunktionen mit imaginärem Argument: $I_n(t) = i^{-n} J_n(it)$ ausdrücken, und zwar gilt:

$$P = e^{-2\alpha} [I_0(2\alpha) + I_1(2\alpha)], \qquad (17)$$

wenn α eine vom Zylinderradius a abhängige Größe: $\alpha = \frac{a^2}{4Dt}$ bedeutet.

Mehr als die Ausrechnung von P interessiert uns aber jetzt dessen eigentliche Bedeutung. Wenn man sich nämlich die Definitionsformel (15) vergegenwärtigt, sieht man, daß sich P auffassen läßt[2]) als derjenige Bruchteil einer anfänglich den Raum v gleichmäßig erfüllenden Substanz, welcher in der Zeit t über dessen Grenzflächen hinausdiffundieren würde, falls der äußere Raum anfangs von jener Substanz völlig leer wäre.

Nun zur Formel (13) zurückkehrend, überzeugen wir uns, daß somit die durchschnittliche Änderung der Teilchenzahl im Raume v in vollständiger Übereinstimmung mit der üblichen makroskopischen Diffusionstheorie erfolgt, welche eben jene Formeln (13) (15) hierfür ergeben müßten. Das ist ein Resultat, auf welches wir uns später noch berufen werden.

Dagegen stellt die in gewissem Sinne zur Formel (5) analoge Formel (14) gerade die Divergenz zwischen dem wirklichen molekularen Verhalten und der makroskopischen, mit Durchschnittswerten operierenden Betrachtungsweise in klares Licht. Ihr zufolge hängt also das durchschnittliche Quadrat der im Zeitraume t eintretenden Änderung der Teilchenzahl, welches man als allgemeines Maß der Veränderlichkeit derselben betrachten kann, von zwei Faktoren ab, der normalmäßig auf das betreffende Volum entfallenden Teilchenzahl ν und dem Diffusionsfaktor P, welcher außer von der Gestalt und Größe des Raumes v vom Diffusionskoeffizienten D und insbesondere auch von der Länge des Zeitintervalles t zwischen zwei sukzessiven Beobachtungen abhängt.

Im Grenzfall äußerst langer Zeitintervalle wird P gleich Eins, also $\lim_{\infty} \overline{\Delta^2} = 2\nu$, was auch von vornherein zu erwarten ist, da die Zustände innerhalb langer Zeiträume voneinander unabhängig werden, also einzeln nach Maßgabe des Zufallsgesetzes (6) berechnet werden können; für die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Zahlen n_1, n_2 gilt nämlich infolgedessen:

$$(n_1 - n_2)^2 = (n_1 - \nu)^2 + (n_2 - \nu)^2 - 2(n_1 - \nu)(n_2 - \nu)$$

und durch Mittelbildung ergibt sich gemäß (8) jenes Resultat:

$$\overline{\Delta^2} = \overline{(n_1 - n_2)^2} = \overline{(n_1 - \nu)^2} + \overline{(n_2 - \nu)^2} = 2\nu.$$

Im allgemeinen besteht jedoch eine gewisse Wahrscheinlichkeitsnachwirkung des vorhergegangenen Zustandes, d. h. es ist wahrscheinlich, daß die nachfolgende Zahl von der vorhergehenden weniger verschieden sein wird als der Mittelwert ν, und zwar wird der Unterschied desto geringer, je kürzer das betreffende Zeitintervall ist. Im Grenzfall unendlich kurzer Zeitintervalle t wird natürlich auch das Veränderlichkeitsmaß $\overline{\Delta^2}$ gleich Null.

Um nun unsere Gleichungen (13) (14) an der von Svedberg angegebenen Zahlenreihe zu prüfen, kann man aus derselben den durchschnittlichen Quadratwert $\overline{\Delta^2}$ der Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Zahlen ermitteln: $\overline{\Delta^2} = 2{,}25$, was laut Gleichung (14) mit Rücksicht auf die Normalzahl $\nu = 1{,}55$ einen Wert $P = 0{,}726$ ergibt. Untersucht man nun, von was für Zahlen m jedesmal eine gewisse Zahl n gefolgt wird, so kann man die durchschnittliche Änderung $\overline{m - n} = \overline{\Delta}_n$, welche nach einer vorgegebenen Zahl n eintritt, empirisch ermitteln. Verglichen mit den theoretischen Werten der Formel (13), welche sich mit Hilfe jenes P-Wertes berechnen lassen, gibt dies folgendes Bild:

n	0	1	2	3	4	5
$\overline{\Delta}_n$ gef.	+1,03	+0,45	−0,26	−1,18	−1,69	−2,80
$\overline{\Delta}_n$ ber.	+1,12	+0,40	−0,33	−1,05	−1,78	−2,50

Wir sehen also, wie die scheinbar ganz regellose Svedbergsche Zahlenreihe (S. 560) doch bei entsprechender Mittelbildung das ausgleichende Walten der Diffusion klar zum Aus-

1) Dieselbe Formel gilt für eine experimentell geeignetere Anordnung, welche Westgren (Arkiv f. Mat. Svensk. Vet. Ak. 11 Nr. 14, 1916) benützt hat, wo ein Streifen eines zwischen Deckgläsern eingeschlossenen Präparates beobachtet wird. Eine Reihenentwickelung der betreffenden Formeln: M. v. Smoluchowski, Koll. Zeitschr. **18**, 48, 1916.

2) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, II § 50 (10).

drucke bringt und zeigt, daß die durchschnittlichen Konzentrationsänderungen ganz in Übereinstimmung mit der klassischen Diffusionstheorie vor sich gehen, selbst wenn sich die unregelmäßigen molekularen Schwankungen darüber in weit überragender Weise superponieren.

Auch läßt sich der experimentelle P-Wert mit dem theoretischen (16) vergleichen, wenn die Dimensionen des beobachteten Raumes und der Teilchen genau bekannt sind, da sich dann D mit Hilfe der später zu besprechenden Formel: $D = \frac{HT}{N} \frac{1}{6\pi\mu a}$ berechnen läßt. Im obigen Falle ergab dies den theoretischen Wert $P = 0{,}86$, doch ist die weniger gute Übereinstimmung zweifellos auf die Ungenauigkeit jener Bestimmungsstücke (insbesondere der Schichtdicke h) zurückzuführen, deren Messung in jenen Versuchen keine spezielle Aufmerksamkeit gewidmet wurde. Dagegen hat Westgren unlängst mittels einer ganzen Reihe sehr präziser, speziell ad hoc ausgeführter Messungen[1]) eine weitgehende Bestätigung der Formeln (14, 16) erbracht (und zwar unter Variation von h, ν und t). Die betreffenden P-Werte stimmten in 30 Messungsreihen mit den theoretischen durchschnittlich bis auf ± 4 Prozent überein.

Übrigens habe ich die experimentelle Kontrolle dieser ganzen Theorie noch in weiteren Einzelheiten durchgeführt, indem ich eine Statistik der Gruppen $(n\,m)$ je zweier aufeinanderfolgenden Zahlen entwarf, in welche sich die Svedbergsche Zahlenreihe zerlegen läßt, und dieselbe mit den theoretischen Häufigkeitswerten $H(n, m)$ verglich, welche sich mit Hilfe des oben bestimmten P aus (6) und (11, 12) berechnen lassen:

$$H(n, m) = W(n)\, W_n(m - n). \tag{18}$$

Es ergab dies eine recht befriedigende Übereinstimmung; dasselbe gilt von einer analogen, aus Westgrens Messungen stammenden Statistik, welche die betreffenden Gesetzmäßigkeiten vielleicht noch besser zum Ausdruck bringt und daher angeführt werden möge; dabei gibt die Tabelle I die gefundenen, Tabelle II die berechneten Häufigkeitszahlen an.

Die Bedeutung dieser Rechnungen liegt nun einerseits darin, daß sie den Zusammenhang zwischen Brownscher Bewegung, Diffusion und den Konzentrationsschwankungen klarlegen. Man kann demzufolge aus einer nach der

1) A. Westgren, Arkiv f. Mat. Svensk. Vet. Akad. 11 Nr. 14 (1916). Diese Bemerkung sowie die nachstehenden zwei Tabellen sind bei der Niederschrift des Vortrages eingeschaltet worden, während in letzterem die von mir aus Svedbergs Messungen berechneten Tabellen (loc. cit. S. 561) vorgeführt wurden.

Tabelle I.

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$n = 0$	210	126	35	7	0	1		
1	134	281	117	29	1	1		
2	27	138	108	63	16	3		
3	10	20	76	38	24	6	0	
4	2	2	14	22	13	11	3	
5		0	2	10	10	1	2	2
6				1	1	3		
7						2		

Tabelle II.

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$n = 0$	221	119	32	6	1			
1	119	262	122	31	5	1		
2	32	122	149	63	15	3		
3	6	31	63	56	22	5	1	
4	1	5	15	22	15	6	2	
5		1	3	5	6	3	1	0
6				1	2	1		
7						0		

Svedbergschen Methode gewonnenen Statistik der Teilchenzahlen den Diffusionsfaktor P und daraus den Diffusionskoeffizienten D bestimmen, welcher gleichzeitig für die Brownsche Bewegung maßgebend ist, und das ist wohl eine weit einfachere Methode als die unmittelbare Beobachtung der Brownschen Bewegung der einzelnen Teilchen.

Wichtiger scheint mir aber der Umstand, daß dies das erste Beispiel einer Erscheinung ist, an welcher sich der Übergang zwischen dem makroskopisch irreversibeln Stadium und den mikroskopischen Schwankungserscheinungen sowohl theoretisch wie experimentell in allen Details verfolgen läßt. Ich hatte zwar vor drei Jahren ein anderes Beispiel dieser Art angegeben, nämlich die Brownsche Bewegung eines Teilchens, das von einer elastischen Kraft beeinflußt wird, aber jenes hatte einstweilen nur eine ideelle Bedeutung, da diesbezügliche Versuche noch nicht vorliegen, während es sich hier gerade um die als Typus eines irreversibeln Vorgangs geltende Diffusion und um direkt ausführbare und ausgeführte Beobachtungen handelt.

6. Umkehrbarkeit der Diffusion, intermittierende Beobachtung.

Unsere Untersuchung gibt uns somit auch die Mittel an die Hand, die Frage nach der Umkehrbarkeit „irreversibler" Prozesse, oder was dasselbe ist, nach den Gültigkeitsgrenzen des II. Hauptsatzes, welche damals in allgemeinerer Form behandelt wurde, wenigstens in diesem Spezialfalle ganz exakt zu lösen und teilweise auch experimentell zu kontrollieren.

Das Boltzmannsche Grundprinzip der Erklärung der Irreversibilität, welches seinerzeit so heftig bekämpft, von Zermelo u. a. geradezu als widersinnig verworfen wurde, wird uns schon durch die Tabelle I, oder noch besser II, klar demonstriert. Wir sehen, daß im Laufe genügend langer Zeiten jeder Zahlenwechsel ($n\ m$) ebenso häufig vorkommt, wie der umgekehrte Zahlenwechsel ($m\ n$) — was auch aus den betreffenden Formeln nachzuweisen ist — in Übereinstimmung mit der seinerzeit von Loschmidt erhobenen Forderung der prinzipiellen Umkehrbarkeit aller molekularen Vorgänge.

Andererseits ist aber auch ersichtlich, daß nach einer relativ großen Anfangszahl z. B. 5, 6 oder 7, im nächsten Zeitintervall äußerst wahrscheinlich eine erheblich kleinere Zahl auftritt, daß also bei hoher Anfangskonzentration zuversichtlich ein Ausgleich durch Diffusion zu erwarten ist. Es entspricht das ganz der Boltzmannschen Behauptung, daß die negative Entropiekurve von jedem höheren Wert fast immer sofort nach abwärts gehe[1]). Allerdings wird der abnormale Anfangszustand im Laufe der Zeit infolge der zufälligen Schwankungen wieder einmal erreicht werden, aber bei größerer Abnormalität des Anfangszustandes mag die Wiederkehrzeit so lang sein, daß die Wiederkehr praktisch nicht zu beobachten sein dürfte, so daß der Vorgang irreversibel zu sein scheint.

Um die Sache quantitativ näher zu untersuchen, wollen wir den Begriff der durchschnittlichen Wiederkehrzeit[2]) näher präzisieren. Fassen wir nämlich einen bestimmten Wert n der Teilchenzahl ins Auge, so kann es vorkommen, daß dieser Wert einmal auftritt und sofort von einem anderen Wert m gefolgt wird, oder die Zahl n kann zweimal, dreimal hintereinander auftreten, dann einem m Platz machen usw., wie dies die gebrochene Kurve (a) der Fig. (1) für $n = 2$ verdeutlicht.

Bezeichnen wir mit N_k die Anzahl der Fälle des Auftretens der Zahl n, wo dieselbe gerade k mal hintereinander erscheint und andererseits mit M_k die Anzahl der Fälle, welche durch Nichterscheinen der Zahl n in k hintereinander folgenden Intervallen τ charakterisiert sind.

Dann lassen sich die Wahrscheinlichkeitswerte $W(n)$, $W_n(0)$ [vgl. Gleichung (11, 12)], zufolge ihrer Bedeutung als relative Häufigkeitswerte, ausdrücken als:

1) Wogegen Zermelo, scheinbar überzeugend, antwortete, daß eine Kurve nicht in jedem ihrer Punkte ein Maximum haben könne, außer sie ist eine Konstante. Wir kommen auf diesen Gegenstand noch anläßlich eines anderen Beispiels zurück (II. Vortrag, 6. Abschn.). Literatur: Siehe P. u. T. Ehrenfest, Enzyklop. d. math. W. IV, 32.

2) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. **124**, 339, 1915.

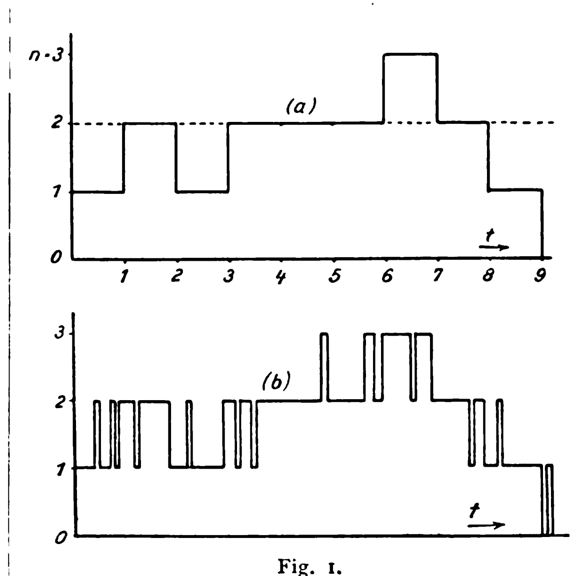


Fig. 1.

$$W(n) = \frac{\Sigma k N_k}{\Sigma k (N_k + M_k)} \tag{19}$$

$$W_n(0) = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots} = 1 - \frac{\Sigma N_k}{\Sigma k N_k} \tag{20}$$

Nun wollen wir als durchschnittliche Dauer T_n des n-Zustandes den Durchschnittswert der Zeiten bezeichnen, während welcher der n-Zustand andauert:

$$T_n = \tau \frac{\Sigma k N_k}{\Sigma N_k} \tag{21}$$

und als durchschnittliche Wiederkehrzeit die Zeitdauer, welche durchschnittlich vom Aufhören des n-Zustandes bis zu dessen nächstem Wiedereintritt verfließt:

$$\Theta_n = \tau \frac{\Sigma k M_k}{\Sigma M_k}, \tag{22}$$

wobei τ die Dauer eines Intervalles bedeutet.

Da nun in langen Zeiträumen, welche hier vorausgesetzt werden, jede Zahl ebenso häufig erscheinen wie verschwinden muß, gilt offenbar: $\Sigma N_k = \Sigma M_k$, und hiermit erhält man aus (20) für die durchschnittliche Dauer des n-Zustandes:

$$T_n = \frac{\tau}{1 - W_n(0)} \tag{23}$$

und mit Hilfe von (19) für die durchschnittliche Wiederkehrzeit:

$$\Theta_n = \frac{\tau}{1 - W_n(0)} \frac{1 - W(n)}{W(n)}. \tag{24}$$

Eine Prüfung dieser Beziehungen an der Svedbergschen Zahlenreihe gibt folgende Resultate[1]) (Zeitdauern als Bruchteile von Intervallängen τ ausgedrückt):

1) Hierin sind einige Versehen der ursprünglich gegebenen Tabelle richtiggestellt.

n	T_n gef.	T_n ber.	Θ_n gef.	Θ_n ber.
0	1,67	1,47	6,08	5,54
1	1,50	1,55	3,13	3,16
2	1,37	1,38	4,11	4,05
3	1,25	1,23	7,85	8,07
4	1,23	1,12	18,6	20,9

Die Übereinstimmung ist im allgemeinen befriedigend, insbesondere da zufällige Fehler hier bei den größeren Zahlen einen erheblichen Einfluß ausüben, und da auch die Tatsache, daß nur eine begrenzte Zahlenreihe zur Verfügung steht, eine systematische, die gefundenen Θ vermindernde Fehlerquelle bildet.

An die Formel (24) lassen sich nun weitere interessante Folgerungen knüpfen. Handelt es sich um größere Zahlen n, so ist sowohl $W(n)$ wie auch $W_n(0)$ sehr klein, und es gilt angenähert:

$$\Theta_n = \frac{\tau}{W(n)} = \tau \frac{e^\nu n!}{\nu^n}. \qquad (25)$$

Ein Zahlenbeispiel möge zeigen, wie außerordentlich rasch diese Größe anwächst, falls n zunimmt. Für die größte von Svedberg einmal beobachtete Zahl 7 würde eine Wiederkehrzeit von 1105 Intervallängen = 27 Minuten folgen, während beispielsweise für die Zahl $n = 17$ die Zeit $\Theta = 10^{13}\tau = 500{,}000$ Jahre beträgt. Wäre also Svedberg von einem solchen — auf irgendeine Weise künstlich hergestellten — Konzentrationsverhältnis als Anfangszustand ausgegangen, so hätte er gewiß nie die automatische Wiederkehr desselben beobachten können.

7. Umkehr der Diffusion bei kontinuierlicher Beobachtung.

Nun erfordert ein Umstand noch eine weitere Untersuchung. Unsere Formeln gelten nämlich nur unter Voraussetzung einer intermittierenden Beobachtung in gleich langen Zeitintervallen. Wie wäre die ganze Schlußweise abzuändern, wenn es sich uns um eine kontinuierliche Beobachtung handeln würde?

Der nahe liegende Gedanke, in unseren Formeln (23, 24) zur Grenze $\lim \tau = 0$ überzugehen, scheint auf den ersten Blick sowohl für die Dauer wie für die Wiederkehrzeit den Wert $\lim \Theta = \lim T = 0$ zu geben, da für genügend kurze Zeiten

$$\lim W_n(0) = 1 - (n+\nu)P \qquad (26)$$

gilt, und P gemäß (16) die Form annimmt:

$$\lim P = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}. \qquad (27)$$

Offenbar hängt dies damit zusammen, daß die Brownsche Bewegung im Sinne unserer Formel (5) in einer solchen Weise erfolgt, als ob ein unendlich verwickelter Zickzackweg mit unendlich großer Geschwindigkeit zurückgelegt würde. Der Grenzwert der mittleren Verschiebungsgeschwindigkeit $\frac{\sqrt{\overline{(x-x_0)^2}}}{t} = \sqrt{\frac{2D}{t}}$ konvergiert ja offenbar für $t = 0$ gegen ∞. Also würde jedesmal, wenn ein Teilchen die Grenzflächen des beobachteten Raumes durchstößt, eigentlich ein unendlich häufiges Hin- und Herschwanken der Teilchenzahl erfolgen, und die Kurve (*a*) Fig. (1) wäre eigentlich zu ersetzen durch eine Zickzacklinie von der Art, wie dies die Kurve (*b*) andeutet. Da die Anzahl der Zahlenwechsel unendlich groß wäre, dagegen die Zeitstrecke endlich, würde natürlich für Θ ein Durchschnittswert Null resultieren.

Hiermit stoßen wir aber gerade auf eine Lücke aller unserer bisherigen Betrachtungen. Die Brownsche Bewegungsformel (1) ist nämlich, ihrer Ableitung gemäß, nur für Zeiten gültig, welche erheblich länger sind als die mittlere Dauer der annähernd geradlinigen Bewegung der Teilchen. Diese Bedingung läßt sich dadurch präzisieren, daß der soeben berechnete Wert der Verschiebungsgeschwindigkeit endlich bleiben, und zwar der Größe der Molekulargeschwindigkeit C des Teilchens entsprechen muß[1]), also sind Zeiten vorausgesetzt:

$$t >> \frac{6D}{C^2} \qquad (28)$$

Ebenso verliert natürlich die übliche Diffusionstheorie ihre Geltung, falls es sich um Vorgänge handelt, welche in Zeiträumen von jener Größenordnung merklich variabel sind. Für wesentlich kürzere Zeiten sind im Gegenteil alle Teilchenbewegungen als ungefähr geradlinig und mit der Geschwindigkeit C erfolgend zu betrachten, welche sich aus der Masse des Teilchens M mittels der bekannten Relation berechnen läßt:

$$C = \sqrt{\frac{3HT}{NM}}. \qquad (29)$$

Dementsprechend ist die Größe P für sehr kurze Zeiten zu bestimmen, indem man den bekannten Ausdruck der Gastheorie heranzieht, welcher die Anzahl von Stößen angibt, die in der Zeit t von einem Gase, welches N Moleküle pro Volumeinheit enthält, gegen die Flächeneinheit einer Wand ausgeübt werden:

$$\frac{\mathsf{N}C}{\sqrt{6\pi}}t.$$

1) Der Faktor $\sqrt{3}$ in der nachstehenden Formel rührt von der Zusammensetzung der drei Komponenten in XYZ her.

Da nun P die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein anfangs irgendwo in v befindliches Teilchen in der Zeit t über die Grenzfläche trete, ist es offenbar zahlenmäßig gleich der Anzahl Stöße, welche jenes durchschnittlich in der sehr kurzen Zeit t ausüben würde, also gilt, da $N = \frac{1}{v}$ ist, mit Rücksicht auf die Größe der Grenzfläche F:

$$\lim_{t=0} P = \frac{F}{v} \frac{Ct}{\sqrt{6\pi}}.$$

Wird nun dieser Ausdruck in unsere Formel (24, 26) eingesetzt, so erhält man sowohl für die durchschnittliche Dauer, wie auch für die Wiederkehrzeit, auch bei kontinuierlicher Beobachtung endliche Grenzwerte:

$$T = \frac{v}{F} \frac{\sqrt{6\pi}}{C(n+\nu)}; \qquad \Theta = T \frac{1 - W(n)}{W(n)}. \tag{30}$$

Darnach berechnet man die Wiederkehrzeit der Zahl 17 bei kontinuierlicher Beobachtung zu $\Theta = 161$ Tagen; dabei wäre aber die durchschnittliche Dauer einer solchen Wiederkehr nur $T = 9 \cdot 10^{-7}$ Sek., also hätte ein experimentierender Physiker gewiß keine Gelegenheit, sich von der Reversibilität solcher Zustände zu überzeugen.

Noch viel auffälliger tritt die Grenze, welche die molekularen Schwankungserscheinungen von dem Bereich der scheinbaren Irreversibilität trennt, in dem Falle hervor, wenn die Teilchenzahlen n, ν genügend groß sind. Dann läßt sich die Größe $n!$ im Ausdrucke für $W(n)$ in der bekannten Weise approximieren, und man erhält für die Wiederkehrzeit einer gewissen Verdichtung $\delta = \frac{n-\nu}{\nu}$:

$$\Theta = \frac{v\pi}{FC} \sqrt{\frac{3}{\nu}}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} \tag{31}$$

Auf Grund dieser Formeln habe ich eine exakte Lösung eines schon öfters, u. a. auch von Boltzmann aufgeworfenen Problems zu geben versucht, welches ich bereits früher in etwas anderer, mehr approximativer Weise behandelt hatte[1]), betreffend die Möglichkeit einer automatischen Entmischung der Luft in ihre Bestandteile. Wenn man die in einer Kugelfläche vom Radius a enthaltene Luftmenge in Betracht zieht und die Zeit Θ berechnet, wann der Sauerstoff derselben eine um 1 Proz. höhere Konzentration annimmt, als die normale, so erhält man folgendes Bild:

$a =$	1	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$ cm
$\Theta =$	$10^{(10^{14})}$	10^{68}	10^{6}	1	10^{-11} Sek.

Für Volumina, welche mit bloßem Auge beobachtbar sind, resultieren also für eine Konzentrations-Schwankung $\delta = {}^1/_{100}$ derart kolossale Wiederkehrzeiten, daß man die Diffusion für praktisch irreversibel halten muß, während andererseits in den an der Grenze mikroskopischer Sichtbarkeit stehenden Räumen die Konzentrationsschwankungen so groß sind und so rasch erfolgen, daß da von einer Irreversibilität keine Rede sein kann. Der Begriff der Diffusion in der üblichen Bedeutung des Wortes verliert da seine Anwendbarkeit — da doch niemand in der Svedbergschen Zahlenreihe eine Illustration der Diffusion erkennen würde, obwohl auch hier der durchschnittliche Betrag der Konzentrationsänderung von einem gegebenen Zustand aus vollständig in Übereinstimmung mit den Regeln derselben erfolgt.

Hiermit sind wir, wenigstens im Bereich dieser Erscheinungen, zu einer vollständigen Aufklärung der ehemals für unüberbrückbar angesehenen Widersprüche zwischen der auf den Irreversibilitätsbegriff gestützten Thermodynamik und der Molekularkinetik gelangt. Wir sehen, in welchen Punkten die klassische Diffusionstheorie durch die Theorie der Brownschen Bewegungen und der Konzentrations-Schwankungen zu ergänzen ist, und wie durch letztere die in der mikroskopischen Physik so auffallend hervortretenden Divergenzen zwischen dem — teilweise indeterministischen — Verhalten eines individuellen Systems und dem durchschnittlichen Verhalten einer Schar gleichartiger Systeme ins rechte Licht gesetzt werden.

8. Verallgemeinerungen.

Es wäre recht verlockend, diese Betrachtungen auch auf andere, als irreversibel geltende Erscheinungen zu verallgemeinern. Beispielsweise läßt sich die Formel für das Veränderlichkeitsquadrat (14) auch in der Form schreiben:

$$\overline{\Delta^2} = 2\overline{\varepsilon^2} P, \tag{32}$$

wenn man berücksichtigt, daß $\nu = \overline{\varepsilon^2}$ laut (8) gleich dem durchschnittlichen Schwankungsquadrate der Größe $(n-\nu)$ ist. Nun aber liegt es nahe, diese Überlegung auf die Wärmeleitung zu übertragen. Aus einem allgemeinen Theorem der statistischen Mechanik kann man (nach Gibbs, Einstein, De Haas-Lorentz u. a.) schließen, daß ein Körper von der Wärmekapazität c, der sich im Wärmegleichgewicht mit seiner Umgebung befindet, Energieschwankungen im durchschnittlichen Betrage von

1) a. a. O. (Vorträge ü. kinetische Theorie d. Mat. u. Elektr.)

$\overline{\varepsilon^2} = \frac{cHT^2}{N}$ erfährt. Für die Schwankungsgeschwindigkeit derselben dürfte somit obige Gleichung (32) gelten, wenn man einfach letzteren Ausdruck einführt und in (15) den Diffusionskoeffizienten D durch den Wärmeleitungskoeffizienten $\varkappa$ ersetzt[1]).

Ebenso könnte man ganz allgemein den Begriff der Wiederkehrzeit zur Definition der Gültigkeitsgrenzen des thermodynamischen Irreversibilitätsbegriffs benutzen, indem man sagt: $\left.\begin{matrix}\text{Irreversibel}\\ \text{Reversibel}\end{matrix}\right\}$ erscheint ein Vorgang, wenn der Anfangszustand eine im Vergleich zur Beobachtungsdauer $\left\{\begin{matrix}\text{lange}\\ \text{kurze}\end{matrix}\right\}$ Wiederkehrzeit besitzt. Für praktische Rechnungen bringt dies natürlich keinen besonderen Nutzen, da man die Wiederkehrzeit nicht allgemein und einfach zu berechnen versteht, aber vielleicht ist auch die rein begriffliche Klarstellung dieser Verhältnisse von gewissem Wert.

II. Einfluß fester Wände, äußerer oder innerer Kräfte auf die Diffusion.

1. Langsamkeit der Diffusion in Kolloiden.

Nun wollen wir zur Besprechung ganz konkreter Probleme übergehen, nämlich der von verschiedenen Seiten unternommenen Versuche zur experimentellen Erforschung der Diffusion in kolloiden Lösungen, was uns auch Gelegenheit bieten wird, unsere Ausführungen über Äquivalenz der Brownschen Bewegungen und der Diffusionstheorie in einem wichtigen Punkte zu ergänzen, d. h. bezüglich der Grenzbedingungen an festen Wänden, sowie betreffs des Einflusses eines äußeren Kraftfeldes, nach Art des Schwerefeldes, oder innerer Molekularkräfte.

Von unserem Standpunkt aus sehen wir es als selbstverständlich an, daß Kolloide diffundieren, da ja ihre Teilchen Brownsche Bewegungen ausführen, aber wenn von Diffusion derselben geredet wird, meint man solche Erscheinungen, bei welchen nicht die einzelnen Teilchen verfolgt werden, sondern wo sich die diffusiven Konzentrationsänderungen im großen beobachten lassen. Nun wurde bekanntlich der Mangel einer ausgesprochenen Diffusionstendenz oder vielmehr die außerordentliche Langsamkeit der betreffenden Erscheinungen seit jeher als charakteristisches Merkmal der Kolloide angesehen, und es ist tatsächlich nicht leicht, an denselben diesbezüglich exakte Messungen auszuführen.

Die ersten Messungen an lyophoben Kolloiden sind wohl jene, welche Svedberg an sehr kleinkörnigen Goldlösungen ausgeführt hat[1]). Dabei wurde eine durch einen (1 Proz.) Zusatz von Harnstoff beschwerte Schicht der Goldlösung mit reinem Wasser überschichtet; dann wurde die allmähliche Ausgleichung der Konzentration mittels Messung des optischen Extinktionskoeffizienten in verschiedenen Schichten verfolgt; es ergab sich für einen Kornradius $a = 1{,}33 \cdot 10^{-7}$ cm ein Diffusionskoeffizient $D = 1{,}35 \cdot 10^{-6}$, was mit der theoretischen Formel (S. 564), welche $D = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ erfordert, ganz überraschend gut stimmt. Die Präzision derartiger Messungen dürfte aber nicht groß sein, da die Versuche gegen 5 Tage dauerten und unterdessen die Goldlösung bereits infolge Koagulation gewisse Veränderungen erlitt. Bei den 100—1000 mal langsamer diffundierenden submikroskopischen oder mikroskopischen Kolloidteilchen dürfte diese Methode kaum anwendbar sein; da müssen spezielle Methoden erdacht werden, und zwar gelingt dies dank dem Verhalten fester Wände gegenüber der Diffusion.

2. Versuche über adsorbierende Wände, Berechnung auf Grund der Brownschen Bewegung.

Die ersten Versuche, an grobkörnigen Kolloiden derartige Diffusion nachzuweisen, sind von L. Brillouin (1912) auf Anregung Perrins unternommen worden[2]), und dieselben scheinen mir, obwohl das Schlußresultat problematisch ist, umso interessanter, als sie eine gewisse Verwandtschaft mit unserer später darzulegenden Koagulationstheorie aufweisen. Der Grundgedanke ist sehr einfach und sinnreich: In rein wässeriger Gummiguttlösung haben die Gummigutt-Teilchen die Eigenschaft, von gläsernen

---

1) Jene Beziehung (32) gilt auch in dem später zu besprechenden Spezialfalle eines Systems, welches Molekularschwankungen unter Einfluß einer elastischen Kraft ausführt (daher vermutlich auch in andern dissipativen Systemen, soweit Zustände in der Nähe des Gleichgewichtszustandes betrachtet werden), falls P sinngemäß mit Hilfe der zu (13) analogen Gleichung definiert wird. Bezeichnen wir mit x den in Betracht kommenden Parameter, von der Gleichgewichtslage aus gerechnet, mit Δx den Bruchteil, um welchen er sich infolge der dissipativen Kräfte (unter Vernachlässigung der Schwankungen) im Zeitraum t gegen die Gleichgewichtslage hinnähern würde, so drückt somit die Formel $\frac{\overline{\Delta^2}}{\overline{\varepsilon^2}} = 2\frac{\Delta x}{x}$ einen sehr allgemeinen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Größe der Schwankungen und thermodynamischen Größen aus.

1) Th. Svedberg, Die Existenz der Moleküle. Leipzig 1912, S. 78—83.

2) J. Perrin, La théorie du rayonnement etc., p. 212; L. Brillouin, Ann. chim. phys. 27, 412, 1912.

Gefäßwänden beim Anstoßen abzuprallen, wogegen Perrin bemerkte, daß sie in angesäuerter oder stark (über 95 Proz.) glyzerinhältiger Lösung an den Wänden kleben bleiben, sobald sie mit denselben in Berührung kommen[1]).

Wenn somit in glyzerinhältiger Lösung eine Glasplatte eingetaucht wird, so muß sich dieselbe im Laufe der Zeit mit einer wachsenden Anzahl Gummigutt-Körnchen bedecken, während die Verarmung der angrenzenden Flüssigkeitsschichten durch Diffusion ausgeglichen wird. Die Anzahl der in gewisser Zeit angeklebten Teilchen, welche sich dann durch Abzählen der mikrophotographischen Aufnahme unter dem Mikroskop bestimmen läßt, ermöglicht somit eine Ermittelung des Diffusionskoeffizienten, und zwar meint Brillouin, daß sich hierzu die Formel für das durchschnittliche Verschiebungsquadrat (5) benützen lasse, indem die eine Hälfte der Teilchen eine positive, die andere Hälfte eine negative Verschiebung erleide, somit in der Zeit t die Anzahl

$$M = \frac{\nu}{2}\sqrt{Dt} \qquad (33)$$

Teilchen an der Gefäßwand kleben bleiben müßte (wenn ν die Anzahl der Teilchen pro cm^3 bedeutet). Auf diese Weise erhielt Brillouin durch Auszählen von M und ν den Wert des Diffusionskoeffizienten

$$D = \frac{2M^2}{\nu^2 t},$$

was ihm durch Vergleich mit der Sutherland-Einsteinschen Formel

$$D = \frac{HT}{N}\,\frac{1}{6\pi\mu a} \qquad (34)$$

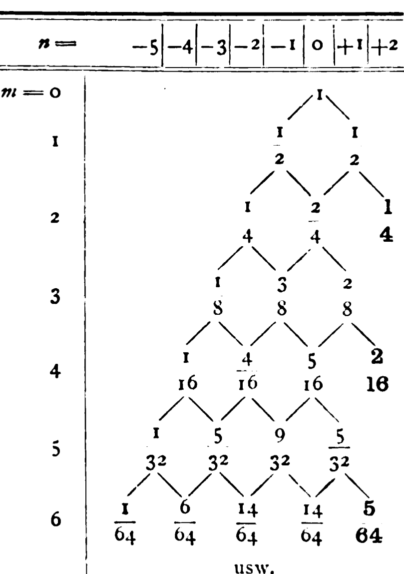
die Bestimmung der Avogadro-Loschmidtschen Zahl zu $N = 69 \cdot 10^{22}$ ermöglichte.

Nun ist aber jene Berechnungsmethode offenbar mangelhaft[2]). Man hätte nicht $\sqrt{\overline{\Delta x^2}}$, sondern den Durchschnittswert der absoluten Verschiebung $|\overline{\Delta x}|$ zu benützen, und überdies, was das Wichtigste ist, kommt es ja gar nicht auf die Größe der im Zeitpunkt t erreichten Verschiebung an, sondern auch auf alle Verschiebungen in der Zwischenzeit. Es kommen auch solche Teilchen vor, welche zwar zu der Zeit t sich in der Anfangslage befinden, aber in der Zwischenzeit eine so große Elongation durchgemacht haben, daß sie mit der Wand in Berührung gekommen sind.

Befinden sich also anfänglich $\nu\, dx$ Teilchen in der Entfernung $x \cdots\cdots x + dx$ von der Wand, so werden hiervon im Zeitraum t diejenigen an derselben haften bleiben, welche im freien Medium in jenem Zeitraum irgend einmal eine größere maximale Elongation als x erreicht hätten. Oder anders ausgedrückt: Bezeichnen wir mit $W(x)\,dt$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein anfangs im Nullpunkt befindliches Teilchen die positive Verschiebung x zum ersten Male im Zeitraum $t \cdots t + dt$ erleide, so wird die durchschnittliche Gesamtzahl der Teilchen, welche aus einer in X unendlich ausgedehnten, anfänglich gleichmäßig konzentrierten Flüssigkeitssäule in jenem Zeitraum an die Flächeneinheit der Wand $x = 0$ stoßen, betragen:

$$N\,dt = \nu\, dt \int_0^\infty W(x)\,dx. \qquad (35)$$

Es handelt sich also darum, die Wahrscheinlichkeit $W(x)$ zu ermitteln, daß ein Teilchen bis zu der Zeit t immer nur kleinere Elongationen als x aufweise und erst im darauffolgenden Intervalle dt die Verschiebung x (oder eine größere) erleide. Um den mikroskopischen Vorgängen Rechnung zu tragen, können wir gemäß dem, was früher über die Entstehung der Brownschen Bewegung gesagt war, uns jedes Teilchen in Zeitintervallen τ mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine positive oder negative Verschiebung δ ausführend denken. So lassen sich nun die Wahrscheinlichkeiten $a_{n,m}$, daß die positive Verschiebung um n-Einheiten zum ersten Male beim m ten „Wurf" auftrete, durch sukzessive Berechnung ermitteln, indem man z. B. für $n = 2$ das leicht verständliche Schema ansetzt:



1) Solche Erscheinungen kommen bei Kolloiden wohl häufig vor; vermutlich werden Rauchteilchen (R. Lorenz u. W. Eitel, loc. cit.) immer nur adsorbiert, was die Instabilität gasförmiger Kolloide erklären würde. Derartige Adsorptionsvorgänge, ebenso wie die im dritten Vortrag zu behandelnde Koagulation, tragen natürlich einen (scheinbar) irreversibeln Charakter zur Schau, in dem Sinne wie dies vorher erörtert wurde.

2) Vgl. M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. 124, 263, 1915.

Berechnet man nun die fettgedruckten Brüche für sukzessive m- und n-Werte, so erhält man für die in Rede stehenden Wahrscheinlichkeiten a_{nm} das Schema:

n	1	2	3	4	5	6	7
$m = 1$	$\frac{1}{2}$						
2		$\frac{1}{4}$					
3	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$				
4		$\frac{2}{16}$		$\frac{1}{16}$			
5	$\frac{2}{32}$		$\frac{3}{32}$		$\frac{1}{32}$		
6		$\frac{5}{64}$		$\frac{4}{64}$		$\frac{1}{64}$	
7	$\frac{5}{128}$		$\frac{9}{128}$		$\frac{5}{128}$		$\frac{1}{128}$

Das allgemeine Bildungsgesetz dieser Koeffizienten a_{nm} ergibt sich leicht, wenn man bemerkt, daß sie zu den betreffenden Binomialkoeffizienten in einfacher Beziehung stehen. Es gilt nämlich:

$$a_{nm} = \frac{n}{2^m m} \binom{m}{\frac{m-n}{2}} \qquad (36)$$

und dieser Ausdruck läßt sich für große n, m in derselben Art approximieren, wie das bei Ableitung der Brownschen Bewegung geschah; es ist a_{nm} gleich Null, falls $(m-n)$ ungeradzahlig ist, und gleich

$$\lim a_{nm} = \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \frac{n}{m} e^{-\frac{n^2}{2m}},$$

falls $(m-n)$ gerade ist; wird also

$$n = \frac{x}{\delta}, \quad m = \frac{t}{\tau}, \quad D = \frac{\delta^2}{2\tau},$$

gesetzt, so erhält man durch den Grenzübergang für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W(x)\,dt = \lim a_{nm} \frac{dt}{2\tau} = \frac{x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi D t^3}} dt. \qquad (37)$$

Nach dieser Formel hätte man also die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß ein vom Nullpunkt ausgehendes Teilchen infolge seiner Molekularbewegung zum erstenmal im Zeitraum $t \cdots t + dt$ die Abszisse x überschreite, und eine ähnliche, nur durch Berücksichtigung der superponierten Schwerkraftbewegung verallgemeinerte Formel ist bei der exakten Berechnung der bekannten Ehrenhaft-Millikanschen Versuche über Elektronenladung anzuwenden[1]).

Zu unserer Aufgabe zurückkehrend, sehen wir also, daß die Anzahl der im Zeitraum $t \cdots t + dt$ an der Wand anklebenden Teilchen gegeben ist durch:

$$N\,dt = \frac{\nu\,dt}{2\sqrt{\pi D t^3}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \nu \sqrt{\frac{D}{\pi t}}\, dt \qquad (38)$$

und die Gesamtzahl der bis zum Zeitpunkt t daran haften gebliebenen ist:

$$M = \nu \int_0^t \sqrt{\frac{D}{\pi t}}\, dt = \frac{2\nu\sqrt{Dt}}{\sqrt{\pi}} \qquad (39)$$

was also ein im Verhältnis $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ größeres Resultat gibt als Brillouins Berechnung (33). Aus den Versuchen dieses Forschers würde also für D ein im Verhältnis $\frac{\pi}{8}$ zu kleiner Wert von D folgen und dementsprechend ein vollständig falscher Wert für die Loschmidtsche Zahl ($N = 176 \cdot 10^{22}$). Das zeigt, daß jene Methode noch an einem prinzipiellen Fehler leiden muß.

Die Aufklärung dieses Widerspruchs scheint mir recht einfach. Es zeigt sich eben, daß die Voraussetzung, daß ein jedes an die Wand stoßende Teilchen an derselben sofort haften bleibe, bei jenen Versuchen nicht zutreffend war. Experimentell läßt sie sich ja direkt nicht beweisen, da es nicht möglich ist zu konstatieren, ob die Teilchen wirklich schon beim ersten Anstoß an der Wand haften bleiben, oder ob sie durchschnittlich mehrere Male anstoßen müssen, bevor ein Festhaften erfolgt.

Falls letzteres der Fall ist, erklärt sich die Verminderung der beobachteten Zahl der anhaftenden Teilchen ohne weiteres. Der physikalische Grund des Haftenbleibens dürfte, aus elektrosmotischen Erscheinungen zu schließen, darin liegen, daß die elektrische Doppelschicht an der Oberfläche der Wand und der Teilchen, welche sonst sozusagen wie ein elastisches Polster wirkt, infolge des Glyzerin- oder Elektrolytzusatzes verschwindet, so daß die kapillaren Anziehungskräfte zur Wirkung kommen (oder vielleicht sogar spezielle Anziehungskräfte entstehen). Es wäre also wohl zu erwarten, daß ein sofortiges Haftenbleiben erfolgt, falls die Wand vollständig entladen ist, wie dies bei starkem Elektrolytzusatz stattfindet; ob dies aber

1) H. Fletcher, Phys. Rev. **33**, 81, 1911; E. Schrödinger, diese Zeitschr. **16**, 289, 1915; M. v. Smoluchowski, ibidem S. 321, 1915.

bei jenen Versuchen der Fall war, ist ganz unbekannt[1]).

So sinnreich also auch jene Methode ist, scheint sie praktisch zur Gewinnung zuverlässiger Resultate nicht geeignet zu sein.

1) Auch kann unsere Rechnung nur dann Gültigkeit beanspruchen, falls die Anzahl der anklebenden Teilchen so gering ist, daß sie sich gegenseitig nicht behindern. Übrigens wäre, genau genommen, auch die scheinbare Vermehrung des Zähigkeitswiderstandes in unmittelbarer Nähe der Wand als Korrektur bei der Rechnung einzuführen.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

A. Miethe, B. Seegert, F. Weidert, Die totale Sonnenfinsternis vom 21. August 1914, beobachtet in Sandnessjöen auf Alsten (Norwegen). Gemeinsame Expedition der Königlich Technischen Hochschule Berlin und der Optischen Anstalt C. P. Goerz A.-G. Friedenau. 4⁰. X und 93 S. mit einem Geländeplan, 63 Abbildungen und 10 Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1916. Geb. M. 12.—.

Die Beobachtungen der Sonnenfinsternis am 21. August 1914, deren Totalitätszone sich über Norwegen, Schweden, durch Rußland über Riga, Kiew, die Krim bis Trapezunt erstreckte, sind zum größten Teile durch ungünstiges Wetter oder durch den Ausbruch des Krieges vereitelt worden. Da die klimatischen Verhältnisse in Südrußland die meiste Aussicht auf gutes Wetter zu gewähren schienen, hatte die Mehrzahl der von den verschiedenen Ländern ausgesandten Expeditionen dort ihre Beobachtungsorte gewählt. Auch eine große Anzahl deutscher Astronomen war ja mit vielen wertvollen Instrumenten Ende Juli 1914 dorthin gereist — ein deutlicher Beweis, wie unsinnig die Behauptung ist, daß der Krieg von deutscher Seite vorbereitet und veranlaßt worden sei. Da es sehr erwünscht war, daß wenigstens eine der Expeditionen auch eine andere, möglichst weit entfernte Stelle der Totalitätszone besetzte, wählten die Berliner Beobachter nach reiflicher Überlegung einen Ort auf der norwegischen Insel Alsten, um dort ihre Instrumente aufzubauen. Und das war ihr Glück; sie konnten sich nicht nur am Tage der Finsternis sehr guten Wetters erfreuen, sondern wurden auch nach dem Kriegsausbruche durch die Gastfreundschaft der norwegischen Regierung weitgehend unterstützt. Allerdings mußte eine letzte Sendung von Instrumenten wegen der Gefahr des Seetransportes in Deutschland zurückbleiben, auch kehrten die dienstpflichtigen Mitglieder, um nicht von der Heimat abgeschnitten zu werden, alsbald zurück, so daß aus Mangel an Beobachtern und Instrumenten leider nur ein Teil des groß angelegten und gut vorbereiteten Beobachtungsprogramms zur Ausführung gelangen konnte. Prof. A. Miethe berichtet eingehend über den Beobachtungsplan, die Vorbereitungen, die Reise und den Verlauf der Finsternisbeobachtungen. Dr. Seegert beschreibt die zur Aufnahme der Zeitsignale von Norddeich und Eiffelturm errichtete drahtlose Empfangsstation, die sogar nach Beginn des Kriegszustandes unter Überwachung eines norwegischen Beamten weiter benutzt werden durfte, die trigonometrische Bestimmung der Lage des Beobachtungsortes, die Kontaktbeobachtungen und die mit einer Thermosäule ausgeführten Messungen der Sonnenstrahlung. In der Hauptsache ist aber die vorliegende Veröffentlichung der genauen Beschreibung aller Beobachtungswerkzeuge gewidmet, die von dem Mitgliede der Firma Goerz Dr. F. Weidert geliefert wurde. Es werden der Reihe nach besprochen: Die von Professor Miethe nur durch Änderung des Spiegelabstandes aus dem Cassegrain-Reflektor der Technischen Hochschule hergestellte horizontale Kamera von nahe 20 m Brennweite; eine horizontal gelegte photographische Kamera mit dreilinsigem Anastigmaten von 11 cm Öffnung und 345 cm Brennweite nebst exakt arbeitender Wechselkassette und Cölostaten mit 30 cm großem Planspiegel; ein parallaktisch aufgestellter Astrograph mit ähnlichem Objektiv von 20 cm Öffnung und 100 cm Brennweite; ein mit zwei ebensolchen Objektiven von 12 : 60 cm ausgerüsteter parallaktischer Astrograph; ein zur Aufnahme des Flahspektrums bestimmter Spektrograph mit zwei Objektivprismen aus Quarz und einem Quarzobjektiv von 8 : 100 cm, ebenfalls parallaktisch aufgestellt; zur Aufnahme des äußeren Koronaspektrums ein besonders lichtstarker Spaltspektrograph, mit einem oder zwei Flintglasprismen benutzbar, das Kameraobjektiv von dem seltenen Öffnungsverhältnis 6 : 12 cm, das Refraktorobjektiv 15 : 75 cm; um das Rohr dieses ebenfalls parallaktischen Instruments in einer runden Trommel montiert vier gleiche Objektive 10 : 36 cm zu photometrischen Aufnahmen der Korona in bestimmten durch Strahlenfilter begrenzten Farbengebieten; eine Kamera, mit der die Erscheinung der total verfinsterten Sonne nach dem Mietheschen Dreifarbenverfahren aufgenommen werden sollte und endlich ein neuartiges photographisches Spiegelteleskop, bei welchem der Spiegel — ähnlich wie beim Schupmannschen Medial — durch ein auf der Rückseite versilbertes zweilinsiges Objektiv gebildet wird. Dieser „aplanatische Linsenspiegel" ist in allen Fällen, wo es nicht, wie z. B. bei Nebelaufnahmen, auf die Nutzbarmachung des ultravioletten Lichtes ankommt, wegen seines selbst bei dem großen Öffnungsverhältnis 1 : 3 noch etwas über 3⁰ umfassenden, gut korrigierten Gesichtsfeldes sehr beachtenswert. Die vielfach ganz neuen optischen Konstruktionen wurden nicht nur durch Rechnung auf ihre Fehler geprüft, sondern auch nach ihrer Fertigstellung empirisch durch Anwendung der Blendenmethode untersucht und, wenn sich merkliche Fehler ergaben, durch Retuschierung verbessert. Die mitgeteilten Fehlerkurven lassen deutlich erkennen, von wie gutem Erfolge das Bestreben der Firma Goerz, diese eigenartigen astrophysikalischen Hilfsmittel in erstklassiger Form herzustellen, gekrönt war.

Beschlossen wird der lesenswerte Band durch eine Reihe von Aufnahmen der total verfinsterten Sonne, welche die Protuberanzen, die innere und die äußere Korona schön zeigen. J. Hartmann.

S. E. Sheppard, Photo-Chemistry. IX u. 461 S. With Illustrations and figures. London, Longmans, Green and Co. 1914. 12 s. 6 d.

S. E. Sheppard, Lehrbuch der Photochemie. Deutsch von Max Iklé. III u. 502 S. Mit 47 Abbildungen im Text. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1916. Geh. M. 16.—, geb. M. 17.—.

Der Verfasser hat sich um die Erforschung der photographischen Vorgänge Verdienste erworben. So stand zu hoffen, daß ein Lehrbuch der Photochemie von ihm sich als eine Förderung der im Entstehen begriffenen Wissenschaft erweisen würde. Der Gegenstand wird in elf Kapiteln behandelt: Historische Übersicht, die Messung von Lichtmengen, die Energetik der Strahlung, ökonomische und energetische Beziehungen wirklicher Lichtquellen, die Absorption des Lichtes, Statik und Kinetik photochemischer Umwandlungen, Dynamik der photochemischen Umwandlung, spezielle Photochemie, strahlende Materie und photochemische Umwandlung, die Entstehung des Lichtes bei der chemischen Umwandlung, organische Photosynthese.

Die englische Ausgabe ist seit längerer Zeit in den Händen des Referenten; er zögerte aber, das ungünstige Urteil, zu dem ihn das Studium des Werkes führte, auszusprechen. Man möchte auch den Anschein vermeiden, als ob Urteile über wissenschaftliche Leistungen durch Momente aus anderen Sphären beeinflußt werden könnten. Nun aber ist das Buch auch in deutscher Ausgabe erschienen. In der Ankündigung des Verlages heißt es: „Die im englischen Original vorhandenen Unklarheiten sind hier richtiggestellt." Diese Angabe ist nicht zutreffend. Die deutsche Ausgabe ist noch weniger klar als die englische. Den oft dunkeln in der Ausdrucksweise einer überwundenen Epoche der Naturphilosophie gehaltenen Andeutungen des Verfassers stand der Übersetzer hilflos gegenüber, weil das, worauf der Verfasser deutete, nur ein mit dem Gebiete Vertrauter allenfalls ahnen kann.

Die Aufgabe eines Lehrbuches, positive Kenntnisse in klarer Form zu übermitteln, erfüllen nur wenige Abschnitte. Für die ersten mehr physikalischen Kapitel wird der deutsche Leser besser tun, zu dem Buche von Schaum zu greifen, für das engere Gebiet der Photochemie, d. h. die Einwirkung des Lichtes auf chemische Vorgänge, zu Zusammenfassungen wie sie Weigert und andere gegeben haben. Der Verfasser stellt sich aber nach seiner Versicherung in der Einleitung noch die besondere Aufgabe „die Studierenden durch Beispiele von Arbeitshypothesen zu fördern". Seine Ausdrucksweise läßt aber alles gestaltlos und nicht faßbar. „Es bleibt für uns das weiße Licht einstweilen das Zeichen oder die Verwirklichung einer Transmutation von Werten, die unsere gegenwärtige symbolische Logik nicht zu enträtseln vermag, gleichsam als könnten wir sagen: Das Unbeschreibliche hier wird es getan." „Die Entropie verhält sich zur Energie etwa wie der zunehmende Schatten, den die sinkende Sonne wirft." „Es ist zweifelhaft ob wir die chemische Affinität mit denselben Einheiten richtig messen können wie eine physikalische Energie. Sie ist eher eine dauernde Synergie von Kräften, bei der jede Kampfeswelle, falls sie sich bricht, eine endliche diskontinuierliche Energiemenge freigibt."

Dem mit dem Fache Vertrauten bietet das Buch stellenweise Anregungen, als Lehrbuch für Studierende kann es nicht empfohlen werden. A. Coehn.

H. A. Lorentz, The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat; a course of lectures delivered in Columbia University, New York, in march and april 1906. Second edition. 8°. 343 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1916. Geh. M. 9.—, geb. M. 11.—.

Diese bekannten klassisch wertvollen Vorträge von H. A. Lorentz — die noch aus der Zeit stammen, in welcher der Internationalität der Wissenschaft nichts im Wege stand — waren seit längerer Zeit vergriffen. Es ist erfreulich, daß nunmehr diese Neuausgabe vorliegt. Wir erinnern kurz an den Inhalt: I. Allgemeine Prinzipien der Theorie freier Elektronen, II. Emission und Absorption von Wärme, III. Theorie des Zeeman-Effekts, IV. Fortpflanzung des Lichtes in einem aus Molekülen bestehenden Körper. Theorie des inversen Zeeman-Effekts, V. Optische Erscheinungen in bewegten Körpern.

Der Text der Vorträge selbst ist so gut wie unverändert geblieben, dagegen sind im Anhang, welcher einen wichtigen Bestandteil des Werkes ausmacht (ungefähr die Hälfte des Umfangs der Vorlesungen), einige neue, mit (1915) kenntlich gemachte Zusätze gegeben; es hat aber offenbar nicht in der Absicht des Autors gelegen, das Buch der Entwickelung seit 1906 entsprechend weiterzuführen. Neue Anmerkungen beziehen sich auf Folgendes: Versuche von Ehrenhaft und Millikan (vgl. übrigens: Millikan, Ann. d. Phys. **50**, 729, 1916 über die Existenz des Subelektrons), Röntgenstrahlversuche von v. Laue und anderen, Equipartitionsfrage und Plancks Theorie, Extinktion des Lichtes in Gasen (Resultat von Lord Rayleigh), Wiederholung des Fizeauschen Versuchs durch Zeeman (1914/15). Die einzigen größeren Ergänzungen beziehen sich auf die Relativitätstheorie (Anhang Seite 321—332), und zwar teils auf die im Text nur kurz behandelte Einsteinsche Theorie im allgemeinen, teils auf relativitäts-theoretische Betrachtungen an molekularen Systemen. Namentlich auf Anmerkung 75* (Seite 328), betreffend „Das allgemeine Kraftgesetz", sei aufmerksam gemacht. Auf Grund der hier gegebenen Betrachtungen sind dann auch längere Anmerkungen der ersten Auflage verändert und gekürzt wiedergegeben. Bei einem Buche von H. A. Lorentz würde man allerdings neben den neuen Zusätzen auch die unveränderte Wiedergabe der alten gern gesehen haben. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

In den Ruhestand: Der Professor der Chemie am Philadelphia College of Pharmacy Dr. Samuel P. Sadtler.

Gestorben: Der Herausgeber mehrerer chemischer Handwörterbücher Dr. Otto Dammer in München, der Chemiker Dr. W. Glikin in Berlin.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.



Fig. 1. Elektrolyt *Cu*.



Fig. 2. *Cu*-Guß.

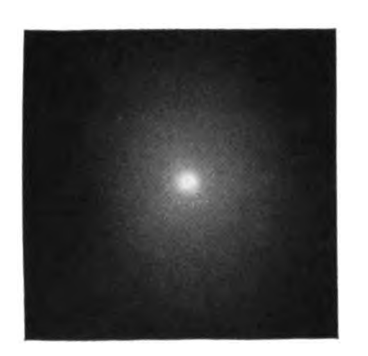


Fig. 3. *Ag* gehämmert und geglüht.



Fig. 4. *Al* gewalzt.



Fig. 5. *Al*-Guß.

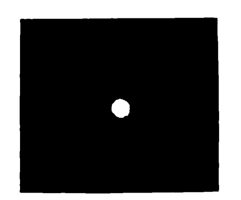


Fig. 6. *Al*-Guß gehämmert.



Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

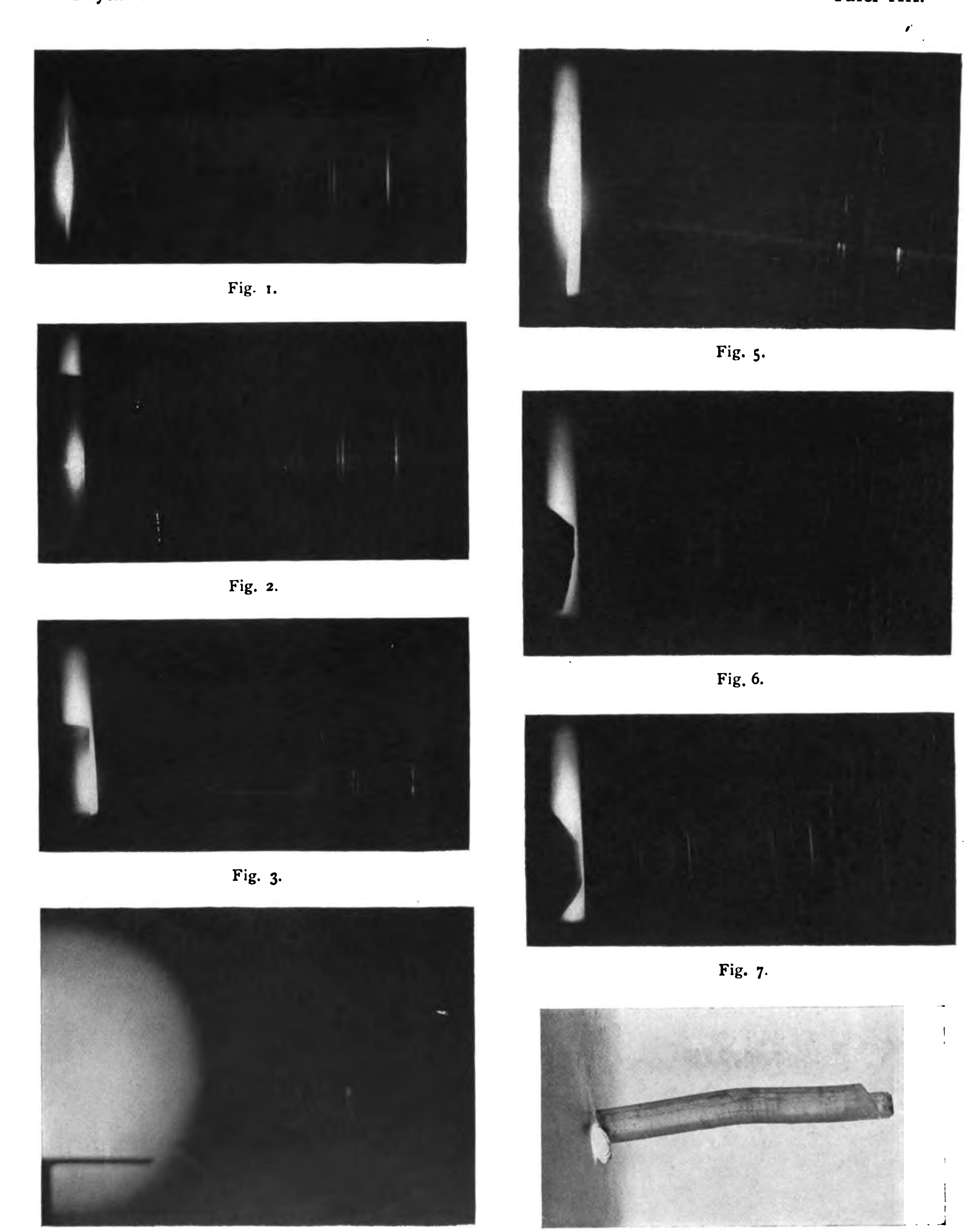


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

P. Cermak, Über Röntgenstrahlspektra, die an gekrümmten Kristallflächen erzeugt wurden.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. | 1. Dezember 1916. Redaktionsschluß für No. 24 am 30. November 1916. | 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Anwendung von Wirbelringen zur Bestimmung von Oberflächenspannungen.

Von Viktor Kutter.

1. Dynamische Methoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung.

Unter den wenigen dynamischen Bestimmungsmethoden der Oberflächenspannung, die den zahlreichen statischen gegenüberstehen, kann man diejenigen, welche die Schwingungen eines Flüssigkeitstropfens als Funktion der Oberflächenspannung benutzen und aus der Schwingungsdauer die gesuchte Oberflächenenergie ableiten, als eine Gruppe zusammenfassen[1]). Je nach den Mitteln, die Schwingungsdauer zu bestimmen, kann man hierbei grundsätzlich drei verschiedene Methoden unterscheiden, nämlich die der fallenden Tropfen von Ph. Lenard[2]) und seiner Schule, die Methode der liegenden Tropfen von P. G. Gundry[3]) und schließlich die von K. Boedeker[4]) auf Veranlassung von H. Th. Simon ausgearbeitete Methode der schwebenden Tropfen, welche gewisse Schwierigkeiten und Fehlerquellen der beiden anderen zu vermeiden sucht. Da die von Rayleigh[5]) und Webb[6]) für die Beziehung zwischen der Schwingungsdauer T und der Oberflächenspannung α theoretisch abgeleitete Formel vollkommen kugelförmige Tropfen voraussetzt, die lediglich infolge der Oberflächenspannung unter Vermeidung aller anderen Kräfte Schwingungen ausführen, so muß notwendigerweise bei der letztgenannten Methode die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung die günstigste sein, denn beim liegenden Tropfen ist infolge der Abflachung eine wesentliche Abweichung von der Kugelform die natürliche Folge, und bei den fallenden Tropfen sind, wie später noch näher gezeigt werden soll, infolge der Tropfenbildung Strömungen und Wirbelungen im Innern vorhanden, die hydrodynamisch nicht ohne Einfluß sind, beides Fehlerquellen, die bei Tropfen, welche in einer andern Flüssigkeit gleicher Dichte schweben, völlig vermieden sind. Es eröffnet sich infolgedessen von selbst die Frage, in welcher Beziehung die Anwendung der Wirbelringe zu den obigen Methoden stehe, wie sie sich zu den theoretischen Ableitungen verhält, und welches die charakteristischen Eigenschaften der Wirbelringmethode sind. Die Antwort hierauf kann kurz und einfach folgendermaßen umschrieben werden:

Die Wirbelringmethode benutzt fallende Tropfen, schließt sich also an die Untersuchungen von Ph. Lenard an und sucht mit Hilfe der Wirbelringe an Stelle der komplizierteren optischen Reflexmethode die Schwingungsdauer der Tropfen zu bestimmen und hierbei die hauptsächlichsten hydrodynamischen Fehlerquellen zu vermeiden; sie kann sowohl als selbständige Arbeitsweise, wie auch als Ergänzung der Lenardschen Methode wertvolle Dienste tun, und soll daher im folgenden beschrieben und an Hand der Zeichnungen ausführlicher erläutert werden.

Die Grunderscheinung, von der wir aus-

1) Eine andere dynam. Methode ist z. B. die Kapillarwellenmethode von L. Grunmach, Ann. d. Phys. **3**, 360, 1900 u. **9**, 1261, 1902.

2) Ph. Lenard, Wied. Ann. **30**, 209, 1887; Ph. Lenard, Ber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. math.-naturwiss. Klasse, **18**. Abh. 1910; O. Jahnke, Diss. Heidelberg, 1909; R. Hiss, Diss. Heidelberg, 1913; K. Ebeling, Ber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. math.-nat. Klasse 9. Abh. 1915.

3) P. G. Gundry, Ann. d. Phys. **14**, 590, 1904.

4) K. Boedeker, Inaug.-Diss. Göttingen 1914; K. Boedeker, Ann. d. Phys. **46**, 503, 1915. [Auszug aus der Diss.]

5) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **29**, 71, 1879.

6) S. Webb, Mess. of Math. **9**, 177, 1879.

gehen, beruht auf dem auch von J. J. Thomson beobachteten und beschriebenen Vorgange, wonach Tropfen, welche aus geringer Höhe in eine Flüssigkeit fallen, sich daselbst in Wirbelringe umwandeln[1]), die je nach der Schwingungsphase des auffallenden Tropfens mehr oder weniger tief in das Flüssigkeitsinnere eindringen[2]). Läßt man eine größere Anzahl von Tropfen gleichzeitig nebeneinander in die Flüssigkeit einfallen, derartig, daß die auf dem Flüssigkeitsspiegel nebeneinander befindlichen Tropfen die zeitlich aufeinanderfolgenden Schwingungsphasen eines solchen Tropfens bilden, dann stellen, wie die Fig. 1 zeigt, die Einfalltiefen der zugehörigen Wirbelringe eine Schwingungskurve dar, und es ist daher die Einfalltiefe selbst eine einfache und eindeutige Funktion der Phase des schwingenden Tropfens. In dieser inneren Verkettung der Erscheinungen liegt also die

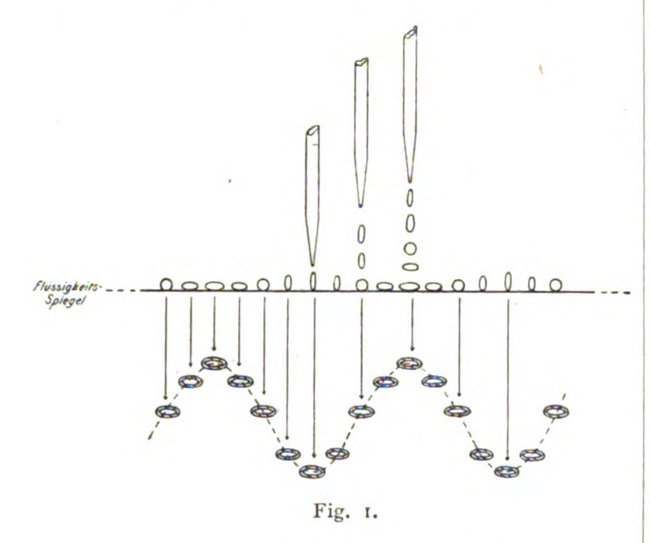


Fig. 1.

Anwendung der Wirbelringe zur Bestimmung von Oberflächenspannungen begründet.

Es ist aus der Fig. 1 ohne weiteres ersichtlich, wie man mit Hilfe der Wirbelringe diejenigen Fallhöhen bestimmen kann, für welche der Tropfen in gleicher Phase auf den Flüssigkeitsspiegel auftrifft, das sind also die Fallhöhen, deren Differenz jeweils einer Tropfenschwingung entspricht; wenn man dann noch aus den Fallhöhen die jeweiligen Fallzeiten ableitet, so ergibt sich die Schwingungsdauer T des Tropfens hieraus von selbst. Aus der Periode T berechnet sich schließlich die Oberflächenspannung α nach der Formel von Rayleigh und Webb:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{n(n-1)(n+2)} \times \frac{p}{g \cdot \alpha}}$$

wo p das Tropfengewicht, g die Gravitationskonstante und n ein Parameter ist, der von der Schwingungsform abhängt und für die Schwingungen kleiner Tropfen, wie wir sie verwenden, den Wert 2 hat. Somit sind also nur die beiden Größen p und T experimentell zu bestimmen und wir können daher dazu übergehen, zu zeigen, wie dies geschieht und welche Schwierigkeiten dabei zu umgehen sind.

2. Versuchsanordnung.

Die Tropfröhre hat die Form eines Scheidetrichters, dessen Kugel zum Ablesen der Flüssig-

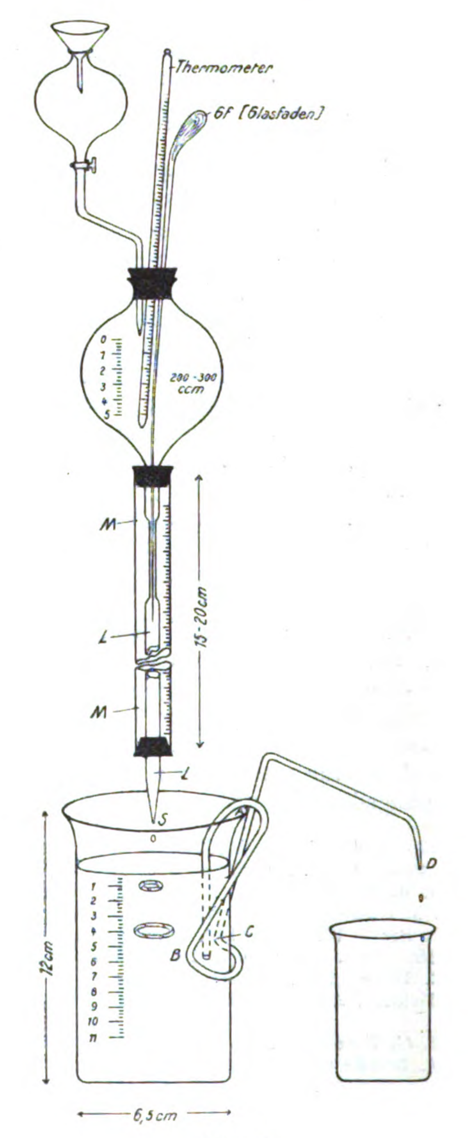


Fig. 2.

1) J. J. Thomson u. Newall, Proc. Roy. Soc. 39, 417, 1885; u. J. Trowbridge, Phil. Mag. 3, 290, 1877.

2) V. Kutter, diese Zeitschr. 17, 424, 1916.

keitshöhe mit einer kleinen Skala versehen ist, während die Trichterröhre, wie es Fig. 2 zeigt, über mehrere Zentimeter hin zu einer Kapillare verengert ist, und schließlich in die feine Spitze *S* endigt, aus der die Tropfen austreten. Über dem Ausflußrohr *L* ist eine weitere graduierte Röhre *M* befestigt, welche in einem Stativ vertikal verschiebbar ist, so daß man auf diese Weise die gesamte Tropfröhre in beliebigen Höhen einstellen kann. In die zur Kapillare verengerte Stelle reicht ein Glasfaden *Gf*, auf dessen Herstellung große Sorgfalt zu verwenden ist, weil durch Verschiebungen dieses Fadens in der Kapillare jede beliebige Tropfgeschwindigkeit ermöglicht werden soll, zugleich aber auch die Tropfenzahl pro Zeiteinheit für jede Stellung konstant gehalten werden muß.

Die Indikatorflüssigkeit, in welche die Tropfen einfallen, besitzt ein etwas größeres spez. Gewicht als diese, befindet sich in einem graduierten Becherglas mittlerer Größe und wird durch einen Heber von der in Fig. 2 gegebenen Form auf gleichmäßiger Höhe gehalten. Dieser Heber ruht auf den drei Punkten *A*, *B* und *C* und stellt sich infolgedessen selbsttätig immer auf dieselbe Flüssigkeitshöhe des Becherglases ein, wodurch die Handhabung naturgemäß vereinfacht wird.

Die eigentliche Messung besteht nun darin, der Reihe nach diejenigen Fallhöhen zu bestimmen, für welche die Einfalltiefe der Wirbelringe jeweils das Maximum erreicht, und diese Reihe beginnt mit der Fallhöhe Null, wenn man diese auf den unteren Tropfenrand bezieht. Die Einstellung auf diesen Nullpunkt ist nicht immer ganz einfach, und es scheint nicht überflüssig, auf die Schwierigkeiten, die hier zu überwinden sind, näher einzugehen. Zunächst stellt man auf eine mäßige und konstante Tropfenzahl ein, sagen wir z. B. 35 Tropfen pro Minute, und geht alsdann mit dem Tropfapparat immer tiefer, bis der untere Tropfenrand im Augenblick des Abreißens gerade den Flüssigkeitsspiegel berührt. Dieser Punkt läßt sich dadurch feststellen, daß man den Tropfen und sein Spiegelbild in der Flüssigkeitsoberfläche zugleich beobachtet und die Einschränkung innehält, daß die vorher bestimmte Tropfenzahl unverändert und die Einfalltiefe der Wirbelringe ein Maximum sein muß. Geht man zu tief, so berührt der Tropfen schon vor Erreichung seiner vollen Größe den Flüssigkeitsspiegel und die Tropfenzahl pro Zeiteinheit nimmt zu, und befindet man sich über dem Nullpunkt, so ist die Einfalltiefe geringer als das Maximum, woraus sich also eine genaue Bestimmung ergäbe, wenn die Höhe des Flüssigkeitsspiegels im Becherglas wirklich als konstant angesehen werden könnte. Dies ist jedoch keineswegs der Fall, wenn man bedenkt, daß hier Schwankungen von 0,15 mm bereits einer halben Periode der Tropfenschwingung entsprechen können, und daß die Anwendung eines Hebers immer gewisse Schwankungen der Flüssigkeitshöhe bedingt, die durch Kapillaritätskräfte und die Oberflächenspannung, also gerade durch die Objekte unserer Untersuchung, hervorgerufen werden. Damit nämlich aus der Öffnung *D* des Hebers, Fig. 2, ein Tropfen austrete, genügt es nicht, daß der Flüssigkeitsspiegel sich auf genau gleicher Höhe mit der Öffnung *D* befindet, vielmehr ist zur Tropfenbildung und Überwindung der damit verbundenen Oberflächenspannung ein kleiner hydrostatischer Überdruck nötig, wodurch das Niveau im Becherglas um ein geringes gehoben wird. Erst wenn diese Höhe erreicht ist, beginnt die Tropfenbildung, wobei sich eine gewisse Flüssigkeitsmenge in Bewegung setzt und dann infolge der Trägheit über das Ziel hinausgehend, gleich mehrere Tropfen bildet, so daß das Niveau im Becherglas etwas unter die Normalhöhe herabsinkt. Es ist demnach der Spiegel andauernden Schwankungen um die Normalhöhe unterworfen, und erst wenn es gelingt, diese auf ein unschädliches Mindestmaß einzuschränken, ist es möglich, den Nullpunkt der Fallhöhe genau festzulegen und so die Grundlagen für genaue Messungen zu schaffen.

Dieses Ziel wird auf folgende einfache Weise erreicht. Ein schmales und sehr spitz zugeschnittenes Stückchen von gehärtetem Filterpapier von der Form wie in Fig. 3 angegeben, wird derart über den Ausfluß des Hebers ge-

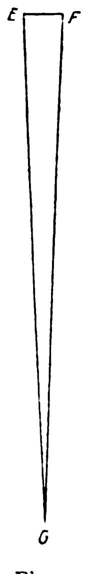


Fig. 3.

legt, daß entsprechend der Fig. 4 die feine Spitze G sich etwas unterhalb der Öffnung D befindet. Das Papier kann infolge seiner Saugwirkung eine größere oder kleinere Flüssigkeitsmenge aufnehmen und wirkt so wie ein Kon-

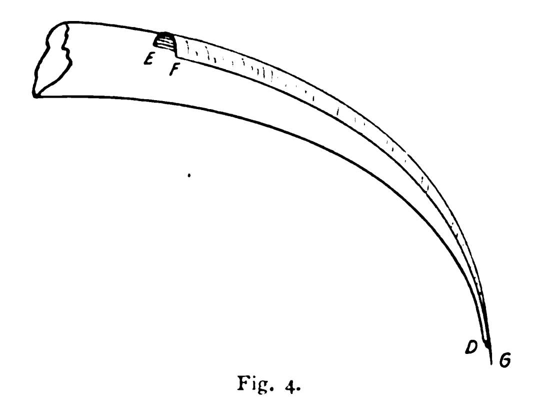


Fig. 4.

densator ausgleichend, und an der feinen Papierspitze bilden sich viel kleinere Tröpfchen als vorher an der Glasöffnung, so daß in der Tat der Flüssigkeitsspiegel jetzt nahezu als konstant angesehen werden kann. Nunmehr ist es möglich, die maximalen Einfalltiefen zu bestimmen, aus den Fallhöhen die zugehörigen Fallzeiten und aus diesen endlich die Schwingungsdauer T zu berechnen. Jedoch ist hierbei darauf zu achten, daß die Tropfgeschwindigkeit sich innerhalb mäßiger Grenzen hält, weil durch den einfallenden Tropfen die Oberfläche der Indikatorflüssigkeit in schwache Vibrationen versetzt wird, deren Ausschwingen erst abgewartet werden muß, bevor der nächste Tropfen folgen kann. Es sind aber auch noch andere Gründe vorhanden, die uns diese Einschränkung auferlegen, und zwar ist es vor allem die Änderung des Tropfengewichts mit der Ausflußgeschwindigkeit. Über die Abhängigkeit der Tropfengröße von der Ausflußgeschwindigkeit liegen namentlich ältere, zum Teil recht systematische Untersuchungen vor[1]). Danach wächst das Tropfengewicht unter sonst gleichen Bedingungen mit zunehmender Ausflußgeschwindigkeit; oder aber, wie auch die folgende Tabelle zeigt, je kleiner das Zeitintervall Δt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tropfen ist, desto größer wird das Tropfengewicht p und dementsprechend auch die daraus berechnete Oberflächenspannung α[2]). Die folgenden Zahlen gelten für Wassertropfen der Temperatur 16,8°.

Tabelle I.

Δt sec	p Gramm	T sec	α beob.	α berechnet aus $\alpha=\frac{0{,}12 \times p}{T^2}$ für $T=0{,}05225$
3,0501	0,01652	0,05220	7,280	
2,1537	0,01645			7,25
1,7685	0,01668			7.35
1,5320	0 01660	0,05214	7.330	
1,1400	0,01670			7,36
0,9033	0,01681	0,05225	7.382	
0,7884	0,01675			7,38
0.3847	0,01697			7,47
0,2530	0,01721			7,58
0,1932	0,01755			7,73
0,1698	0.01782			7,85

Zu sämtlichen Wägungen wurden je 100 Tropfen verwendet, die in einem Wägegläschen, wie sie zu chemischen Analysen üblich sind, aufgefangen wurden; um jeden Verlust durch Verspritzen zu vermeiden, wurde das Gläschen dabei ein bißchen geneigt gehalten, so daß die Tropfen auf die schiefe Wandung auffielen.

Aus der Zunahme des Tropfengewichts mit wachsender Ausflußgeschwindigkeit ergibt sich nun aber, daß der bekannte Satz, wonach für ein und dasselbe Ausflußrohr die Tropfengewichte der Oberflächenspannung proportional sind, nur für gleiche Ausflußgeschwindigkeiten gelten kann, und es erhebt sich dann sofort die Frage, ob diese Geschwindigkeit auf gleiche Gewichte, gleiche Volumina oder die gleiche Tropfenzahl der verschiedenen Flüssigkeiten bezogen werden soll. Auf alle Fälle gilt der Satz selbst für eine sehr langsame Tropfenfolge nur annäherungsweise. Wie die Tabelle zeigt, wird die Oberflächenspannung α um so größer gefunden, je rascher die Tropfenbildung stattgefunden hat, eine Erscheinung, die wahrscheinlich mit den hydrodynamischen Vorgängen zusammenhängt, die durch die Strömungen und Wirbelungen im Innern des Tropfens bei seiner Bildung hervorgerufen werden, und sich unter anderem auch darin zeigen, daß sehr rasch entstandene Tropfen nicht mehr unmittelbar in die Indikatorflüssigkeit hineinfallen, sondern über die Oberfläche wie über eine starre Glasplatte dahinrollen und erst später in der Flüssigkeit versinken[1]). Es ist deswegen unerläßlich, nicht nur für eine langsame, sondern auch möglichst gleichmäßige Tropfenbildung Sorge zu tragen; aus diesem Grunde ist über unserer Tropfröhre nach Fig. 2 noch ein zweiter kleinerer Trichter angeordnet, mit dessen Hilfe die Flüssigkeits-

1) Hagen, Berlin. Akad. 1845, S. 78; Guthrie, On Drops. Proc. Roy. Soc. 8. 444, 1864; Duclaux, Ann. Chim. 13, S. 98 u. 21, 386, 1870.

2) Ph. Lenard scheint in seiner ersten Abhandlung 1886 dieses Anwachsen von α lediglich als eine Änderung mit der Zeit zu betrachten, doch ist die besprochene Erscheinung aus der dort mitgeteilten Tabelle III deutlich zu erkennen; vgl. Wied. Ann. 30, S. 231—35.

1) Vgl. V. Kutter, diese Zeitschr. 17, 428 u. 429, 1916.

höhe im Haupttrichter konstant gehalten wird, so daß die Tropfenbildung immer unter gleichem Druck vor sich geht.

Erst wenn alle diese Vorsichtsmaßregeln eingehalten werden, erhält man Resultate, die unter sich und mit den Ergebnissen anderer Methoden hinreichende Übereinstimmung zeigen, wie sich aus der folgenden Tabelle II ersehen läßt.

Tabelle II.

	Lösung	Gew. Prozente	t^0	α	Indikatorflüssigkeit
(1)	H_2O		14,9	7,441	$SbCl_3 + HCl$
			17,0	7,375	"
			16,5	7,420	"
			15,0	7,440	"
(2)	$NaOH$	5,19	17,3	7,723	"
		12,29	18,0	8,012	"
		16,38	16,2	8,311	"
(3)	HCl	6,5	16,9	7,342	$Sb_2S_3 + NaOH$
		11,3	18,1	7,273	"
(4)	$NaCl$	3,15	18,3	7,565	$SbCl_3 + HCl$
		6,302	16,0	7,775	"
		12,604	16,2	7,875	"

3. Die Indikatorflüssigkeit.

Um die Wirbelringe farbloser Flüssigkeiten im Wasser des Becherglases sichtbar zu machen, verwenden wir gewisse Stoffe, die mit den einfallenden Tropfen derartige chemische Reaktionen eingehen, daß Niederschläge entstehen, die sich im Überschuß wieder leicht auflösen. Solcher Reaktionen gibt es natürlich viele und es handelt sich nur darum, für unsere Zwecke die passendsten herauszugreifen. So ist Antimonchlorid, $SbCl_3$, eine vorzügliche Reagens für Wasser und die wässerigen Lösungen vieler Neutralsalze. Die Antimonsalze reagieren bekanntlich mit dem Wasser unter Bildung eines dicken, schwerlöslichen Niederschlages von basischem Salz, des Antimonoxychlorids, $SbOCl$, das in Chlorwasserstoffsäure wieder leicht in Lösung geht. Die Gleichung dieser Vorgänge lautet:

$$SbCl_3 + H_2O \rightleftarrows 2HCl + SbOCl.$$

Je nachdem die Konzentration des H_2O oder des HCl überwiegt, geht die Reaktion nach der einen oder andern Richtung vor sich. Es bildet sich infolgedessen an der Berührungsfläche zwischen Wirbelring und Indikatorflüssigkeit dieser Niederschlag, so daß die wirbelnde Flüssigkeit des Ringes sich mit einer leichtbeweglichen, dünnen, elastischen Hülle umgibt, die die heftigen Wirbelbewegungen mitmacht und so einen für das Auge leicht faßlichen Beweis dafür bildet, daß ein Wirbel während seines Fortschreitens in der Flüssigkeit immer aus denselben Teilchen besteht.

Die vorige Gleichung gilt auch für die Lösungen vieler Neutralsalze, wo alsdann nicht die gelöste Substanz, sondern das Lösungswasser mit der Indikatorflüssigkeit reagiert; doch ist es trotzdem vorteilhaft, bisweilen einen anderen Indikator zu wählen. Da das Antimonoxychlorid in Säuren löslich ist, kann es natürlich nicht zur Untersuchung dieser verwendet werden; hierfür eignet sich besser das Antimonsulfid. Dieser orangefarbene Niederschlag, Sb_2S_3, entsteht durch Einleiten von Schwefelwasserstoff in eine saure Lösung eines Antimonsalzes und ist in Kalilauge zu antimonigsaurem und sulfantimonigsaurem Kalium löslich, aus welcher Lösung durch Säuren wieder Sb_2S_3 ausgefällt wird, wie die folgenden Gleichungen zeigen:

$$Sb_2S_3 + 4KOH = SbO_2K + SbS_3K_3 + 2H_2O$$
$$SbO_2K + SbS_3K_3 + 4HCl = Sb_3S_2 + 4KCl + 2H_2O.$$

So wie für die Säuren kann man auch für viele gefärbte und farblose Salzlösungen einen besonderen Indikator auswählen, der mit dem untersuchten Körper geeignete chemische Reaktionen eingeht, wie z. B. die Eisensalze mit dem Natriumphosphat, dem etwas Chlorwasserstoffsäure zugesetzt ist. Beim Einträufeln einer Ferrisalzlösung in diesen Indikator bilden sich gelblichweise Wirbelringe aus Ferriphosphat, das in Salzsäure wieder leicht iu Lösung geht, und es finden dabei folgende Reaktionen statt:

$$FeCl_3 + Na_3PO_4 = 3NaCl_3 + FePO_4$$
$$FePO_4 + 3HCl = H_3PO_4 + FeCl_3.$$

Wie man sicht, sind es also die Reaktionen der qualitativen analytischen Chemie, die hier eine neue Verwendung finden, und da uns infolgedessen das ganze umfangreiche Gebiet der qualitativen Analyse zur Verfügung steht, so ergibt sich daraus eine ganz außerordentliche Mannigfaltigkeit und Wahlfreiheit bei der Anwendung der Wirbelringe, wie die umstehende Zusammenstellung einiger charakteristischer solcher chemischer Vorgänge zur Genüge erweist. Diese Zusammenstellung könnte noch beliebig erweitert werden, so daß also das Anwendungsgebiet der Wirbelringe ein recht ausgedehntes wird. Hierbei kommt es auf die genaue Konzentration oder die Temperatur der Indikatorflüssigkeit gar nicht an; es ist nur nötig, daß das spez. Gewicht derselben etwas größer ist als das der einfallenden Tropfen, damit die Wirbelringe nicht auf den Boden sinken, sondern nur bis zu einer gewissen Tiefe einfallen und dann wieder langsam emporsteigen.

Diese Vereinfachung ist deswegen gestattet, weil es nur darauf ankommt, die relative Einfalltiefe der Wirbelringe zu ermitteln, und das einzige, wofür wir Sorge tragen müssen, ist die

Lösung	Indikator (wässerige Lösung)	Wirbelring (charakterist. Eigenschaften)	Grenzzonenreaktion
KM_nO_4	$FeSO_4 + H_2SO_4$	violette Flüssigkeit: KM_nO_4	$10\,FeSO_4 + 8\,H_2SO_4 + 2\,KM_nO_4 = 5\,Fe_2(SO_4)_3 +$ $+ 8\,H_2O + K_2SO_4 + 2\,M_nSO_4$
$Hg(NO_3)_2$ oder $HgCl_2$	KJ	roter Niederschlag: HgJ_2, Quecksilberjodid, im überschüss. KJ löslich zu einem komplexen Salz HgJ_4K_2	$Hg(NO_3)_2 + 2\,KJ = 2\,KNO_3 + HgJ_2$ $HgJ_2 + 2\,KJ = HgJ_4K_2$ (Quecksilberjodidjodkalium).
$Bi(NO_3)_3$	KJ	orangegelber Niederschlag: BiJ_3 im überschüss. KJ löslich als komplexes Salz BiJ_4K	$Bi(NO_3)_2 + 3\,KJ = 3\,KNO_3 + BiJ_3$ $BiJ_3 + KJ = BiJ_4K$
Wasser u. wässerige Lösung	$SbCl_3$ in HCl verdünnt	weißer Niederschlag: $SbOCl$, Antimonylchlorid, in HCl löslich	$SbCl_3 + H_2O \rightleftarrows SbOCl + 2\,HCl$
$Pb(NO_3)_2$	$NaOH$	weißer Niederschlag: $Pb(OH)_2$. Bleihydroxyd, im überschüss. $NaOH$ löslich zu Plumbit	$Pb(NO_3)_2 + 2\,NaOH = 2\,NaNO_3 + Pb(OH)_2$ $Pb(OH)_2 + 2\,NaOH = PbNa_2O_2 + 2\,H_2O$
HCl u. andere Säuren	Sb_2S_3 in $NaOH$	orangefarbener Niederschlag: Sb_2S_3, im Übersch. löslich	$Sb_2S_3 + 4\,KOH = SbO_2K + SbS_3K_3 + 2\,H_2O$ $SbO_2K + SbS_3K_3 + 4\,HCl = Sb_2S_3 + 4\,KCl + 2\,H_2O$
$FeCl_3$	$Na_2S_2O_3$	violette Flüssigkeit, die bald farblos wird	$2\,FeCl_3 + 2\,Na_2S_2O_3 = 2\,NaCl + 2\,FeCl_2 + Na_2S_4O_6$ tetrathionsaures Natron
	$NH_4CNS + Na_2SO_4$	blutrote Flüssigkeit: $Fe(CNS)_3$ bildet mit Na_2SO_4 ein farbloses komplexes Salz	$FeCl_3 + 3\,NH_4CNS = 3\,NH_4Cl + Fe(CNS)_3$ $Fe(CNS)_3 + 3\,Na_2SO_4 = 3\,NaCNS + Na_3Fe(SO_4)_6$
	$NaC_2H_3O_2 + HCl$	blutrote Flüssigkeit: $Fe(C_2H_3O_2)_3$ durch HCl entfärbt	$FeCl_3 + 3\,Na(C_2H_3O_2) = 3\,NaCl + Fe(C_2H_3O_2)_3$ $Fe(C_2H_3O_2)_3 + 3\,HCl = FeCl_3 + 3\,C_2H_4O_2$
	$Na_3PO_4 + HCl$	gelblich-weißer Niederschlag: $FePO_4$, Ferriphosphat, in HCl löslich	$FeCl_3 + Na_3PO_4 = 3\,NaCl + FePO_4$ $FePO_4 + 3\,HCl = FeCl_3 + H_3PO_4$
$AgNO_3$	$Na_2S_2O_3$	weißer Niederschlag: $Ag_2S_2O_3$, Silberthiosulfat, gelbbraun u. schwarz werdend, im Übersch. löslich	$2\,AgNO_3 + Na_2S_2O_3 = 2\,NaNO_3 + Ag_2S_2O_3$ $Ag_2S_2O_3 + H_2O = H_2SO_4 + Ag_2S$ $Ag_2S_2O_3 + 2\,Na_2S_2O_3 = Ag_2(S_2O_3)_3 \cdot Na_4$
$Pb(C_2H_3O_2)_2$		weißer Niederschlag: PbS_2O_3, im Übersch. von $Na_2S_2O_3$ löslich	$Pb(C_2H_3O_2) + Na_2S_2O_3 = 2\,NaC_2H_3O_2 +$ $+ PbS_2O_3$
$FeCl_2$	KCN	hellbrauner Niederschlag: $Fe(CN)_2$ löslich im Übersch. von KCN	$FeCl_2 + 2\,KCN = 2\,KCl + Fe(CN)_2$ $Fe(CN)_2 + 4\,KCN = K_4Fe(CN)_6$
$Co(NO_3)_2$		schmutzigrosa Niederschlag: $Co(CN)_2$ im Übersch. löslich als kompl. Salz $K_4Co\,CN)_6$	$Co(NO_3)_2 + 2\,KCN = 2\,KCl + Co(CN)_2$ $Co(CN)_2 + 2\,KCN = K_2Co(CN)_4$ grünbraune $K_2Co(CN)_4 + 2\,KCN = K_4Co(CN)_6$ Flüssigkeit
$Ni(NO_3)_2$		apfelgrüner Niederschlag: $Ni(CN)_2$ löslich im Übersch. zu komplexem Salz $K_2Ni(CN)_4$	$Ni(NO_3)_2 + 2\,KCN = 2\,KNO_3 + Ni(CN)_2$ $Ni(CN)_2 + 2\,KCN = K_2Ni(CN)_4$
$CuSO_4$	KCN	gelbbrauner Niederschlag: $Cu(CN)_2$ wird weiß: $Cu_2(CN)_2$ und löst sich im Übersch. des KCN	$CuSO_4 + 2\,KCN = K_2SO_4 + Cu(CN)_2$ $2\,Cu(CN)_2 = Cu_2(CN)_2 + (CN)_2$ $Cu_2(CN)_2 + 2\,KCN = [Cu_2(CN)_4] \cdot K_2$
	$As_2O_3 + NaOH$	gelblichgrüner Niederschlag: AsO_3HCu löslich zu komplexem Salz AsO_3NaCu	$2\,CuSO_4 + As_2O_3 + 4\,NaOH = 2\,Na_2SO_4 + H_2O +$ $+ 2\,AsO_3HCu$ blaue Flüssigkeit $AsO_3HCu + NaOH = H_2O + AsO_3NaCu$
	NH_3	blauer Niederschlag von basischem Salz: $(CuOH)_2SO_4$, lösl. im Übersch., dunkelblau zu $CuSO_4 \cdot 4\,NH_3$	$2\,CuSO_4 + 2\,NH_4OH = (NH_4)_2SO_4 + (CuOH)_2SO_4$ $(CuOH)_2SO_4 + (NH_4)_2SO_4 + 6\,NH_3 = 2\,H_2O$ $+ 2(CuSO_4 \cdot 4\,NH_3)$
M_nCl_2	$Na_3PO_4 + HCl$	weißer Niederschlag: $M_{n3}(PO_4)_2$ löslich in HCl	$3\,M_nCl_2 + 2\,Na_3PO_4 = 6\,NaCl + M_{n3}(PO_4)_2$ $M_{n3}(PO_4)_2 + 6\,HCl = 3\,M_nCl_2 + 2\,H_3PO_4$
$Ni(NO_3)_2$	$Na_3PO_4 + HCl$	apfelgrüner Niederschlag: $Ni_3(PO_4)_2$, in Säuren löslich	$3\,Ni(NO_3)_2 + 2\,Na_3PO_4 = 6\,NaNO_3 + Ni_3(PO_4)_2$ $Ni_3(PO_4)_2 + 6\,HCl = 3\,NiCl_3 + 2\,H_3PO_4$
$Co(NO_3)_2$	$Na_3PO_4 + HCl$	rotbrauner Niederschlag: $Co_3(PO_4)_2$ in Säuren löslich	$3\,Co(NO_3)_2 + 2\,Na_3PO_4 = 6\,NaNO_3 + Co_3(PO_4)_2$ $Co_3(PO_4)_2 + 6\,HCl = 3\,CoCl_2 + 2\,H_3PO_4$

Gleichmäßigkeit der Indikatorflüssigkeit und die Reinheit ihrer Oberfläche während der Dauer der Untersuchung. Daß namentlich der letztere Umstand nicht zu vernachlässigen ist, läßt sich leicht zeigen. Stellt man entsprechend der Fig. 2 die Fallhöhe der Tropfen auf ein Maximum der Einfalltiefe ein, das beispielsweise 10 cm betrage, und übergießt jetzt die Flüssigkeit im Becherglas mit einer winzigen Schicht Äther, so verringert sich die Einfalltiefe plötzlich auf beinahe 3 cm, um nach dem Verdunsten des Äthers wieder auf den früheren Wert emporzusteigen. Bedeckt man alsdann, nach dem Verdunsten allen Äthers, die Oberfläche mit einer Spur Benzol, so sinkt die Einfalltiefe auf ca. 4 cm und behält diesen Wert, bis das Benzol wieder entfernt ist. Wenn es, wie bei Demonstrationszwecken nicht auf absolute Genauigkeit, sondern nur auf Annäherungswerte ankommt, kann dieser Versuch dazu dienen, um den Unterschied in der Oberflächenspannung verschiedener Substanzen in einfacher Weise vorzuführen. Es verhalten sich alsdann die Oberflächenspannungen der Spiegelschichten der Indikatorflüssigkeit angenähert wie die zugehörigen Einfalltiefen.

Sind hierbei α_1, α_2, α_3 der Reihe nach die Oberflächenspannungen von Wasser, Äther und Benzol, so wird also in unserem Falle

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 10 : 3 : 4{,}0$$

und ist $\alpha_1 = 7{,}5$ gegeben, so lassen sich die übrigen Werte hieraus berechnen, und es wird alsdann:

$$\alpha_2 = \frac{7{,}5 \times 3}{10} = 2{,}25 \text{ u. } \alpha_3 = \frac{7{,}5 \times 4{,}0}{10} = 3{,}00,$$

während die genaueren Werte für Äther $\alpha_2 = 1{,}88$ und für Benzol $\alpha_3 = 2{,}88$ ergeben müßten.

Da ganz Entsprechendes auch für die Minima der Einfalltiefen gilt, so ergibt sich daraus die praktische Regel, als Indikatorflüssigkeit immer eine solche mit möglichst großer Oberflächenspannung zu benutzen; wir werden somit ganz von selbst auf das Wasser und die wässerigen Lösungen hingewiesen, die in der Tat auch bei allen bisherigen Messungen die Rolle der Indikatorflüssigkeit spielten, in welche die zu untersuchenden Tropfen einfielen.

(Eingegangen 23. Oktober 1916.)

Eine allgemeine Zwillingsreihe der Atomarten.

Von A. van den Broek.

Daß die Atomgewichte am Anfang des periodischen Systems nur in erster Annäherung eine Zwillingsreihe bilden, kann, nach Auffindung des Metaneons vom Atomgewichte 22 neben dem gewöhnlichen Neon vom Atomgewichte 20, nur noch auf das Vorhandensein mehrerer Atomarten für jedes Element zurückgeführt werden. Bei den radioaktiven Elementen kennen wir Isotopen nicht nur als Glieder mehrerer Zerfallsreihen, sondern ebenfalls in jeder Reihe da, wo neben α-Strahlung auch β-Strahlung auftritt. Daß von *Ni* an die einfache Zwillingsreihe nicht mehr zu erkennen ist, könnte sehr wohl auf Zusammenwirken beider Arten von Isotopie zurückzuführen sein.

So kommen umgekehrte Zwillinge, wo die ganzen Vierfachen an ungeraden Ordnungszahlen, die $(4n + 3)$ Werte an den vorgehenden geraden liegen, noch vielfach vor (so *Se-Br*, *Sn-Sb* usw.). Berücksichtigt man auch die neben diesen umgekehrten Zwillingen liegenden Atomgewichte, so fällt auf, daß die neben den ganzen Vierfachen liegenden ebenfalls (natürlich immer in erster Annäherung) ganze Vierfache sind, die neben den $(4n + 3)$ Werten liegenden ebenfalls $(4n + 3)$ Werte. Man kann also von Doppelzwillingen sprechen, wobei statt z. B. 3, 4, 7, 8, — also zwei Zwillingen — kommt 3, 7, 8, 12, ein Doppelzwilling. Berücksichtigt man weiter die Stellung dieser Doppelzwillinge im periodischen System, so fällt auf:

1. Daß sie in Paaren auftreten, nach oben gegebenem Schema 3, 7, 8, 12, 15, 19, 20, 24, acht nebeneinander gelegene Elemente also ein Doppelzwillingspaar bilden.
2. Daß die Zwischenräume zwischen diesen Doppelzwillingspaaren ebenfalls 8 Elemente enthalten, so daß die Verteilung vollkommen regelmäßig ist.

Tabelle I.

Atomgewichte				Ordnungsz.
63,57	65,37	69,9	**72,5**	29—32
74,96	**79,2**	**79,92**	82,92	33—36
102,9	**106,7**	**107,88**	**112,40**	45—48
114,8	**118,7**	**120,2**	127,5	49—52
—	**150,4**	**152,0**	157,3	61—64
159,2	**162,5**	**163,5**	**167,7**	65—68
193,1	**195,1**	197,2	**200,6**	77—80
204,4	**207,20**	**208,0**	—	81—84

Zur Erklärung dieser Doppelzwillinge mögen folgende Tatsachen der Radioaktivitätsforschung entnommen werden.

Die Gesamtladung der Atomkerne ist gleich den Ordnungszahlen. Diese Atomkerne enthalten jedoch neben α-Teilchen (und eventuell andere massale Teilchen) auch β-Teilchen (Kernelektronen). Wird ein α-Teilchen ausgestoßen, so wird dadurch Gesamtladung und Ordnungszahl um 2 Einheiten erniedrigt; wird dagegen ein

Tabelle V.

Eine allgemeine Zwillingsreihe der Atomarten.

				1 *H* 1,008 (3)	2 *He* 4,00 4	3 *Li* 6,94 7	4 *Be* 9,1 8	5 *B* 11,0 11	6 *C* 12,00 12	7 *N* 14,01 15	8 *O* 16,00 16	9 *F* 19,0 19	10 *Ne* 20,2 20	11 *Na* 23,00 23	12 *Mg* 24,32 24
13 *Al* 27,1 27	14 *Si* 28,3 28	15 *P* 31,04 31	16 *S* 32,06 32	17 *Cl* 35,46 **35**; 39	18 *Ar* 39,88 **39** 36; 40	19 *K* 39,10 39; 43 **40**	20 *Ca* 40.07 40; **44**	21 *Sc* 44,1 47	22 *Ti* 48,1 48	23 *V* 51,0 51	24 *Cr* 52,0 52	25 *Mn* 54,93 55	26 *Fe* 55,84 56	27 *Co* 58,97 59	28 *Ni* 58,68 60
29 *Cu* 63,57 63; 67	30 *Zn* 65,37 **67** 64; 68	31 *Ga* 69,9 67; 71 **68**	32 *Ge* 72,5 68; **72**	33 *As* 74,96 **75**; 79	34 *Se* 79,2 **79** 76; 80	35 *Br* 79,92 79; 83 **80**	36 *Kr* 82,92 80; **84**	37 *Rb* 85,45 87	38 *Sr* 87,63 88	39 *Y* 88,7 91	40 *Zr* 90,6 92	41 *Nb* 93,5 95	42 *Mo* 96,0 96	43 — — 99	44 *Ru* 101,7 100
45 *Rh* 102,9 **103**; 107	46 *Pd* 106,7 **107** 104; 108	47 *Ag* 107,88 107; 111 **108**	48 *Cd* 112,40 108; **112**	49 *In* 114,8 **115**; 119	50 *Sn* 118,7 **119** 116; 120	51 *Sb* 120,2 119; 123 **120** 127	52 *Te* 127,5 **127** 120; 124 128	53 *I* 126,92 127; 131 **128**	54 *X* 130,2 128; **132**	55 *Cs* 132,81 135	56 *Ba* 137; 37 136	57 *La* 139,0 139	58 *Ce* 140,25 140	59 *Pr* 140,6 143	60 *Nd* 144.3 144
61 — — **147**; 151	62 *Sa* 150,4 **151** 148; 152	63 *Eu* 152,0 151; 155 **152**	64 *Gd* 157,3 152; **156**	65 *Tb* 159,2 **159**; 163	66 *Ds* 162,5 **163** 160; 164	67 *Ho* 163,5 163; 167 **164**	68 *Er* 167,7 164; **168**	69 *Tu* 168,5 **171**; 175	70 *Yb* 173,5 **175** 172; 176	71 *Lu* 175,0 175; 179 **176**	72 — — 176; **180**	73 *Ta* 181,5 183	74 *W* 184,0 184	75 — — 187	76 *Os* 190,9 188
77 *Ir* 193,1 **191**; 195	78 *Pt* 195,2 **195** 192; 196	79 *Au* 197,2 195; 199 **196**	80 *Hg* 200,6 196; **200**	81 *Tl* 204,0 **203**; 207 204 208	82 *Pb* 207,20 **207**; 212 204; 208 212	83 *Bi* 208,0 207; 211 **208** 212	84 — — 215 208; 212 **216**	85 — — — —	86 — 222,0 219 220	87 — — — —	88 *Ra* 226,0 223 224; 228	89 *Ac* (227,0) 227 228	90 *Th* 232,15 227 228; **232**		

Kernelektron ausgestoßen, so werden beide um eine Einheit erhöht. Aber auch ohne Zerfall muß ein Unterschied von drei α-Teilchen (also 6 Ordnungszahlen) bei einem gleichzeitigen Unterschied von 2 Kernelektronen (also 2 Ordnungszahlen in entgegengesetzter Richtung) zu einem Gesamtunterschied von 4 Ordnungszahlen und 12 Atomgewichtseinheiten führen.

Während also die einfache Zwillingsreihe nur Unterschiede von α-Teilchen zuläßt, muß dem Doppelzwilling folgendes Schema zugrunde liegen.

Tabelle II.

3; 7	7	7; 11	—
—	4; 8	8	8; 12

Daß dabei gerade die Annäherung an die Atomgewichte nach dem Schema 3, 7, 8, 12 herauskommt, ist teilweise zu erklären nach der von Fajans aufgestellten Lebensdauer-Atomgewichts-Regel, weist andererseits auf Langlebigkeit der β-Strahler. Übrigens können, die Richtigkeit dieser Erklärung der Doppelzwillinge vorausgesetzt, diese nicht die einzigen Stellen mit β-Strahlern sein, und auch nicht ohne weitere Berücksichtigung der Atomgewichtsdifferenzen festgelegt werden. So mögen folgende Stellen noch besonders behandelt werden.

Von *Cl* bis *Ca* folgt die Existenz eines Doppelzwillings aus den fast gleichen Atomgewichten des *Ar* und des *Ca*, sowie aus der beobachteten β-Strahlung des *K* und aus dem Sprung in der Atomgewichtsreihe um 4 Einheiten.

Von *In* bis *Te* finden wir als Schema statt 3, 7, 8, 12 die Modifikation 3, 7, 8, 16, 15 —; es kann also wohl nur folgendes Zerfall- (oder Differenz-)Schema angenommen worden.

Tabelle III.

3; 7	7	7; 11; 15	15	15; 19	—
—	4; 8	8	8; 12; 16	16	16; 20

Von *Tu* bis (72) zwischen *Lu* und *Ta* muß den Atomgewichten nach ebenfalls ein Doppelzwilling vorhanden sein. Allerdings ist hier die Stellung der Elemente noch nicht absolut sicher.

Von *Tl* bis *Bi* finden wir jedenfalls den umgekehrten Zwilling 207—208 und aus der Thoriumreihe für das nächstfolgende Element sowohl 212 als 216 (die letzten Atomarten: 208 in (84) und 204 in (82) und, wohl aus komplexem Zerfall, in (81) sind allerdings radioaktiv nicht bekannt). Weiter kommt zwar nach Fajans dem *Ac* das Atomgewicht 227, dem *Ac C* 211 zu; die korrespondierenden Glieder der Aktiniumreihe gehören aber denselben Ordnungszahlen zu als den der Thoriumreihe, nicht den vorgehenden, jedoch mit dem Unterschiede, daß beim *Ac C* die Hauptreihe beim komplexen Zerfall schon an ungerader Ordnungszahl (83), die der Thoriumreihe jedoch bei (84) abzweigt. Der Zusammenhang kann also sehr wohl folgender sein.

Tabelle IV.

3; 7	7; 11	7; 11	15	—	19
—	4; 8; 12	8; 12	8; 12; 16	—	20

Die ganze Zwillingsreihe wird dann, wie Tabelle V zeigt.

Zusammenfassung. Es wurde versucht, aus Regelmäßigkeiten in der Atomgewichtsreihe eine allgemeine Zwillingsreihe der Atomarten statt der Elemente abzuleiten.

De Bildt (Ndl.), 18. Okt. 1916.

(Eingegangen 25. Oktober 1916.)

Bemerkung zu den Gesetzen von Kossel und Glocker über Absorption und Emission von Röntgenstrahlung.

Von W. Schottky.

W. Kossel hat aus den bisherigen Messungen über die Absorption von Röntgenstrahlen in Abhängigkeit von ihrer Wellenlänge folgende Gesetzmäßigkeiten abgeleitet[1]): Geht man von größeren zu kleineren Wellenlängen über, so schnellt der Absorptionskoeffizient bei einem bestimmten Wert λ_0, der „Erregungsgrenze", sprunghaft in die Höhe; der Bereich $\Delta\nu$, in dem der Sprung stattfindet, ist klein gegen die Frequenz ν_0 der Erregungsgrenze. Wird die Wellenlänge der auffallenden Strahlung noch weiter verkleinert, so nimmt die Absorption wieder ab gemäß einem Gesetz

$$\alpha = a \cdot \lambda^b, \qquad (1)$$

wobei die Konstante b für die verschiedenen untersuchten Elemente etwa zwischen 2,5 und 2,9 variiert. Derselbe Vorgang kann sich für andere Erregungsgrenzen λ_1 usw. wiederholen; die Konstante b scheint dabei ziemlich unverändert zu bleiben.

Andererseits hat kürzlich R. Glocker[2]) die Ergebnisse der Messungen über die Emission von K-Strahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge der erregenden Röntgenstrahlung zu

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 1914, S. 898—909; ebenda, S. 953—963; desgl. 1916, S. 339—359.
2) Diese Zeitschr. 17, 488—490, 1916.

einem Gesetze zusammengefaßt, welches die Form hat:

$$k = C \cdot \lambda^4 \quad (C \text{ eine Konstante}). \tag{2}$$

Der Emissionskoeffizient k bezieht sich hierbei auf die gesamte emittierte Sekundärstrahlung, welche noch verschiedene Frequenzen enthalten kann; alle diese Frequenzen sind bekanntlich niedriger als die Frequenz der erregenden Strahlung. Auch das Glockersche Gesetz gilt natürlich erst von der Erregungsgrenze λ_0 an; bei größeren Wellenlängen der auffallenden Strahlung wird überhaupt keine Sekundärstrahlung der betrachteten Gattung emittiert.

Da das vorerwähnte Kosselsche Gesetz sich auch in erster Linie auf Beobachtungen im Gebiete der K-Strahlung bezieht und da wenigstens einige Elemente in den Diskussionen der beiden Verfasser gemeinsam auftreten, wird es erlaubt sein, die beiden Gesetze miteinander zu vergleichen. Danach wäre die „Ausbeute" $\varkappa$ an Sekundärstrahlung, d. h. die von einer Schicht emittierte Sekundärstrahlungsintensität, dividiert durch die in der Schicht absorbierte Primärintensität,

$$\varkappa = \frac{k}{\alpha},$$

von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung in folgender Weise abhängig:

$$\varkappa = Q \cdot \lambda^{4-b} \quad (Q \text{ eine andere Konstante}).$$

Nun ist nach den obigen Angaben $b = 2,5$ bis $2,9$, also $4 - b = 1,1$ bis $1,5$; in erster Annäherung 1.

Also ist

$$\varkappa \sim \frac{1}{\nu}, \tag{3}$$

d. h. die Ausbeute an charakteristischer Sekundärstrahlung ist oberhalb der Erregungsgrenze umgekehrt proportional der Frequenz der auffallenden Strahlung.

So schwierig es nun sein wird, für die beobachtete Wellenlängenabhängigkeit der Absorption und Emission an sich eine vollständige Erklärung zu finden — das Schwanken des Faktors b für verschiedene Elemente und das verhältnismäßig geringe Material, aus dem der Glockersche Exponent 4 bestimmt ist, lassen ja die Möglichkeit offen, daß es sich nur um Annäherungsdarstellungen handelt —, so einfach und plausibel erscheint der Zusammenhang der beiden Gesetze (1) und (2), der in erster Annäherung durch Gl. (3) wiedergegeben wird.

Dieses Resultat entspricht nämlich ganz den Beobachtungen von E. Warburg[1]) bei photochemischen Prozessen und läßt sich leicht deuten unter Zuhilfenahme einer neuerdings besonders von Einstein wieder zu Ehren gebrachten Version der Quantentheorie, nach der auch die Absorption der Strahlung in Quanten stattfindet, und zwar in Quanten $h\nu$, die genau der Wellenlänge der auffallenden Strahlung ν entsprechen.

Das ist die eine Annahme, die gemacht werden muß. Das Weitere ergibt sich dann aus den bekannten Vorstellungen über den Mechanismus der Absorption und Sekundärstrahlenemission ziemlich von selbst. Danach besteht der Erfolg einer Absorption von Strahlung oberhalb der K-Erregungsgrenze immer darin, daß ein Elektron aus dem Innern (dem „innersten Ring") ganz nach außen gebracht wird. In dem Atomrest finden dann jene Umlagerungen von Elektronen statt, die zur Emission der Sekundärstrahlung führen; und wenn, wie anzunehmen, der Zustand des Atomrestes nach Abtrennung eines Elektrons aus dem innersten Ring immer derselbe ist, gleichgültig, welches Quantum $h\nu$ ($\nu > \nu_0$) absorbiert wurde, so folgt daraus, daß die emittierte Strahlungsintensität nur von der Zahl der aufgespaltenen Atome abhängt, also der Zahl der absorbierten Strahlungsquanten proportional ist. Diese Zahl ist bei gegebener Größe der absorbierten Energie der Größe der Elementarquanten, also der Frequenz ν, umgekehrt proportional; es folgt das Gesetz:

$$\varkappa \sim \frac{1}{\nu}.$$

Einige Vorbehalte müssen bei dieser naheliegenden Überlegung freilich noch gemacht werden. Zunächst vermag ich die experimentellen Unterlagen der von den Herren Kossel und Glocker abgeleiteten Gesetze nicht genügend zu beurteilen, um behaupten zu können, daß das Gesetz (3) mit den beobachteten Tatsachen in aller Strenge vereinbar wäre. Sollten die Abweichungen von diesem Gesetz reell sein, so würde man zunächst annehmen müssen, daß der Zustand des Atomrestes nach Aufnahme eines Quantums $h\nu$ und damit verbundener Abspaltung eines Elektrons doch etwas von der Frequenz der absorbierten Strahlung abhängig ist; dementsprechend würde man nach einer Variation in der Zusammensetzung und Intensitätsverteilung der Fluoreszenzstrahlung bei veränderter Primärfrequenz innerhalb ein und desselben Erregungsgebietes zu suchen haben. Die Existenz eines solchen Effekts ist allerdings wohl nicht gerade wahrscheinlich.

Eine andere noch ungeklärte Frage ist die, in welcher Form bei Frequenzen $\nu > \nu_0$ die Energiedifferenz $h\nu - h\nu_0$ zwischen der absorbierten Energie und der geleisteten Abspaltungs-

1) Berl. Ber. 1916, S. 314—329.

arbeit in Erscheinung tritt. Hier wären Beobachtungen über Zahl und Geschwindigkeit der oberhalb der K-Erregungsgrenze durch die Röntgenstrahlung ausgelösten Elektronen zur Diskussion mit heranzuziehen.

Steglitz, den 29. Oktober 1916.

(Eingegangen 30. Oktober 1916.)

Stoßionisierung der Gase durch Wärmebewegung.

Von F. v. Hauer.

Verschiedene Experimentaluntersuchungen haben gezeigt, daß in einem Gase (oder Dampfe), das sich in einem abgeschlossenen Gefäß befindet, stets noch eine Ionisierung bestehen bleibt, die einer Erzeugung von (der Größenordnung nach) 10 Ionen pro Kubikzentimeter und Sekunde[1] entspricht. Diese Ionisierung wird nach Ausschaltung der durch radioaktive Verunreinigungen des Gases gebildeten Ionisierung im allgemeinen zurückgeführt auf radioaktive Strahlung der Gefäßwände, durchdringende Strahlung und Ionisierung durch die Stöße der Wärmebewegung; hierzu kommt noch eine möglicherweise stattfindende Dissoziation der Atome in Ionen, ähnlich wie wir sie im festen, metallischen Zustande annehmen. Die Frage, inwieweit diese Ursachen auch tatsächlich wirksam sind, und ob sie hinreichen, um die genannte Restionisierung der Gase zu erklären, kann derzeit wohl noch nicht als gelöst betrachtet werden.

Der eine dieser Umstände, die Ionisierung durch die Wärmebewegung der Gasmolekel, ist einer einfachen theoretischen Behandlung zugänglich. Langevin und Rey[2] berechnen die Anzahl der Molekelzusammenstöße im cm³ eines Gases, bei denen die Komponente der Relativgeschwindigkeit in der zentralen Stoßrichtung (Richtung einer Geraden durch die Zentren der beiden zusammenstoßenden Molekel) größer als eine beliebig zu bestimmende Größe v ist, zu

$$\Gamma = \nu e^{-\frac{h m v^2}{2}}, \text{ wo } \nu = \text{Zahl aller Zusammenstöße im cm}^3/\text{sec}$$

m = Masse des Molekels

$$h = \frac{3}{4 \alpha T}.$$

Will man Γ etwa 10 erhalten, so muß man $\frac{m v^2}{2}$ von der Größenordnung der zur Stoßionisierung notwendigen Energie nehmen.

Da dieser Ausdruck für Γ aber stark mit der Temperatur zunimmt, die Restionisierung jedoch nicht, ziehen die beiden Autoren den Schluß, daß die Zusammenstöße der Wärmebewegung nicht die Ursache der Restionisierung seien, und meinen, daß dieses Resultat unabhängig von ihren Annahmen über den Stoß gelte.

Wolfke[1] hat aber gezeigt, daß diese Temperaturabhängigkeit durch die Wahl anderer Bedingungen bei der Bestimmung der wirksamen, d. h. ionisierenden Stöße verschwindet. Er nimmt an, das Losreißen eines Elektrons aus dem Atomverbande erfolge nicht durch den Stoß in radialer Richtung, sondern durch den in tangentialer Richtung, und es wirke jeder Zusammenstoß ionisierend, bei dem nicht die radiale Komponente der Geschwindigkeit so groß wird, daß das Elektron, statt aus dem Verbande gerissen zu werden, gegen das Atominnere gedrängt wird. Es wird demnach verlangt, daß die Komponente der Relativgeschwindigkeit in der radialen Richtung unter einer bestimmten Größe v ist. Er erhält dann gerade die Stöße als wirksam, die bei Langevin und Rey unwirksam waren, also ist ihre Anzahl

$$\Gamma_w = \nu \left(1 - e^{-\frac{h m v^2}{2}}\right),$$

in welchem Ausdruck v passend gewählt wird. Der Exponent der e-Potenz muß sehr klein sein. In dieser Form ist der Ausdruck ebenfalls von der Temperatur abhängig und zwar, da ν verkehrt proportional zu $\sqrt{T}$ und der Klammerausdruck nach einer Reihenentwicklung, die beim zweiten Glied abgebrochen werden kann, verkehrt proportional zu T, im ganzen also proportional zu $T^{-3/2}$.

Wolfke führt nun in die Formel die Konstante der inneren Reibung ein und erhält so Werte von zwei bis sechs Ionen pro cm³ und Sekunde für Temperaturen von 400 bis 250° abs.

Kingdon[2] führt den Gedanken von Wolfke, der Stoß in der tangentialen Richtung reiße das Elektron los, weiter, indem er die Zahl der Zusammenstöße berechnet, die mit einer tangentialen Relativgeschwindigkeit größer als u und einer radialen kleiner als v erfolgen, und erhält diese Anzahl zu

1) Der geringste Wert ist wohl der von Bergwitz (Beiträge zur Kenntnis der γ-Strahlung des Erdkörpers. Elster-Geitel-Festschrift S. 585, (1915) in 400 m Tiefe gefundene von 0,8 Ionen im cm³ sec.

2) P. Langevin u. J. Rey, Sur les chocs exceptionnels des molecules gazeuzes. Le Radium 10, 142, 1913.

1) M. Wolfke, Sur l'ionisation spontanée de gaz en vase clos. Le Radium 10, 265, 1913.

2) K. H. Kingdon, Some experiments on residual ionization, Philosophical Magazine Vol. 32, 180, 396, 1916.

$$N = n^2 \sigma^2 \sqrt{\frac{2\pi}{hm}}\, e^{-\frac{hm}{2}u^2} \left(1 - e^{-\frac{hm}{2}v^2}\right)$$

n = Anzahl der Molekel im cm³,
σ = Radius der Wirkungssphäre.

In diesem Ausdruck werden nun für u und v Werte eingesetzt, die mit den Experimenten verträglich erscheinen. Während bei Langevin und Rey die für $\frac{mv^2}{2}$ eingesetzte Größe von der Größenordnung der zur Ionisierung eines Molekels notwendigen Energie ist, ist bei den Formeln von Wolfke und Kingdon kein derartiger Zusammenhang; es müßten vielmehr nach der Annahme von Wolfke die Teilchen, welche die zur Stoßionisierung (nach den experimentellen Daten) notwendige Energie haben, gerade hierzu ungünstig sein; denn je rascher ein Molekel, desto größer auch seine Geschwindigkeitskomponente in der zentralen Stoßrichtung, also desto geringer die Wahrscheinlichkeit, daß sie unterhalb einer bestimmten Grenze liegt. Der experimentelle Befund zeigt, daß die lebendige Kraft eines Teilchens, damit es durch Stoß ionisieren kann, über — nicht unter — einer bestimmten Grenze sein muß, womit mir die Annahme von Wolfke in Widerspruch zu sein scheint.

Die Frage: kann ein Teil der in einem geschlossenen, gaserfüllten Gefäß bleibenden Ionisierung durch die Stöße der in Wärmebewegung befindlichen Molekel erklärt werden, halte ich demnach durch die obigen Auseinandersetzungen noch nicht für erledigt. Im folgenden soll daher eine Beantwortung gesucht werden, ohne mehr oder minder willkürliche Annahmen für die Auswahl der Molekelstöße zu machen.

Wir gehen hierbei aus von der Tatsache, daß ein Ion, das eine bestimmte Potentialdifferenz durchlaufen, also einen bekannten Zuwachs an lebendiger Kraft erhalten hat, imstande ist durch Stoß zu ionisieren. Da dieser Zuwachs an lebendiger Kraft groß gegen die mittlere lebendige Kraft der Molekularbewegung ist (Größenordnung 10^{-11} gegen $6{,}10^{-14}$), können wir die lebendige Kraft eines solchen ionisierenden Teilchens einfach aus der durchlaufenen Potentialdifferenz zahlenmäßig berechnen. Wir wollen sie im folgendem mit $\alpha\Theta$ bezeichnen, wo $\alpha = 2{,}02 \cdot 10^{-16}$ ist, und fragen uns nun, wieviele Zusammenstöße in einem Gase pro cm³ und Sekunde erfolgen, bei denen ein Molekel eine lebendige Kraft größer als $\alpha\Theta$ hat. Ob tatsächlich jeder derartige Zusammenstoß ionisierend wirkt, wissen wir nicht. Wir begnügen uns, um weitere Annahmen über den Stoß zu vermeiden, die Gesamtzahl dieser Stöße, also damit eine obere Grenze für die Zahl der erzeugten Ionen, zu suchen. Wenn ein Molekel mit der lebendigen Kraft zwischen $\alpha\tau$ und $\alpha(\tau + d\tau)$ in der Sekunde ν_τ Zusammenstöße macht und die Anzahl solcher Molekel im cm³ N_τ ist, so haben wir also ein Integral auszuführen von der Gestalt

$$I = \int N_\tau \nu_\tau \, d\tau.$$

Statt ν_τ können wir setzen $\frac{c}{\lambda}$; dabei bedeutet c die Geschwindigkeit und λ die mittlere freie Weglänge, und zwar ist der Mittelwert hier gedacht über Molekel von der Geschwindigkeit c während langer Zeit. N_τ ist nach dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gleich

$$N_\tau = 3\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(\frac{1}{T}\right)^{3/2} N e^{-\frac{3}{2}\frac{\tau}{T}} \sqrt{\tau};$$

N = Zahl der Molekel im cm³, also wird

$$I = 3\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(\frac{1}{T}\right)^{3/2} N \int \frac{c}{\lambda} e^{-\frac{3\tau}{2T}} \cdot \sqrt{\tau}\, d\tau.$$

Setzen wir noch für c den sich aus der Gleichung $\frac{mc^2}{2} = \alpha\tau$ ergebenden Wert ein, so wird nach Zusammenziehen des Zahlenfaktors das Integral gleich

$$I = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sqrt{\frac{2\alpha T}{m}} N \int \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{3\tau}{2T}} \cdot \frac{3\tau}{2T}\, d\left(\frac{3\tau}{2T}\right).$$

Der Faktor vor dem Integral ist aber nichts anderes als die mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}$ (nicht zu verwechseln mit $\sqrt{\overline{c^2}}$). Die Größe λ ist dabei noch Funktion von τ; wir können sie aber nach dem Mittelwertsatze herausheben und erhalten dann

$$I = \frac{\bar{c}}{\lambda_M} N \int e^{-\frac{3\tau}{2T}} \frac{3\tau}{2T}\, d\left(\frac{3\tau}{2T}\right).$$

Entsprechend obiger Angabe ist λ_M dieselbe Größe, die in der Gastheorie als λ_{Maxwell} bezeichnet wird, wovon wir uns auch überzeugen können, indem wir unser Integral zwischen den Grenzen von 0 und ∞ ausführen. Dann erhalten wir die Zahl aller Zusammenstöße pro cm³ und Sekunde zu

$$\nu = \frac{\bar{c}N}{\lambda_M} \int_0^\infty e^{-x} x\, dx = \frac{N\bar{c}}{\lambda_M},$$

(da

$$\int e^{-x} x\, dx = (1 + x) e^{-x})$$

eine Formel, die bekanntlich die Beziehung zwischen ν und λ_{Maxwell} darstellt.

Um die Zahl der Zusammenstöße, bei denen ein Molekel eine lebendige Kraft größer als $\alpha\Theta$ hat, zu finden, müssen wir das Integral zwischen den Grenzen $^3/_2\frac{\Theta}{T}$ bis ∞ erstrecken und erhalten so die gesuchte Anzahl gleich

$$\Gamma = \bar{c}N\int_{^3/_2\Theta/T}^{\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-x}x\,dx\,.$$

Wenn wir jetzt λ wieder vor das Integral herausheben wollen, haben wir natürlich wegen der geänderten Grenzen einen andern Mittelwert zu setzen. Ziehen wir aber in Betracht, daß nach dem schon anfangs Gesagten die Geschwindigkeit der ionisierenden Molekel groß sein muß gegen die mittlere Geschwindigkeit, so können wir jedenfalls mit genügender Annäherung für die freie Weglänge den Wert setzen, den wir für ein Molekel mit der Geschwindigkeit c in einem Gase aus sonst ruhenden Molekeln bestehend finden; dieser Wert ist bekanntlich $\lambda_R = \sqrt{2}\,\lambda_{Maxwell}$ und unabhängig von c. Also haben wir schließlich

$$\Gamma = \frac{Nc}{\sqrt{2}\,\lambda_M}\int_{^3/_2\Theta/T}^{\infty}e^{-x}x\,dx = \frac{\nu}{\sqrt{2}}(1+{}^3/_2\Theta/T)e^{-^3/_2\Theta/T}$$

Man sieht, wie wenig der Mittelwert von λ von den Grenzen des Integrals abhängt, so daß die Integration übrigens ohne gar zu großen Fehler über beliebige Grenzen erstreckt werden darf.

In dem Ausdrucke für Γ haben wir nun die gesuchte obere Grenze für die Zahl der durch die Wärmebewegung pro cm³ und Sekunde erzeugten Ionen gefunden, oder wenn wir annehmen wollen, daß jedes Molekel, das die zur Ionisierung notwendige Energie besitzt, beim Stoß auch tatsächlich ionisiert, diese Zahl selbst. Da bei Zimmertemperatur ν von der Größenordnung 10^{20} ist, $^3/_2\frac{\Theta}{T}$ aber von der Größenordnung 10^3, so sehen wir, daß in diesem Falle keine derartige Ionisierung bestehen kann.

Wenn V die Ionisierungsspannung in Volt ist, so ist

$$\alpha\Theta = \frac{V}{300}e\,,$$

wo $e = 4{,}67\cdot 10^{-10}$.

Setzen wir für Wasserstoff $\lambda_M = 1{,}8\cdot 10^{-5}$, $\bar{c} = 1{,}7\cdot 10^5$, also $\nu = 2{,}6\cdot 10^{29}$, so ist für $V = 10$ Volt und $T = 300^0$ abs. $\Gamma = 3\cdot 10^{-138}$, d. h. praktisch Null. Erst bei Temperaturen gegen 2000^0 abs. würde sich eine, dann mit steigender Temperatur rasch wachsende Ionisierung bemerkbar machen.

Freiburg im Uechtland (Schweiz), 7. November 1916.

(Eingegangen 9. November 1916.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen.

Von M. v. Smoluchowski.

(Schluß.)

3. Berechnung mit Hilfe der Diffusionstheorie.

Jetzt wollen wir aber noch der mathematischen Seite der Untersuchung unser Augenmerk zuwenden. Kann man nicht auch hier in irgendeiner Form die makroskopische Diffusionstheorie anwenden, anstatt auf den mikroskopischen Mechanismus der Brownschen Verschiebungen zurückzugehen? Offenbar erfordert dies nur, daß man die Eigenschaft der die Teilchen adsorbierenden Wand mathematisch ausdrücke, und zwar genügt hierzu die Grenzbedingung, daß die Teilchenkonzentration an der Wand fortwährend gleich Null erhalten werde[1]).

Tatsächlich lassen sich unsere früheren Formeln in einfacher Weise wiederfinden, wenn man die Lösung der Aufgabe kennt, die Verteilung einer Substanz zu bestimmen, welche zur Zeit $t = 0$ von $x = 0$ bis $x = \infty$ die gleichförmige Konzentration $u = \nu$ besaß und welche außer der Differentialgleichung für Diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (40)$$

die Grenzbedingung $u = 0$ für $x = 0$ zu allen Zeiten $t > 0$ erfüllt.

Diese Lösung lautet bekanntlich:

1) Da die „Geschwindigkeit" der Brownschen Bewegung für unendlich kleine Distanzen unendlich groß ist, muß jene Eigenschaft der Wand eine vollständige Entfernung aller Teilchen aus einer unendlich dünnen Schicht bewirken.

$$u = \frac{2\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2} dy \qquad (41)$$

und daraus folgt für die im Zeitraum $t \cdots t+dt$ an der Wand $x = 0$ ausgeschiedene Substanzmenge:

$$N dt = D \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \nu \sqrt{\frac{D}{\pi t}}$$

also dieselbe Formel (38), wie nach der früheren Rechnungsmethode.

In analoger Weise ließe sich auch unsere frühere Formel (37) wiederfinden, wenn man berücksichtigt, daß

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right] \qquad (42)$$

die sogen. Hauptlösung der Diffusionsgleichung unter der Nebenbedingung $u = 0$ für $x = 0$ ist, welche das allmähliche Diffundieren einer anfangs im Punkte x_0 angehäuften Substanz vorstellt, vorausgesetzt, daß die Wand $x = 0$ die Eigenschaft habe, jene Substanz vollkommen zu adsorbieren. Die an die Wand ausgeschiedene Substanzmenge $D \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$ ergibt sich dann ganz in Übereinstimmung mit (37).

Also läßt sich auch hier die durchschnittliche Wirkung, welche aus den Brownschen Bewegungen der einzelnen Teilchen, vereint mit der adsorbierenden Wirkung der festen Wand, resultiert, nach der Diffusionstheorie berechnen, und zwar indem man die Grenzbedingung einführt, daß die Teilchenkonzentration an der festen Wand fortwährend Null sei. Das scheint ja sehr plausibel zu sein, wenn man sich den Mechanismus der Diffusion vor Augen hält, und wir werden wohl berechtigt sein, dieselbe Berechnungsmethode bei beliebiger Gestalt der Wandfläche anzuwenden.

Daran wollen wir gleich eine gewisse Anwendung dieser Überlegungen knüpfen, welche uns später, bei Entwickelung der Koagulationstheorie nützlich sein wird. Stellen wir uns nämlich die Aufgabe, in ganz analoger Weise die Anzahl Teilchen zu berechnen, welche bis zur Zeit t an einer vollkommen adsorbierenden Kugelfläche vom Radius R haften bleiben würden.

Da handelt es sich offenbar nur darum, die Lösung der Diffusionsgleichung mit den Nebenbedingungen:

1. $u = c$ für: $t = 0$ und $r > R$
2. $u = 0$ für: $r = R$ und $t > 0$

zu finden.

Da die Konzentration u offenbar nur vom Radius und von der Zeit abhängt, kann die Lösung mittels bekannter Methoden bewerkstelligt werden, indem die Differentialgleichung die Form annimmt:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial t} = D \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} \qquad (43)$$

somit auf Grund der Analogie mit der linearen Wärmeleitung in der Form

$$u = c\left[1 - \frac{R}{r} + \frac{2R}{r\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-R}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz\right] \qquad (44)$$

gelöst werden kann; es läßt sich ganz einfach a posteriori die Tatsache verifizieren, daß hierdurch die Differentialgleichung (43), wie auch die Grenzbedingungen erfüllt werden.

Daraus folgt für die Menge der sich in der Zeit $t \cdots t+dt$ durch Diffusion an der Kugelfläche R ausscheidenden Substanz:

$$J dt = 4\pi D R^2 \frac{\partial u}{\partial r}\Big| dt = 4\pi D R c \left[1 + \frac{R}{\sqrt{\pi D t}}\right] dt \qquad (45)$$

und für die Menge, welche von Anfang bis zur Zeit t abgeschieden wurde:

$$M = \int_0^t J dt = 4\pi D R c \left[t + \frac{2R\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}}\right]. \qquad (46)$$

Diese Formeln sind einerseits für die Fälle gewöhnlicher, sagen wir „klassischer" Diffusion verwendbar, wie beispielsweise Ausscheidung von übersättigtem Wasserdampf an kugelförmigen Kondensationskernen, andererseits für Beispiele, wo es sich um das Absetzen von Kolloidteilchen aus einer anfangs homogenen Lösung an einer adsorbierenden Kugelfläche handelt, und zwar geben sie im letzteren Falle die durchschnittliche Anzahl der betreffenden Teilchen an, um welche die wirkliche Anzahl in zufälliger Weise herumschwanken wird.

4. Reflektierende Wand.

Kehren wir nun wieder zur Frage nach der experimentellen Meßbarkeit der Diffusion an grob dispersen Kolloiden zurück.

Da ist nun außer Brillouins Arbeit eine sehr schöne Untersuchung Westgrens[1]) zu nennen, in welcher wiederum von festen Wänden, aber nicht von adsorbierenden, sondern von reflektierenden Gebrauch gemacht wird. Dies entspricht dem normalen Verhalten einer

1) A. Westgren, Zeitschr. f. phys. Chem. **89**, 63, 1914.

kolloiden Lösung, deren Teilchen im allgemeinen, solange die elektrische Doppelschicht wirksam ist, keine Tendenz haben, an den Wänden zu kleben. Die mathematische Theorie derartiger Fälle ist ganz analog dem vorhergehenden Falle; wir können wiederum die Diffusionstheorie zur Berechnung der Verteilung benützen, nur müssen wir die Grenzbedingung einführen, daß die reflektierende Wand keine Substanz durchläßt; also muß für dieselbe gelten: $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$.

Nehmen wir beispielsweise an, die Ebene $x = 0$ wirke als reflektierende Wand, so läßt sich die Verteilung zur Zeit t auf Grund des bekannten Reflexionsprinzips durch Superposition von symmetrisch zur Wand gelegenen Quellen konstruieren; war die Anfangsverteilung durch eine Funktion $u = \varphi(x)$ gegeben, so resultiert daraus nach Analogie mit (3):

$$u = \int_0^\infty \varphi(x_0)[W(x_0, x) + W(-x_0, x)]dx_0. \quad (47)$$

Westgrens Anordnung erfordert aber keine derartigen Rechnungen. Er konzentrierte die Teilchen sämtlich an der Ebene $x = 0$ (und zwar dadurch, daß die betreffende mikroskopische Kammer in passender Weise auf einer Zentrifuge befestigt und eine Zeitlang der Wirkung der Zentrifugalkraft ausgesetzt wurde) und beobachtete dann das allmähliche Wegdiffundieren derselben. Da für die Teilchen in diesem Falle offenbar die verdoppelte gewöhnliche Brownsche Bewegungsformel gelten muß:

$$W(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx,$$

so läßt sich der Diffusionskoeffizient D aus den zur Zeit t in zwei Abständen x_1, x_2 gemessenen Teilchenzahlen ν_1, ν_2 berechnen:

$$D = \frac{x_2^2 - x_1^2}{4t(\log \nu_1 - \log \nu_2)}.$$

So ergaben sich für verschiedene Gold- und Selensole Werte des Diffusionskoeffizienten von 3,6 bis $5{,}8 \cdot 10^{-8}$, und durch gleichzeitige Bestimmung der Teilchendurchmesser (65—133 $\mu\mu$) mittels der Stokesschen Formel oder mit Hilfe der Beobachtung des Sedimentations-Gleichgewichts wurde nachgewiesen, daß die Formel (34) sich mit diesen Werten in bester Übereinstimmung befand.

Vom theoretischen Standpunkt aus erscheint diese Methode ganz einwandfrei und sie bietet auch den Vorteil, daß sie im Prinzip auf jede Art von Systemen mit sedimentierenden Teilchen anwendbar ist, welchem nur der Nachteil einer etwas größeren experimentellen Komplikation — im Vergleich mit Brillouins Methode — gegenübersteht.

5. Modifikation der Brownschen Bewegung durch äußere Kräfte, insbesondere Schwerkraft.

Außer dem Verhalten der adsorbierenden oder reflektierenden Wände ist noch ein weiterer Faktor für die Praxis von großer Wichtigkeit: der Einfluß der Schwerkraft, und diesen wollen wir nun näher betrachten. Die Sache ist sehr einfach, wenn es sich nur um die Aufgabe handelt, die stationäre Gleichgewichtsverteilung eines Kolloids über dem (reflektierenden) Gefäßboden zu finden. Wie seinerzeit Einstein und ich bemerkt haben, muß das sog. Sedimentations-Gleichgewicht dem Exponentialgesetz der Aerostatik[1]) Genüge leisten, was später durch die schönen Versuche Perrins und dessen Mitarbeiter bestätigt und zur Ausarbeitung einer sehr präzisen Bestimmungsmethode der Loschmidtschen Zahl benutzt wurde; es muß nämlich gelten:

$$\nu = \nu_0 e^{-\frac{N}{HT}\frac{4\pi}{3}a^3 g(\varrho - \varrho_0)x} \quad (48)$$

(wo a den Teilchenradius, $(\varrho - \varrho_0)$ den Dichteunterschied der Teilchensubstanz gegenüber der Flüssigkeit bedeutet.)

Will man aber die ganze Erscheinung gründlich verstehen, so muß man die mikroskopische Analyse des Vorgangs ausführen, d. h. man muß untersuchen, in welcher Weise die Bewegungen der einzelnen Teilchen infolge der Schwerkraft und der Gegenwart des Gefäßbodens modifiziert werden, was eine wesentlich schwierigere Aufgabe[2]) ist.

Würde nur die konstante Schwerkraft ins Spiel kommen, ohne daß eine Begrenzung des Raumes zu berücksichtigen wäre, so würde die Lösung einfach daraus folgen, daß die Schwerkraft eine konstante, fortschreitende Bewegung (mit der Geschwindigkeit c) hervorruft, welche sich über die Brownsche Bewegung (1) superponiert:

$$W(x, x_0, t)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x - x_0 - ct)^2}{4Dt}} dx, \quad (49)$$

so daß an Stelle der Ausgangsabszisse x_0 die Größe $x_0 - ct$ auftritt.

---

1) Dabei ist aber der Auftrieb seitens des umgebenden Mediums (von der Dichte ϱ_0) zu berücksichtigen, welcher im Falle der Aerostatik nur eine unbedeutende — der Benützung des Van der Waalsschen $(v - b)$ anstatt v entsprechende — Korrektur liefern würde. A. Einstein, Ann. d. Phys. **19**, 376, 1905; M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **21**, 756, 1906; J. Perrin, loc. cit. S. 557; außerdem C. R. **158**, 1168, 1914; B. Ilijn, Zeitschr. f. phys. Chem. **87**, 366, 1914; A. Westgren, Arkiv f. Mat. Svensk. Akad. **9**, Nr. 5 (1913); R. Costantin, C. R. **158**, 1171, 1341, 1914.

2) Vgl. M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **48**. 1103, 1915.

Das mittlere Verschiebungsquadrat ist in diesem Falle:

$$\overline{(x-x_0)^2} = 2Dt + (ct)^2$$

und man sieht, daß für genügend kurze Zeiten das zweite Glied im Verhältnis zum ersten verschwindet. Da die Verschiebungs-Geschwindigkeit der Brownschen Bewegung anfangs unendlich groß ist, versteht man auch unmittelbar, ohne Rechnung, daß die Bewegung anfangs rein „Brownisch" erfolgt, und daß sich erst im Laufe der Zeit die allmähliche Verschiebung infolge der Schwerkraft bemerkbar macht.

Infolgedessen kommen wir zu der physikalisch evidenten Schlußfolgerung, daß auch im Falle variabler Kräfte für genügend kurze Zeiten das Superpositions-Prinzip gelten muß, und dies ermöglicht uns die Verallgemeinerung der Theorie der Diffusion für den Fall, daß die betreffenden Teilchen von irgendwelchen Kräften beeinflußt werden.

Haben wir es mit Teilchen zu tun, welche unter Einfluß einer Kraft $f(x)$ die durchschnittliche Geschwindigkeit $\beta f(x)$ erlangen, so resultiert die Teilchenmenge, welche durch die Flächeneinheit eines Querschnittes x hindurchströmt, aus Superposition jener konstanten Wanderung und der Diffusionsströmung; sie beträgt also:

$$-D\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u f(x)$$

und daraus erhält man die Differentialgleichung für u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial}{\partial x}[u f(x)]. \qquad (50)$$

Dieselbe definiert die Verteilung einer diffundierenden Substanz, welche unter Einfluß einer äußeren Kraft $f(x)$ steht. Andererseits können wir sie im Sinne des Äquivalenzprinzipes auf ein einzelnes Kolloidteilchen beziehen und dadurch die relative Häufigkeit u der verschiedenen Lagen desselben bestimmen, d. h. wir erhalten die betreffende Verallgemeinerung der Brownschen Bewegungsformel.

Eine Probe können wir sofort ausführen, da ich für einen Spezialfall, d. i. unter Annahme einer das Teilchen in die Ruhelage zurücktreibenden elastischen Kraft die betreffende Wahrscheinlichkeitsfunktion auf direktem synthetischen Wege ermittelt hatte[1]). Es ist dies jenes Beispiel, welches ich in dem Göttinger Vortrag vor drei Jahren besprochen hatte:

$$W(x, x_0 t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1-e^{-2\gamma t})}}\, e^{-\frac{\gamma(x - x_0 e^{-\gamma t})^2}{2D(1-e^{-2\gamma t})}}. \qquad (51)$$

1) M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Cracovie 1913, p. 418; Vorträge üb. kinet. Theorie usw. S. 106.

Tatsächlich verifiziert man mittels direkter Rechnung leicht, daß diese Funktion die Differentialgleichung (50) unter der Annahme:

$$\beta f(x) = -\gamma x$$

erfüllt.

Ebenso würde auch für andere Kraftgesetze $f(x)$ jene Differentialgleichung das beste Mittel zur Auffindung der betreffenden molekularen Bewegungsformel darstellen, jedenfalls ein weit einfacheres, als der früher von mir angewendete synthetische Weg, welcher in komplizierteren Fällen offenbar ungangbar ist.

6. Übergang zur Sedimentationsverteilung, Widerspruch mit üblichem Entropiebegriff.

Kehren wir nun zu unserer speziellen Aufgabe zurück, so haben wir das Glied $-\beta f(x)$ durch die konstante, der Schwerkraft entsprechende Fallgeschwindigkeit c zu ersetzen:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad (52)$$

während die Wirkung des Gefäßbodens $x = 0$ offenbar darin besteht, die Substanzströmung in jenem Querschnitt gleich Null zu machen:

$$D\frac{\partial W}{\partial x} + cW = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Man kann nun diese Aufgabe mittels einer einfachen Transformation auf eine mathematisch einfachere reduzieren, wenn man bemerkt, daß die Annahme:

$$W = U e^{-\frac{c}{2D}(x-x_0) - \frac{c^2 t}{4D}} \qquad (53)$$

die obige Gleichung (52) erfüllt, falls die Funktion U so gewählt wird, daß

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

ist.

Den Grenzbedingungen für $x = 0$:

a) $W = 0$ b) $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ c) $\frac{\partial W}{\partial x} + hW = 0$

entsprechen hierbei die Bedingungen:

a) $U = 0$ b) $U - \frac{2D}{c}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

c) $\left(h - \frac{c}{2D}\right)U + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$

Auf diese Weise wird also die Aufgabe auf die anderweitig bekannten Lösungen der Wärmeleitungsgleichung reduziert, und man erhält so die unserem Falle angepaßte Hauptlösung:

$$W(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right]$$

$$e^{-\frac{c(x-x_0)}{2D} - \frac{c^2 t}{4D}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_{\frac{x+x_0-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2} dz. \qquad (54)$$

Es stellt dieses $W(x, x_0, t)dx$ somit die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein Teilchen, welches zu Anfang der Zeit sich im Punkte x_0 befand, zur Zeit t sich im Gebiete $x \cdots x + dx$ aufhalte. Die Formel ist weit komplizierter, als die gewöhnliche Formel der Brownschen Bewegung, aber man kann ihre Bedeutung an der Hand der graphischen Darstellung (Fig. 2) erkennen, welche die Kurven W für ein gegebenes x_0 (und zwar relativ große Entfernung vom Gefäßboden) und für verschiedene t-Werte versinnlicht.

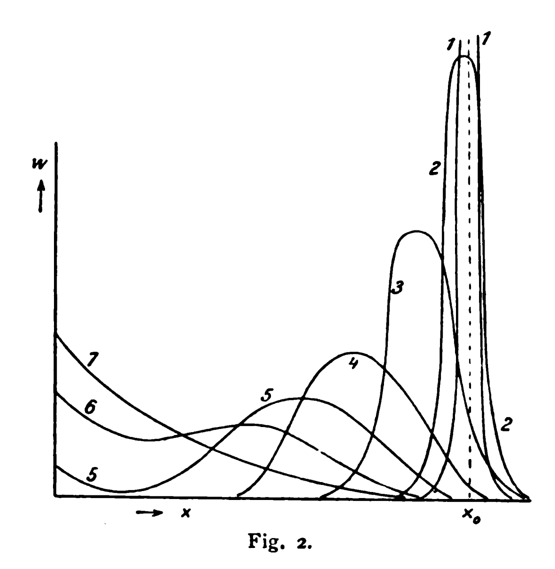


Fig. 2.

Stellen wir uns vor, daß eine größere Anzahl Teilchen zur Zeit Null vom Punkte x_0 ausgeht, so ist deren Bewegung im ersten Moment (1, 2) identisch mit der gewöhnlichen Brownschen Bewegung. Mit der Zeit (3, 4, 5) macht sich die Wirkung der Schwerkraft in der mit konstanter Geschwindigkeit c fortschreitenden Verschiebung des Punktes der maximalen Dichte fühlbar, indem sich der Teilchen-Schwarm gleichzeitig infolge der diffusiven Bewegungen seitlich immer mehr ausbreitet. Gelangt er in genügende Nähe des festen Gefäßbodens, so macht sich eine Rückstauung (5, 6) an demselben bemerkbar, welche immer zunimmt, bis schließlich im Laufe langer Zeiten die dem Sedimentations-Gleichgewicht entsprechende exponentielle Verteilung:

$$W(x, x_0, t) = \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}} \qquad (55)$$

erreicht wird. Das scheint mir eben das Interessanteste an diesem Beispiel, daß es diese drei verschiedenen Stadien der Bewegung als Grenzfälle einer Formel (54) umfaßt.

Die Sedimentations-Verteilung (55) muß natürlich mit der schon erwähnten aerostatischen Verteilungsformel (48) identisch sein, und da die Fallgeschwindigkeit $c = \frac{9}{2} \frac{a^2(\rho - \rho_0)g}{\mu}$ beträgt, so resultiert aus der Vergleichung der Exponenten die bekannte, schon mehrmals erwähnte Formel (34) für den Koeffizienten der Brownschen Bewegung:

$$D = \frac{HT}{N} \frac{1}{6\pi\mu a}.$$

Diese Methode der Ableitung bietet gegenüber mancher anderen den Vorteil, daß man nicht die Gültigkeit der Stokesschen Widerstandsformel für die Brownschen Zickzackbewegungen vorauszusetzen braucht, sondern sich auf die, z. B. von Perrin experimentell nachgewiesene Tatsache stützen kann, daß dieselbe für die Fallbewegung gültig ist[1]).

Im übrigen illustriert dieses Beispiel besonders klar die Unzulänglichkeit des üblichen Entropiebegriffes bei Anwendung auf derartige Erscheinungen. Für ein schweres Teilchen ist natürlich der Gefäßboden die Lage, welche sich durch maximale Entropie des aus dem Teilchen und dem umgebenden Medium bestehenden Systems auszeichnet, und der Thermodynamiker würde erwarten, daß diese Lage von dem durch dissipative Reibungskräfte beeinflußten Teilchen schließlich aufgesucht würde.

In Wirklichkeit zeichnet sich zwar die niedrigste Lage für lange Zeiträume tatsächlich (gemäß 55) durch maximale Wahrscheinlichkeit aus; wegen der einseitigen Begrenzung entspricht dieselbe jedoch durchaus nicht dem durchschnittlichen Aufenthaltsort des Teilchens. Als durchschnittlicher Wert der innerhalb langer Zeiten von dem Teilchen eingenommenen Abstände vom Gefäßboden resultiert aus jener Gleichung die Größe:

$$\bar{x} = \frac{c}{D} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{cx}{D}} dx = \frac{D}{c}, \qquad (56)$$

welche man vielleicht kurz: „Dicke der Sedimentationsschicht" nennen könnte.

Selbst wenn ein Teilchen auf irgendeine Weise zum Gefäßboden gebracht und dort los-

1) Am einfachsten folgt jene Berechnung schon daraus, daß die Formel (48), unter Einführung jenes c-Wertes, der Gleichung $D\frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu c = 0$ genügen muß. Vgl. Einsteins Ableitung.

gelassen wird, steigt es im allgemeinen, entgegen der Schwere, eine Strecke von selbst empor, und zwar gemäß der aus (54) für $x_0 = 0$ folgenden Formel:

$$W(x,0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x+ct)^2}{4Dt}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_{\frac{x-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \qquad (57)$$

deren Werte für wachsende Zeiten t durch die Kurven 1, 2, 3, 4 der Fig. 3 versinnlicht werden:

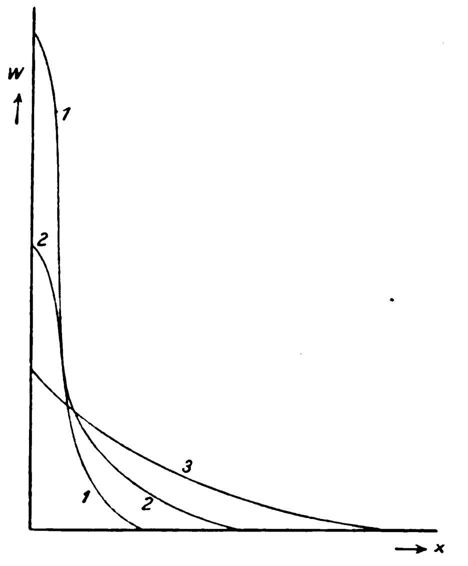


Fig. 3.

Der durchschnittliche Arbeitsbetrag, welchen ein solches Teilchen von selbst, also im Widerspruch mit dem II. Hauptsatze, auf Kosten der Umgebungswärme leistet, beträgt also[1])

$$\bar{A} = \frac{4}{3} a^3 \pi (\varrho - \varrho_0) g \bar{x} = \frac{HT}{N}.$$

Somit nimmt die Entropie durchschnittlich um den Wert $\frac{H}{N}$, im Vergleich mit der Maximalentropie, ab:

$$\bar{S} = S_m - \frac{H}{N}. \qquad (58)$$

Es erscheint mir übrigens ganz selbstverständlich, daß der durchschnittliche Entropiewert im stationären Gleichgewichtszustand geringer sein muß als der Maximalwert, und zwar eben darum, weil der Durchschnitt auch weniger wahrscheinliche Zustände umfaßt, welche eine geringere Entropie als der Maximalwert besitzen.

In jedem Punkte, mit Ausnahme der untersten Lage am Boden, ist ein momentanes Fallen des Teilchens wahrscheinlicher als ein Steigen; aber für längere Zeiträume wird in der untersten Schicht $\left(\text{unter } \frac{D}{c}\right)$ infolge der Reflexionen am Boden eine Steigung wahrscheinlicher gemacht, während bei größeren Anfangsabständen umgekehrt „fast immer" eine Senkung eintritt. Die Tendenz zur Abnahme der Entropie im Bereich der Sedimentationsschicht x kompensiert sich mit der Tendenz zum Wachsen in größerem Abstande, so daß im Laufe langer Zeiten durchschnittliche Stationärität resultiert. Natürlich wird es im Laufe der Zeit auch vorkommen, daß das Teilchen von selbst beliebig hoch emporsteigt, also die Entropie beliebig abnimmt[1]). Wir könnten auch leicht die Wiederkehrzeit für irgendeine Anfangslage in dem früher eingeführten Sinne berechnen, wenn wir mit Rücksicht darauf, daß wir es hier mit einem kontinuierlich variabeln Parameter x zu tun haben, gewisse naheliegende Modifikationen einführen. Doch wollen wir von der Ausführung der Rechnungen absehen, da wir die Art der Resultate, die enormen Größenunterschiede der Wiederkehrzeiten, nach Analogie mit dem früher Gesagten vorhersehen können, und diesbezügliche quantitative Experimente nicht vorliegen.

7. Vorschläge betreffs experimenteller Anwendung.

Nebenbei bemerkt, wären messende Versuche über die den traditionellen thermodynamischen Anschauungen so widerstrebende Erscheinung der Fig. 3 ganz leicht anzustellen: man braucht nur die Kolloidteilchen nach Westgrens Methode mittels Zentrifugierens gegen die eine Wand einer Küvette zu treiben und dann die Verbreitung der Teilchen zu studieren, sobald die Küvette so aufgestellt ist, daß jene Wand zu unterst liegt.

1) Trotzdem ist ein (automatisches) Perpetuum mobile unmöglich. Vgl. M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 13, 1069, 1912; Vorträge üb. kinet. Theorie usw. S. 117 ff.; Bull. Acad. Cracovie 1915 p. 164.

1) So steht die Sache, falls man an der üblichen (Boltzmannschen) Auffassung der Entropie als einer für den augenblicklichen Zustand des individuellen Systems charakteristischen Größe festhält. Auch der Durchschnittswert für eine Schar analoger Systeme, welche von makroskopisch äquivalenten Anfangszuständen x_0 ausgehen, würde eine Zu- oder Abnahme, entsprechend den beiden Fällen der Fig. 2 und 3 aufweisen. Dagegen wären Durchschnittswerte für kanonische Scharen (entsprechend der Gibbsschen Auffassung der Entropie) überhaupt zeitlich unveränderlich.

In anderer Weise sind derartige Erscheinungen häufig verwirklicht worden: bei Versuchen über reversible Kolloide, nach Art des kolloiden Schwefels, bei welchen geringe Elektrolytzusätze oder Temperaturänderungen eine Koagulation bewirken, während die entgegengesetzte Operation das Koagulum in Einzelteilchen auflöst, welche der Schwere entgegen aufsteigen, d. h. „in Lösung" gehen.

Bekanntlich hat Perrin auf die Untersuchung des Sedimentationsgleichgewichts (48) seine genaueste Methode zur Bestimmung der Zahl N gegründet, welche nur die Ausführung zweier relativ einfacher Messungen erfordert: 1. Ermittelung der Höhe x, in welcher eine Abnahme der Zahl der Kolloidteilchen auf $\frac{1}{e}$ erfolgt. 2. Ermittelung des Teilchenradius. Merkwürdig bleibt bei diesen, mit großem experimentellen Geschick ausgeführten Untersuchungen immerhin eine gewisse Divergenz des Schlußresultats $N = 68{,}2 \cdot 10^{22}$, gegenüber dem aus den Millikanschen Messungen folgenden Werte $N = 60{,}6 \cdot 10^{22}$, welch letzterer auch durch andere Erscheinungen (Strahlung, Radioaktivität) gestützt wird.

Wie dieser Widerspruch zu lösen ist, wage ich nicht zu entscheiden, doch möchte ich auf eine Hauptschwierigkeit der Perrinschen Methode hinweisen, die Herstellung einer vollkommen gleichkörnigen Suspension. Auf inhomogene Lösungen ist die Verteilungsformel (48) nicht ohne weiteres anwendbar, und obwohl Perrin auf die Fraktionierung seiner Gummigutt-Lösungen größte Sorgfalt verwendet hat, ist es doch schwer, diesbezügliche Einwände vollständig zu entkräften.

Darum möchte ich eine Modifikation dieser Versuche vorschlagen[1]), welche diese Schwierigkeiten vollständig vermeidet, d. i. die systematische Beobachtung eines einzelnen Teilchens. Würde man die sukzessiven Entfernungen desselben vom Gefäßboden in äquidistanten Zeitintervallen (während langer Zeitstrecken) bestimmen, so würde dieses statistische Material genau der Verteilung einer sedimentierten und zwar gleichkörnigen Suspension entsprechen; andererseits ließe sich an demselben Teilchen, mit Hilfe von (54) oder auch mit Hilfe eigener Versuche mit größeren x_0, die Fallgeschwindigkeit c ermitteln, so daß man von jeder Unsicherheit in bezug auf Homogenität der Lösung frei wäre. Gleichzeitig wäre auch eine weitere, unumgänglich nötige Bedingung erfüllt: falls nur ein einziges Teilchen vorhanden ist, hätte man es sicher mit einer verdünnten Lösung zu tun. Eine solche Messungsmethode würde in gewissem Sinne einen analogen Fortschritt bedeuten, wie die Ehrenhaft-Millikanschen Versuche über Elektronenladung gegenüber den J. J. Thomsonschen.

1) Diesbezügliche Versuche sind in Vorbereitung.

8. Einfluß innerer Kräfte in konzentrierten Lösungen.

Der soeben erwähnte Umstand erfordert noch eine nähere Erwägung mit Rücksicht auf die vorher besprochene Äquivalenz der uns interessierenden Gruppe von Phänomenen. Wie früher betont wurde, gelten alle unsere Überlegungen nur für verdünnte Lösungen, d. i. falls die Teilchen durchschnittlich so weit voneinander entfernt sind, daß sie gegenseitig keine merklichen Kräfte aufeinander ausüben und sich unabhängig voneinander bewegen oder, wie wir auch sagen können, falls ihr osmotischer Druck dem Boyle-Van t'-Hoffschen Gesetz Genüge leistet. In konzentrierten Lösungen müssen aber Abweichungen von diesem Verhalten auftreten, und zwar schon wegen des Eigenvolums der Teilchen, aber außerdem auch falls dieselben gewisse Anziehungs- oder Abstoßungs-Sphären besitzen.

Und zwar müssen derartige Abweichungen bei allen jenen, ursächlich miteinander verbundenen Vorgängen in gleicher Art auftreten. Kommen nur Abstoßungskräfte oder das Eigenvolum der Teilchen zur Geltung, so wird die osmotische Kompressibilität der konzentrierten Lösung im Vergleich mit dem Boyleschen Gesetz verringert sein, wie das ja der bekannte Virialsatz der Gastheorie näher nachweist.

Gleichzeitig muß, wie ich seinerzeit nachgewiesen habe[1]), damit eine Verringerung der Konzentrationsschwankungen parallel gehen, im Sinne der Gleichung:

$$\delta^2 = \overline{\left(\frac{n-\nu}{\nu}\right)^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\beta}{\beta_0}, \qquad (59)$$

1) Auf optischem Gebiete geben sich diese Schwankungen als Tyndallsches Phänomen (Kritische Opaleszenz von Gasen und binären Flüssigkeitsgemischen, sowie blaue Farbe des Himmels) zu erkennen: M. v. Smoluchowski, Bull. Acad. Cracovie 1907, S. 1057; Ann. d. Phys. **25**, 205, 1908; Phil. Mag. **23**, 165, 1912; Bull. Acad. Cracovie 1911, S. 493 (bezüglich der anhangsweise mitgeteilten Überlegungen habe ich meine Meinung geändert); A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1275, 1910; H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Comm. Leyden **104**, 15, 1908; W. H. Keesom, Ann. d. Phys. **35**, 591, 1911; Wo. Ostwald, Ann. d. Phys. **36**, 848, 1911; L. Ornstein u. F. Zernike, Amsterd. Proc. **17**, 793, 1914; F. Zernike, Dissertation Groningen 1914; R. Fürth, Wien. Ber. **124**, 577, 1915; H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig 1916 p. 42; C. W. Oseen, diese Zeitschr. **17**, 233, 341, 1916.

wo β die wirkliche, β_0 die Boylesche Kompressibilität bedeutet.

Endlich müssen Abweichungen vom Exponentialgesetz bei dem Sedimentations-Gleichgewicht auftreten, welche sich ganz leicht aus der hydrostatischen Grundformel berechnen lassen, und zwar werden dieselben offenbar darauf hinwirken, diese Verteilung gleichmäßiger zu machen, als es sonst der Fall wäre.

Die Gesetze des osmotischen Druckes lassen sich daher in kolloiden Lösungen ebensowohl nach zwei Methoden erforschen, welche beide statistischer Natur sind: mittels Beobachtung der Größe der Konzentrationsschwankungen oder auf Grund der Sedimentationsverteilung im Schwerefeld. Erstere bietet jedoch den erheblichen Vorteil, daß sie auf jede kolloide Lösung mit sichtbaren Teilchen anwendbar ist, während letztere nur für gleichkörnige Hydrosole gute Resultate geben kann.

Anfangs schien es, als ob die Erfahrung dem widersprechen würde, indem Svedberg u. Inouye sowie Westgren mittels der Schwankungsmethode an einer ganzen Menge verschiedener kolloider Lösungen sehr bedeutende Abweichungen vom Boyleschen Gesetz konstatierten, während Westgren das exponentielle Gesetz bei der Sedimentation ganz gut bestätigt fand. So betrug z. B. in einem Goldsol (Radius $a = 91\ \mu\mu$) bereits bei einer Volum-Konzentration von nur $5 \cdot 10^{-6}$ der Wert $\frac{\beta}{\beta_0} = 0{,}677$; in einer Gummiguttlösung ($a = 200\ \mu\mu$) war $\frac{\beta}{\beta_0} = 0{,}405$ für eine Volum-Konzentration $3{,}8 \cdot 10^{-4}$.

Andererseits hat aber Costatin in Perrins Laboratorium bei Gummiguttlösungen ($a = 30\ \mu\mu$) nach beiden Methoden bis zu weit größeren Konzentrationen vollständige Übereinstimmung mit der idealen Kompressibilität konstatiert und hat erst bei Volum-Konzentrationen von über $^1/_{100}$ eine merkliche Verminderung des β erhalten, welche die Existenz einer Abstoßungssphäre um die Gummiguttteilchen erweist, und zwar müßte letztere eine solche Wirkung ausüben, als ob der Teilchenradius 1,7 mal größer wäre als in Wirklichkeit.

Durch die von Westgren unlängst hier in Göttingen ausgeführte Arbeit ist dieser Widerspruch endgültig aufgeklärt worden, in dem derselbe nachwies, daß die nach Svedbergscher Methode mit Hilfe des Spaltultramikroskops ausgeführten Teilchenzählungen bei hell leuchtenden Teilchen eine subjektive Fehlerquelle enthalten[1]), welche bei größerer Konzentration sehr stark ins Gewicht fällt und jene Abweichungen vorgetäuscht hatte, während die Zählungen, welche Westgren an einem zwischen Deckgläsern eingeschlossenen Präparat ausführte, noch für eine Goldsuspension ($a = 110\ \mu\mu$) von einer Konz. $= 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ vollkommen normale Kompressibilität ergaben. Nach Analogie mit Costantins Resultaten zu schließen, wären Anomalien tatsächlich erst bei etwa 50 mal größeren Konzentrationen zu erwarten, welche sich in reinen Goldhydrosolen überhaupt kaum herstellen lassen dürften.

Das bisher Besprochene bezog sich auf die Abweichungen vom Boyleschen Gesetz, welche natürlicherweise vor allem die damit zusammenhängenden Erscheinungen der Schwankungsgröße beeinflussen müssen. Wie steht es aber nun um die Erscheinungen der Schwankungsgeschwindigkeit, der Brownschen Bewegung und der Diffusion, in welchen der zeitliche Verlauf in Frage kommt? Selbstverständlich müssen sich jene Abweichungen auch hier fühlbar machen, aber außerdem muß in konzentrierten Lösungen noch ein zweiter Faktor eine Rolle spielen: eine Vermehrung des Reibungskoeffizienten.

Am leichtesten lassen sich diese Verhältnisse bei der Diffusion übersehen und ließe sich die Abhängigkeit des Koeffizienten D von der Konzentration voraus berechnen, falls jene Abweichungen quantitativ bekannt wären. Falls nämlich in erster Näherung gesetzt wird:

$$p = A\varphi(1 + \alpha\varphi) \text{ und } \mu = \mu_0(1 + \beta\varphi),$$

wo p den osmotischen Druck und φ die Volumenkonzentration bedeutet, so muß für den Diffusionsstrom gelten:

$$D\frac{\partial\varphi}{\partial x} \sim \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{60}$$

somit im Vergleich mit dem Wert D_0 bei unendlicher Verdünnung:

$$D = D_0 \frac{1 + 2\alpha\varphi}{1 + \beta\varphi} \mp D_0[1 + (2\alpha - \beta)\varphi].$$

Parallel damit müssen natürlich auch Abänderungen in den Formeln für Brownsche Bewegung und für die Konzentrationsschwankungs-Geschwindigkeit Platz greifen, nach dem dies die mit der Diffusion äquivalenten mikroskopischen Vorgänge sind.

Es ist das noch ein weites Forschungsgebiet, von dessen Bearbeitung man für die Kolloidlehre die wichtigsten Resultate erhoffen kann, da die Theorie hier einen relativ einfachen und direkten Weg zur Erkenntnis der Art und Größe

1) Undeutliche Definition des beleuchteten Volums infolge seitlicher Zerstreuung des Lichtes. Ob dies auch für die von Lorenz u. Eitel an Tabakrauch gefundenen Abweichungen gilt, ist wohl erst durch weitere Untersuchungen zu entscheiden. Literaturnachweise, siehe S. 561 sowie die Zusammenstellung bei Th. Svedberg, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 10, 467, 1913.

der zwischen den Kolloidteilchen wirkenden Kräfte eröffnet hat. Von der näheren Erforschung des Mechanismus dieser Kräfte, sowie den verschiedenen Umständen, welche deren Auftreten beeinflussen, hängt ja unter anderem auch ein vollständiges Verständnis der Koagulationserscheinungen ab, mit denen wir uns im folgenden Teil beschäftigen werden.

III. Theorie der Koagulation.

[Vor diesem Vortrag hielt Prof. R. Zsigmondy einen Experimentalvortrag über Koagulation von Kolloiden, mit besonderer Berücksichtigung des kolloiden Goldes. Dabei wurden an schönen hochroten Goldlösungen unter anderem folgende Erscheinungen demonstriert: die Farbänderung rot-violett, welche als makroskopisches Kennzeichen der Koagulation dient, die koagulierende Wirkung von Elektrolytzusätzen, deren Konzentration einen gewissen Schwellenwert überschreitet, die Wirkungslosigkeit geringerer Zusätze desselben Stoffes, die Wirkungslosigkeit von Nichtelektrolyten, die Verlangsamung des Koagulationsvorganges bei Verdünnung der Goldlösung. Hierauf folgte der folgende Vortrag.]

1. Allgemeine Grundlagen der Theorie.

Angeregt durch Herrn Prof. R. Zsigmondy, welcher mir von seinen schönen Experimentaluntersuchungen über Koagulation von Goldlösungen und den dabei auftretenden theoretischen Problemen brieflich Mitteilung gemacht hatte, habe ich eine mathematische Theorie der Koagulationskinetik ausgearbeitet, welche eine spezielle Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Theorie der Brownschen Bewegung bildet, und diese möchte ich Ihnen heute in einem ganz kurzen Abriß vorlegen[1].

Von vornherein seien jedoch zwei einschränkende Bemerkungen vorausgeschickt:

1. Meine Theorie beansprucht nicht, als vollständige Aufklärung der inneren Ursachen der Koagulation, d. h. der hierbei in Wirkung tretenden elektrischen oder kapillaren Kräfte, der Natur der elektrischen Doppelschicht auf der Oberfläche der Kolloidteilchen usw., zu gelten. Es ist eine sozusagen formale Theorie, aufgebaut auf einer mir von Prof. Zsigmondy vorgeschlagenen Annahme betreffs des Mechanismus der Koagulation, wonach sich jene Kräfte durch eine Wirkungssphäre vom Radius R ersetzen lassen, derart, daß die Brownsche Bewegung der Teilchen ungehindert vor sich geht, solange die Entfernung ihrer Mittelpunkte größer ist als R, daß jedoch zwei Teilchen sofort aneinander haften bleiben müssen, sobald ihre Mittelpunktsentfernung auf R herabsinkt.

2. Eben infolge dieser Annahme bezieht sich diese Theorie eigentlich direkt nur auf einen Grenzfall der Koagulations-Kinetik, d. i. die rasche irrversible Koagulation, wie sie bei größeren Elektrolytkonzentrationen zustandekommt. Ich glaube, daß man sie mittels gewisser Modifikationen teilweise auch auf die langsame Koagulation ausdehnen kann, welche durch geringen, die elektrolytische Doppelschicht nicht vollständig entladenden Elektrolytzusatz hervorgerufen wird. Aber die Erscheinungen des reversibeln Koagulationsgleichgewichts, welche z. B. Sven Odén an Schwefelhydrosolen studiert hat, gehen über den Geltungsbereich dieser Theorie vorläufig noch hinaus. Sie bildet also selbstverständlich nicht eine allseitige Aufklärung des ganzen Problems, sondern nur einen ersten Schritt auf diesem seitens theoretischer Begründung noch vollständig unbebauten Gebiete.

Vor allem lassen sich schon daraus gewisse Schlüsse ziehen, daß die Koagulation in unserer Theorie auf die Brownsche Molekularbewegung und auf die Existenz einer Wirkungssphäre R zurückgeführt wird, denn als Variable, von welchen der Koagulationsverlauf abhängt, kommen somit nur folgende drei in Betracht: der Radius R, die Teilchenzahl pro Volumeinheit n_0 und die Diffusionskonstante D, deren Dimensionen gegeben werden durch das Schema:

$$D \sim \frac{l^2}{t}; \; n_0 \sim \frac{1}{l^3}; \; R \sim l.$$

Da also die Dimension der Zeit nur in D vorkommt, der Koagulationsverlauf aber von dem Maßstab der Zeit unabhängig sein muß, so folgt, daß derselbe notwendigerweise von dem Produkt Dt abhängen muß, d. h. die Zeit, welche zur Erreichung eines gewissen Koagulationsgrades verstreichen muß, wird „caeteris paribus“ umgekehrt proportional sein mit D.

Da nun weiter wohl anzunehmen ist, daß der Radius R bei kolloidem Gold und ähnlichen Hydrosolen nur wenig mit der Temperatur veränderlich sein dürfte, wird der Einfluß einer Temperaturänderung nur in D zum Vorschein kommen, also wird die Koagulationsgeschwindigkeit proportional mit D wachsen, d. h. infolge der bekannten Formel (34) für D, annähernd umgekehrt proportional der Viskosität μ. Dies scheint auch, einer freundlichen Mitteilung von Prof. Zsigmondy zufolge, tatsächlich der Fall zu sein.

1) Eine ausführlichere Darstellung wird in der Zeitschr. f. phys. Chem. veröffentlicht werden.

2. Berechnung der Wirkung eines Adsorptionskerns.

Gehen wir nun zur detaillierten Berechnung über. Es fragt sich: Sind n_0 Teilchen zur Zeit $t = 0$ in der Volumeinheit vorhanden, wie groß wird zur Zeit t die durchschnittliche Anzahl n_1 derjenigen Teilchen sein, welche bis dahin mit keiner Wirkungssphäre R in Berührung gekommen sind? Diese werden nämlich die noch zur Zeit t unkoagulierten Einzelteilchen sein. Greifen wir, anstatt den Teilchenschwarm zu betrachten, ein einzelnes Teilchen heraus, so wird die Wahrscheinlichkeit $W_1(t)$, daß dasselbe bis zur Zeit t von keinem zweiten berührt worden sei, dem gesuchten Prozentsatz der dann noch frei gebliebenen Einzelteilchen entsprechen:

$$\frac{n_1}{n_0} = W_1(t) \cdot$$

Die Berechnung von $W_1(t)$ wäre verhältnismäßig einfach, wenn das hervorgehobene Teilchen einen unbeweglichen Adsorptionskern bilden würde, so daß nur die Zusammenstöße der übrigen mit dem gerade hervorgehobenen in Betracht kämen, ohne daß aber bei einem Zusammenstoß zweier der nicht hervorgehobenen untereinander eine Verbindung einträte.

Dann könnten wir uns nämlich auf den in der vorigen Vorlesung besprochenen Äquivalenzsatz berufen, demzufolge die durchschnittliche Anzahl der innerhalb eines Zeitraums $t \cdots t + dt$ zum ersten Male an eine gewisse Fläche stoßenden Teilchen sich nach der gewöhnlichen makroskopischen Diffusionstheorie berechnen läßt, indem man die Verteilung innerhalb eines unendlich ausgedehnten Mediums berechnet, welches ursprünglich überall gleiche Konzentration besitzt, in welchem aber, vom Zeitpunkt $t = 0$ angefangen, auf der betreffenden Fläche die Konzentration Null aufrecht erhalten wird. Für den hier in Frage kommenden Fall, wo es sich um eine adsorbierende Kugelfläche (vom Radius R) handelt, haben wir daselbst S. 586 die Rechnung durchgeführt und haben für die im Zeitraum dt ausgeschiedene Substanzmenge erhalten:

$$J dt = 4\pi D R c \left[1 + \frac{R}{\sqrt{\pi D t}} \right] dt \qquad (61)$$

und für die von Anfang an abgeschiedene Menge:

$$M = 4\pi D R c \left[t + \frac{2 R \sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}} \right]. \qquad (62)$$

Behufs Vereinfachung der Rechnungen wollen wir schon an dieser Stelle eine Annäherung einführen, indem wir das zweite Glied der rechten Seite, welches die $\sqrt{t}$ enthält, als unwesentlich weglassen. Das heißt, daß wir den Koagulationsverlauf in einem solchen Stadium studieren, wo die Zeit t groß ist gegenüber dem Werte $\frac{R^2}{D}$. Das Anfangsstadium, welches durch diese Bedingung ausgeschlossen wird, beläuft sich beispielsweise in Zsigmondys Versuchen auf nur 10^{-4} bis 10^{-3} Sekunden. Im übrigen könnte man die Rechnung auch ohne jene Vernachlässigung weiterführen, und würde kompliziertere, aber praktisch gleichwertige Formeln erhalten.

Ersetzt man die Konzentration c durch die pro Volumeinheit entfallende Teilchenzahl ν_0, so ergibt sich die Anzahl der pro Zeiteinheit an dem hervorgehobenen Adsorptionskern anklebenden Teilchen: $4\pi R D \nu_0$, und die Zeit

$$T = \frac{1}{4\pi R D \nu_0} = \frac{1}{\beta}, \qquad (63)$$

welche wir weiterhin „Koagulationszeit" nennen wollen, würde dem Zeitpunkt entsprechen, wo durchschnittlich gerade ein Teilchen an dem hervorgehobenen haften bleibt.

3. Vervollständigte Berechnung der Koagulation.

Nun ist aber unsere Rechnung in zweifacher Hinsicht zu verbessern:

1. Das hervorgehobene Teilchen führt an und für sich eine ähnliche Brownsche Bewegung aus wie die übrigen, es kommt also für die Koagulation die relative Bewegung in Betracht. Diesbezüglich läßt sich nun leicht nachweisen, daß die Relativverschiebung zweier sich unabhängig voneinander bewegender Teilchen ebenso erfolgt, wie die gewöhnliche Brownsche Bewegungsformel (1) angibt, nur mit dem Unterschied, daß der Diffusionskoeffizient D gleich der Summe der Koeffizienten der beiden Teilchen zu setzen ist. Allgemein gilt also für die Relativbewegung:

$$D_{ab} = D_a + D_b. \qquad (64)$$

2. Unsere Formeln (61) (62) entsprechen dem Falle, wo die Zahl ν_0 der Teilchen in größerer Entfernung unverändert bleibt. In Wirklichkeit kleben sie aber nicht nur an dem hervorgehobenen sondern auch untereinander an. Von der Anzahl $4\pi D R \nu_0$ sind also jene wegzustreichen, welche schon vor der Zeit t koaguliert sind, somit ist die Zahl ν_0 durch die Zahl ν_1 der zur Zeit t noch existierenden Einzelteilchen zu ersetzen. Ebenso kommen als Adsorptionskerne, wenn es sich um die Vereinigung von einfachen zu Doppel-Teilchen handelt, nicht sämtliche ν_0 sondern nur die noch freien Teilchen ν_1 in Betracht.



Somit erfolgt die Abnahme der Gesamtzahl der Einzelteilchen nach der Formel:

$$\frac{d\nu_1}{dt} = -4\pi R D_{11}\, \nu_1^2, \qquad (65)$$

welche genau der Kinetik einer bimolekularen chemischen Reaktion entspricht und durch Integration liefern würde:

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + 4\pi R D_{11} \nu_0 t} = \frac{\nu_0}{1 + 8\pi D R \nu_0 t}. \qquad (66)$$

Dazu ist aber eine wichtige Ergänzung hinzuzufügen. Es wirken ja auch die bereits gebildeten Doppelteilchen, dreifachen Teilchen usw. als Koagulationskerne und als Koagulationsmaterial weiter, allerdings in einer Weise, welche sich nicht so leicht genau berechnen läßt, da die Gestalt der mehrfachen Teilchen nicht kugelförmig ist. Bezeichnen wir die augenblickliche Anzahl der $m$fachen Teilchen mit ν_m, so gelten offenbar Gleichungen von der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\frac{d\nu_1}{dt} &= -D_{11}R_{11}\nu_1^2 - D_{12}R_{12}\nu_1\nu_2 \\
&\quad - D_{13}R_{13}\nu_1\nu_3 - \ldots \\
\frac{1}{4\pi}\frac{d\nu_2}{dt} &= \frac{1}{2}D_{11}R_{11}\nu_1^2 - D_{12}R_{12}\nu_1\nu_2 \\
&\quad - D_{22}R_{22}\nu_2^2 - D_{23}R_{23}\nu_2\nu_3 - \ldots \\
\frac{1}{4\pi}\frac{d\nu_3}{dt} &= D_{12}R_{12}\nu_1\nu_2 - D_{13}R_{13}\nu_1\nu_3 \\
&\quad - D_{23}R_{23}\nu_2\nu_3 - D_{33}R_{33}\nu_3^2 - \ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ usw.}
\end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Wären nun die Teilchen kugelförmig, so wäre deren Diffusionskoeffizient umgekehrt proportional ihrem Radius, also wie wir mit Rücksicht auf die später zu besprechenden Versuchsresultate annehmen wollen, auch umgekehrt proportional dem Wirkungsradius R, und man hätte allgemein:

$$D_{ik}R_{ik} = (D_i + D_k)\frac{R_i + R_k}{2} = \frac{DR}{2}(R_i + R_k)$$

$$\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_k}\right) = \frac{DR}{2}\frac{(R_i + R_k)^2}{R_i R_k}.$$

Für gleiche Radien $R_i = R_k$ folgt also:

$$D_{ik}R_{ik} = 2DR \qquad (68)$$

und zur Vereinfachung der Rechnungen wollen wir diesen Wert allgemein einführen, da er in dem Anfangsstadium der Koagulation, wo nur Einzelteilchen in Betracht kommen, genau gilt und in den späteren Stadien immerhin eine ziemliche Annäherung darstellen dürfte. Machen wir diese Annahme, so läßt sich das Gleichungssystem in ganz überraschend einfacher Weise integrieren. Man erhält nämlich für die Gesamtzahl der Teilchen

$$\sum \nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots = \frac{\nu_0}{1 + \beta t}, \qquad (69)$$

wo zur Abkürzung $4\pi D R \nu_0 = \beta$ gesetzt ist, ferner werden die Anzahlen der einfachen, doppelten, dreifachen usw. Teilchen:

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1 &= \frac{\nu_0}{[1 + \beta t]^2}, \\
\nu_2 &= \frac{\nu_0 \beta t}{[1 + \beta t]^3}, \\
\nu_3 &= \frac{\nu_0 (\beta t)^2}{[1 + \beta t]^4} \quad \text{usw.}
\end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Offenbar hängt also der zeitliche Verlauf der Koagulation nur von dem Werte der früher definierten „Koagulationszeit"

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4\pi D R \nu_0}$$

ab, welche gemäß unserer jetzigen, verbesserten Formel dem Moment entspricht, wo die Gesamtzahl aller Teilchen auf die Hälfte, die Anzahl der Einzelteilchen auf $^1/_4$ der ursprünglichen herabgesunken ist, während die Anzahl der $m$fachen Teilchen $\frac{\nu_0}{2^{m+1}}$ beträgt.

Ein anschauliches Bild des Koagulationsverlaufes gibt die graphische Darstellung (Fig. 4),

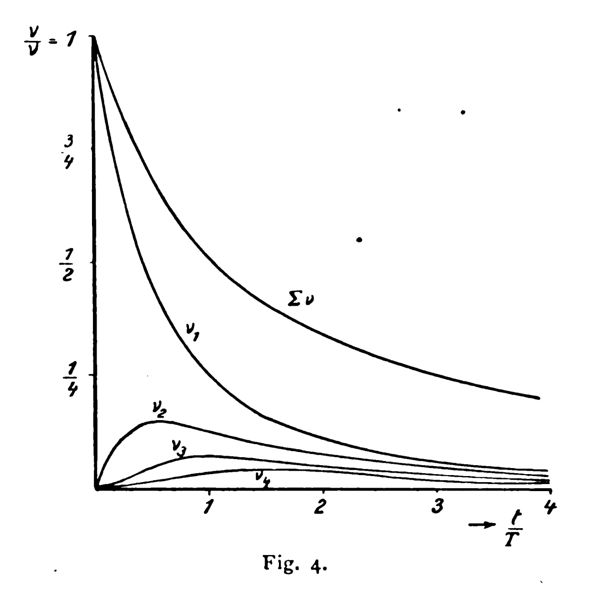


Fig. 4.

aus der man sieht, wie die Kurven $\nu_2, \nu_3, \ldots \nu_m$, von Null ansteigend, in immer späteren Momenten $\left(\text{nämlich zur Zeit } t_{\max} = \frac{m-1}{2} T\right)$ Maximalwerte erreichen; wie von vornherein zu erwarten war, nimmt das Verhältnis der mehrfachen zu den einfachen Teilchen mit wachsender Zeit fortwährend zu, indem hierfür gilt:

$$\frac{\nu_2 + \nu_3 + \ldots}{\nu_1} = \beta t.$$

4. Vergleich mit Versuchen von Prof. R. Zsigmondy.

Das einzige experimentelle Material, dessen Bedeutung keinerlei Zweifel unterliegt und das als direkte Kontrolle der obigen Theorie dienen kann, sind bisher die von Prof. R. Zsigmondy ausgeführten Zählungen[1]), welche an sehr gleichkörnigen Goldlösungen angestellt waren und sich nur auf die Einzelteilchen bezogen, welche durch ihre Färbung und ihren geringeren Glanz von mehrfachen Teilchen deutlich zu unterscheiden waren. Zum Vergleich seien einige von Zsigmondy angegebene Versuchsreihen angeführt, nebst den aus der Formel (70_1) berechneten β-Werten und den aus dem Mittelwert zurückerrechneten Teilchenzahlen ν_1 (in relativem Maß ausgedrückt).

Kurve D: $n_0 = 0{,}80 \cdot 10^{10}$; $r = 13{,}4 \cdot 10^{-7}$.

t (Sek.)	ν_1 gef.	β	ν_1 ber.
0	1,93		1,93
2	1,42	(0,083)	1,71
10	1,17	0,0286	1,14
20	0,75	0,0302	0,76
30	0,52	0,0309	0,53

Mittel $\beta = 0{,}0299$; $\frac{R}{r} = 1{,}40$.

Versuch E: $\nu_0 = 0{,}552 \cdot 10^{10}$; $r = 24{,}2 \cdot 10^{-7}$.

t (Sek.)	ν_1 gef.	β	ν_1 ber.
0	1,97		1,97
2	1,35	(0,105)	1,65
5	1,19	(0,058)	1,31
10	0,89	0,0490	0,93
20	0,52	0,0475	0,54
40	0,29	0,0403	0,25

Mittel: $\beta = 0{,}0456$; $\frac{R}{r} = 3{,}12$.

Versuch F: $\nu_0 = 0{,}27 \cdot 10^{10}$; $r = 24{,}2 \cdot 10^{-7}$.

t (Sek.)	ν_1 gef.	β	ν_1 ber.
0	1,97		1,97
3	1,56	(0,040)	1,76
20	1,02	0,0195	1,04
40	0,66	0,0183	0,64
40	0,76	(0,0153)	0,64
60	0,44	0,0187	0,44
80	0,49 (?)	(0,0126)	0,31

Mittel: $\beta = 0{,}0188$; $\frac{R}{r} = 2{,}63$.

1) Dieselben werden von Prof. Zsigmondy als vorläufige Resultate angesehen; einen eingehenderen Bericht über diese Untersuchung wird derselbe an anderem Orte veröffentlichen.

Daß die Werte für 2—5 Sekunden stärker abweichen[1]), kann wohl nicht wundernehmen. Die Vernachlässigung des $\sqrt{t}$-Gliedes im Anfangsstadium ist dafür nicht verantwortlich, wie eine genauere Berechnung zeigt, auch kommt die betreffs der Wirkung mehrfacher Teilchen angedeutete Unsicherheit nicht in Betracht, da in diesem Gebiet beide Formeln (66) (70_1) nahe übereinstimmende Werte geben, aber zweifellos müssen die unvermeidlichen Versuchsfehler gerade bei so kurzen Zeiten sehr ins Gewicht fallen. Die Anwendung der langwierigen Zählmethode zur Kontrolle so rasch verlaufender Prozesse hat Zsigmondy überhaupt nur durch einen Kunstgriff ermöglicht, indem er in den angegebenen Momenten die Lösung mit einem die weitere Koagulation verhindernden Schutzkolloid versetzte, doch dürfte dasselbe wohl nicht momentan in Wirkung treten.

Im allgemeinen kann man die Übereinstimmung in Anbetracht der experimentellen Schwierigkeiten gewiß als genügend betrachten. Eine weitere Kontrolle der Berechtigung unserer theoretischen Annahmen bildet die Berechnung des Verhältnisses des Wirkungsradius R zum Teilchenradius a, auf Grund der aus (34) und (63) folgenden Formel:

$$\frac{R}{a} = \frac{3\beta\mu}{2\nu_0} \frac{N}{HT}. \qquad (71)$$

Das allgemeine Ergebnis, daß die Wirkungssphäre von der Größenordnung des Teilchendurchmessers ist, erscheint durchaus plausibel und rechtfertigt a posteriori die von uns angewendete Rechnungsmethode. Würden die Teilchen erst bei unmittelbarer Berührung aneinander haften bleiben, so müßte $R = 2a$ sein, somit würde sich die Wechselwirkung zweier Teilchen gemäß E und F erst bei großer Annäherung bemerklich machen. Daß $R < 2a$ sei, wie die Reihe D folgern läßt, ist allerdings theoretisch nicht zulässig. Doch würde, wie wir später noch näher ausführen werden, ein solches Resultat bei einer unvollständigen Entladung der elektrischen Doppelschicht infolge zu geringen Elektrolytzusatzes zum Vorschein kommen, und es ist vielleicht nicht ausgeschlossen, daß in jener Versuchsreihe eine die Koagulation in ähnlicher Weise verlangsamende zufällige Verunreinigung im Spiel war.

Jedenfalls scheint die Schlußfolgerung sicher zu sein, daß sich Zsigmondys Messungen mit der hier entwickelten Diffusionstheorie der Koagulation in angenäherte Übereinstimmung bringen lassen, wenn man die Existenz von

1) Die eingeklammerten Zahlen, von denen man annehmen darf, daß sie durch Versuchsfehler beeinflußt sind, wurden bei der Mittelbildung ausgeschlossen.



Anziehungssphären von der Größenordnung des Teilchendurchmessers annimmt, und das scheint mir in Anbetracht der vollständigen Unwissenheit, in der wir uns bisher betreffs des Mechanismus der Koagulation befanden, immerhin ein recht bemerkenswertes Resultat zu sein.

5. Vergleich mit chemischer Kinetik.

Es liegt die Frage nahe, ob der Mechanismus der Koagulation nicht mit jenem der chemischen Kinetik verwandt ist, und ob unsere Theorie nicht vielleicht einen Weg zu einem kinetischen Verständnis chemischer Reaktionsprozesse eröffnet. Darüber wird uns ein charakteristisches Zahlenbeispiel am besten orientieren: Nehmen wir den kleinsten theoretisch möglichen Wert des Wirkungsradius $R = 2a$, so ergibt die Formel (71) die von der Art der Teilchen unabhängige Beziehung

$$\frac{1}{\beta} = \frac{3}{4} \frac{N}{HT} \frac{\mu}{\nu_0},$$

und es zeigt sich, daß $\nu_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-12} N$, also daß die Konzentration nur $\frac{1}{3} 10^{-9}$ Norm. betragen kann, wenn die Koagulationszeit eine Sekunde sein soll. Konzentrationen, wie sie bei chemischen Reaktionsversuchen meist angewendet werden, würden also einen sozusagen momentanen Reaktionsverlauf bedingen; die Größenordnung der chemischen Reaktionszeit ist eine millionen- bis billionenmal größere.

Das ist leicht zu verstehen: bei chemischen Prozessen genügt es eben nicht, daß zwei Moleküle zusammentreffen, um die Reaktion zu bewirken, sondern sie müssen in bestimmter Weise zusammenstoßen. Von allen Zusammenstößen ist im allgemeinen nur ein verschwindend geringer Bruchteil wirklich wirksam — und darin scheint mir ein wesentlicher Unterschied gegenüber der „raschen" Koagulation zu liegen, welche im obigen behandelt wurde. Bei letzterer rührt die Hemmung nur von der Langsamkeit der Diffusion her; bei der chemischen Kinetik kommt dagegen in erster Linie die Hemmung in Betracht, welche die Reaktion beim Zusammenstoß der geeigneten Moleküle aus bisher unbekannten Gründen erfährt. Auch der enorme Temperatureinfluß bei der chemischen Kinetik weist auf einen wesentlichen Unterschied hin. Allerdings wird es gewiß auch Übergangsstadien geben, im Sinne der später noch zu besprechenden Erscheinungen der „langsamen" Koagulation, doch tritt jedenfalls bei der chemischen Kinetik ein hier nicht berücksichtigter Faktor wesentlich bestimmend hinzu.

Damit hängt wohl auch ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal zusammen, daß nämlich chemische Reaktionen von den Gesetzen der Wertigkeit beherrscht werden, während bei Koagulation eine unbegrenzte Agglomeration stattfindet. Letztere läßt sich, wie wir sahen, durch kugelige Anziehungsbereiche erklären, während schon Boltzmann sich seinerzeit bei seiner Theorie des Dissoziationsgleichgewichts genötigt sah, die Möglichkeit sphärischer Wirkungsgebiete zu verlassen und die Existenz gewisser „empfindlicher Bezirke" auf der Oberfläche der Atome anzunehmen, da sonst die Tatsache unerklärlich wäre, daß z. B. O_2, H_2, N_2-Moleküle als Doppelatome bestehen, ohne daß dreifache, vierfache Atome auftreten[1]).

6. Verallgemeinerung für langsame Koagulation, Ähnlichkeitsgesetze.

Schließlich möchte ich noch kurz bemerken, daß unsere Theorie geeignet erscheint, auch die Erscheinungen der „langsamen" Koagulation, welche bei sehr geringem Elektrolytzusatz eintreten, wenigstens in formaler Hinsicht zu umfassen. Es genügt zu diesem Zwecke die von vornherein plausible Annahme einzuführen, daß in diesem Falle — d. h. bei unvollständiger elektrischer Teilchenentladung — nur ein gewisser Bruchteil ε der Zusammenstöße verschiedener Teilchen zur Verkettung derselben führt. Wie groß dieser Bruchteil ist, darüber wissen wir von vornherein nichts weiter, als daß er in hohem Grade von der Doppelschicht-Ladung abhängt; es wird sich aber zeigen, daß wir ihn „a posteriori" aus den empirischen Resultaten bestimmen können.

Unter dieser Annahme würden offenbar genau dieselben Formeln (69, 70) auch in diesem allgemeinen Falle gültig bleiben, mit dem einzigen Unterschied, daß überall das Glied βt durch $\varepsilon\beta t$ zu ersetzen ist. Es folgt also ohne weiteres der wichtige Satz, daß die bei verschiedenen Konzentrationen des Kolloids und des Elektrolyten erhaltenen Koagulationskurven ähnlich sein müssen, in dem Sinne, daß sie durch eine entsprechende Änderung des Zeitmaßstabes zur Deckung gebracht werden können. Die zur Erreichung eines gewissen Koagulationsgrades erforderlichen Zeiten sind also umgekehrt proportional dem Produkte $(\varepsilon \nu_0)$.

Tatsächlich ist die Ähnlichkeit der Koagulationskurven durch die Untersuchungen von H. Paine an $Cu(OH)_2$-Solen und teilweise auch jene von H. Freundlich u. N. Ishizaka an $Al(OH)_3$-Solen empirisch konstatiert worden[2]).

1) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gastheorie II. S. 213. Sonst hat Boltzmanns Theorie, welche sich nur auf den Zustand statistischen Gleichgewichts bezieht, nichts gemeinsam mit den hier behandelten Erscheinungen der irreversibeln Koagulation.

2) H. Paine, Kolloidchem. Beih. **4**, 24, 1912; Kol-

Insbesondere hat Paine nachgewiesen, daß die Koagulationszeit, in Übereinstimmung mit unseren Formeln, umgekehrt proportional der Anfangskonzentration des Kolloids ist und daß sie umgekehrt proportional der 5. oder 6. Potenz der Elektrolytkonzentration variierte, was wir einer entsprechenden Änderung des Wirksamkeitskoeffizienten ε zuzuschreiben haben.

Letzteres kann aber natürlich kein allgemeines Gesetz sein, da bei stärkeren Zusätzen, in dem oben besprochenen Bereich der „raschen" Koagulation, die Koagulationsgeschwindigkeit von der Elektrolytkonzentration unabhängig wird. Sehr instruktiv sind in dieser Beziehung einige Zahlen, welche mir R. Zsigmondy gütigst mitgeteilt hat, wonach zur Erreichung eines bestimmten, an dem Farbumschlag Rot- Rotviolett kenntlichen Koagulationsgrades einer Goldlösung bei verschiedenen Elektrolytkonzentrationen c (Millimol $NaCl$ pro Liter) die nachstehenden Zeiten T (Sekunden) erforderlich waren:

c	5	10	20	50	100	150	200	300	500
T	>150	12	7,2	7	7	6	6,5	7,5	7[1])

Ein dem Anfang dieser Messungsreihe angepaßtes Potenzgesetz müßte natürlich bei höheren Konzentrationen vollständig versagen.

Auch Freundlichs und Ishizakas Messungen bestätigten, wie gesagt, das Ähnlichkeitsprinzip, und zwar in bezug auf die Abhängigkeit vom Elektrolytzusatz, sonst sind sie aber zu einer quantitativen Kontrolle unserer Formeln nicht geeignet, da sie sich (wie auch Paines Messungen) nicht auf die Teilchenzahlen selbst, sondern auf andere Größen bezogen, wie Zähigkeit oder in anderen Untersuchungen gewisse Adsorptionserscheinungen, welche komplizierte und einstweilen unbekannte Funktionen der Zahl und Größe der Teilchen (bzw. deren Aggregate) sind.

Macht man betreffs der Abhängigkeit der Viskosität von der Teilchenzahl und -größe gewisse, ziemlich plausible Annahmen, so kann man die charakteristische, durch einen Wendepunkt gekennzeichnete Gestalt der Koagulationskurven Freundlichs ohne weiteres erklären, doch kommen da zu viel hypothetische Elemente ins Spiel, als daß man von einer zahlenmäßigen Kontrolle reden könnte und deshalb will ich auf diese Rechnungen hier nicht weiter eingehen.

loid-Zeitschr. 11, 145, 1912; N. Ishizaka, Zeitschr. f. phys. Chem. 83, 97, 1913; H. Freundlich u. N. Ishizaka, Koll.-Zeitsch. 12, 230, 1913; Zeitschr. f. phys. Chem. 85, 398, 1913. Eine Weiterführung dieser Untersuchungen in der kürzlich erschienenen Arbeit von J. Gann, Kolloidchem. Beih. 8, 63, 1916.

1) Die Abweichungen von 7 Sek. bei 50—500 Millimol liegen innerhalb der Beobachtungsfehler.

Auch scheint es mir nicht rationell, aus derartigen Messungen die Differentialgleichung der Koagulationskinetik ableiten zu wollen, wie es Freundlich versucht, solange man nicht weiß, wie die Teilchenzahlen mit dem beobachteten Effekt zusammenhängen. Für erstere, nicht aber für den gemessenen Gesamteffekt, ist eine einfache Gesetzmäßigkeit zu erwarten. Dagegen sind derartige Messungen wohl geeignet, auf Grund des Ähnlichkeitsprinzips hochinteressante Aufschlüsse über die Abhängigkeit des Wirksamkeitskoeffizienten[1]) ε von der Art und Konzentration des Elektrolyten zu geben.

7. Theorie der Versuche Paines.

Bei Paines Versuchen läßt sich die mathematische Analyse noch weiter treiben, und die Sache scheint mir so interessant, daß ich sie noch kurz darstellen möchte. Paine bestimmte nämlich die Menge des koagulierten Niederschlages, welcher sich aus seinen Lösungen nach gewisser Zeitdauer der Elektrolyteinwirkung absetzte, sobald die Lösung erhitzt oder aber eine Zeitlang umgerührt wurde. Die Wirkung der Erhitzung mag auf einem uns nicht bekannten Temperatureinfluß beruhen, aber die Wirkung des Umrührens läßt sich leicht begreifen.

Denken wir uns nämlich die Flüssigkeit in scherende, lamellare Bewegung versetzt, so müssen die Teilchen, auch falls sie gar keine Brownsche Bewegung ausführen würden, mitunter mit ihrer Wirkungssphäre ineinandergreifen und aneinander kleben bleiben. Die Größenordnung dieses Faktors erkennen wir schätzungsweise, wenn wir uns den Mittelpunkt eines Teilchens, samt seiner Wirkungssphäre R, als feststehend vorstellen und berechnen, wieviel fremde Teilchenmittelpunkte im Falle lamellarer Strömung längs der $z = 0$ Ebene in der Zeiteinheit diese Kugel R durchstoßen würden.

Da die Geschwindigkeit im Abstande z gleich ist $z\frac{\partial u}{\partial z}$, wird der gesuchte Ausdruck für den Querschnitt der Kugel R:

$$2\nu\frac{\partial u}{\partial z}\int\int z\,dy\,dz = \frac{4\nu}{3}R^3\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (72)$$

Der relative Einfluß des Strömungsfaktors ist gegeben durch das Verhältnis dieses Ausdrucks zu der infolge der normalen Brownschen Bewegungen sich anlagernden Menge $8\pi\nu DR$, welches beträgt:

$$\frac{1}{6\pi}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{R^3}{D} = \frac{N}{HT}\mu a R^2\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (73)$$

1) Allerdings könnte auch R von der Elektrolytkonzentration abhängen. Formell ist das aber mit einer Änderung des ε gleichwertig.

Die koagulierende Wirkung des Umrührens wächst also ganz außerordentlich mit der Teilchengröße; wird $R = 2a$ angenommen, so würde z. B. bei einem Teilchenradius $a = 10\,\mu\mu$ ein Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ nur eine Vermehrung der Koagulationsgeschwindigkeit um den Bruchteil 10^{-6} bewirken, während dieselbe bei einem Teilchenradius $a = 1\,\mu$ dadurch auf das Doppelte des Normalwertes gesteigert würde. Kurz gesagt: energisches Umrühren bewirkt rasche Koagulation der mikroskopischen Teilchen, läßt aber Submikronen und Amikronen unbeeinflußt.

Somit könnte man annehmen, daß in Paines Versuchen alle Teilchen abgeschieden wurden, welche aus mehr als k-Primärteilchen bestanden (wo k eine große Zahl ist), während der Rest, bestehend aus

$$L = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 \ldots (k-1)\,\nu_{k-1}$$

Primärteilchen, in Lösung blieb. Werden hierin unsere Formeln (70) eingesetzt, so ergibt sich für die nicht koagulierte Menge, bei Benutzung der Abkürzung $\varepsilon\beta t = \alpha$, der Ausdruck:

$$L = 1 + \frac{(k+\alpha)^{k-1}}{(1+\alpha)^k},$$

welcher für große k gleichwertig ist mit:

$$L = 1 + \left[1 + \frac{1}{x}\right] e^{-\frac{1}{x}} \qquad (74)$$

wo x zur Abkürzung für die zur Zeit proportionale Größe

$$x = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{\varepsilon\beta t}{\nu}$$

eingeführt ist.

Zeichnen wir uns diese Koagulationskurve auf, so überzeugen wir uns, daß sie tatsächlich ganz überraschend ähnlich mit den von Paine erhaltenen empirischen Kurven verläuft. Insbesondere muß eine gewisse Zeit, die „Inkubationszeit", verstreichen, bevor sich die Teilchen soweit vergrößern, daß überhaupt ein merklicher Niederschlag erhalten wird, dann tritt bei dem Werte $x = \frac{1}{3}$, $L = 0{,}801$ ein Wendepunkt auf, und von da an verläuft die Kurve konvex nach abwärts, um sich asymptotisch der Zeitachse anzuschmiegen. Der Unterschied besteht nur darin, daß der Übergang von der Inkubationszeit in die Koagulationskurve hier etwas allmählicher erfolgt als in Paines Kurven und die scharfe unnatürliche Ecke derselben vermeidet.

Wenn man diese wenigen bisher zu Gebote stehenden Kontrollversuche überblickt, gewinnt man wohl den Eindruck, daß die in Rede stehende Verallgemeinerung unserer, den Koagulationsmechanismus auf Brownsche Bewegungen zurückführenden Theorie dem Wesen der Sache entspricht, und man kann wohl hoffen, daß dieselbe sich als Wegweiser bei weitergehenden Untersuchungen auf diesem bisher der Mathematik ganz unzugänglichen Gebiete nützlich erweisen dürfte.

(Eingegangen 13. September 1916.)

BESPRECHUNGEN.

A. Ångström, A study of the radiation of the atmosphere based upon observations of the nocturnal radiation during expeditions to Algeria and to California. gr. 8°. VI u. 159 S., m. 42 Abbildungen im Text. Washington, Smithsonian Institution 1915, Smithsonian Miscellaneous Collections Bd. 65, No 3.

Im Zusammenhang mit den Forschungen der Smithsonian Institution hat Ångström zwei Reisen unternommen, im Sommer 1912 nach Bassour in Algier und im Sommer 1913 nach Kalifornien, um die Strahlung der Erdatmosphäre zu untersuchen. Als effektive Strahlung eines — an einer bestimmten Stelle der Atmosphäre befindlichen — schwarzen Körpers definiert er den Überschuß der von seiner Oberfläche ausgehenden Gesamtstrahlung über die von außen in ihn eindringende Strahlung. Sieht er also von der auf jeden Fall äußerst geringfügigen „siderischen" Strahlung ab, so gibt ihm die Differenz aus der Strahlung des schwarzen Körpers und der gemessenen Effektivstrahlung unmittelbar die Strahlung der Atmosphäre an dieser Stelle. Um die Fehler zu vermeiden, die durch Wärmeleitung und Konvektion entstehen können, bedient er sich einer Nullmethode, mißt bei konstanter Temperatur. Sein schwarzer Körper ist ein mit Platinruß geschwärzter Manganinstreifen, dem die durch Ausstrahlung entzogene Wärmemenge durch einen gemessenen elektrischen Strom stets wieder zugeführt wird. Die Messungen führen ihn zu dem Schluß, daß die Temperaturstrahlung der Atmosphäre wesentlich von deren Feuchtigkeitsgehalt beeinflußt wird und in exponentieller Form mit diesem zunimmt. Bei konstanter Feuchtigkeit folgt sie nahezu dem Gesetz von Stefan und Boltzmann für die Strahlung schwarzer Körper. Aus den als bekannt angenommenen Beziehungen zwischen Höhe über dem Meeresspiegel, Temperatur, Feuchtigkeit leitet der Verfasser einen Zusammenhang ab zwischen Strahlung und Höhe, wonach jene zwischen 3000 und 4000 m ein Maximum besitzen muß. Die Messungen, die in verschiedenen Höhen eines kalifornischen Berggeländes gleichzeitig angestellt wurden, bestätigen diese Aussage. In den höheren Luftschichten beträgt bei Trockenheit die Strahlung nur noch etwa 50 Proz. derjenigen des schwarzen Körpers. Sie wird hier wesentlich mitbestimmt durch den Gehalt an Kohlensäure und Ozon. Schließlich wird noch der Einfluß von nebligem und von mehr oder minder stark bewölktem Himmel untersucht und ferner durch einige bei Tage ausgeführte Messungen festgestellt, daß zerstreutes Himmelslicht die für die nächtliche Strahlung gültigen Gesetze nicht zu verändern scheint. Was endlich die von großen Wasserflächen ausgehende Strahlung anlangt, so scheint sie bei verschiedenen Temperaturen, also auch unter verschiedenen Breitengraden konstant zu sein.

Im Anhang werden noch Messungen von hauptsächlich meteorologischem Inhalt aufgeführt, die von Angström und den Mitgliedern des Instituts unternommen worden sind. Als wichtigstes Resultat wird hieraus ein Wert für die Solarkonstante abgeleitet; er beträgt $1{,}931 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{min}}$.

Der Verfasser bietet uns, wie er selbst sagt, kein abgeschlossenes Ganzes dar in dem Sinne, daß er nur vollständig aufgeklärte und sicher gestellte Gesetze anführt. So weist er z. B. darauf hin, daß die Messungen bei Tage noch durchaus einer Vervollkommnung und Verfeinerung bedürfen. Ferner besitzt Ozon gerade im Gebiete der hauptsächlich in Betracht kommenden Wärmestrahlung eine starke Absorption, und da die Luft im Winter viel reicher an Ozon zu sein pflegt als im Sommer, so nimmt er an, daß er eine viel geringere Effektivstrahlung seines schwarzen Körpers finden würde, wenn er seine Messungen nicht im Sommer, sondern im Winter angestellt hätte. Aber auch so bietet das Buch viel des Wissens- und Beachtenswerten in meteorologisch-klimatologischer Hinsicht. Dem Physiker aber vor allen Dingen bringt es einen nicht unwichtigen Beitrag zur Strahlungstheorie, so namentlich eine wertvolle Ergänzung zu den Untersuchungen der Rubensschen Schule auf dem Gebiete der langwelligen Strahlung.

V. Pieck.

W. Hort, Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der für die Ingenieurwissenschaften wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie der zu ihrer Lösung dienenden genauen und angenäherten Verfahren einschließlich der mechanischen und graphischen Hilfsmittel. 8°. IX u. 540 S. mit 255 Fig. Berlin, Julius Springer. 1914. Geb. in Leinw. M. 14.—

Die für die Anwendungen des Ingenieurs grundlegenden Abschnitte der Theorie gewöhnlicher und namentlich partieller Differentialgleichungen werden bislang in der dem Unterricht an den Technischen Hochschulen gewidmeten Literatur zum Teil nicht genügend berücksichtigt. Die eigentliche Fachliteratur bietet anderseits nicht selten zu viel, oder in einer für die Zwecke eines Anregung und Belehrung suchenden Ingenieurs ungeeigneten Auswahl und setzt meist ein beträchtliches Maß von Vorkenntnissen voraus.

Der Verfasser unternimmt es, von den elementaren Begriffen ausgehend, die wichtigsten in den technischen Theorien vorkommenden gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen an Hand einer großen Zahl von Beispielen systematisch zu behandeln.

Das Werk gliedert sich in zwei Teile. In dem ersten Kapitel des ersten Teiles werden unter ausgiebiger Verwendung geometrischer Darstellungen der Begriff des Integrals und des Differentialquotienten eingeführt und eine Reihe von Hauptergebnissen der Differential- und Integralrechnung, sowie mechanische Integrationsverfahren besprochen. In den drei folgenden Kapiteln werden gewöhnliche Differentialgleichungen erster, zweiter und höherer Ordnung, sowie simultane Differentialgleichungen behandelt. Außer den üblichen Integrationsmethoden in geschlossener Form kommt hier die Integration linearer Differentialgleichungen durch unendliche Reihen in der Umgebung einer regulären singulären Stelle, auch wenn mit Logarithmen behaftete Glieder auftreten, zur Sprache. Ein Konvergenzbeweis wird nicht gegeben, würde wohl auch nicht im Programm des Werkes liegen. In dem dritten Kapitel ist eine Darstellung der Rungeschen Methoden zur angenäherten Integration hervorzuheben. Das fünfte Kapitel bringt der Vollständigkeit halber einige Bemerkungen über Differenzengleichungen. Der zweite Teil beschäftigt sich in der Hauptsache mit ausgewählten Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über partielle Differentialquotienten und partielle Differentialgleichungen wird zunächst im zweiten Kapitel eine Auswahl der in der Physik und der Technik vorkommenden Differentialgleichungen besprochen (schwingende Saite, Schiffsschwingungen, Schwingungen einer Membran, Wärmeleitung usw.). Das dritte Kapitel gibt eine Behandlung der Potentialtheorie, die drei folgenden Kapitel — der Gleichungen der Elastizitätstheorie, Hydro- und Elektrodynamik. Unter anderem finden wir hier das bekannte von Ritz herrührende (vom Verfasser mit Unrecht als das Ritz-Lorenzsche bezeichnete) Verfahren, die Lorenzsche Turbinentheorie und Ausgleichsvorgänge auf gestreckten Leitungen kurz besprochen.

Das Werk des Herrn Hort dürfte dem mathematisch veranlagten Ingenieur manche Anregung bieten und ihn zum vertieften Studium veranlassen. Bei der Fülle des Stoffes hat der Verfasser wohl nicht beabsichtigt, mit völliger mathematischen Strenge vorzugehen. Einzelne dahin gehende Versuche sind nicht immer glücklich ausgefallen (so werden z. B. algebraische Funktionen als diejenigen erklärt, die durch Ausführung einer endlichen Anzahl der vier elementaren Rechenoperationen, sowie Wurzelziehungen gewonnen werden). Doch wird hierdurch der vorhin gekennzeichnete spezifische Wert des Werkes nicht berührt.

L. Lichtenstein.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 24. 15. Dezember 1916. Redaktionsschluß für No. 1 am 16. Dezember 1916. 17. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Schallfelder und Schallantennen.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Bezeichnungen:

ξ = Momentanwert des Ausschlages.
A = Maximalwert des Ausschlages.
i = Momentanwert der Geschwindigkeit.
I = Maximalwert der Geschwindigkeit.
P = Momentanwert des Druckes.
V = Maximalwert des Druckes.
V_0 u. P_0 = zusammengeh. Werte von Volumen und Druck.
V = Maximalwert der Volumenänderung.
ϱ = Dichte.
C = Kompressibilitätsfaktor.
$\varkappa$ = Verhältnis der spezifischen Wärmen.
a = Fortpflanzungsgeschwindigkeit.
n = Sekunden-Frequenz.
λ = Wellenlänge.
φ = Phasenwinkel zwischen Druck und Geschwindigkeit.
r = Entfernung von der Schallquelle.
L = Schallintensität pro Flächeneinheit.
L_R = Schallintensität für die Kugeloberfläche.
M = Mitschwingende Masse pro Flächeneinheit.
M_R = Mitschwingende Masse für die Kugeloberfläche.
δ = Dämpfungsfaktor.
$\mathfrak{d}$ = Dämpfung.
w = elektrischer Widerstand.
Π = elektrische Selbstinduktion.
e = elektrische Spannung.
j = elektrischer Strom.
Φ = Geschwindigkeitspotential.
E = Elastizitätskoeffizient.

Bei dem Bau akustischer Apparate sind wir durch die Theorie zu Beziehungen geführt worden, die sehr weitgehende Analogien in der Elektrizität finden und erst durch den Vergleich mit den elektrischen Erscheinungen uns ihre praktische Bedeutung für die Akustik erkennen ließen.

Wir lehnen uns in den folgenden mathematischen Ableitungen sehr eng an die Theorie des Schalles von Rayleigh[1]) an und wollen im ersten Kapitel einige seiner streng abgeleiteten Resultate der Ausbreitung ebener Wellen elementar und leicht verständlich darstellen und durch neue Beziehungen erweitern. Alsdann soll im zweiten Kapitel die exakte Rayleighsche Theorie der Kugelwellen auf die nächste Umgebung der Schallquelle angewendet werden, wobei sich sehr weitgehende Analogien mit elektrischen Beziehungen und Erscheinungen zeigen werden. Im dritten Kapitel sollen einige praktische Folgerungen gezogen werden, die sich aus der Theorie ergeben, im vierten findet sich eine Zusammenfassung der Hauptergebnisse.

I. Die ebene akustische Welle.

Unter einer ebenen Welle versteht man eine solche Energieströmung in Richtung der Wellennormale, bei der der Querschnitt, durch den die Energie wandert, konstant bleibt, und unter Intensität dieser Welle die Energie, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Querschnitts tritt. Abgesehen von Verlusten, zum Beispiel durch Reibung, findet also keine Abnahme der Intensität mit der Entfernung statt.

Betrachtet man in dem betreffenden Medium einen Zylinder, dessen Grundflächen gleich der Flächeneinheit sind und auf dem Schallstrahl senkrecht stehen und dessen Höhe gleich der Strecke ist, die die Welle in der Zeiteinheit durchläuft, so sieht man, daß die oben definierte Intensität der Welle gleich dem konstanten Be-

1) Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsche Ausgabe von Neesen. Braunschweig 1880.



trag an Schwingungsenergie ist, die in diesem Zylinder enthalten ist, nachdem er in seiner ganzen Ausdehnung von der Wellenbewegung ergriffen ist. Dieser Energieinhalt läßt sich aber berechnen. Hierzu braucht man sich nur vorzustellen, daß dieser Zylinder teils mit kinetischer, teils mit potentieller Energie angefüllt ist und daß diese Beträge gleich groß sein müssen[1]).

Um diesen Energieinhalt zu berechnen, kann man sich den Zylinder also nur mit kinetischer oder nur mit potentieller Energie angefüllt denken[2]). Man kann mit Rayleigh (l. c. II, S. 23) sagen: „Die totale Energie der Wellen ist gleich der kinetischen Energie der ganzen von der Welle ergriffenen Luft, wenn dieselbe sich mit dem Maximum der in den Wellen auftretenden Geschwindigkeiten fortbewegt, oder gleich der potentiellen Energie derselben Luftmasse, wenn dieselbe auf die größte Dichtigkeit bei den Wellen verdichtet wird."

Bezeichnet man mit ϱ die Dichte und mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Medium und mit I die Maximalgeschwindigkeit des Teilchens, so ergibt sich die Intensität einer ebenen akustischen Welle in kinetischer Form zu

$$L = \frac{\varrho a I^2}{2},$$

da a das Volumen und ϱa die Masse des betrachteten Zylinders sind.

Will man statt der Maximalgeschwindigkeit I des Teilchens seinen Maximalausschlag A einführen, so hat man nur zu beachten, daß für jede einfachperiodische Funktion

$$I = 2\pi n A$$

ist, und findet

$$L = \frac{\varrho a}{2}(2\pi n A)^2.$$

Um den Ausdruck für die Intensität in potentieller Form zu finden, denke man sich den der Betrachtung zugrunde liegenden Zylinder mit starren Wänden umgeben und durch einen beweglichen Kolben verschlossen, der das Medium innerhalb des Zylinders so komprimieren soll, daß der Überdruck gleich der Maximaldruckamplitude P der Welle wird. Hierbei findet eine Volumenänderung des Mediums im Zylinder um V statt, so daß der Kolbenweg, da sein Querschnitt zu 1 angenommen ist, selbst gleich V wird. Die mittlere Kraft, die der Kolben auf diesem Wege zu überwinden hat, ist $\frac{P}{2}$, mithin seine Arbeit, die gleich der Intensität der Welle sein muß,

$$L = \frac{1}{2} P \cdot V$$

Es ist nun nötig V durch P zu ersetzen; hierbei ist zu unterscheiden, ob es sich um Gase oder Flüssigkeiten handelt. Wir leiten zunächst den Ausdruck für Gase ab.

Da der Schwingungsvorgang adiabatisch verläuft, gilt die Beziehung:

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^\varkappa = \frac{P}{P_0},$$

wo $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und V_0 bzw. P_0 die Normalwerte von Volumen bzw. Druck sind. Solange P klein gegen P_0 ist, kann man hierfür schreiben:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{\varkappa}\frac{P}{P_0}.$$

Ersetzt man nun noch V_0 durch das Zylindervolumen a, so findet man für die Intensität der Welle

$$L = \frac{a}{2\varkappa}\frac{P^2}{P_0}.$$

Durch Benutzung der Beziehung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen

$$a = \sqrt{\frac{P_0}{\varrho}\varkappa}$$

kann man dem Ausdruck für L die beiden Formen geben:

$$L = \frac{\varrho a^3}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \qquad (1)$$

$$\text{und } L = \frac{P^2}{2\varrho a}.$$

Bei der Ableitung der Intensität in potentieller Form für Flüssigkeiten hat man die Beziehung

$$\frac{V}{V_0} = C \cdot P$$

zu benutzen, wo C den Kompressibilitätsmodul bedeutet, und findet

$$L = \frac{a \cdot C}{2} P^2.$$

1) Dies gilt streng, solange der Zylinder eine ganze Anzahl von halben Wellenlängen lang ist, und mit hinreichender Genauigkeit, wenn der Überschuß an Wellenlängen-Bruchteilen klein gegen die Anzahl der halben Wellenlängen selbst ist. Schon bei einer Frequenz $n=100$, das heißt, wenn die Länge des Zylinders 100 Wellenlängen beträgt, kann das Verhältnis beider Energien höchstens $\frac{100\lambda + 1/4\lambda}{100\lambda} = 1{,}0025$ sein. Mit steigender Frequenz wird c. p. dies Verhältnis immer mehr gleich 1.

2) Diese Betrachtung ist von den Vorgängen in einer stehenden Welle her übernommen, wo eine dauernde örtliche Trennung von kinetischer und potentieller Energie vorhanden ist.

1) Dieser Ausdruck ist bereits von Wien, Wied. Ann. 36, 1889 abgeleitet und zu seinen Messungen der Schallintensität benutzt worden.

Unter Benutzung der Beziehung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

$$a = \sqrt{\frac{1}{\varrho \cdot C}}$$

kann man dem Ausdruck für L die beiden Formen geben:

$$L = \frac{\varrho a^3}{2} \left(\frac{P}{\frac{1}{C}} \right)^2$$

$$\text{und } L = \frac{P^2}{2 \varrho a},$$

von denen der zweite identisch mit dem für Gase abgeleiteten Werte ist.

Man kann also gültig für kompressible und inkompressible Medien die Intensität einer Welle ausdrücken durch die Maximalwerte des Ausschlags, der Geschwindigkeit und des Druckes, und zwar:

$$L = \frac{\varrho a}{2} (2 \pi n A)^2$$

$$L = \frac{\varrho a}{2} I^2$$

$$L = \frac{P^2}{2 \varrho a}. \tag{1}$$

Durch Kombination der beiden Ausdrücke, die die Geschwindigkeit und den Druck enthalten, findet man für die Intensität

$$L = \frac{1}{2} I \cdot P,$$

ein Ausdruck, der sein elektrisches Analogon in der Leistung eines Wechselstroms mit den Maximalwerten I und P für Strom und Spannung bei Phasengleichheit findet.

Aus denselben beiden Ausdrücken findet man auch die Beziehung

$$P = a \varrho I$$

oder, indem man statt der Geschwindigkeit den Ausschlag setzt,

$$\frac{P}{A} = a \varrho 2 \pi n.$$

Die Größe $a \varrho 2 \pi n$ ist charakteristisch für die verschiedenen Medien; wir haben sie die „Schallhärte" des Mediums für die Frequenz n genannt[2]).

1) Die Dimension aller drei Ausdrücke ist die einer Leistung pro Flächeneinheit, d. h. $[MT^{-3}]$.

2) Der Wert $a \varrho$ spielt bei dem Vorgang der Reflexion und Brechung eine bestimmende Rolle. Rayleigh (l. c. II, S. 98) hat statt Schallhärte die Ausdrücke „dünner" und „dichter" aus der Optik übernommen. Da wir die Medien und Schwingungskörper bei gleichzeitig variabler Frequenz betrachten, erschien uns „Schallhärte" eine bessere Bezeichnung.

II. Die Kugelwelle.

Die Ableitung der Ausdrücke für die Intensität der Kugelwellen und des Vorganges in nächster Umgebung der Schallquelle ist elementar nicht mehr durchführbar. Wir benutzen daher soweit als notwendig die exakte von Rayleigh gegebene Theorie und wollen durch Einführung neuer, aus der Elektrizität geläufiger Begriffe das Verständnis des Vorganges in der Nähe der Schallquelle selbst erleichtern.

Wir betrachten eine kugelförmige Schallquelle, deren Oberfläche in allen Punkten konphase Bewegungen gleicher Amplitude ausführt. Eine solche Kugel ist nach Rayleigh ein Strahler nullter Ordnung[1]). Wenn diese Kugel Energie nur in den Außenraum strahlt, so ist das Geschwindigkeitspotential Φ der divergierenden Kugelwelle im Abstande r von der Schallquelle nach Rayleigh (l. c. II, S. 128)

$$\Phi = -\frac{Q}{4 \pi r} \cos 2 \pi n \left(t - \frac{r}{a} \right),$$

worin das Rayleighsche A durch Q ersetzt ist und den Maximalwert der Volumenänderung der schwingenden Kugel bedeutet, während das Rayleighsche $\varkappa = \frac{n}{a}$ durch $\frac{2 \pi n}{a}$ ersetzt ist und n jetzt die Frequenz in der Zeiteinheit ist.

Aus dem Geschwindigkeitspotential findet man den Druck und die Geschwindigkeit des Mediums an der betrachteten Stelle zu:

$$p = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$i = \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Führt man diese Differentiationen aus, so ergibt sich:

$$p = -\frac{\varrho n Q}{2 r} \sin 2 \pi n \left(t - \frac{r}{a} \right)$$

$$i = \frac{Q}{4 \pi r} \left[-\frac{2 \pi n}{a} \sin 2 \pi n \left(t - \frac{r}{a} \right) + \frac{1}{r} \cos 2 \pi n \left(t - \frac{r}{a} \right) \right].$$

Die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit wird sehr viel übersichtlicher, wenn man setzt

$$\frac{2 \pi n}{a} = K \cos \varphi$$

$$\frac{1}{r} = K \sin \varphi$$

1) Die Höhe der Ordnung (der Kugelfunktionen) wird bestimmt durch die Anzahl der Knotenlinien; ein Strahler nullter Ordnung hat keine Knotenlinie, ein solcher erster Ordnung eine und so weiter.

oder $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2\pi n r} = \frac{\lambda}{2\pi r}$

$$K = +\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 + \frac{1}{r^2}} = +\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}},$$

wobei $\lambda = \frac{a}{n}$ die Wellenlänge ist.

Bezeichnen P und I wieder die Maximalwerte von Druck und Geschwindigkeit, so wird:

$$p = -P \sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

und $i = -I \sin\left(2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) - \varphi\right)$,

wobei

$$P = \frac{\varrho n Q}{2r}$$

$$I = \frac{Q}{4\pi r}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}$$

ist. Wie man sieht, besteht zwischen Druckmaximum und Geschwindigkeitsmaximum ein Phasenunterschied, und zwar eilt der Druck der Geschwindigkeit voraus.

Um die Intensität der Welle zu finden, hat man, wenn ξ die Verschiebung des Teilchens bezeichnet, zu bilden

$$L = n\int_{t=\frac{r}{a}}^{t=\frac{r}{a}+\frac{1}{n}} p\,d\xi = n\int p\frac{d\xi}{dt}dt = n\int p\,i\,dt\,.$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$L = \frac{1}{2} I \cdot P \cdot \cos\varphi,$$

ein Ausdruck, der den Wert für die ebene Welle als Spezialfall für $\cos\varphi = 1$ enthält und wieder sein volles Analogon in der Leistung eines Wechselstroms mit den Maximalwerten I und P für Strom und Spannung und der Phasenverschiebung φ zwischen beiden findet.

Zur Aufstellung der akustischen Druckgleichung — der eigentlichen Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit — kommt man auf folgendem Wege[1]):

Man differenziere den Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$i = \frac{Q}{4\pi r}\left[-\frac{2\pi n}{a}\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r}\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]$$

nochmals nach t und erhält:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi r}\left[-\frac{(2\pi n)^2}{a}\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{2\pi n}{r}\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right].$$

Bildet man jetzt den Ausdruck:

$$ir + \frac{a}{(2\pi n)^2}\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{Q}{4\pi r}\left(\frac{2\pi n r}{a} + \frac{a}{2\pi n r}\right)\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

so kann man auf der rechten Seite den Druck p einführen und erhält:

$$ir + \frac{a}{(2\pi n)^2}\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{p}{2\pi n \varrho}\left(\frac{2\pi n r}{a} + \frac{a}{2\pi n r}\right)$$

oder nach einiger Umformung:

$$\frac{a\varrho}{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2}i + \frac{\varrho r}{1 + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2}\frac{\partial i}{\partial t} = p.$$

In dieser Gestalt erkennt man schon die vollkommene Analogie mit der bekannten elektrischen Spannungsgleichung

$$wj + \Pi\frac{dj}{dt} = e,$$

worin e, j, w und Π Spannung, Strom, Widerstand und Selbstinduktion bedeuten.

Wir können die akustische Druckgleichung nun noch weiter vereinfachen und übersichtlicher gestalten durch Benutzung der Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

und erhalten schließlich die Form:

$$a\varrho\cos^2\varphi\, i + a\varrho\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{2\pi n}\frac{\partial i}{\partial t} = p.$$

Wie wir bereits oben sahen, ist die Intensität

$$L = n\int_0^{\frac{1}{n}} p \cdot i \cdot dt$$

$$L = n\int_0^{\frac{1}{n}} a\varrho\cos^2\varphi\, i^2 dt + n\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{a\varrho\cos\varphi\sin\varphi}{2\pi n}\, i\frac{\partial i}{\partial t}dt.$$

Führt man diese beiden Integrationen aus, so findet man, daß das erste Integral den Wert hat

$$\frac{a\varrho}{2}\cos^2\varphi\, I^2,$$

während das zweite verschwindet, so daß

$$L = \frac{a\varrho}{2}\cos^2\varphi\, I^2$$

1) Wir verdanken den Vorschlag zu dieser mathematischen Behandlung Herrn Runge in Göttingen.

ist. Durch Vergleich mit dem früher für L abgeleiteten Werte:

$$L = \frac{1}{2} I \cdot P \cdot \cos\varphi$$

ergibt sich die Beziehung zwischen Druckmaximum und Geschwindigkeitsmaximum zu

$$P = a\varrho \cos\varphi\, I,$$

worin die Gleichung für die ebene Welle als Spezialfall für $\cos\varphi = 1$ enthalten ist. Vergleicht man hiermit das erweiterte Ohmsche Gesetz der Elektrizität

$$j = \frac{e}{\sqrt{w^2 + (2\pi n \Pi)^2}}$$

oder auch unter Benutzung des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung etwas anders geschrieben

$$e = \frac{jw}{\cos\varphi},$$

so erkennt man unschwer die weitgehende Übereinstimmung mit der soeben abgeleiteten akustischen Beziehung. Man könnte diese Beziehung das Ohmsche Gesetz der Akustik nennen und $a\varrho\cos^2\varphi$ den akustischen Widerstand. Aus der Druckgleichung ersieht man weiter, daß sich der Druck ähnlich wie die elektrische Spannung aus zwei Teilen zusammensetzt: einem Wattdruck $P_w = a\varrho\cos^2\varphi I$ und einem wattlosen Druck $P_l = a\varrho\cos\varphi\sin\varphi I$ und daß

$$P_w = P\cos\varphi$$
$$P_l = P\sin\varphi$$

ist. Des weiteren erkennt man aus der Gleichung, daß der wattlose Druck seine Entstehung einer mitschwingenden Masse verdankt, ähnlich wie die wattlose Spannung durch eine Selbstinduktion hervorgerufen wird. Diese mitschwingende Mediummasse ist:

$$M = \frac{a\varrho\cos\varphi\sin\varphi}{2\pi n}$$

oder auch $\quad M = r\varrho\sin^2\varphi$

da man ja nur zu beachten hat, daß

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ ist.}$$

Aus dem Gesagten folgt also, daß eine divergente Ausbreitung des Schalles in der Akustik wie ein Widerstand mit Selbstinduktion in der Elektrizität wirkt: sie bedingt ein Nacheilen der Geschwindigkeit hinter dem Druck, gibt zu einer mitschwingenden Masse Veranlassung und befolgt ein dem Ohmschen entsprechendes akustisches Gesetz, aus dem sich Leistung, Wattdruck usw. ähnlich berechnen lassen.

Die gesamte von einer Kugel vom Radius R ausgestrahlte Leistung und die mit ihr mitschwingende Mediummasse findet man durch Multiplikation der für die Flächeneinheit geltenden Ausdrücke für L und M mit $4\pi R^2$ zu

$$L_R = 4\pi R^2 a\varrho\cos^2\varphi \frac{I^2}{2}$$

$$M_R = 4\pi R^3 \varrho \sin^2\varphi.$$

Denkt man sich die Kugel selbst masselos und von einer solchen Elastizität, daß sie der mitschwingenden Mediummasse die Abstimmung n erteilt, so kann man die Dämpfung dieses Strahlungsgebildes berechnen.

Da die Dämpfung gleich der Hälfte des Verhältnisses der pro Schwingung verbrauchten Energie zur leerschwingenden Energie ist[1]), so ist die Dämpfung unseres Strahlers

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2} \frac{\frac{L_R}{n}}{\frac{1}{2} M_R I^2}$$

oder nach Einsetzung der Werte

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

In dieser Gleichung finden wir abermals eine Bestätigung der oben genannten Übereinstimmung mit elektrischen Größen und Beziehungen: sie stellt — elektrisch gesprochen — die Dämpfung einer Selbstinduktion mit Widerstand dar.

Wie wir aus der elektrischen Spannungsgleichung aber ohne weiteres den Dämpfungsfaktor ablesen

$$\partial = \frac{w}{2\Pi}$$

und die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = \frac{\partial}{n} = \frac{w}{2n\Pi} = \frac{\pi}{\mathrm{tg}\,\varphi},$$

so hätten wir auch, ohne die Strahlungsenergie und die leerschwingende Energie selbst ausrechnen zu müssen, aus der akustischen Druckgleichung direkt die Dämpfung hinschreiben können

$$\mathfrak{d} = \frac{a\varrho\cos^2\varphi}{2 \cdot n \frac{a\varrho\cos\varphi\sin\varphi}{2\pi n}} = \frac{\pi}{\mathrm{tg}\,\varphi}$$

Es läßt sich nun ohne weitere Rechnung vermuten, daß eine konvergente Ausbreitung des Schalles in der Akustik ihr elektrisches Ana-

1) Die Dämpfung ist $\mathfrak{d} = \lg \frac{A_n + 1}{A_n}$ oder, solange $A_n + 1 - A_n = \Delta A$ klein gegen A_n selbst ist, $\mathfrak{d} = \frac{\Delta A}{A}$. Da nun die Energie proportional dem Quadrat der Ausschlagsamplitude, d. h. $\mathfrak{E} \sim A^2$ ist, so ist $\Delta\mathfrak{E} \sim 2A\Delta A$ oder $\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}}$.

logon in einer Kapazität findet; und dies ist in der Tat auch so. Im Geschwindigkeitspotential vertauscht sich $+\alpha$ mit $-\alpha$, und die akutische Druckgleichung lautet:

$$\alpha\varrho\cos^2\varphi\, i + \alpha\varrho\cos\varphi\sin\varphi\, 2\pi n\int i\,dt = p^{1)}\cdot$$

Hieraus sieht man, daß eine Konvergenz ähnlich wie eine Kapazität in der Elektrizität ein Vorauseilen der Geschwindigkeit vor dem Druck bewirkt und zur Entstehung einer elastischen Kraft Veranlassung gibt.

Berücksichtigt man, daß

$$2\pi n\int i\,dt = -\frac{1}{2\pi n}\frac{\partial i}{\partial t}$$

ist, so zeigt der Vergleich der beiden Druckgleichungen, daß eine in den mathematischen Gleichungen negativ auftretende Masse als elastische Kraft physikalisch gedeutet werden muß und umgekehrt.

Als Grenzfall der divergenten oder konvergenten Ausbreitung kann man die ebene Welle als einen Vorgang ähnlich dem des elektrischen Stromes in einem reinen (Ohmschen) Widerstand ansprechen und findet in den für die Leistung und die Druckgleichung abgeleiteten Beziehungen eine Bestätigung hierfür.

III. Anwendungen und Beispiele.

Die vorstehenden Ableitungen gestatten zahlreiche Anwendungen auf die praktische Akustik; wir wollen zwei Gebiete eingehender behandeln.

1. Die Schallhärte.

Es sei die Aufgabe gestellt, zwei Schallquellen verschiedener Frequenz nach ihrer Lautstärke, das heißt ihrer ausgestrahlten Energie zu vergleichen.

Die Meßeinrichtung bestehe aus einer Membran, deren Eigenfrequenz so hoch über der höchsten der beiden Schallquellen ist, daß man sie in dem zu untersuchenden Frequenzbereich mit konstanter Empfindlichkeit benutzen kann[2]). Im allgemeinen benutzt man hierzu dünne Metallmembranen, deren Amplituden optisch, magnet-elektrisch oder desgleichen gemessen werden.

Will man aus der Größe der Membranamplitude auf die Schallintensität im Medium schließen, so muß man sich zunächst versichern, ob man durch die Membranamplitude die Druck- oder die Bewegungsamplitude des Mediums mißt. Denn würde man mit einem Druckempfänger bei einfacher und doppelter Frequenz die gleiche Membranamplitude finden, so müßte man nach den Ergebnissen des ersten Kapitels auf gleiche Schall-Lautstärke schließen, während man im Falle eines Bewegungsempfängers bei Verdopplung der Frequenz und gleich bleibender Membranamplitude eine vierfache Lautstärke berechnen würde. Man muß also einen Anhalt dafür zu gewinnen suchen, wann ein Druck- und wann ein Bewegungsempfänger vorliegt. Es soll aber gleich jetzt bemerkt werden, daß diese beiden Grenzfälle natürlich nur mit mehr oder weniger Annäherung erreicht werden können, da sowohl reine Druck- wie reine Bewegungsempfänger keine Energie aus dem Medium aufzunehmen gestatten, sondern völlige Reflektoren sein müßten.

Am Schlusse des ersten Kapitels ergab sich für die Schallhärte des Mediums bei der Frequenz n das Verhältnis von Druckmaximum zu Bewegungsmaximum zu

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Medium}} = \alpha\varrho\, 2\pi n\,.$$

Vergleicht man hiermit die von der Frequenz außerhalb der Abstimmung unabhängige Härte einer am Rande fest eingespannten und durch Flüssigkeitsdruck gleichmäßig belasteten Membran, so findet man[1]):

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Membran}} = \frac{5\,E\,d^3}{R^4}\,,$$

und zwar P in kg/cm² und A in cm, wenn E der Elastizitätskoeffizient in kg/cm², d die Dicke und R der Radius in cm ist, während 5 einen empirischen Zahlenfaktor darstellt, der von der Art der Einspannung und so weiter abhängt. Durch eine einfache Betrachtung, die am vorteilhaftesten vom Zustande gleicher Härte der Membran und des Mediums ausgeht, in welchem Falle die Membran gewissermaßen als Teil des Mediums selbst schwingt, findet man, daß schallhärtere Membranen allmählich zu Druckempfängern und schallweichere Membranen zu Bewegungsempfängern übergehen. Denn im ersteren Falle muß allmählich die Bewegung des Mediums aufhören, während der Druck keine nennenswerte Änderung erleidet, und im zweiten Falle kann an der schließlich völlig nachgiebigen Membran keine Druckschwankung mehr auftreten, und der ganze Vorgang löst sich in reine Bewegung auf.

Ein zweiter vorkommender Fall ist der, daß man eine Meßeinrichtung in einem Medium

1) Es ist für den Ausschlag $\int i\,dt$ statt ξ geschrieben, um die Übereinstimmung mit der elektrischen Gleichung deutlicher hervortreten zu lassen.

2) Der andere Weg, die Eigenfrequenz tiefer zu legen, ist nur unter den allergrößten Vorsichtsmaßregeln möglich, da man natürlich vermeiden muß, mit Obertönen zusammenzutreffen. Gegen diese selbstverständliche Forderung wird aber noch oft verstoßen.

1) Zum Beispiel: Hütte 1911, S. 620.

geeicht hat und in einem andern Medium zu Lautstärken-Messungen benutzen will. Nehmen wir als Beispiel eine Stahlmembran von 0,3 mm Dicke und 40 mm Durchmesser an, so hat diese Membran eine Härte

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Stahlmembran}} = 17 .$$

Die Schallhärten von Luft und Wasser beispielsweise für die Frequenz 500 sind

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Luft}} = 0,12 ,$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Wasser}} = 440 \text{ [1]},$$

wenn P in kg/cm² und A in cm gemessen werden.

Hat man diese Membran in Luft mit einem Ton der Frequenz 500 geeicht und will sie zu Messungen von Tönen der gleichen Frequenz in Wasser benutzen, so hat man zu beachten, daß sie im ersten Fall schallhart, also ein Druckempfänger, im zweiten Fall schallweich, also ein Bewegungsempfänger ist.

Ein weiterer häufig vorkommender Fall ist der, daß in das Schallfeld Körper eingebettet sind, die so wenig wie möglich das Schallfeld beeinflussen sollen. Es soll für die folgenden Betrachtungen angenommen werden, daß diese Körper klein zur Wellenlänge sind. Die Schallwelle geht an den Körpern ohne in Betracht kommende Störungen zu erleiden vorbei, wenn die Körper nicht schallweicher sind als das Medium, das heißt, wenn sie unter dem akustischen Druck des Mediums, in dem sie sich befinden, keine größeren Bewegungsamplituden ausführen als das Medium selbst.

Wir wollen als Beispiel einen Zylinder von der Wandstärke d, dem Durchmesser D, der Höhe H und dem Elastizitätskoeffizienten E betrachten. Um den Fall elementar behandeln zu können, wollen wir annehmen — wir werden sehen, daß dies für die Praxis immer genügt —, daß d klein gegen D ist, und die Grundflächen keinen nennenswerten Beitrag an elastischer Kraft im Vergleich zur Mantelfläche liefern. Dann kommt nur die Tangentialkomponente der Spannung in Betracht, während die Radial- und Axialkomponenten vernachlässigt werden können.

Unter diesen vereinfachenden Annahmen ist für einen inneren oder äußeren Überdruck P die Umfangsänderung $\triangle U$ gegeben durch

$$\triangle U = \frac{U}{2 d \cdot H} \cdot \frac{D \cdot H \cdot P}{E} ,$$

da DHP die Kraft ist, die den Umfang des Zylinders U zu vergrößern bzw. verkleinern strebt; oder wenn wir mit A die Radiusamplitude bezeichnen

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Metallzylinder}} = \frac{4 E d}{D^2} .$$

Soll dieser Zylinder, den wir uns in das Medium Wasser eingebettet denken wollen, den Schallvorgang im Wasser nicht stören, so müssen wir ihn ebenso hart oder härter machen als einen gleich großen Wasserzylinder. Das Volumen dieses Zylinders ist $\frac{\pi D^2 H}{4}$, seine Volumenänderung ausgedrückt durch die Radiusamplitude $\pi D H A$. Ist C der Kompressibilitätskoeffizient des Wassers, so gilt die Beziehung

$$P = \frac{1}{C} \frac{\pi D H A}{\frac{\pi D^2 H}{4}}$$

oder

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{\text{Wasserzylinder}} = \frac{4}{C \cdot D} .$$

Soll nun der Metallzylinder ebenso hart oder härter sein als der Wasserzylinder, so muß die Beziehung erfüllt werden:

$$\frac{4 E d}{D^2} > \frac{4}{C \cdot D}$$

oder

$$\frac{d}{D} \geqq \frac{1}{E \cdot C} .$$

Für einen Eisenzylinder in Wasser ergibt sich mithin die Forderung

$$\frac{d}{D} > \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-7}}$$

$$\frac{d}{D} \geqq \frac{1}{100} ,$$

das heißt, daß die Wandstärke mindestens 1 Proz. des Durchmessers sein muß.

Ähnlich werden sich Näherungswerte für alle praktisch vorkommenden Fälle mit genügender Genauigkeit berechnen lassen, und man wird sich über den Einfluß solcher Körper immer Klarheit verschaffen können. Besondere Bedeutung gewinnt die Rechnung aber dann, wenn diese Körper oder Körperteile an den schallaussendenden oder schallempfangenden Apparaten selbst liegen. Solange man in Luft als Medium arbeitet, ist wohl stets die Bedingung von selbst erfüllt; ganz anders dagegen liegen die Verhältnisse, wenn man es mit Schallvorgängen im Wasser zu tun hat, wie schon ohne weiteres die 3500 mal größere Härte vermuten läßt. Hier muß der Konstrukteur besondere Maßnahmen treffen, um der von der Theorie geforderten Bedingung zu genügen.

1) Wasser ist also etwa 3500 mal schallhärter als Luft.

2. Strahler nullter Ordnung in der angewandten Akustik.

Im zweiten Kapitel, das die Beziehungen gegeben hatte, die den Strahlungskörper nullter Ordnung mit dem Medium verbinden, hatten wir als schallenden Körper uns eine pulsierende Kugel gedacht, die durch eine aufgedrückte periodische Kraft erregt wird. Wir hatten die Ausdrücke für den Phasenwinkel zwischen Druck und Geschwindigkeit, für die mitschwingende Masse und für die Dämpfung abgeleitet.

Wir wollen jetzt einige Zahlenangaben für den Nullstrahler machen.

Die Beziehung zwischen Phasenverschiebung an der Oberfläche des strahlenden Körpers und seiner Größe, gemessen in Wellenlängen, ist durch die Gleichung gegeben

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda}{2\pi R}.$$

Da für den Arbeitsvorgang, die Berechnung des Wattdrucks usw. die Kosinus-Funktion maßgebend ist, so führen wir diese ein und finden

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi R}\right)^2}}.$$

Hieraus berechnet sich folgende Tabelle:

$\frac{R}{\lambda}$	$\cos \varphi$
$\frac{1}{16}$	0,36
$\frac{1}{8}$	0,62
$\frac{1}{4}$	0,85
$\frac{1}{2}$	0,95
1	0,99

Aus dieser Tabelle geht nicht nur hervor, daß man eine Schallquelle, die die Größe einer halben bis einer Wellenlänge hat, bereits in ihrer Nähe als ebene Wellen aussendend betrachten kann, sondern auch, daß man bei Schallquellen, die klein zur Wellenlänge sind, im Abstande einer halben bis einer Wellenlänge wie mit ebenen Wellen rechnen kann; in beiden Fällen sind Druck und Geschwindigkeit praktisch schon gleichphasig, es sind keine nennenswerten leerschwingenden Energien vorhanden.

Des weiteren folgt aus dem Gesagten, daß die gegenseitige Beeinflussung von zwei Schallquellen oder die störende Wirkung von schallweichen Körpern — Schallquellen und Störungskörper immer klein zur Wellenlänge angenommen — im Abstande von etwa einer halben Wellenlänge ab praktisch nicht mehr von Bedeutung ist. Wir haben dies alles durch Experimente wiederholt bestätigen können und beabsichtigen in einer späteren Arbeit darauf zurückzukommen.

Für die mitschwingende Mediummasse hatte sich der Wert ergeben:

$$M = 4\pi R^3 \varrho \sin^2 \varphi,$$

der unter Benutzung der Phasengleichung auch geschrieben werden kann:

$$M = 4\pi R^3 \varrho \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2},$$

Man erkennt hieraus, daß für die praktisch sehr häufigen Fälle, in denen der Strahler klein zur Wellenlänge ist, die mitschwingende Mediummasse unabhängig von der Frequenz, und zwar

$$M_{R<<\lambda} = 4\pi R^3 \varrho,$$

das heißt gleich dem dreifachen Eigenvolumen des Strahlers angefüllt mit Außenmedium, ist.

Für die Dämpfung des einfachen Nullstrahlers hatten wir den Wert gefunden

$$\mathfrak{d} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Führen wir statt des Phasenwinkels die Größe des Strahlers ein, so wird

$$\mathfrak{d} = 2\pi^2 \frac{R}{\lambda}.$$

Hieraus berechnet sich folgende Tabelle:

$\frac{R}{\lambda}$	$\mathfrak{d}$
$\frac{1}{10}$	2
$\frac{1}{20}$	1
$\frac{1}{100}$	0,2
$\frac{1}{200}$	0,1
$\frac{1}{1000}$	0,02

Aus der Dämpfungsformel erkennt man, daß für einen gegebenen akustischen Nullstrahler die Dämpfung proportional der Frequenz ist, im Gegensatz zu den bekannten Strahlungsgebilden der drahtlosen Telegraphie für elektromagnetische Wellen, bei denen die Strahlungsdämpfung etwa mit der dritten Potenz der Frequenz sich ändert. Dies hat seinen Grund darin, daß die Strahlungsgebilde der elektro-magnetischen Wellen im allgemeinen solche erster Ordnung sind; für akustische Strahlungsgebilde erster Ordnung ergibt sich ebenfalls eine Abnahme der Dämpfung in einer höheren Potenz[1]).

1) Siehe Rayleigh l. c. II, S. 275.

Solche Nullstrahler können umgekehrt auch als schallaufnehmende Empfänger verwendet werden; sie stellen, um einen Ausdruck aus der drahtlosen Telegraphie zu gebrauchen, Schallantennen dar und besitzen analoge Eigenschaften.

Bisher wurde als Strahler eine pulsierende Kugel angenommen, die selbst masselos ist und durch eine periodische Kraft in Schwingungen versetzt wird. In praktischen Fällen verwendet man für einen solchen Körper nullter Ordnung nicht eine pulsierende Kugel, sondern eine vibrierende Membran, die am Rande fest eingespannt als der eine Boden eines zylindrischen Gefäßes zu denken ist, während zwischen dieser schwingenden Membran und dem schallharten zweiten Boden die erregende Kraft zum Beispiel in Form eines Wechselstrommagneten angebracht ist. Der Zylindermantel selbst ist natürlich auch genügend schallhart zu bemessen. Das Innere dieses Pulsators muß mit einem Medium erfüllt sein, das wesentlich schallweicher ist als das äußere. Im anderen Falle erhält man außer dem Masseneinfluß des äußeren Mediums noch einen elastischen Einfluß des inneren Mediums, wie aus dem zweiten Kapitel über die Betrachtungen von konvergierenden Wellen hervorgeht.

Die gesamte schwingende Masse setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der Masse der Membran samt den daran befestigten Teilen zur Erzeugung der periodisch wirkenden Kraft und der mitschwingenden Masse des Mediums, während die konstante elastische Kraft in der Membran liegt. So stellt das Ganze ein mechanisches Schwingungsgebilde dar, dessen Eigenschwingung durch diese elastische Kraft und Massen gegeben ist. Will man mit dem geringsten Aufwand an zugeführter periodischer Kraft eine möglichst große Energie ausstrahlen, so wird man die Periode der erregenden Kraft auf die Eigenperiode des Systems abstimmen. Dann erhält man den Zustand, daß die aufgedrückte, Arbeit erzeugende Druckamplitude mit der Geschwindigkeitsamplitude der von der Membran abwandernden Schallenergie gleichphasig ist. Die Amplituden der elastischen Kraft sind dann gleich der Summe der Trägheitskräfte der Eigenmasse und der mitschwingenden Mediummasse und entgegengesetzt gerichtet.

Die Dämpfung eines solchen Strahlers ist kleiner als die früher angegebene; sie läßt sich berechnen aus dem Verhältnis der eigenen Masse des Strahlers zur Mediumsmasse, die früher als allein vorhanden angenommen war.

IV. Zusammenfassung.

Die vorstehenden Ableitungen und Betrachtungen haben gezeigt, daß zwischen einem Schallfelde und elektrischen Vorgängen sehr nahe formale Beziehungen bestehen, und daß mit gutem Erfolge bekannte elektrische Begriffe und Vorstellungen auf die Akustik übertragen werden können.

Ein ebenes akustisches Feld hat sein Analogon in einem reinen Widerstande, ein konvergentes Feld in einer Kapazität mit Widerstand, ein divergentes Feld in einer Selbstinduktion mit Widerstand.

Wie die elektrische Spannung mit dem Strom in den drei Fällen gleichphasig, voraus eilend und nacheilend ist, so ist es in den drei akustischen Fällen der Druck zur Geschwindigkeit.

Wie sich in dem ersten der drei Fälle die elektrische Leistung aus dem Produkt von Spannung und Strom, in den beiden anderen Fällen durch Multiplikation mit dem Kosinus ihres Phasenwinkels berechnen läßt, so geschieht dies bei dem akustischen Problem ganz analog, indem man nur für Spannung den Druck und für Strom die Geschwindigkeit setzt.

Wie in der Elektrizität das Verhältnis von Spannung und Strom den Widerstand darstellt, so liefert das Verhältnis von Druck zu Geschwindigkeit die Schallhärte. Schallharte Körper lassen nur Druckzustände, aber keine Geschwindigkeiten zu und verhalten sich analog den elektrischen Isolatoren, schallweiche Körper zeigen das entgegengesetzte Verhalten und ähneln den guten Leitern auch insofern, als sie in ein Schallfeld gebracht zur Vernichtung des Feldes in ihrer Umgebung führen. Es ist gezeigt worden, wie man die Schallhärte verschiedener Körper und Medien berechnen kann.

Aus den Untersuchungen geht hervor, daß Schall-Sender und -Empfänger mit dem umgebenden Medium in fester Verbindung stehen, deren Grad von dem Verhältnis der Größe der Schallquelle zur Wellenlänge abhängig ist und die Dämpfung und den Massenzuwachs berechnen läßt.

Zum Schlusse sind einige Bemerkungen über den realisierbaren Nullstrahler im Gegensatze zu dem schematisierten einfachen Sender der Theorie gemacht.

Kiel, im September 1916.

(Eingegangen 25. September 1916.)



Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. II[1]).

Von Karl Uller.

Die Begriffsbestimmung des Wellennormalenpaares als einer ganz bestimmten, der willkürlichen Festsetzung entzogenen, wellenkinematischen Größe ist eine Aufgabe, die bisher nicht gesehen worden ist. Bei Planwellen tritt sie nicht hervor, denn dort sind Wellenvektor und Wellennormalenpaar Konstanten, die eben als vorgegeben zu betrachten sind, und weniger einfache Wellenaufgaben hat man bisher von einem anderen Ansatz ausgehend behandelt, worüber später noch weiteres zu sagen sein wird. Wir werden erkennen, daß der genannte kinematische Begriff für die Gesetze der allgemeinen Wellenausbreitung von fundamentaler Bedeutung ist. Als erste Frucht seiner Auffindung erhalten wir die Gleichungen für die umkehrbaren Wellen in inhomogenen Körpern. Dabei kommt an den Tag, daß die früher erwähnten Arbeiten von Boussinesq[2]) und Gans[3]) — die einzigen, die eine direkte Integration aus den Grundgleichungen zu geben beanspruchen — noch Annahmen enthalten, die auf der naheliegenden Vorstellung fußend, daß diese Wellen in den kleinsten Teilen Planwellencharakter haben, jetzt als unzutreffend zu erkennen sind. Hingegen sind unsere Gleichungen erstmals hypothesen- und einwandfrei aus den allgemeinen Feldgleichungen gewonnen. Zudem sind sie frei von den beschränkenden Voraussetzungen, die jene Verfasser zu machen sich genötigt sahen. Sie geben die erstmals sicheren Ausgangsgleichungen für das Studium der Licht-, Schall- und Bebenbewegung in Weltkörpern.

§ 5. Das Wellennormalenpaar.

Wir schicken folgende Untersuchung voraus. Die Bedingungen, die der von der Zeit unabhängige komplexe Vektor E in einem schwingenden Vektorfeld $\mathfrak{E} = {}^1/_2 \cdot \{E \cdot e^{i\nu t} + E^* \cdot e^{-i\nu^* t}\}$ zu erfüllen hat, erlauben stets ihm eine willkürliche Konstante als Faktor beizugeben. Wir können daher stets E auf die Form bringen

$$E = e^{\nu'' t_0} \Omega \cdot \mathfrak{l} \,. \qquad (1)$$

Darin soll bedeuten: $\mathfrak{l}$ einen (komplexen) Einheitsvektor, der die (komplexe) Richtung von E hat, und Ω den (komplexen) Betrag von E; Richtung, Betrag und Einheitsvektor für komplexe Vektoren sind symbolisch zu verstehen, in Erweiterung der bei reellen Vektoren geltenden Begriffe. Mit (1) wird nun

$$E \cdot e^{i\nu t} = E e^{i\nu t_0} \cdot e^{i\nu(t-t_0)} = \Omega (e^{\nu'' t_0} e^{i\nu t_0} \mathfrak{l}) e^{i\nu(t-t_0)}$$
$$= E_1 e^{i\nu t_1} \,,$$

wenn t_1 die Zeit von dem neuen N.-P. t_0 aus mißt. Da E_1 von der Form $e^{\nu'' t_0} \Omega_1 \mathfrak{l}_1$ sein muß, wo

$$\mathfrak{l}_1 = e^{\nu'' t_0} e^{i\nu t_0} \mathfrak{l} = e^{i\nu' t_0} \mathfrak{l} \qquad (2)$$

der neue Einheitsvektor ist, so folgt

$$\Omega_1 = e^{-\nu'' t_0} \Omega \,. \qquad (3)$$

In demselben Feld ($\mathfrak{E}$) sind also E_1, Ω_1 und $\mathfrak{l}_1$ verschieden von E, Ω und $\mathfrak{l}$, wenn die N.-P.e der Zeitzählung verschieden sind. Wenn Ω und $\mathfrak{l}$ als gegeben betrachtet werden, sind Ω_1 und $\mathfrak{l}_1$ nach (2) und (3) für den neuen N.-P. angebbar. Oder auch umgekehrt. Wir kennen demnach jetzt von dem komplexen Vektor E die Abhängigkeit sowohl seiner Richtung als auch seines Betrages von einem anderen N.-P. der Zeitzählung.

Entsprechend können wir in dem Ansatz für eine Welle $(E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi})$ (4)
den Vektor $\mathfrak{e}$ in der Form schreiben

$$\mathfrak{e} = e^{\nu'' t_0} \omega \cdot \mathfrak{l} \,, \qquad (5)$$

so daß

$$\Omega = \omega \cdot e^{i\Phi} \qquad (6)$$

wird. In Hinblick auf (3) besteht daher die Alternative: entweder $\omega_1 = \omega$ und $\Phi_1 = \Phi + i\nu'' t_0$, oder $\Phi_1 = \Phi$ und $\omega_1 = e^{-\nu'' t_0} \omega$. In einer gegebenen Welle ist E bei gewähltem N.-P. gegeben; das gleiche gilt also auch für Ω und $\mathfrak{l}$. Gemäß den Ansätzen (4) und (5) für eine Welle ist somit nach (6) einer der Skalare ω und Φ willkürlich und der andere von diesem abhängig; denn wir können ja schreiben: $\omega \cdot e^{i\Phi} = \chi \cdot e^{i\Psi}$ usw. Der Begriff des Wellennormalenpaares bestimmt sich nun aus der Notwendigkeit, diese Willkürlichkeit zu beseitigen. Denn sonst bliebe der Ausdruck (4) nur ein mathematischer Ansatz. Aber zu beachten ist, daß durch eine bloße Festsetzung über diese Willkürlichkeit nicht verfügt werden kann, vielmehr muß ein Wellenprinzip entscheiden. Es liegt aber keine andere stichhaltige Bestimmungsmöglichkeit vor als die gegenseitige Unabhängigkeitserklärung. Daraus fließt der Satz:

a) Soll der Ansatz $E = \mathfrak{e} \cdot e^{i\Phi}$ eine Welle darstellen, also nicht eine willkürliche Zerlegung des Betrages des Vektors E bieten, so muß Φ vom Betrag ω des Vektors $\mathfrak{e}$ unabhängig sein.

Die Bedingungen, welche die Welle zu erfüllen hat und an denen der Satz (a) seine Herrschaft ausübt, sind nicht solche zwischen $\mathfrak{e}$ und Φ, sondern allemal zwischen $\mathfrak{e}$ und $-\operatorname{grad} \Phi = \mathfrak{w}$.

1) I: diese Zeitschr. **17**, 168, 1916.
2) J. Boussinesq, C. R. **129**, 794, 859, 1899.
3) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**, 709, 1915.



Dabei ist nach obiger Auseinandersetzung in jeder Alternative $\mathfrak{w}$ vom N.-P. unabhängig. Dem Satz (a) gemäß muß somit gelten:

b) In einer Welle muß der Vektor $\mathfrak{w}$ unabhängig sein vom Betrage des Vektors $\mathfrak{e}$.

Dann sind $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{e}$ kinematische Größen, die wir das Wellennormalenpaar bzw. den Wellenvektor der Welle nennen; letzterer hängt vom N.-P. der Zeitmessung ab. Die Bedingungen ändern sich natürlich nicht in der Form, wenn man einen anderen N.-P. einführt, was durch Multiplikation mit der Konstanten $e^{i\nu t_0}$ erreicht wird. Diese muß zum Wellenvektor geschlagen werden.

Wie stellt sich nun aber zu dem Satze (b) die im § 3 aufgestellte Forderung der Umkehrbarkeit jeder Welle? Daß lamellare Wellen sich ihr nicht fügen, ist bereits[1]) gezeigt worden. Jetzt wollen wir zeigen — ebenfalls wie dort, getreu dem Leitgedanken unseres Themas, auf rein wellenkinematischem Wege — daß auch solenoidale Wellen sich ihr nicht fügen. Aus den im § 4 entwickelten Gl. (16) und (17) für elektromagnetische Wellen ist erlaubt zu folgern

$$\operatorname{grad} \mathfrak{w}_m^2/a = \lambda\, \mathfrak{w}_m. \qquad (7)$$

Wenn die Größe λ von Null verschieden angenommen wird, muß man zu ihrer Bestimmung auf die Gl. (15″) daselbst und auf ihre Ableitungen zurückgreifen. Man findet, daß λ sich der Feststellung entzieht. Wir wenden uns deshalb der allgemeinsten Lösungsform der Forderungen (16′) und (17′) zu, die lautet: $\mathfrak{m} = \sigma\,[\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad} \mathfrak{w}_m^2/a]$, wobei die allgemeinste Möglichkeit ins Auge gefaßt ist, daß $\operatorname{grad} \mathfrak{w}_m^2/a$ existiert und nicht gerade mit $\mathfrak{w}_m$ zusammenfällt. Aus $\operatorname{div} \mathfrak{m} = (\mathfrak{m} \operatorname{grad} \log \sigma)$ folgt wegen (16′) und (16″) des § 4 das Verschwinden von $(\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log \sigma\, a_m)$ und somit in Hinblick auf (17) ebenda $\sigma\, a_m = c \cdot \mathfrak{w}_m^2/a$, worin die Konstante c nicht Null zu sein braucht. Darnach wäre im allgemeinen der Wellenvektor $\mathfrak{m}$ durch das Feld des Wellennormalenpaares $\mathfrak{w}_m$ vollständig bestimmt, während in dem Unterfall von Planwellen $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{w}_m$ bloß durch die skalare Beziehung $(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) = 0$ verbunden ist. Diese ohne weiteres abzulehnende Absurdität zu vermeiden ist nur möglich, wenn Gl. (7) gilt mit dem besonderen Werte: $\lambda = 0$, also $\mathfrak{w}_m^2 = c \cdot a$; die Konstante c muß in Hinblick auf den besonderen Fall der Planwellen den Wert 1 haben. Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir hinsichtlich des Quadrates des elektrischen Wellennormalenpaares, wenn wir von der elektrischen Wellengleichung ausgehen. Aus der Lösung

$$\mathfrak{w}_m^2 = a = \mathfrak{w}_e^2 \qquad (8)$$

folgt aber für homogene Körper

$$\operatorname{grad} \mathfrak{w}^2 = 2\,(\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{w} = 0,$$

was ganz unmöglich allgemeine Gültigkeit haben kann. Für Scherungswellen in festen oder flüssigen Körpern kommt man auf entsprechendem Wege zu demselben Ergebnis. Somit ist aus dem Bau der Wellen selbst der Beweis erbracht, daß allgemein Wellen nicht umkehrbar sind. Die Forderung der Umkehrbarkeit fließt also nicht aus einem Wellenprinzip, wie im § 3 noch unter dem Einfluß der allgemeinen Lösung für die Wellenbewegung in Röhren vermutet und fehlerhaft begründet wurde; sie kann deshalb nicht erhoben werden.

Die Umkehrbarkeit ist indessen oft so nahe verwirklicht, daß der Begriff der ideal umkehrbaren Welle als Grenzfall und wegen seines einfachen Baues wohl theoretische und mathematische Bedeutung hat. Es gibt nämlich häufig Wellen, bei denen die streng genommen immer vorhandene Nichtumkehrbarkeit bedeutungslos gering ist und infolgedessen theoretisch und mathematisch ganz zu verleugnen ist, während diejenigen Wellen, bei denen die Nichtumkehrbarkeit stark hervortritt, die Beugungswellen im besonderen Wortsinne sind. Tritt eine Welle durch eine Öffnung, so kann ihre seitliche Ausbreitung so gering sein, daß man von ihr absehen und von einer seitlich begrenzten Welle reden darf. In Wirklichkeit geht auf der Mantelfläche des Strahles Beugung vor sich, verbunden mit starkem Intensitätsabfall; diese nach außen auslaufenden Wellenteile sind nicht umkehrbar. Indessen tritt diese Oberflächenbeugung ganz zurück gegen die mehr oder weniger vollkommene Umkehrbarkeit im Mark des Strahles. Im anderen Grenzfall — bei sehr großer Wellenlänge — ist aber die Verbreiterung der Welle die größtmögliche; diese Erscheinung der diffusen Wellenausbreitung steht ganz unter dem Zeichen der Beugung und ist nicht umkehrbar. Nichtumkehrbarkeit und Beugung entsprechen einander.

Der Satz (b) hingegen spricht ein Wellenprinzip aus. Er beansprucht allgemeine Gültigkeit, während die Festsetzung der Unabhängigkeit aller Gleichungen vom Vorzeichen des Wellennormalenpaares lediglich die praktisch umkehrbaren, also wesentlich beugungslosen Wellen von den mehr oder weniger stark ausgeprägten Beugungswellen absondert.

Übrigens ist noch zu bemerken, daß Umkehrung des Wellennormalenpaares keineswegs

1) K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen; diese Zeitschr. 17, 302, 1916.



auch Umkehrung der Strahlung gewährleistet; in Strenge ist das bestenfalls nur auf gewissen Gebieten zu erreichen, indem dort noch andere ins einzelne gehende Bedingungen erfüllt sind.

Als erste Anwendung des genannten Wellenprinzips wählen wir die Verdünnungswellen in gewöhnlichen isotropen Körpern. Diese Wellen haben der Lamellaritätsbedingung $[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = i \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ zu genügen[1]). Die zunächst willkürlichen Größen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}$ sind nur dann das Wellennormalenpaar bzw. der Wellenvektor, wenn $\mathfrak{w}$ unabhängig ist vom Betrage von $\mathfrak{v}$. Infolgedessen muß sein

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = 0 = \operatorname{rot} \mathfrak{v}, \text{ also } \mathfrak{v} = \sigma \cdot \mathfrak{w}, \qquad (9)$$

worin σ eine Konstante bezeichnet. Dies Ergebnis hatten wir schon am obengenannten Ort das Glück auf ganz anderem Wege zu finden. Die zweite Gleichung, die zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ besteht, die Wellengleichung, geht damit über in eine Gleichung, die neben den Körperparametern und ihren Gefällen nur noch das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ mit seinen Ableitungen enthält; sie zerfällt nicht.

Bei elektromagnetischen Wellen in gewöhnlichen isotropen Körpern haben wir nach § 4 C, wenn wir die magnetische Welle $(\mathfrak{m} \cdot e^{i\varphi_m})$ bevorzugen, die Solenoidalitätsbedingung der magnetischen Erregung

$$a_m(\mathfrak{m}, \mathfrak{w}_m) = -i \operatorname{div} a_m \mathfrak{m} \qquad (10)$$

neben der Wellengleichung

$$\begin{aligned} &\{a - \mathfrak{w}_m^2 - i \operatorname{div} \mathfrak{w}_m + i(\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad} \log a_e)\}\,\mathfrak{m} \\ &+ i \operatorname{grad} (\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m) - i\,2(\mathfrak{w}_m \nabla)\,\mathfrak{m} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{m} \\ &- [\operatorname{rot} \mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log a_e] \\ &- i(\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log a)\,\mathfrak{w}_m = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Unser Wellenprinzip (b) verlangt: Welcher Wert dem Betrage von $\mathfrak{m}$ auch beigelegt werde, $\mathfrak{w}$ soll unberührt davon bleiben. Infolgedessen muß in der Nebenbedingung (10) sein

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m) = 0, \qquad (12')$$

also auch

$$\operatorname{div} a_m \mathfrak{m} = 0, \qquad (12'')$$

und in der Wellengleichung (11)

$$a - \mathfrak{w}_m^2 - i \operatorname{div} \mathfrak{w}_m + i(\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad} \log a_e) = 0, \qquad (13')$$

was weiter

$$\begin{aligned} i\,2(\mathfrak{w}_m \nabla)\,\mathfrak{m} + \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{m} + [\operatorname{rot} \mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log a_e] \\ + i(\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \log a)\,\mathfrak{w}_m = 0 \end{aligned} \qquad (13'')$$

nach sich zieht.

Die Skalarbedingung (10) und die Vektorbedingung (11) zerfallen also notwendig, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}_m$ die obengenannten kinematischen Größen sind und zwar in drei skalare und in eine vektorielle Gleichung. Letztgenannte hat auch als Restgleichung dem Satze (b) zu genügen, also gewisse beschränkende Bedingungen zu erfüllen. Das gilt natürlich auch für alle aus jenen abgeleitete Beziehungen. So folgt beispielsweise aus (12')

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m) = 0 = (\mathfrak{w}_m \nabla)\,\mathfrak{m} + (\mathfrak{m} \nabla)\,\mathfrak{w}_m \\ + [\mathfrak{w}_m \operatorname{rot} \mathfrak{m}]; \end{aligned} \qquad (14)$$

mithin

$$2(\mathfrak{w}_m (\mathfrak{w}_m \nabla)\,\mathfrak{m}) = -(\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \mathfrak{w}_m^2), \qquad (15)$$

worin in der Tat der Betrag von $\mathfrak{m}$ keine Rolle spielt.

Ganz entsprechend gebaute Ausdrücke liefert das Wellenprinzip (b) in der elektrischen Welle $(\mathfrak{e} \cdot e^{i\varphi_e})$, in denen $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}_m$ mit $\mathfrak{w}_e$ sowie a_e mit a_m und umgekehrt vertauscht erscheinen. Man sieht, daß das elektrische und das magnetische Wellennormalenpaar verschieden sind.

Fragen wir, wann sie gleich sind. Wir gehen dazu aus von der Gl. (19) im § 4, nämlich

$$a_e E = \{[\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m] - i \operatorname{rot} \mathfrak{m}\} \cdot e^{i\Phi_m} = a_e \mathfrak{e} \cdot e^{i\varphi_e} \qquad (16)$$

Daraus entwickeln wir unter Benutzung der magnetischen Wellengl. (11)

$$\begin{aligned} a_e \operatorname{rot} \mathfrak{e} = e^{i(\Phi_m - \Phi_e)} \{&[\mathfrak{w}_m \operatorname{rot} \mathfrak{m}] \\ &- i(a - \mathfrak{w}_m^2)\,\mathfrak{m} - i(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m)\,\mathfrak{w}_m \\ &- i[\mathfrak{w}_m - \mathfrak{w}_e, [\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m] - i \operatorname{rot} \mathfrak{m}]\} \cdot \end{aligned} \qquad (17)$$

Die Bedingungen für $\mathfrak{w}_m = \mathfrak{w}_e$ lauten also

$$\mathfrak{w}_m^2 = \mathfrak{w}_e^2 = a; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{m} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{e} = 0. \qquad (18)$$

Sie können nur auf engen Gebieten oder in ganz besonderen Fällen erfüllt sein. Dann ist

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (19)$$

und der Phasenunterschied der elektrischen und magnetischen Schwingung

$$\varphi_e - \varphi_m = i/2 \cdot \log \{a_e / a_e^* \cdot a_m^* / a_m\} \qquad (20)$$

nur von den Körperparametern abhängig.

Für eine elastische Scherungswelle $(\mathfrak{j} \cdot e^{i\varphi})$ in gewöhnlichen isotropen Mitteln haben wir nach § 4 B die Solenoidalitätsbedingung der Verrückung

$$(\mathfrak{j}\,\mathfrak{w}) = -i \operatorname{div} \mathfrak{j} \qquad (21)$$

neben der Wellengleichung

$$\begin{aligned} &\{a - \mathfrak{w}^2 - i \operatorname{div} \mathfrak{w} - i(\mathfrak{w}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g)\}\,\mathfrak{j} \\ &+ i \operatorname{grad} (\mathfrak{j}\,\mathfrak{w}) - i\,2(\mathfrak{w} \nabla)\,\mathfrak{j} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{j} \\ &- [\operatorname{rot} \mathfrak{j}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g] - i(\mathfrak{j}, \operatorname{grad} \log \varepsilon_g)\,\mathfrak{w} \\ &+ 2(\operatorname{grad} \log \varepsilon_g \nabla)\,\mathfrak{j} = 0 \end{aligned} \qquad (22)$$

mit $a = \nu^2 D/\varepsilon_g$. Nebenher sei bemerkt: In inhomogenen Körpern unterscheiden sich Scherungswellen im Bau von elektromagnetischen Wellen.

Das Wellenprinzip (b) verlangt in der Nebenbedingung (21)

$$(\mathfrak{j}\,\mathfrak{w}) = 0, \qquad (23')$$

also auch

1) K. Uller, Wellen in Flüssigkeiten und Gasen; diese Zeitschr. 17, 302, 1916; Gl.-system (1).

$$\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0 \qquad (23'')$$

und in der Wellengleichung (22)

$$a - \mathfrak{w}^2 - i \operatorname{div}\mathfrak{w} - i(\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\log\varepsilon_g) = 0, \qquad (24')$$

und somit auch

$$i\,2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{j} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{j} + [\operatorname{rot}\mathfrak{j}, \operatorname{grad}\log\varepsilon_g] \qquad (24'')$$
$$+ i(\mathfrak{j}, \operatorname{grad}\log\varepsilon_g)\mathfrak{w} - 2(\operatorname{grad}\log\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{j} = 0.$$

Formal die gleichen Beziehungen treten im Bau von Flüssigkeitsscherungswellen auf, wie am vorhin genannten Ort gezeigt ist.

§ 6. Die umkehrbare Welle.

Diesen idealen Grenzfall erhalten wir aus dem allgemeinen Wellenbau durch die nun hinzutretende Festsetzung, daß alle Ausdrücke für jenen unabhängig seien vom Vorzeichen des Wellennormalenpaares.

Für die umkehrbare elektromagnetische Welle gewinnen wir somit aus den Gl. (12) und (13) des vorigen Paragraphen folgendes Gleichungssystem

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}_m) = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} a_m\mathfrak{m} = 0 = \operatorname{div}\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log a_m) \qquad (2)$$

$$\mathfrak{w}_m^2 = a \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{w}_m = (\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad}\log a_e) \qquad (4)$$

$$2(\mathfrak{w}_m\nabla)\mathfrak{m} = -(\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w}_m \qquad (5)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m} = [\operatorname{grad}\log a_e, \operatorname{rot}\mathfrak{m}]. \qquad (6)$$

Als ein Zeichen für die innere Widerspruchslosigkeit des Systems sei angeführt, daß der aus (5) und (3) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{w}_m$ gewonnene Ausdruck übereinstimmt mit demjenigen unter (15) im § 5, der auf ganz anderem Wege hergeleitet ist.

Wegen (1) folgt aus (5)

$$(\mathfrak{w}_m, \operatorname{grad}\mathfrak{m}^2) = 0. \qquad (7)$$

Für $[\mathfrak{w}_m \mathfrak{w}_m^*] = 0$ erhalten wir demnach

$$(\mathfrak{w}_m \pm \mathfrak{w}_m^*, \operatorname{grad}\log\mathfrak{m}^2\mathfrak{m}^{*2}) = 0$$

oder, in Hinblick auf Gl. (5) im § 2,

$$(\mathfrak{w}_m \pm \mathfrak{w}_m^*, \operatorname{grad}\log\varepsilon_m(\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}^*)) = 0. \qquad (8)$$

Soweit also der Spreizvektor des Wellennormalenpaares als verschwindend klein, die magnetische Welle also als einfach gelten kann, ist $\varepsilon_m(\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*)$, das Produkt aus Elliptizität und dem Quadrate der Intensität des Wellenvektors, längs dem Strahle konstant.

Nimmt die Intensität ab, so muß demnach die Elliptizität zunehmen, und umgekehrt.

Aus (5) folgt noch durch skalare Multiplikation mit $\operatorname{grad}\log a_e$ und Berücksichtigung von (4), (6) sowie (14) § 5

$$(\mathfrak{w}_m(\operatorname{grad}\log a_e\nabla)\mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}(\operatorname{grad}\log a_e\nabla)\mathfrak{w}_m) \qquad (9)$$
$$= -{}^1/{}_2\cdot\operatorname{div}\mathfrak{w}_m(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a) - (\mathfrak{w}_m\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}).$$

Für die begleitende elektrische Welle $(\mathfrak{e}\cdot e^{i\Phi_e})$ ergeben sich formal die gleichen Ausdrücke. Deshalb muß sein

$$\mathfrak{w}_m^2 = \mathfrak{w}_e^2 = a. \qquad (10)$$

Man könnte vermuten, daß (6) und der entsprechende Ausdruck für die elektrische Welle die Lösung hätten: $\operatorname{rot}\mathfrak{m} = 0$; $\operatorname{rot}\mathfrak{e} = 0$. Das ist aber unmöglich. Denn dann müßte wegen (10) sowie § 5, 18 sein: $\mathfrak{w}_m = \mathfrak{w}_e$. Dem widersprechen jedoch (4) und der entsprechende Ausdruck in der elektrischen Welle. Nur in Gebieten, wo die Körperparameter kein Gefälle haben, sind das elektrische und das magnetische Wellennormalenpaar gleich. Wegen der erwähnten Unmöglichkeit ist die Strahlung in Strenge nicht überall umkehrbar.

Für die umkehrbare Scherungswelle stellt sich aus den Gl. (23) und (24) des vorigen Paragraphen das folgende System ein

$$(\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}) = 0 \qquad (11)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{f} = 0 \qquad (12)$$

$$\mathfrak{w}^2 = a \qquad (13)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} = -(\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\log\varepsilon_g) \qquad (14)$$

$$2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{f} = -(\mathfrak{f}, \operatorname{grad}\log\varepsilon_g)\mathfrak{w} \qquad (15)$$

$$[\operatorname{grad}\log\varepsilon_g, \operatorname{rot}\mathfrak{f}] = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{f} - 2(\operatorname{grad}\log\varepsilon_g\nabla)\mathfrak{f}. \qquad (16)$$

Umkehrbare Strahlung ist auch hier in Strenge nicht zu verwirklichen.

Das Gleichungssystem für die umkehrbare Verdünnungswelle habe ich schon an dem zuletzt angezogenen Ort entwickelt. Multiplizieren wir (12') und (12'') daselbst skalar mit $\mathfrak{w}$, so kommt mit Rücksicht auf (9) § 5

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} + (\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\log\{\overline{\Gamma}\,\overline{D} + i\nu(2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\}\mathfrak{w}^2)$$
$$= \frac{\overline{\Gamma}\,\overline{D}}{\overline{\Gamma}\,\overline{D} + i\nu(2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)}(\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\log\overline{\Gamma}/\overline{D}); \qquad (17)$$

$$\{\nu^2\overline{D} - \{\overline{\Gamma}\,\overline{D} + i\nu(2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\}\mathfrak{w}^2\}\,\mathfrak{w}^2$$
$$+ \{\overline{\Gamma}\,\overline{D} + i\nu(2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\}(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{w})$$
$$+ \overline{\Gamma}(\mathfrak{w}, \operatorname{grad}(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\overline{D})) \qquad (18)$$
$$+ \operatorname{div}\mathfrak{w}\{\overline{\Gamma}(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\overline{D}) + i\nu(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\mathfrak{f}_v)\}$$
$$+ i\nu(\operatorname{grad}\mathfrak{f}_g, \operatorname{grad}\mathfrak{w}^2) = 0,$$

worin $\operatorname{div}\mathfrak{w}$ aus (17) hineinzutragen ist.

Sind die logarithmischen Gefälle der Körperparameter schwach, dann ist merklich

$$\mathfrak{w}^2 = \nu^2\overline{D}/\{\overline{\Gamma}\,\overline{D} + i\nu(2\mathfrak{f}_g + \mathfrak{f}_v)\} = a \qquad (18')$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} = -(\mathfrak{w}, \operatorname{grad}\log\overline{D} + a\overline{\Gamma}/\nu^2(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\log\overline{\Gamma}/\overline{D}). \qquad (17')$$

Insbesondere für elastische Verdünnungswellen ist zu setzen:

$$\overline{\Gamma} = 0;\ i\nu\mathfrak{f}_v = \varepsilon_v - {}^2/{}_3\varepsilon_g;\ i\nu\mathfrak{f}_g = \varepsilon_g.$$

Bemerkenswert ist, daß in allen unseren Systemen die Flächen konstanter Körperparameter keineswegs zusammenzufallen brauchen. Für homo-

gene Körper gehen die Systeme in die für Planwellen über. Unsere Wellen, so lehren unsere Gleichungen, können nicht als aus Planwellenstückchen zusammengesetzt gedacht werden.

Der elektromagnetischen und der Scherungs-Welle ist gemeinsam die Beziehung $\mathfrak{w}^2 = a$, so daß

$$2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\mathfrak{w}^2 = \operatorname{grad} a \qquad (19)$$

wird.

Infolgedessen finden wir in der Welle fortschreitend für das Maß der Abweichung der Änderung des Wellennormalenpaares von seiner (komplexen) Richtung, kurz für die Krümmung,

$$2[\mathfrak{w},(\mathfrak{w}\nabla,\mathfrak{w}] = [\mathfrak{w}, \operatorname{grad} a]; \qquad (20)$$

entsprechend leiten wir für die Verdünnungswelle her

$$2[\mathfrak{w},(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w}] = -\mathfrak{w}^2[\mathfrak{w},\overline{\Gamma}\operatorname{grad}\overline{D} + i\nu\operatorname{grad}\mathfrak{f}_v]. \qquad (21)$$

Die Wellen sind also gekrümmt, und zwar lediglich durch die Gefälle der Körperparameter. Die Krümmung ist am stärksten im Scheitel der Bahn. Muß man insbesondere die Änderung der Isophasennormale $\mathfrak{w}'$ bzw. der Isodynamennormale $\mathfrak{w}''$ in einer Welle untersuchen, so bieten sich folgende Ausdrücke dar:

$$(\mathfrak{w}'\nabla)\mathfrak{w}' = {}^1/_4(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^*\nabla)\,\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^*$$
$$= {}^1/_8\operatorname{grad}\{2(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}^{*2}\}, \qquad (22)$$
$$(\mathfrak{w}''\nabla)\,\mathfrak{w}'' = -{}^1/_4(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*\nabla)\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*$$
$$= {}^1/_8\operatorname{grad}\{2(\mathfrak{w}\mathfrak{w}^*) - \mathfrak{w}^2 - \mathfrak{w}^{*2}\}\,. \qquad (23)$$

Tiefer dringen wir ein, wenn wir eine Zerlegung von $\mathfrak{w}$ vornehmen. Dann gewährt uns der Ausdruck (19) Zutritt zu einem wichtigen Satz. Es sei $\mathfrak{k}$ die Einheitsnormale der Parameterflächen $a = \text{const}$ und ihre Richtung parallel $\operatorname{grad} a$. Wir zerlegen nun $\mathfrak{w}$ in eine Komponente $(\mathfrak{w}\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}$ nach dieser Richtung und in eine Komponente $\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\mathfrak{k})\,\mathfrak{k} = \mathfrak{w}_t$, die in der genannten Parameterfläche liegt. Es gilt dann — wie in einer besonderen Untersuchung noch zutage treten wird — vermöge der Identität

$$\mathfrak{w}_t^2 + (\mathfrak{w}\mathfrak{k})^2 = \mathfrak{w}^2 = a \qquad (24)$$

für den Zuwachs der Komponenten, wenn man in Richtung von $\mathfrak{w}$ fortschreitet:

$$(\mathfrak{w}\nabla)(\mathfrak{w}\mathfrak{k})\mathfrak{k} = {}^1/_2(\mathfrak{k}\operatorname{grad} a)\mathfrak{k} - (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w}_t \qquad (25)$$
$$(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{w}_t = (\mathfrak{w}\mathfrak{k})\{(\mathfrak{w}\mathfrak{k})[\mathfrak{k}\operatorname{rot}\mathfrak{k}] - (\mathfrak{w}_t\nabla)\mathfrak{k}\}$$
$$+ \{(\mathfrak{w}\mathfrak{k})([\mathfrak{w}\mathfrak{k}]\operatorname{rot}\mathfrak{k}) - (\mathfrak{w}_t(\mathfrak{w}_t\nabla\mathfrak{k})\}\,\mathfrak{k}. \qquad (26)$$

Aus den beiden Angaben ist jede $\mathfrak{w}$-Linie berechenbar, für welche in einem ihrer Punkte $\mathfrak{w}$ angebbar ist.

Hierzu tritt in allen umkehrbaren Wellen eine Aussage über die Divergenz des $\mathfrak{w}$-Feldes, die abhängig erscheint von $\mathfrak{w}$ und dem Gefälle gewisser Kombinationen von Körperparametern, wie die Gl. (4), (14) und (17) erkennen lassen. Diese gibt mit Rücksicht auf den eben entwickelten Satz das Maß für die Erweiterung oder Verengerung der unendlich dünnen, aus benachbarten $\mathfrak{w}$-Linien gebildeten Röhre, deren Achse die ins Auge gefaßte $\mathfrak{w}$-Linie ist. Eine solche Querschnittsänderung erfährt auch ein Wellennormalenstrang, dessen Achse parallel zu $\mathfrak{k}$ verläuft. Unter gewöhnlichen Verhältnissen ist sie sogar dann am stärksten, während in einem Scheitel sie verschwindet. Bei Darstellung in den erwähnten beiden Komponenten nimmt die Divergenzbeziehung die Form an:

$$([\mathfrak{w}\mathfrak{k}]\operatorname{rot}\mathfrak{k}) - (\mathfrak{k}\operatorname{rot}[\mathfrak{w}\mathfrak{k}]) + (\mathfrak{k}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{k})) = \qquad (27)$$
$$(\mathfrak{w}\mathfrak{k})\{(\mathfrak{k}\operatorname{grad}\log p) - \operatorname{div}\mathfrak{k}\} + (\mathfrak{w}, \operatorname{grad}_t\log p);$$

worin für p zu setzen ist:

bei magnetischen Wellen: a_e

„ elektrischen „ : a_m

„ elast. Scherungs- „ : $1/\varepsilon_g$ oder a/D

„ „ Verdünnungs- „ : $1/\overline{D}$ od. $1/a\,(\varepsilon_v + {}^4/_3\varepsilon_g)$

„ Verdünnungs- „ : $\overline{\Gamma}/\overline{D}$ oder $1/a\,\overline{D}^2$

in reibungslosen Gasen.

An (1) und (5) bzw. an (10) und (14) lesen wir ab, daß die Schwingungsebene ihre Orientierung entsprechend der Richtungsänderung des Wellennormalenpaares ändert. Infolgedessen steht in einem einfachen Strahl die Schwingungsebene überall senkrecht zur Strahlachse, ebenso $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{e}$ bzw. $\operatorname{rot}\mathfrak{f}$.

Wir wenden uns jetzt zu den oben genannten Arbeiten von Boussinesq und Gans. Ihre Voraussetzungen sind: ebene Schichtung und ein langsam veränderlicher, reeller Körperparameter. Herr Boussinesq, der elastische Scherungswelle zugrunde legt, begeht zunächst den prinzipiellen Fehler, daß er einfach in der Wellengleichung für homogene Körper den Körperparameter als veränderlich ansieht. Statt dessen muß man von der Wellengleichung unter (6) im § 4 ausgehen. Beide Autoren müssen mangels eines Leitseils Annahmen machen. Die eine lautet in unserer Formelsprache: $\mathfrak{w}^2 = a$. Damit treffen sie, wie wir jetzt urteilen können, das Richtige. Ihre zweite Annahme, daß die Komponente der Wellennormale parallel der Schichtung genommen konstant sei längs dem Strahle, trifft ebenfalls zu. Aber ihre weitere Annahme, daß sie auch längs der Schichtung konstant sei, ist unhaltbar. Wenn $\mathfrak{w}_t = \text{const.}$ richtig wäre, müßte einerseits nach der Bedingung (4) sein:

$$(\mathfrak{k}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{k})) = (\mathfrak{w}\mathfrak{k})\,(\mathfrak{k}\operatorname{grad}\log a),$$

wenn wir wie üblich a_m konstant setzen, andererseits nach (24)

$$2\,(\mathfrak{w}\mathfrak{k})^2/a\cdot(\mathfrak{k}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{k})) = (\mathfrak{w}\mathfrak{k})(\mathfrak{k}\operatorname{grad}\log a).$$

Weil $(\mathfrak{w}\mathfrak{k})^2/a = 1 - \mathfrak{w}_t^2/a \neq {}^1/_2$ ist, haben wir einen Widerspruch. Die vierte Annahme

bezieht sich auf den Wellenvektor, der lediglich eine Funktion der Schichtnormalenlinie sein soll. Diese und die vorletzte Annahme sollen zum Ausdruck bringen, daß unsere Welle in den kleinsten Teilen Planwellencharakter habe. Das steht aber im Widerspruch zu unserem Gleichungssystem (1) bis (9) und zeitigt widerspruchsvolle Folgerungen, die am auffallendsten im Scheitel der Bahn sind. Da nach der dritten Annahme in Hinblick auf (24) sein soll:

$$2(\mathfrak{w}\mathfrak{k})(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{k})) = (\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,a),$$

so kann auch hier $(\mathfrak{w}\mathfrak{k})$ nicht verschwinden, die Wellennormale also keineswegs parallel der Schichtung liegen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß Herrn Gans die Rechnung zu dem Ergebnis führt: Bei einem gewissen Wert der Normalkomponente $(\mathfrak{w}\mathfrak{k})$ der Wellennormale wird die Welle an einer Schicht in vollem Betrage reflektiert, und zwar in der Art wie bei der sogenannten Totalreflexion an einem optisch dünneren Medium. Das wäre also innere Reflexion in einem stetig inhomogenen Körper, und noch dazu eine solche von endlichem Betrag in einer unendlich dünnen Schicht. Das ist nach einer früheren Darlegung[1]) unmöglich. Die Erfahrung und die in vorliegender Abhandlung entwickelte Theorie dieser Wellen lehren vielmehr übereinstimmend, daß der Strahl einen Scheitel ohne Knickung bildet; die Welle krümmt sich stetig durch den Scheitel der Bahn hindurch, wo sie einen Augenblick parallel der Schichtung läuft. Die Welle zeigt im Scheitel nichts Singuläres. Damit ist auf optischem Gebiet auch experimentell der Beweis erbracht, daß unsere Welle nicht aus unendlich kleinen Planwellenstückchen zusammengesetzt gedacht werden darf.

Ich benutze die Gelegenheit um folgende Fehler zu berichtigen:

Im laufenden Jahrgang dieser Zeitschrift muß es heißen auf

S. 172, Spalte 1, Zeile 11 von unten $a_e E$ statt: $i a_e E$,

S. 172, Spalte 2, Zeile 6 von oben $-a_m M$ statt: $-i a_m M$,

S. 303, Spalte 1, Zeile 14 von unten $\mathfrak{w}_2 = a$. statt: $a_0^2/D_0 \cdot D/a$, was in in a_0^2/a übergeht, falls Wellen dieser Art allein im selben Gebiet vorhanden sind.

S. 372, Spalte 1, Zeile 1 von oben $+V/2$ statt: $-V/2$.

1) K. Uller, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform; diese Zeitschr. 17, 369, 1916.

Gießen, Oktober 1916.

(Eingegangen 26. Oktober 1916.)

Über die Wirkung von Kristalldetektoren.

Von Bruno Thieme.

Einleitung.

Kürzlich wurde in einer Arbeit[1]) über die Gleichrichterwirkung des Siliziums im Zusammenhang mit seiner Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe berichtet. Da nun die Frage eines Zusammenhanges zwischen Thermokraft und Gleichrichterwirkung letzten Endes lediglich in der drahtlosen Telegraphie von Bedeutung wird, so erscheint es mir nicht unbedenklich, die Versuche mit reinem Gleichstrom durchzuführen, denn die Praxis ergibt, daß bei Zuführung von Hochfrequenzenergie der Anteil der thermoelektrischen Kräfte hinter der reinen Gleichrichterwirkung bedeutend zurücktritt[2]). Wurde bei den obigen Versuchen (l. c., S. 375) die Kontaktstelle Platin—Silizium mit dem Lötrohr erhitzt, so blieb die Gleichrichterwirkung die gleiche. In der Praxis kann mit derart stabilen Kontakten nicht gearbeitet werden; die Stelle wird so empfindlich eingestellt, daß eine feine Druckänderung, wie sie schon leichte Erschütterungen oder geringe Temperaturunterschiede ergeben, eine Änderung der Gleichrichterwirkung, ausgedrückt durch veränderte Empfangslautstärke, erzielt.

Ferner ist bekannt, daß die Frequenz von merklichem Einfluß ist. Ein Detektor hat Maxima für bestimmte Frequenzen, unter Umständen auch noch gröbere Empfindlichkeit für die Zahl der Stromstöße in Perioden (Tonhöhe). Ergibt sich für eine bestimmte Frequenz ein guter Empfang und wird zwischendurch auf eine andere Frequenz gehört, so hat sich die Empfangslautstärke nach der Rückkehr zur ersten Frequenz meist wesentlich geändert. Ein Einfluß der Eigenfrequenz der Telephonmembran, der sonst ohne Zweifel zu berücksichtigen ist, wenn die Messungen nur nach der Lautstärke gemacht werden, kommt hierbei ebensowenig in Frage, wie etwa physiologische Einflüsse.

Früher wurde die Gleichrichterwirkung gerne als Wirkung von „Spitze gegen Platte", in Analogie zum Wehneltunterbrecher, aufgefaßt. Wie ich an anderer Stelle schon ausführte[3]), ist die Annahme falsch; denn im Kontakt stehen sich nicht Spitze und Platte, sondern tatsächlich zwei Platten (Flächen) mit kleiner gemeinsamer Berührungsebene gegenüber. Die Erklärung der größeren Stromdichte bei der Spitze kommt

1) F. Fischer u. E. Baerwind, diese Zeitschr. 17, 373, 1916.

2) Vgl. z. B. W. Pierce, Principles of wireless telegraphy. New York 1910.

3) B. Thieme, Zeitschr. f. techn. Physik 1 (1), 10, 1913.



nur in Frage, wenn eine Flüssigkeitsschicht dazwischen liegt, und keine direkte Berührung stattfindet. Auch solche reinen Polarisationsgleichrichter lassen sich, wie ich ausführen werde, an fast allen bekannten Detektorkombinationen beobachten.

Wie die Praxis vermuten ließ, ergaben meine Untersuchungen, daß es sehr wesentlich ist, unter welchem Winkel zur Kristallachse der Stromdurchgang stattfindet, und an welcher Stelle des Kristalls der erste Eintritt in das ganze Kristallkonglomerat erfolgt, oder, in anderer Vorstellung, unter welchem Winkel die eintretenden Elektronen auf die elektrische Hauptschwingungsebene zur Wirkung kommen. Über die nähere Natur dieser inneren Vorgänge lassen sich nur Vermutungen hegen; zur vollständigen Aufklärung wird für die Gleichrichterwirkung die neuere Gravitationstheorie herangezogen werden müssen.

Hier sei mir nur gestattet, auf einige wesentliche Punkte kurz an Hand der von mir angestellten, zum Teil weiter zurückliegenden Versuche einzugehen.

Symmetrische Kristallformen.

Wenn die zur Verwendung kommenden Kristalle einer zu den drei Raumachsen symmetrischen Kristallform angehören, so spielt die Lagerung des Kristalls selbst keine wesentliche Rolle. Wird in solchem Falle der Kontakt zwischen einem Pulver aus feinsten Kristallen und einer polierten Metallfläche hergestellt, so ergibt sich im allgemeinen eine Verstärkung der Gleichrichterwirkung, entsprechend dem verringerten Widerstande, bzw. dem vermehrten Stromdurchgang. Die Wirkung kennt ein Maximum in der Zahl der passierenden Elektronen, die der Hochfrequenzenergie entstammen; kommt ein reiner Thermoeffekt in Betracht, so muß die beobachtete Wirkung proportional zur Zahl der einzelnen Kontaktstellen geringer werden, da nur $\frac{1}{n}$ des Stromes wärmebildend auf den Kontakt der einzelnen Kristalle wirken kann, wenn n die Zahl dieser Kristalle ist.

Wir erkennen hier ein wichtiges Kriterium für Gleichrichter- oder Thermowirkung.

Verständlich ist, daß bei einer Mehrzahl kleiner Kristalle in festem gegenseitigen Zusammenhang bis zu einer gewissen mittleren Dicke der Kristallschicht die Gleichrichterwirkung sich steigern kann; die einzelnen Kristallagen sind dann als hintereinandergeschaltete Ventilzellen aufzufassen, die in gewisser Zahl der Aufeinanderfolge die Reinheit der Auslese steigern können; solche Effekte lassen sich beobachten, nur dürfen keine hochpolierten oder sonst ungünstig angeschliffenen Kristallflächen verwendet werden, wie sich auch aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt.

Solche Gleichrichtererscheinungen habe ich übrigens auch an Gasen und Kohlenstofflammen gezeigt[1]). Nach meinen bisherigen Erfahrungen müssen sich derartige Erscheinungen auch an flüssigen und fließenden Kristallen nachweisen lassen; gerade hierbei dürfte sich der Einfluß der Gleichrichterwirkung zwischen Stromrichtung und optischer Schwingungsebene besonders bedeutungsvoll studieren lassen.

Unsymmetrische Kristallformen.

Ist die Kristallform unsymmetrisch zur Lage der drei Raumachsen, so treten wesentlich verschiedene Umstände auf: Eine Schichtlage feiner Kristalle zwischen Metallelektroden gebracht, wirkt dann so, daß ein gewisser geringer Anteil Gleichrichterwirkung zeigt, der größere Teil der Kristalle aber nicht.

Somit tritt eine Gleichrichterwirkung nicht merkbar in Erscheinung und bei erhöhtem Stromeffekt kommt die thermoelektrische Kraft zur Geltung. Merkwürdig ist, daß bisher systematische Untersuchungen über die Kristallform bei den Detektoren in dieser Hinsicht nicht gemacht wurden.

Feuchtigkeitsschichten.

Von Fischer und Baerwind[2]) wurde auch die Frage aufgeworfen, ob die Gleichrichterwirkung überhaupt nichts mit der inneren Zusammensetzung des Siliziums zu tun hat, und lediglich die Oberflächenerscheinung einer Feuchtigkeitsschicht sei. Ein etwas angesäuerter Tropfen Wasser zwischen die Kontaktstellen gebracht, ließ Gleichrichterwirkung erkennen, aber stets nur in einer Richtung, während bei direktem Kontakt sofort der Unterschied zwischen positivem und negativem Silizium zutage trat. Dieses Ergebnis, das eine größere Flüssigkeitsmasse hervorbrachte, ist mir erklärlich: die Gegenelektrode aus Kristall tritt in ihrer elektrischen Wirksamkeit hinter ihrer Bedeutung als Fläche in der Anordnung zurück. Kommen aber reine Flüssigkeitshäutchen in Betracht, so kann nach meinen Erfahrungen die Sache doch anders werden. Voraussetzung ist wieder ein sogenannter unvollkommener Kontakt in günstiger Stellung für die Gleichrichterwirkung. Eine solche Flüssigkeitshaut ist dem Kristall kein Fremdkörper mehr, sondern verbindet sich in den Grenzschichten als gewisse

1) B. Thieme, Zeitschr. f. phys. Chemie **89**, (6), 702 u. 710, 1915.

2) l. c. S. 375 unten.

Einheit mit dem Kristallgefüge, zum mindesten in elektrischer Hinsicht. Bei der elektrischen Belastung des Wassers werden dann auch die Kristallsysteme in Mitwirkung gebracht. Solch ein Einfluß konnte an verschiedenen gebräuchlichen Kristallen für unvollkommenen Kontakt nachgewiesen werden.

Der Einfluß der Feuchtigkeitsschicht ist zuweilen beim Kristalldetektor sogar maßgebend, indem völlige Entfernung diesr Schicht Aufhören der Gleichrichterwirkung bedingt. Praktisch findet sich solche Schicht auf fast jedem Körper vor; sie von Kristallen zu entfernen ist so gut wie unmög. ch, da das Kristallwasser stets neue Dämpfe entwickeln kann, die sich dann kondensieren.

Zum Beweis diente folgender Versuch[1]).

In eine funkentelegraphische Empfangsanordnung wurde in bekannter Weise ein Detektor eingeschaltet, dessen Kontaktteile beiderseits aus hochpoliertem Kupfer, in Form von Spitze und Platte, bestanden. Bei geeignetem unvollkommenen Kontakt wurde empfangen, und zwar mit etwa $^1/_3$ der Lautstärke bei Verwendung normaler Kristalldetektoren.

Mit zunehmender Entfernung der Feuchtigkeit aus der Umgebung auf physikalischem Wege und damit von den Kontaktflächen, wurde der Empfang schlechter. Das Saitengalvanometer zeigte anfangs ein Verhältnis der Stromwerte in beiden Richtungen von 1:9 an, das sich allmählich bis zu 2:3 änderte; damit hörte praktisch der Empfang auf.

Wesentlich bei solchen Messungen, wenn sie überhaupt einen Wert haben sollen, ist stets die gleichzeitige Benutzung eines Telephons (Untersuchung auf Tonreinheit usw.), Saitengalvanometers (Größe der Ströme in beiden Richtungen) und eines Lautstärkemessers. Später komme ich darauf noch kurz zurück.

Der vermutete Einfluß einer Thermokraft ist bei allen diesen Vorgängen nur mit größter Vorsicht zuzulassen. Ohne Zweifel entsteht eine thermische Wirkung am unvollkommenen Kontakt beim Stromdurchgang. Da die Widerstandswerte dieser Kontakte recht hoch zu sein pflegen, kann die örtliche Erhitzung auch möglicherweise merkliche Größe annehmen; für die thermoelektrische Wirkung dürften aber die hervorgerufenen Effekte doch zu geringfügig sein.

Es darf nicht vergessen werden, daß die Thermokraft eine Funktion der Zeit, wenigstens bis zu einem gewissen Abschnitt, ist, wohingegen die Gleichrichterwirkung eine Funktion des Potentials ist. Entweder nimmt man an, die Kontakte leiten so gut die entstandene Wärme ab, daß die Thermokraft den ca 500 Tonschwingungen/sec mit allen Feinheiten folgen kann, dann dürfte die Thermokraft nie Werte annehmen können, die imstande sind, das Telephon zu erregen, bzw. den Blockkondensator aufzuladen, oder aber es wird das Gegenteil vorausgesetzt, und es müßte die Wirkung sich bis zu einem gewissen Zeitpunkt erhöhen. Dieses ist nicht der Fall.

Denkbar ist wohl nur noch, daß thermische Effekte die Kontaktteile selbst beeinflussen, so daß mechanische Schwankungen entstehen, die den erregenden Strömen folgen. Aber alle diese Erklärungen erscheinen gezwungen, wenn man daneben lediglich die Kristallform betrachtet.

Auch die Erfahrungen von C. Tissot[1]), die scheinbar thermoelektrische Kräfte dartun, sprechen für die neue Auffassung, die ich näher durch die gemachten Versuche begründen will.

Beobachtungen.

Die Kristalle können aufgefaßt werden als eine größere Anzahl parallel und in Serie geschalteter Ventilzellen. Das mechanisch eingeschlossene Wasser oder das Kristallwasser bilden die Polarisationsschicht zwischen den Kristallelektroden des Innern. Die Dicke des Kristalls sollte einen Einfluß haben. Tatsächlich wird aber beobachtet, daß auch eine sehr dünne Kristallscheibe noch mit gleicher Güte arbeitet (wenn nicht die geänderten Widerstandsverhältnisse die Schwingungsdaten des Meßkreises ändern). Die Fläche darf aber nicht geschliffen oder hochpoliert sein; wesentlich ist ferner, ob eine natürliche Kristallfläche oder eine Bruchfläche zum Kontakt verwendet wird. Einige, sonst gut brauchbare Kristalle, zeigen an bestimmten Flächen überhaupt keine Gleichrichterwirkung.

Ganz fein zerriebenes Kristallpulver (also zerstörte kleinste Kristalle) zeigt im allgemeinen keine Gleichrichterwirkungen; die Ordnung der einzelnen Moleküle zueinander ist demnach von größtem Einfluß. Es kommt darauf an, wie der Eintrittswinkel der Stromrichtung zu der Kristallachse liegt; die darunter befindlichen Schichten lassen dann den Strom in gleicher Weise passieren. Dies erklärt das obige Ergebnis, nach dem die Stärke der Platte ohne Einfluß war; als geläufiges Beispiel möchte ich eine Anzahl Nicols heranziehen. Sind alle gleichgerichtet, so kommt es nur darauf an, wie das Licht in die erste Schicht der Nicols einfällt. Die Zahl der dahinterliegenden Nicols ist dann — außer durch geringe Lichtschwächung —

1) Zeitschrift für technische Physik **1** (1), 10, 1913.

1) l'Electricien **39**, 331, 1910.



ohne Einfluß. Liegen alle Nicols (entsprechend dem fein pulverisierten Kristall) bunt durcheinander, so findet auch kein Lichtdurchgang statt.

Kristalle des regulären Systems zeigen sich denn auch unabhängiger von der Eintrittslage, als die anderer Systeme; aber selbst bei gleicher, nur um 90° oder 180° gedrehter Lage der optischen Achse ist ein Unterschied in der Gleichrichterwirkung bemerkbar, hervorgerufen durch die Beschaffenheit der jeweiligen Oberfläche, und hierbei möchte ich dem Kristallwasser, bzw. der aufliegenden Flüssigkeitsschicht, die bestimmende Hauptrolle zuweisen.

Damit ist nun nicht gesagt, daß Kristalle des regulären Systems sich am besten zu Detektoren eignen. Mit gleichem Rechte ließe sich sonst behaupten, daß sich Steinsalz als Kristall regulären Systems besser für optische Polarisation eignet als das hexagonale System des Kalkspats. Allerdings ist auch hier der Begriff elektrischer Polarisation mit Bezug auf die optischen Kristallachsen vorsichtig zu bewerten.

Charakteristisch hierfür ist der Gneis; ein geschichteter Granit, der in parallelen Ebenen schwarzen Glimmer enthält. Feldspat herrscht vor und bedingt die rötliche Farbe. Der Gneis gehört somit zu den gemengten Gesteinen. Gemengteile, die sich zufällig finden, sind z. B. Graphit, Turmalin, Magneteisenstein u. a. Das bedingt auch je nach Ursprung und Flächenbruch eine ganz besondere Wirkung, wobei die Kristalle, die im Gneis als in kristallinisch fester Lösung befindlich zu betrachten sind, besonders hervortreten. Die Bedeutung der Mischkristalle und aller Körper, die in amorpher oder kristallinischer Lösung in dem Detektorkristall, meist zahlreicher als vermutet wird, vorhanden sind, darf nicht unterschätzt werden.

Dabei erklärt sich, daß eine Metallspitze gegen eine Kristallfläche angesetzt bessere Wirkungen ergibt, als eine Kristallspitze gegen eine Metallfläche. Es ist ganz besonders schwer und lediglich dem Zufall überlassen, wenn in diesem letzten Falle der richtige Eintrittswinkel getroffen wird.

Eine Kristalloberfläche[1]) mit parallel angeritzten Linien gibt im allgemeinen gesteigerte Wirkung, wenn die Metallspitze gegen die Kante der geritzten Linie stößt. Wasserhaltiger Alkohol zwischen die etwas voneinander entfernten Detektorteile gebracht[2]), ergibt eine geringere Wirkung (entsprechend dem gesteigerten Widerstand), die annähernd proportional dem erhöhten Abstand sinkt.

1) Polierte und geschliffene Kristallflächen geben keine Wirkung.

2) Ztschr. f. techn. Physik, S. 10, 1913.

Einen besonders markanten Fall will ich noch erwähnen:

Detektoren aus reinem Kupfer zeigen annähernd keine Gleichrichterwirkung, wenn die Flüssigkeitshaut entfernt ist. Kupfer gehört dem regulären System an, die Kristalle sind aber unregelmäßig verwachsen.

Wird die Kontaktfläche nun angeätzt, so daß sich aus der polierten Metalloberfläche im Stereomikroskop das Tiefengefüge deutlich erkennen läßt, so tritt eine kräftige Gleichrichterwirkung im Verhältnis 1 : 8 ein. Ein etwaiger Einfluß der sich bildenden Oxydschicht konnte nicht festgestellt werden. Der Kontaktdruck spielt nur eine sekundäre Rolle, insofern dadurch ein günstigster Zustand für den Eintritt des Stromes erreicht, bzw. gestört wird.

Noch wesentlich verstärkt wurde die Wirkung (bis auf 1 : 10), wenn Kupfer und Silber zu einer Legierung mittlerer Konzentration verschmolzen wurden; es entstehen hierbei zwei Gemenge heterogener Metallarten, regulär und in Oktaedern kristallisiert, nämlich solche von schwach silberhaltigem Kupfer und solche von schwach kupferhaltigem Silber, die aber keine eigentlichen Mischkristalle bilden. Wir haben es hier nur mit Gemengen, nicht aber mit festen Lösungen zu tun. Es ist anzunehmen, daß die Lagerung für den Übertritt des Stromes besonders günstig ist.

Noch interessanter sind die Fälle, wo wir es mit wahren Mischkristallen[1]), so z. B. beim Kupfer und Nickel, zu tun haben. Die hierbei angestellten Untersuchungen haben zum Teil zu überraschenden Ergebnissen geführt, deren Veröffentlichung ich mir vorbehalte. Jedenfalls steht fest, daß der Weg über das Studium der Kristalle selbst nicht unwesentlich zur Erkenntnis der Gleichrichterwirkungen im Kristall ist, und hierbei lassen sich gerade die metallischen Kristalle meist systematisch herstellen und anwenden, insbesondere in bezug auf ihre planmäßige Verwendung von Mischkristallen; die gewonnene Erkenntnis über den Zusammenhang zwischen Elektronenleitung und Kristallachsen wird für diese Fälle auch der reinen Physik von Vorteil sein.

1) Es ist hierbei zu unterscheiden zwischen geschliffenpolierten und geätzten Flächen, sowie Bruchflächen; auch ändert sich das Ergebnis mit schneller oder langsamer Abkühlung der Schmelze.

Berlin, im Oktober 1916.

(Eingegangen 3. November 1916.



Ein einfaches Saitenelektroskop.

Von C. W. Lutz.

Für viele elektrostatische Messungen genügt ein Instrument von der Empfindlichkeit des Blättchenelektroskops. Trotz seiner bekannten Mängel wird daher dieses Elektroskop noch heute vielfach verwendet, wohl hauptsächlich wegen seiner äußerst einfachen Handhabung.

Im folgenden möchte ich ein „Saitenelektroskop" beschreiben, das an Einfachheit der Handhabung den Blättcheninstrumenten nicht nachsteht, trotzdem aber alle Vorzüge des Saitenprinzips besitzt. Bei entsprechender Spannung der Saite läßt sich zudem eine höhere Empfindlichkeit oder ein weit größerer Meßbereich als beim Blättchenelektroskop erzielen. Da auch bei unvorsichtiger Aufladung die Saite nicht leicht reißt, das Instrument überhaupt keinerlei besondere Vorsicht in der Behandlung verlangt, so dürfte es sich auch zu Messungen im Freien, im physikalischen Praktikum und in der Radiumtherapie eignen.

Fig. 1 zeigt das Saitenelektroskop im Längsschnitt, Fig. 2 in photographischer Ansicht. Es besteht im wesentlichen aus zwei selbständigen Konstruktionsteilen, dem Einsatz *K*—*B* (Fig. 1) und dem Gehäuse *G*. Ersterer setzt sich zusammen aus der Kopfplatte *K* und dem daran befestigten Bügel *B*. Nach Lösung der beiden Schrauben 1 und 2 und Entfernung des Mikroskops *M* (Fig. 2) kann der Einsatz senkrecht nach oben aus dem Gehäuse herausgezogen werden.

Am Bügel *B* (Fig. 1) ist die Saite *S*, ein Platindraht von 2,5 μ Dicke und 45 mm Länge, ausgespannt und leitend mit demselben verbunden. Bügel und Saite werden von einer polierten Quarzplatte *Q* getragen und sind dadurch vom Gehäuse isoliert. Der Saite gegenüber steht die Schneide *Sch*, die an der Bodenplatte *P* des Gehäuses befestigt ist und mit diesem stets geerdet wird (Erdungsklemme *e* Fig. 2). Beim Aufladen des Elektroskops über die Stecksonde *St* (Fig. 1) wird die Saite von der gleichfalls mitgeladenen Bügelstange *B* abgestoßen und von der geerdeten Schneide *Sch* angezogen. Die Größe der Durchbiegung wird dnrch das Mikroskop *M* (Fig. 2) mit Okularmikrometer gemessen. Das Elektroskop wird im allgemeinen nur in dieser einen Schaltung (Doppelschaltung) verwendet und muß empirisch

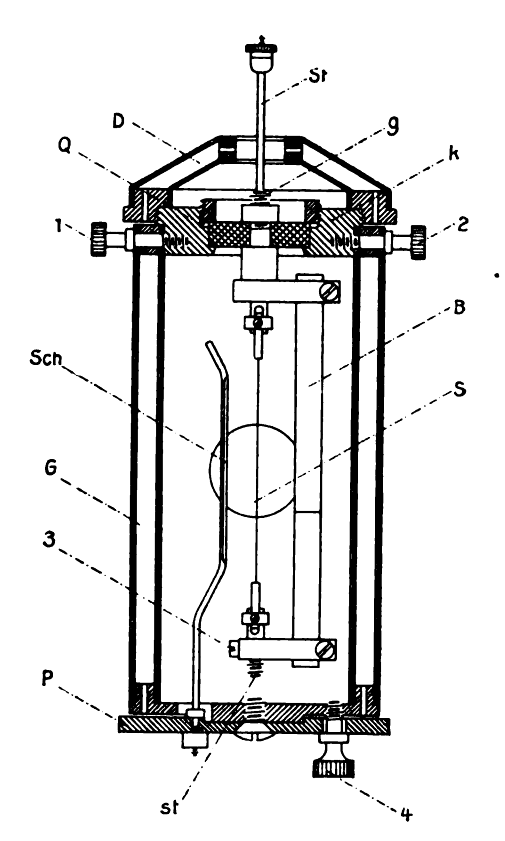


Fig. 1.

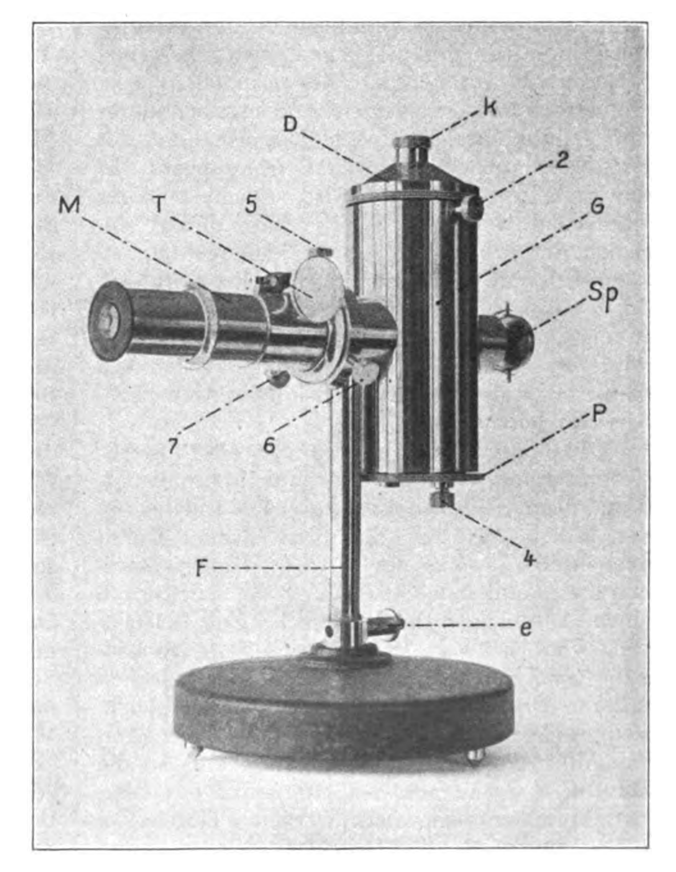


Fig. 2.

geeicht werden. Für besondere Zwecke wird das Instrument auch mit isolierter Schneide geliefert und kann dann auch in Differentialschaltung gebraucht werden.

Besondere Vorkehrungen wurden getroffen, um alle Wärmeeinflüsse unschädlich zu machen, die in hohem Maße die Angaben eines Saiteninstruments stören können. Diesem Zwecke dient in erster Linie eine einfache und verläßlich wirkende Temperaturkompensation, die gleich mit dem Träger *B* (Fig. 1) vereinigt ist. Die runde Bügelstange *B* besteht nämlich im oberen Teile aus Messing, im unteren Teile aus Stahl. Die wirksamen Längen dieser beiden Stücke wurden durch Ausprobieren im Thermostaten gefunden. Außerdem erwies sich auch noch ein Schutz gegen Wärmestrahlung als notwendig. Zu diesem Zwecke sind das Gehäuse *G* (Fig. 1) und der Deckel *D* doppelwandig ausgeführt und vernickelt. Durch den Zwischenraum kann Luft hindurchstreichen.

Im Bestreben, die Konstruktion möglichst einfach zu gestalten, wurde auf die Verwendung eines von außen her zu bedienenden Spannkopfes ganz verzichtet. Durch eine einfache Vorrichtung kann indessen die Saitenspannung um hinreichend kleine Beträge geändert werden, um, wenn erwünscht, Empfindlichkeit und Meßbereich innerhalb der möglichen, ziemlich weiten Grenzen zu verändern. Dies ermöglicht eine dem Instrument beigegebene Schraubenmutter mit Teilung, welche, nach Herausnahme des Einsatzes, auf den unteren Befestigungsstift *St* der Saite aufgeschraubt wird. Nach mäßiger Lockerung der Schraube 3 wird durch Anziehen der Mutter um 1 bis 2 kleine Trommelteile die Saite gespannt, durch Hineindrücken der etwas zurückgeschraubten Mutter entspannt. In dieser Weise läßt sich leicht eine schwache, mittlere und starke Saitenspannung erzielen und damit einer der weiter unten angeführten Meßbereiche herstellen.

Das Mikroskop *M* (Fig. 2), von 75 facher Vergrößerung, ist durch drei Druckschrauben 5, 6 und 7 am Gehäuse befestigt. Die Einstellung das Mikroskops auf die Saite erfolgt durch den Trieb *T*, wobei ein zu weites Hineinschrauben und damit eine Gefährdung der Saite durch einen Anschlag verhindert wird. Zur Beleuchtung von rückwärts dient der allseits verstellbare Spiegel *Sp*. Durch Lockern der einen unteren Druckschraube (6 oder 7) und gleichzeitiges Anziehen der gegenüberliegenden kann das Mikroskop seitlich verschoben und so die Saite sehr genau auf den Nullpunkt des Okularmikrometers eingestellt werden. Durch Zurückschrauben der drei Druckschrauben 5, 6 und 7 läßt sich das Mikroskop ganz abnehmen.

Das Okularmikrometer besitzt 50 Skalenteile und trägt einen Längsstrich durch die ganze Teilung, wodurch eine scharfe Ablesung ermöglicht wird. Damit das Saitenbild auch bei den größten Ausschlägen gleichmäßig scharf im Mikroskop erscheint, läßt sich die Schneide *Sch* (Fig. 1) mittels der Platte *P* nach vorwärts oder rückwärts drehen und in der richtigen Lage durch die Schraube 4 festklemmen. Diese Verstellung kann bei geladenem Elektroskop von außen her vorgenommen werden und ist überhaupt nur nötig, wenn eine neue Saite eingezogen wurde.

Die Zuleitung zur Saite erfolgt durch die dünne Stecksonde *St* (Fig. 1). Es kann aber auch ein größerer Instrumententeil, etwa eine Kondensatorplatte oder ein Zerstreuungskörper, auf das 4 mm-Gewinde *g* des Bügels *B* aufgeschraubt werden. Oder es wird das Elektroskop selbst mit dem Gewinde der Kopfplatte *K* in einen anderen Apparat eingeschraubt. Dabei ist seine Lage ganz gleichgültig, denn das Saitenelektroskop kann auch horizontal und überkopf verwendet werden. Selbstredend ist bei dieser Verwendungsart erst der schwere Gußeisenfuß *F* (Fig. 2), auf dem das ganze Instrument ruht, kurz am Gehäuse abzuschrauben und der Deckel *D* zu entfernen.

Wie eingangs erwähnt, besitzt das Saitenelektroskop nur einen einzigen Isolator, der aus einer geschliffenen und polierten Quarzglasplatte (geschmolzener Bergkristall) besteht. Dieses Material eignet sich nach meinen Erfahrungen viel besser für elektrostatische Meßinstrumente und namentlich für Saitenelektrometer als echter Bernstein, und zwar aus folgendem Grunde. Bei stärkerer Abkühlung tritt nämlich eine bleibende Zusammenschrumpfung des Bernsteinkörpers ein, so daß eingeklemmte Isolatoren dadurch locker werden und tiefer in ihren Sitz einsinken. Von diesem Mangel ist nun geschmolzener Quarz frei. Dabei isoliert geschliffenes und sorgfältig poliertes Quarzglas bei richtiger Behandlung ebenso vorzüglich wie echter Bernstein. In dem Zustande, in dem der polierte Quarz aus der Fabrik bezogen wird, isoliert er freilich ganz ungenügend. Die Ursache davon ist eine schwach leitende Oberflächenschicht, die von Rückständen aus dem Polierverfahren herrührt. Diese leitende Schicht wird durch Auskochen in Salz- und nachher Salpetersäure mit darauffolgendem Waschen in absolutem Alkohol und destilliertem Wasser vollständig entfernt. Ich habe Quarzstücke verschiedener Form und verschiedener Herkunft untersucht und bei allen durch das obige Verfahren eine vorzügliche Isolation erreicht. Vergleichende Isolationsmessungen

mit gleich großen, frisch gereinigten Bernstein- und Quarzplatten im geschlossenen Saitenelektroskop ergaben in beiden Fällen denselben Spannungsverlust von 0,3 Volt pro Stunde, bei einer Anfangsladung von 100 Volt. Ein Teil dieses Elektrizitätsverlustes wird durch die nie fehlende Leitfähigkeit der Luft im Innenraum des Elektroskops verursacht, die am Anfang der Isolationsmessung, kurz nach dem Verschließen des Elektroskops, verhältnismäßig groß ist.

Zu demselben günstigen Ergebnis führten Isolationsprüfungen von polierten Quarzstäben.

Alle diese Messungen zeigen, daß das Isolationsvermögen des geschmolzenen, geschliffenen und polierten Quarzes ein ganz vorzügliches ist und dem des echten Bernsteins nicht nachsteht.

Ist die Isolation im Laufe der Zeit aus irgendwelchen Gründen schlechter geworden, so wird sie durch mehrstündiges Einlegen des Quarzisolators in kalte Salpetersäure und nachfolgendes Waschen mit absolutem Alkohol und destilliertem Wasser vollkommen wieder hergestellt. In den meisten Fällen genügt aber schon ein bloßes Reinigen mit destilliertem Wasser.

Nebenbei möchte ich erwähnen, daß im Schmelzfluß hergestellte und nicht weiter bearbeitete Quarzstücke schon ohne Säurebehandlung, nur nach gründlicher Reinigung ihrer Oberflächen vorzüglich isolieren. Leider läßt sich durch Schmelzen allein der Quarz nicht in eine so regelmäßige Form bringen, daß er als Instrumententeil verwendet werden könnte. Für Versuchszwecke ist aber immerhin dieser feste und billige Isolator recht wohl zu gebrauchen[1]).

In Fig. 3 sind Eichkurven für drei verschiedene Saitenspannungen dargestellt, und zwar a für schwache, b für mittlere und c für starke Saitenspannung. Durch entsprechende Änderung der Saitenspannung in der oben angegebenen Weise lassen sich je nach Bedürfnis Eichkurven erhalten, die zwischen den eingezeichneten liegen. In nachstehender Tabelle sind die zu den Eichkurven der Fig. 3 gehörigen Meßbereiche, sowie die Empfindlichkeiten für mittlere Saitenausschläge zusammengestellt.

Saitenspannung (Tr. T.)	Meßbereich Volt	Mittl. Empfindl. Volt/Skt.
a) Schwach (0,4)	4—98	1,5
b) Mittel (1,2)	7—305	4
c) Stark (1,6)	16—970	17

Bei der scharfen Ablesung, die ein Vorzug aller Saiteninstrumente ist, lassen sich leicht Zehntel-Skalenteile schätzen, so daß bei mittleren Saitenausschlägen noch Potentialänderungen beobachtet werden können, die den zehnten Teil der in Spalte 3 angegebenen Werte betragen.

Die Handhabung des Saitenelektroskops ist äußerst einfach. Ist einmal das Mikroskop auf 0 eingestellt, so braucht nur die Kapsel *K* (Fig. 2) abgezogen und die Zuleitungssonde aufgesteckt zu werden, um das Elektroskop gebrauchsfertig zu machen. Eine Aufstellung des Instruments auf eine genau horizontale Unterlage ist überflüssig, wenn nur jedesmal der Nullpunkt genau eingestellt wird, denn nur dann entsprechen den abgelesenen Ausschlägen die der Eichkurve zu entnehmenden Voltzahlen. Noch weniger als durch kleine Schwankungen werden die Ablesungen durch Erschütterungen beeinflußt. Insbesondere stören bei stärkerer Saitenspannung selbst kräftige Erschütterungen gar nicht.

Die Aufladung des Elektroskops geschieht am besten mit Hilfe des „Ladestabes" von Spindler & Hoyer. Bei starker Saitenspannung kann mittels einer geriebenen Hartgummistange bis zum Einsetzen der Selbstentladung (— 1150 Volt) aufgeladen werden, ohne daß dadurch die Saite zerreißt. Die erstmalige Höchstladung kann unter Umständen ein Ausrecken kleiner Krümmungen der Saite bewirken, das sich in

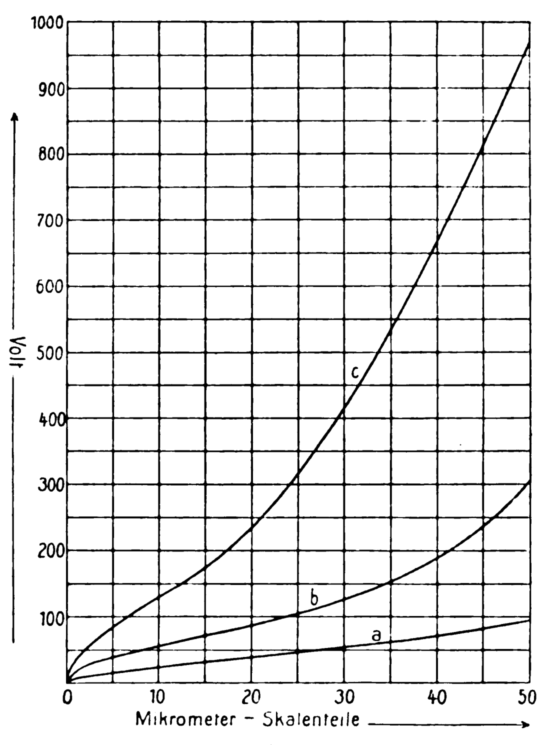


Fig. 3.

1) Quarzisolatoren liefert W. C. Heraeus, Hanau. Die geschliffenen und polierten Quarzisolatoren sind nicht teurer als solche aus echtem Bernstein.

einer geringfügigen Verlegung des Nullpunktes kenntlich macht. An Elastizität büßt die Saite dadurch nichts ein; nur wird das Elektroskop etwas empfindlicher und muß in diesem Falle neu geeicht werden.

Das Saitenelektroskop läßt sich auch zum Registrieren und Projizieren verwenden, wobei gleich das Mikroskop selbst als Projektionskopf verwendet werden kann. Die Okularskala wird mitprojiziert.

Die Hauptmaße des Elektroskops ohne Fuß sind: Durchmesser 50 mm, Höhe mit Deckel 120 mm, Gewicht 760 g. Die Kapazität (ohne Deckel und Sonde) beträgt 6 cm.

Das Instrument wird von der Firma Edelmann in München hergestellt.

Die bei der Konstruktion dieses Elektroskopes gesammelten Erfahrungen habe ich zur Verbesserung meines früher beschriebenen Saitenelektrometers[1]) verwertet, worüber in einer späteren Arbeit berichtet werden soll.

Der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften verdanke ich die Mittel zur Beschaffung einiger Hilfsinstrumente, die zu den vorstehenden Messungen notwendig waren. Ich möchte mir daher gestatten, auch an dieser Stelle hierfür meinen besten Dank auszusprechen.

1) Diese Zeitschr. **13**, 954, 1912.

München, Magnet. Observatorium b. d. Sternwarte, November 1916.

(Eingegangen 13. November 1916.)

Gleichheitsphotometer für Röntgenstrahlenhärtemesser.

Von H. Seemann.

Die bisher im Gebrauch befindlichen Röntgenstrahlenabsorptionshärtemesser, bei denen die Helligkeit zweier Felder eines fluoreszierenden Leuchtkörpers (Leuchtschirm) durch zwei zwischengeschaltete Absorptionskörper mit verschiedenen absorbierenden Eigenschaften auf Gleichheit eingestellt wird, gestatten ebenso wie bei den rein optischen Gleichheitsphotometern die genaueste Ablesung der Helligkeitsgleichheit dann, wenn die Vergleichsfelder vom Auge ohne Saum unmittelbar aneinander angrenzend gesehen werden. Diese Bedingung kann bei den bis heute bekannten Härtemessern der gekennzeichneten Art, die nicht mit Prismenoptik versehen sind, niemals in genügender Vollkommenheit erreicht werden, da die endliche Ausdehnung des Brennflecks der Röntgenröhren, besonders der Therapieröhren, vor allem aber die Überstrahlung innerhalb des fluoreszierenden Körpers es nicht ermöglicht, vollkommen saumlose Schatten der absorbierenden Körper unmittelbar aneinander angrenzend auf dem Leuchtschirm zu entwerfen.

Der zu beschreibende Gedanke ist nun der, bei solchen Röntgenstrahlenhärtemessern, bei denen gleiche Helligkeit der Fluoreszenz von Leuchtschirmen abgelesen werden soll, Biprismen zu verwenden, die bewirken, daß dem beobachtenden Auge die Vergleichsfelder saumlos unmittelbar aneinander anzugrenzen scheinen.

Ihre Verwendung in der speziellen Form der Fig. 6 ist bei Photometern bekannt, z. B. beim Martensschen Polarisationsphotometer. Von der Verwendung des Lummer-Brodhunschen Photometerwürfels soll abgesehen werden, weil er nicht geradsichtig ist und Linsenoptik erfordert, ferner auch binokulares Sehen nicht ermöglicht.

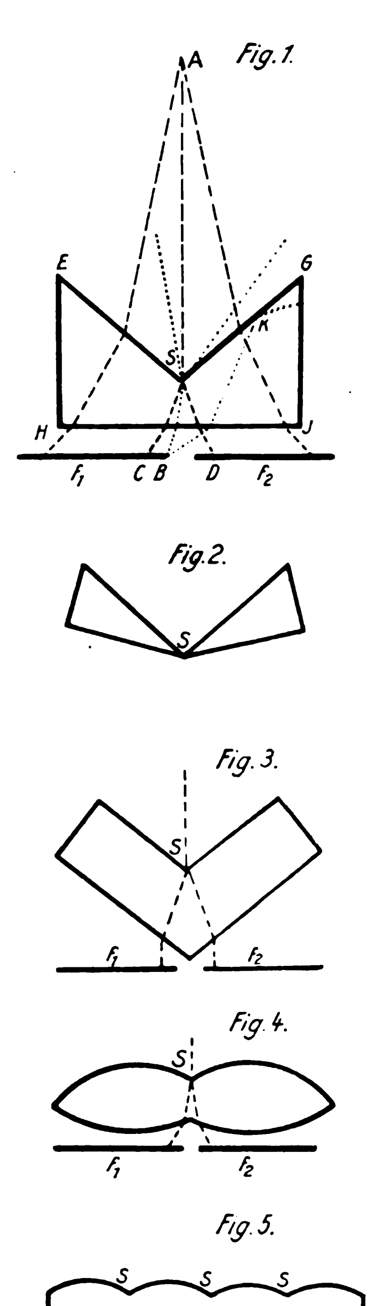
Im vorliegenden Falle soll unter Biprisma ganz allgemein jedes aus zwei Prismen derart zusammengesetzte System verstanden werden, daß die Komponenten, von denen das eine das Spiegelbild des anderen an einer Symmetriefläche ist, entweder mit den brechenden Kanten oder mit den Basen zusammenstoßen, und zwar in der Weise, daß mindestens zwei der brechenden Flächen in einer scharfen Raumkante (Symmetriekante) zusammenstoßen, die in der Symmetriefläche liegt.

Unter Prisma ist im weitesten Sinne jeder zum Zwecke der Ablenkung von Strahlenbündeln durch Brechung konstruierte Glaskörper zu verstehen, dessen Hauptschnitt ein geradliniges oder krummliniges Dreieck ist, in dem eine Seite als Basis, die gegenüberliegende Ecke als brechender Winkel und die beiden andern Seiten als brechende Flächen aufzufassen sind. Es sind also auch Prismen mit zylindrischen oder kegelförmigen brechenden Flächen, endlich auch Linsensegmente als Komponenten von Biprismen anzusehen, insofern als für den vorliegenden Zweck nicht ihre axial oder zentral sammelnde oder zerstreuende Wirkung benutzt wird, sondern nur die einseitige Ablenkung von oder zur Symmetriefläche.

Das Biprisma ist in allen Fällen derart zwischen dem Auge und den Vergleichsfeldern angeordnet, daß seine Symmetriefläche zwischen den Vergleichsfeldern hindurch verläuft und die Symmetriekante parallel den Vergleichsfeldern. Dabei ist es gleichgültig, ob die Symmetriekante auf der dem Auge oder den Vergleichsfeldern zugewandten Seite des Biprismas liegt.

Es mögen zunächst einige bisher für Photometer noch nicht verwendete Typen von Biprismen beschrieben werden, die mit ihren

brechenden Kanten zusammenstoßen. Sie könnten Konkavbiprismen genannt werden. In Fig. 1 ist $ESGJH$ der Hauptschnitt eines geraden Konkavbiprismas mit den ebenen brechenden



Flächen ES, GS, und HJ. A ist der Ort des Auges, f_1 und f_2 sind in allen Figuren die fluoreszierenden Vergleichsfelder des Röntgenhärtemessers, die hier beispielsweise in einer Ebene liegen mögen. Die absorbierenden Körper des Härtemessers sind unterhalb f_1 und f_2 zu denken, die Röntgenröhre so angeordnet, daß der Röntgenschatten der absorbierenden Körper auf f_1 und f_2 fällt. Durch A und S läuft die in diesem Falle ebene Symmetriefläche senkrecht zur Zeichenebene.

Es können nun von allen Punkten von f_1 durch die Fläche ES und desgleichen von f_2 durch die Fläche GS Strahlen nach A gelangen, mit Ausnahme der zwischen C und D gelegenen Punkte oder umgekehrt, der ganze zwischen den Strahlen CS und DS gelegene Raum ist von A aus nicht sichtbar. In der Symmetriekante S scheinen daher die Punkte C und D vereinigt, d. h. die Fläche f_1 grenzt für den Beobachter in A mit ihrer scheinbaren Kante C an die scheinbare Kante D der Fläche f_2 unmittelbar an.

Strahlen, die von irgendeinem zwischen C und D gelegenen Punkte B kommen, treffen den Punkt A nicht. Der Strahl BS nimmt den Verlauf der punktierten Linien von S aus. Der Strahl BK und alle, die noch weiter nach G zu laufen, werden in K total reflektiert und treten durch die Basis GJ aus.

Der Abstand CD wird umso größer, je mehr sich der brechende Winkel der Biprismenkomponenten 90^0 nähert und umso kleiner, je mehr er sich 0^0 nähert. Da der Raum zwischen den Strahlen CS und DS optisch nicht mitwirkt, so kann er mit beliebigem optisch nicht aktivem Material ausgefüllt werden. Daraus ergibt sich, daß man dieses Konkavbiprisma auch aus zwei Prismen zusammensetzen kann, die nur in der Kante S genau zusammenstoßen.

Eine besonders einfache Ausführung dieses zusammengesetzten Biprismas ist in Fig. 2 wiedergegeben. Die Neigung der Prismen gegeneinander kann beliebig sein.

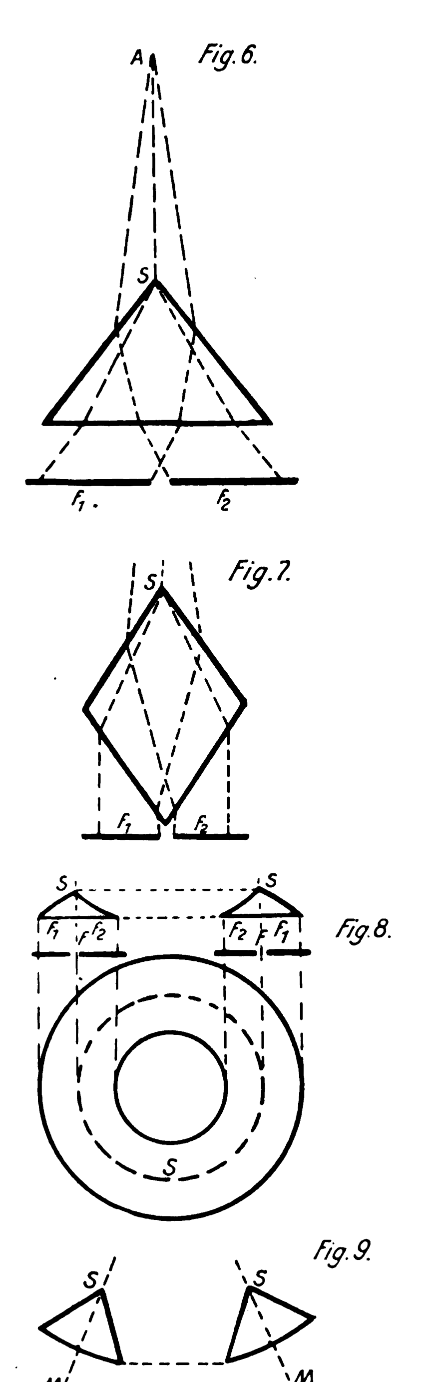
Fig. 3 zeigt, daß auch zwei verkittete oder auch ohne Kitt zusammengepaßte planparallele Platten einen Raum entstehen lassen, der von A aus nicht gesehen werden kann. Er ist umso breiter, je steiler die Platten gegeneinander geneigt sind und je dicker sie sind.

Fig. 4 zeigt den Hauptschnitt eines Biprismas aus Zylinder- oder Kugellinsensegmenten. Letzteres hat eine kreisförmige Symmetriekante S.

Fig. 5 stellt den Hauptschnitt eines aus mehreren solchen Zylinder oder Kugellinsen zusammengesetzten Systems dar. Letztere können schachbrettartig zu ganzen Feldern vereinigt werden für entsprechende Vergleichsfelderfiguren.

Die zweite Gruppe von Biprismen, die man im Gegensatz zu den oben dargestellten als Konvexbiprismen bezeichnen könnte, ist in Fig. 6 bis 9 dargestellt. Der in Fig. 6 wiedergegebene Typ ist der, den man gewöhnlich allein als

Biprisma bezeichnet. Wie ohne weiteres ersichtlich, kreuzen sich hier die Strahlenbündel, so daß die äußeren Randgebiete von f_1 und f_2 in S zusammenzufallen scheinen. Die Felder



werden wie durch Parallelverschiebung vertauscht.

Fig. 7 stellt eine Verdoppelung von Fig. 6 dar mit rhombischem Hauptschnitt. Mit quadratischem Hauptschnitt, also als Würfel, leistet sie dieselben Dienste.

Die Symmetrieflächen aller bisher beschriebenen Biprismen sind Ebenen. Es möge in Fig. 8 und 9 noch je eine Ausführung mit zylindrischer und kegelförmiger Symmetriefläche dargestellt werden. Es sind Ringprismen. Fig. 8 zeigt zwei doppelt gekrümmte und eine ebene brechende Fläche. Erstere sind leicht zu schleifende Kugelzonen. Fig. 9 besitzt zwei gerade kegelförmige und eine kugelförmige Fläche. Die Form 8 ist im Hauptschnitt und in der Aufsicht dargestellt. F ist die Spur des Symmetriezylinders. In Fig. 9 ist M die Spur des Symmetriekegels. f_1 und f_2 müssen für beide Ausführungen konzentrische Ringe sein, bei 9 am besten konzentrische Kegelringe symmetrisch zum Kegel M.

Die brechenden Eigenschaften des Biprismas müssen also allgemein gesprochen die sein, daß sie ein vom Punkte A ausgehendes Strahlenbündel an der Symmetriekante in zwei Teile spaltet, die sich nach Passieren des Biprismas entweder nicht mehr oder doch mindestens innerhalb einer noch so kleinen Zone nicht vereinigen oder sich nach Passieren der Symmetriekante vollständig kreuzen.

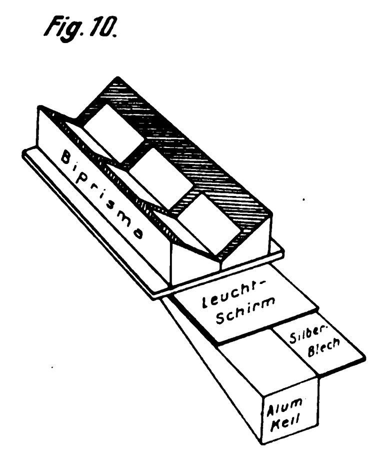
Aus den Figuren, insbesondere Fig. 1, 3, 4, 6, ist ersichtlich, daß die fluoreszierenden Felder f_1 und f_2 erheblich größer sein können als die zum Auge gelangenden Strahlenbündel und beliebig weit voneinander getrennt liegen können. Man kann sie daher samt den zugehörigen absorbierenden Körpern so groß wählen, daß die Schattenränder der absorbierenden Körper auf f_1 und f_2 auch bei sehr schief auffallenden Röntgenstrahlen nicht im Gesichtsfelde erscheinen. Es ist also nicht nötig, einen mit Biprismenoptik ausgestatteten Härtemesser in einer ganz bestimmten Neigung zu dem einfallenden Röntgenbündel zu halten, wie es bei den bisher bekannten gewöhnlichen Härtemessern mit angrenzenden Vergleichsfeldern unbedingt notwendig ist. Dieser Vorzug ist neben der vollkommenen Randschärfe praktisch der wichtigste.

Der Vorteil der Biprismenoptik etwa gegenüber der Verwendung des Lummer-Brodhunschen Photometerwürfels ist erstens der, daß sämtliche Biprismen geradsichtig sind, was für die Bequemlichkeit der Handhabung des Härtemessers und die Sicherheit des Beobachters vor Bestrahlung wesentlich ist. Der Lummer-Brodhunsche Würfel hat dagegen prinzipiell einen unsymmetrischen Strahlengang. Zweitens kann ein Biprisma ohne Linsenoptik leicht und billig für mehrere nebeneinanderliegende ausgedehnte Vergleichsfelder benutzt werden, wodurch die Vergleichsgenauigkeit steigt. Drittens

können sie leicht und billig in Gruppen kombiniert werden, wie z. B. in Fig. 5 und 11.

Die zweckmäßigste und einfachste Ausführungsform eines Härtemessers ist mit den Prismen der Fig. 1 möglich. Es wurden mehrere Modifikationen mittels dieser Prismen ausgeführt, von denen sich die in Fig. 10 dargestellte am besten bewährt hat. Der besseren Erkennbarkeit halber ist dort die vordere Hälfte des Biprismas abgeschnitten und vom Leuchtschirm auch ein Stück.

Fig. 10.



Das für 10 Wehnelt-Einheiten etwa 15 cm lang zu wählende Biprisma ist aus zwei großen Prismen zusammengesetzt, die an den zusammenstoßenden brechenden Kanten abgeschliffen und ohne notwendige Politur dieser Schliffflächen gemeinsam auf ein Stück gut ebenen photographischen Trockenplattenglases mit Kanadabalsam aufgekittet sind. Auf die oberen Prismenflächen ist eine schwarze Papiermaske (schraffiert gezeichnet) mit ebensoviel oder doppelt soviel kreisrunden oder quadratischen Ausschnitten geklebt, als der Aluminiumkeil ganze Einheiten zu messen gestattet. (Es sind nur drei Ausschnitte gezeichnet.) Die Symmetriekante des Biprismas bildet die Durchmesser bzw. Mittellinien der Ausschnitte. Neben jedem Ausschnitt ist die zugehörige ganze oder halbe Härtenummer ausgestochen oder eine käufliche Kupferschablone aufgeklebt.

Der Aluminiumkeil für die Wehnelthärtegrade 4—13 hat die Stufendicken 1,95; 2,4; 2,85; 3,35; 3,9; 4,55; 5,25; 6,0; 6,9; 7,9 mm[1]) bei 0,09 mm Dicke des (reinen!) Silberbleches (von Heraeus-Hanau). Die käuflichen Kryptoradiometer, die als die genauesten derartige Instrumente gelten können, besitzen diese Dickenmaße.

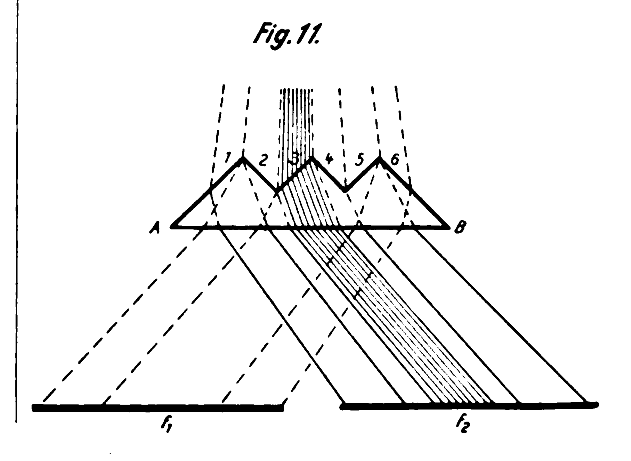
Um den durch den Aluminiumkeil bedingten Halbschatten bei schiefem Einfall der Strahlen gegen die Symmetrieebene (innere Seitenfläche des Keils) auch bei sehr schiefer Haltung des Instruments unsichtbar zu machen, muß der Leuchtschirm in etwa 5—10 mm Abstand unterhalb der Glasplatte sitzen je nach der Stärke der Brechung durch die Prismen und unmittelbar auf dem Blech und Keil aufliegen.

Die Unterteilung der an sich kontinuierlichen Skala durch die Papierausschnitte erweist sich als sehr vorteilhaft, wenn man nicht nach dem Gleichheitsprinzip allein, sondern auch nach dem Kontrastprinzip abliest, indem man diejenigen beiden Felder rechts und links vom gesuchten ins Auge faßt, auf denen soeben mit Sicherheit Halbschattenungleichheit (Kontrast) zu erkennen ist, und aus den Härtezahlen beider den Mittelwert nimmt. Für diese Art der Ablesung ist es besser, wenn der Keil aus planparallelen Stufen von obiger Dickenabstufung zusammengesetzt ist, damit die über dem *Al* liegenden Halbfelder jedes für sich gleichmäßig hell sind. Die Papierrippen zwischen den Feldern sind vorteilhaft nur etwa 2 mm breit.

Notwendig für den guten Überblick über mehrere Felder ist es, daß der Augenabstand nicht unter 25 cm beträgt. Gleichzeitig ist diese Entfernung aber auch geboten, um die Parallaxe der auf die Papiermaske akkommodierten Augen gegen den Leuchtschirm zu vermindern. Aus demselben Grunde ist es vorteilhaft, einen brechenden Winkel von nicht unter 45° bei gewöhnlichem Glase zu verwenden, damit der Leuchtschirm möglichst dicht, womöglich unmittelbar an der Glasplatte anliegen kann. Bei Verwendung der Prismengruppe (Fig. 6—9) ist die binokulare Parallachse zu vermeiden. Sie eignen sich daher nur für einäugige Betrachtung, am besten mit auf die Maske eingestellter Lupe. Auch bei den anderen Formen ist Betrachtung mit Lupe von Vorteil, z. B. für das Kryptoradiometer.

Eine besondere Ausführungsform für letzteres, die eine Kombination von Fig. 1 und 6 darstellt, ist in Fig. 11 wiedergegeben. Es sind

Fig. 11.



1) B. Walter, Ann. d. Phys. **17**, 562, 1905.

dort im ganzen 6 vielleicht 2 mm breite und 10 mm lange wirksame Prismenflächen vorhanden (numeriert), von denen Nr. 1, 3, 5 die Leuchtschirmhälfte f_2 erscheinen lassen, Nr. 2, 4, 6 die andere Hälfte f_1. Die Empfindlichkeit des Auges für diese Streifung der beobachteten Gesamtprismenfläche ist so groß, daß selbst die besten Leuchtschirme nicht gleichmäßig genug gegossen sind, um die Genauigkeit des Photometers auszunutzen[1]). Die Körnung der Schirme wird durch die notwendige Betrachtung mit einer auf die Prismenfläche eingestellten Lupe genügend beseitigt. Für rein optische Gleichheitsphotometer dürfte es aber sehr gut brauchbar sein, sowie auch sämtliche obigen, soweit sie nicht schon dafür verwendet werden.

1) Die neuen Ossal-Schirme der Heyden A.-G. in Dresden-Radebeul konnten noch nicht probiert werden.

Der Firma Reiniger, Gebbert und Schall A.-G. in Erlangen, die mir für die beschriebenen Versuche in entgegenkommendster Weise ihre Hilfsmittel zur Verfügung stellte, spreche ich auch hier meinen verbindlichsten Dank aus. Sie wird den Vertrieb eines der obigen Modelle voraussichtlich bald übernehmen.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 13. November 1916.)

BESPRECHUNGEN.

F. Auerbach, Die Physik im Kriege. Eine allgemein verständliche Darstellung der Grundlagen moderner Kriegstechnik. 8°. 3. vermehrte u. verbesserte Aufl. VIII u. 229 S., m. 126 Abbildungen im Text. Jena, Gustav Fischer. 1916. M. 3.60, geb. M. 4.50.

Das Buch erschien in erster Auflage zu Ostern 1915[1]), und nach wenig mehr als einem Jahre wurde bereits die dritte Auflage notwendig, das beste Zeichen dafür, ein wie weitgehendes Interesse ihm entgegengebracht wurde. Ein physikalisches Lehrbuch ist es nicht und soll es auch nicht sein; in erster Linie kommt es wohl dem Bedürfnis des gebildeten und nachdenkenden Laien entgegen, sich über die wissenschaftlichen Grundlagen der Kriegstechnik zu unterrichten. Aber auch für den Physiker ist die Lektüre des Buches nicht ohne Interesse und Nutzen. Wird ihm auch vieles von dem, was er hier findet, bereits bekannt sein, so wird er doch einerseits die gedrängte Form, in der ihm über das Wissenswerte eine Übersicht geboten wird, schätzen und dann vor allen Dingen dazu angeregt werden, sich über einzelne Fragen, die ihn besonders interessieren, aus einschlägigen Fachwerken eingehender zu unterrichten.

V. Pieck.

1) Besprechung s. diese Zeitschr. **16**, 266, 1915.

Preisausschreiben.

Die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Frankfurt a. M. stellt aus den Mitteln der Emil Cohnstaedt-Stiftung folgende Preisaufgabe: „Es wird allgemein angenommen, daß an der Oberfläche fester Körper eine Gashaut haftet. Die Naturwissenschaftliche Fakultät verlangt eine Experimentaluntersuchung über die Art und Dicke dieser Haut, insbesondere an Metallplatten."

Der ausgesetzte Preis beträgt eintausend Mark. Die Bewerbungsschriften sind bis zum 30. Juni 1918 bei der Dekanatskanzlei der Universität einzuliefern. Die Fakultät ist nicht verpflichtet, Arbeiten nachzuprüfen, die nicht in einem Institut der Universität Frankfurt entstanden sind. Interessenten erhalten auf Wunsch die näheren Bestimmungen von der Dekanatskanzlei zugesandt.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Emil Everling für Mechanik des Frei- und Luftballons und der Luftfahrtinstrumente, Untersuchungen an und in Luftfahrzeugen, an der Technischen Hochschule Zürich Dr. W. D. Treadwell für Physikalische Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Robert Moser für Theorie und Konstruktion elektrischer Maschinen, an der Technisch. Hochschule Zürich Dr. J. Bretano für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Straßburg Dr. Jacob Parnas zum Professor für Physiologische Chemie an der Universität Warschau, der Privatdozent an der Bergakademie in Freiberg Dr. Paul Ludewig zum a. o. Professor der Physik und Vorstand des Radiuminstituts daselbst, der a. o. Professor der Physik an der Universität Erlangen Dr. Josef Würschmidt zum Abteilungsvorsteher am Geographischen Institut und an der Zentralanstalt für Wetterkunde der Universität Konstantinopel, der Professor der Erdkunde an der Universität Konstantinopel Dr. Erich Obst zum Direktor des meteorologisch-klimatischen Dienstes in der Türkei.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor für Technische Chemie und chemische Technologie an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich Dr. M. Cérésole.

Auszeichnungen: Die Royal Society in London verlieh die Copley-Medaille Sir James Dewar, die Davy-Medaille Professor Henri Louis Le Chatelier.

Gestorben: Der ord. Professor der organischen Chemie an der Technischen Hochschule München Dr. Andreas Lipp, der Erfinder eines Schnellfeuergeschützes Sir Hiram Maxim in London, der Lehrer für Chemie an der Höheren Kriegsschule im Haag Dr. Willem Stortenbeker, der emer. ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Dresden Geheimer Rat Dr. Walther Hempel, der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität Glasgow John Ferguson, Fräulein Dr. Laura Hetzner, Privatdozentin für chemische Mineralogie und Petrologie an der Technischen Hochschule Zürich.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



